

УДК 534.2

## ВОЛНЫ В ТЯЖЕЛОМ СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ГАЗЕ: ПОДЗАДАЧИ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ И ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

© 2024 г. С. П. Кшевецкий<sup>a,b,c,\*</sup>, Ю. А. Курдяева<sup>d,\*\*</sup>, Н. М. Гаврилов<sup>c,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Балтийский федеральный университет им. И. Канта, ул. А. Невского 14, Калининград, 236041 Россия

<sup>b</sup>Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова РАН, Пыжевский пер. 3, Москва, 119017, Россия

<sup>c</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб. 7/9,  
Санкт-Петербург, 199034 Россия

<sup>d</sup>Калининградский филиал Института Земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн  
им. Н. В. Пушкова РАН, ул. Пионерская 61, Калининград, 236035 Россия

\*E-mail: spkshev@gmail.com

\*\*E-mail: yakurdyayeva@gmail.com

\*\*\*E-mail: n.gavrilov@spbu.ru

Поступила в редакцию 09.04.2024 г.

После доработки 16.07.2024 г.

Принята к публикации 29.10.2024 г.

Рассматриваются двумерные линеаризованные гидродинамические уравнения, описывающие распространение волн в стратифицированном тяжелом газе. Система гидродинамических уравнений переформулирована как одно операторное уравнение типа Шредингера. Рассматриваются волны, у которых  $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$ , где  $l_z$  и  $l_x$  – характерные вертикальный и горизонтальный масштабы, соответственно, и изучается асимптотика решений при  $\beta \rightarrow 0$ . Показано, что множество решений по зависимости от  $\beta$  образует два непересекающихся класса. Для решений из каждого из выделенных классов предложена своя, асимптотическая при  $\beta \rightarrow 0$ , приближенная система уравнений. Выделенные классы решений – это акустические и внутренние гравитационные волны. Показано, что у акустических и гравитационных волн гидродинамические переменные связаны некоторыми стационарными соотношениями, различными для каждого класса. Это позволяет поставить задачу о выделении вкладов акустических и гравитационных волн в начальном условии. Показано существование решения этой задачи о разделении волн. Приведены примеры решения задачи о разделении общей задачи на подзадачи о распространении акустических и гравитационных волн. Получены оценки разделения энергии начального возмущения по типам волн.

**Ключевые слова:** уравнения гидродинамики, длинные волны, асимптотические решения, операторное уравнение, Гильбертово пространство, акустические волны, внутренние гравитационные волны, дисперсионное соотношение

DOI: 10.31857/S0320791924060085, EDN: JTLPNU

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование гидродинамических уравнений, описывающих распространение волн в стратифицированной среде, является важным направлением как современной математики, так и геофизики. Понятие стратифицированной среды подразумевает, что коэффициенты уравнений зависят только от одной из координат, при этом коэффициенты могут варьироваться в широких пределах. Волновые возмущения всегда присутствуют в океане и атмосфере. В данной работе обсуждаются уравнения гидродинамики, описывающие атмосферные

процессы. Модельные и аналитические исследования вертикального распространения таких волн в различных средах, например как в работах [1, 2], необходимы для развития новых представлений и углубленного понимания физических процессов.

Частный случай стратификации, когда плотность  $\rho_0(z)$  атмосферного газа убывает с высотой  $z$  строго экспоненциально,  $\rho_0(z) = \rho_0(0)e^{-\frac{z}{H}}$ ,  $H = \text{const}$ , называется изотермической атмосферой. В то время как все остальные стратификации объединяют общим термином “неизотермическая

атмосфера”. Реальная атмосфера Земли существенно неизотермическая, плотность зависит от высо-

ты  $z$  по закону  $\rho_0(z) = \rho_0(0) \frac{H(0)}{H(z)} e^{-\int_0^z \frac{dz}{H(z)}}$  и функция  $H(z)$  изменяется с высотой на порядок. Стратификация плотности газа в атмосфере изменчива и зависит от широты, гелиогеофизических условий, сезона.

В случае изотермической атмосферы коэффициенты уравнений имеют простой вид, и уравнения решаются аналитически. Это позволяет получить из уравнений дисперсионное соотношение [3, 4], которое показывает, что существуют две волновые ветви решений. Частные решения линейаризованных гидродинамических уравнений, соответствующие одной ветви дисперсионного соотношения, называются акустическими волнами (АВ), для частот  $\omega_A$  волн этой ветви справедливо соотношение

$$\Omega_A \leq |\omega_A| < \infty, \quad (1)$$

где предельная граничная частота  $\Omega_A$  называется частотой акустической отсечки. Частные решения, соответствующие другой ветви дисперсионного соотношения, называются внутренними гравитационными волнами (ВГВ), для частот  $\omega_G$  волн этой ветви справедливо соотношение

$$0 < |\omega_G| \leq \Omega_B, \quad (2)$$

где  $\Omega_B$  называется частотой Вьяйсяля-Брендта. Справедливо  $\Omega_B < \Omega_A$ , т.е. между граничными частотами имеется окно. Значения  $\Omega_B$ ,  $\Omega_A$  определяются значением  $H$ , также адиабатической постоянной газа и ускорением свободного падения.

Описанные выше понятия АВ и ВГВ применяются в геофизической литературе и к волнам в неизотермической атмосфере, но на физическом уровне строгости, ибо в общем случае написать дисперсионное уравнение не удается. Обычно это делается следующим образом. В окрестности высоты  $z$  неизотермическая стратификация локально аппроксимируется изотермической, и по значению  $H(z)$  вычисляются локальные значения  $\Omega_B(z)$ ,  $\Omega_A(z)$ . Далее применяются неравенства (1), (2), в которых, однако, используются локальные значения  $\Omega_B(z)$ ,  $\Omega_A(z)$ .

В случае изотермической стратификации за полосами частот (1), (2) стоят частные решения линейаризованных гидродинамических уравнений, учитывающие физические особенности волн каждого типа. Недостаток локального применения неравенств (1), (2) в случае неизотермической стратификации атмосферы состоит в том, что одно и то же частное решение гидродинамических уравнений может попасть в класс АВ на одних высотах и в класс ВГВ на других высотах.

В [6] изучен спектр эволюционного оператора задачи о распространении волн в атмосфере

с неизотермической стратификацией, в которой функция  $H(z)$  достигает максимума на бесконечности. Показано, что спектр частот волн  $\omega$  непрерывный, вещественный. Как и в случае изотермической стратификации, спектр частот волн состоит из двух неперекрывающихся полос  $\Omega_A(\infty) \geq |\omega_1| < \infty$  и  $0 < |\omega_2| \leq \Omega_B(\infty)$ ; и  $\Omega_A(\infty) > \Omega_B(\infty)$ . Численные значения  $\Omega_A(\infty)$ ,  $\Omega_B(\infty)$  определяются значением  $H(\infty)$ , которое зависит от того, как определена функция  $H(z)$  для больших высот  $z$ , и не имеет физического смысла. Поэтому, хотя структура спектра частот волн для неизотермической стратификации аналогична структуре спектра частот для изотермической стратификации, интерпретировать две указанные полосы частот как полосы частот АВ и ВГВ вряд ли физически разумно.

В данной работе рассматриваются двумерные линейаризованные гидродинамические уравнения, описывающие распространение волн в тяжелом газе, в котором масштаб стратификации  $H(z)$  изменяется с высотой (общий случай неизотермической стратификации атмосферы). В динамике атмосферы большое значение имеют такие волны, у которых  $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$ , где  $l_z$  и  $l_x$  — характерные вертикальный и горизонтальный масштабы волн, соответственно. Важной задачей является построение асимптотики решений гидродинамических уравнений при  $\beta \rightarrow 0$ .

Будет показано, что, по зависимости решений от параметра  $\beta$ , частные решения гидродинамических уравнений делятся на два непересекающихся класса. В случае изотермической стратификации один из выделенных классов решений совпадает с АВ, которые обсуждались выше, а другой с ВГВ. Следовательно, выделенные классы решений можно отождествлять с АВ и ВГВ и в случае неизотермической стратификации.

Для АВ и ВГВ выписаны приближенные уравнения, справедливые при  $\beta^2 \ll 1$ , и показано, как по начальным данным исходной задачи вычислить начальные условия для подзадач для АВ и ВГВ.

В Разделе 2 рассмотрена задача о распространении волн в стратифицированной, неизотермической атмосфере. Система линейаризованных гидродинамических уравнений записана как одно операторное уравнение, в котором эволюционный оператор — матрично-дифференциальный, действующий во введенном гильбертовом пространстве  $h$ . В таком образом переформулированной задаче эволюционный оператор является самосопряженным и операторное уравнение является уравнением типа Шредингера. Для уравнений типа Шредингера существование решений известно. Таким образом, попутно доказано существование решения волновой задачи для случая стратификации общего вида. Решение гидродинамических уравнений можно рассматривать как кривую в  $h$ , параметризованную временем  $t$ .

В Разделе 3 производится анализ зависимости решений от параметра  $\beta$ . Строится асимптотика при  $\beta \rightarrow 0$ . Предложены две различные упрощенные системы уравнений, описывающие асимптотические при  $\beta \rightarrow 0$  решения. Доказано существование решений этих двух предложенных различных асимптотических систем уравнений и существование у общей системы уравнений решений, которые при  $\beta \rightarrow 0$  переходят в асимптотические. Таким образом, выделено два класса решений полной системы уравнений, которые характеризуются различной зависимостью от параметра  $\beta$ . В частном случае изотермической стратификации атмосферы один класс решений совпадает с внутренними гравитационными волнами, а другой с акустическими. Поэтому разумно считать что и в общем случае неизотермической стратификации выделенные два класса решений соответствуют акустическим и гравитационным волнам.

Раздел 4 посвящен расщеплению при  $\beta \rightarrow 0$  общей задачи о распространении двумерных волн в бесконечной атмосфере на подзадачи о распространении внутренних гравитационных и акустических волн. Ставится задача о выделении в начальном условии общей гидродинамической задачи вкладов, ответственных за генерацию акустических и гравитационных волн, по отдельности. Идея выделения вкладов волн различных типов основана на том, что у волны каждого типа гидродинамические переменные связаны парой стационарных соотношений, зависящих от типа волны. Доказано существование решения поставленной задачи о разделении вкладов акустических и гравитационных волн. Для некоторых типов начальных условий получены явные формулы для начальных условий для акустической и гравитационной подзадач, также выведены формулы для распределения волновой энергии начального возмущения между волнами различных типов. Показано, что в ряде случаев распределение энергии начального возмущения между волнами различных типов не зависит от формы начального возмущения.

В Разделе 5.1 обсуждается расщепление двумерной гидродинамической задачи о распространении волн малой амплитуды в тяжелом стратифицированном газе над плоской Землей на подзадачи о распространении акустической и гравитационной волн. Изучается влияние отражающей поверхности на свойства волн.

Все доказательства основных утверждений вынесены в приложения.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему линеаризованных гидродинамических уравнений для газа в поле тяжести:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 u}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 g H (\psi + \phi)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_0 w}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 g H (\psi + \phi)}{\partial z} + \rho_0 g \psi = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_0 \phi}{\partial t} + (\gamma - 1) \left( \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} \right) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 w = 0.$$

Здесь  $t$  — время;  $x$  и  $z$  — горизонтальная и вертикальная координаты, соответственно.  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  — постоянная адиабаты;  $\alpha = \gamma - 1 + \gamma \frac{\partial H}{\partial z}$ ;  $H(z) = \frac{RT_0(z)}{g\mu}$  — масштаб стратификации, называемый шкалой высот;  $g$  — ускорение свободного падения,  $T_0(z)$  — распределение температуры невозмущенной атмосферы с высотой, которое считается произвольным, но  $\alpha(z) > 0$ . Плотность газа  $\rho_0(z)$  выражается через  $H(z)$  формулой  $\rho_0(z) = \frac{\rho_0(z)H(0)}{H(z)} \exp\left(-\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right)$ ,  $\gamma = \text{const}$ . Плотность может изменяться скачком, но так, чтобы выполнялось условие статической устойчивости  $\alpha(z) > 0$ . Требование  $\alpha(z) > 0$  приводит, в частности, к тому, что плотность  $\rho_0(z)$  падает с высотой.

Функции  $\phi(x, z, t)$ ,  $\psi(x, z, t)$  выражаются через температуру  $T(x, z, t)$  и плотность  $\rho(x, z, t)$  возмущенного газа формулами

$$\begin{aligned} T(x, z, t) &= T_0(z)(1 + \phi(x, z, t)), \\ \rho(x, z, t) &= \rho_0(z)(1 + \psi(x, z, t)), \end{aligned} \quad (4)$$

$u(x, z, t)$ ,  $w(x, z, t)$  — локальные массовые скорости атмосферного газа вдоль горизонтальной оси  $x$  и вертикальной оси  $z$ , соответственно.

Пусть  $X = \begin{pmatrix} \psi \\ u \\ w \\ \phi \end{pmatrix}$ . Квадратичный функционал [8]

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{R^2} \rho_0(z) \left[ \frac{u^2 + w^2}{2} + \frac{gH}{2\gamma} (\phi + \psi)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{gH}{2\gamma\alpha} (\phi - (\gamma - 1)\psi)^2 \right] d\Omega, \quad d\Omega = dx dz, \end{aligned} \quad (5)$$

является интегралом волновой энергии для уравнений (3). Конструкция  $\sqrt{2E(X)}$  удовлетворяет аксиомам нормы:  $\|X\| = \sqrt{2E(X)}$ . Согласно теореме о поляризации [17], по этой норме можно построить скалярное произведение

$$\begin{aligned} \{X_1, X_2\} &= \int_{R^2} \rho_0(z) \left[ u_1^* u_2 + w_1^* w_2 + \frac{gH}{\gamma} (\phi_1 + \psi_1)^* \times \right. \\ &\quad \left. \times (\phi_2 + \psi_2) + \frac{gH}{\alpha\gamma} (\phi_1 - (\gamma - 1)\psi_1)^* (\phi_2 - (\gamma - 1)\psi_2) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Дополним уравнения (3) начальными условиями:

$$\begin{aligned} X(x, z, t = 0) &= X_0(x, z), \\ \|X_0\| &= \sqrt{2E(X_0)} < \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия для задачи о распространении волн в безграничной атмосфере не требуются. Будем искать решение задачи (3), (7) как параметризованный временем  $t$  элемент гильбертова пространства  $h$ , скалярное произведение в котором определяется формулой (6). Условие принадлежности решения гильбертову пространству  $h$  играет роль граничных условий; оно эквивалентно требованию конечности волновой энергии.

Существование решения сформулированной задачи (3), (7) показано в Приложении А. В этом же приложении дан краткий обзор математического исследования задачи о распространении волн, описываемых системой уравнений (3).

### 3. ДЛИННЫЕ ВДОЛЬ ГОРИЗОНТАЛИ ВОЛНЫ

В динамике атмосферы большую роль играют длинные вдоль горизонтали волны, для которых  $\beta = \frac{l_z}{l_x} = \beta \ll 1$ , где  $l_x$  и  $l_z$  характерные горизонтальные и вертикальные масштабы волны соответственно. Вследствие стратификации среды вертикальный масштаб  $l_z$  волн не может превосходить масштаб стратификации  $H$ ,  $l_z \lesssim H$ , и в частном случае, когда  $l_z \sim H$ , условие выглядит так:  $\frac{H}{l_x} \ll 1$ .

Частный случай стратификации плотности газа, когда плотность убывает с высотой  $z$  строго экспоненциально,  $\rho_0(z) = \rho_0(0)e^{-\frac{z}{H}}$ ,  $H = \text{const}$ , называется изотермической атмосферой. Система уравнений (3) в случае изотермической атмосферы решается аналитически, и хорошо изучена [8, 5, 3, 4]. Общее решение уравнений (3) в этом случае является суммой внутренних гравитационных волн и акустических волн.

Удобно записать систему уравнений (3) в безразмерных переменных. Поскольку параметры изучаемых волн могут существенно различаться, используем различные безразмерные переменные. Для волн одного типа будут использованы безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} u_G &= \sqrt{gH_0} u'_G, \quad w_G = \beta \sqrt{gH_0} w'_G, \\ \psi_G &= \psi'_G, \quad \phi_G = \phi'_G, \\ t' &= \beta \sqrt{\frac{g}{H_0}} t, \quad x' = \frac{x}{H_0} \beta, \quad z' = \frac{z}{H_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $H(z) = H_0 \eta(z)$ ,  $H_0 = \max\{H(z)\}$  и штрихи помечают вводимые новые безразмерные переменные. Для волн другого типа новые, безразмерные переменные вводятся иначе

$$\begin{aligned} u_A &= \beta \sqrt{gH_0} u''_A, \quad w_A = \sqrt{gH_0} w''_A, \\ \psi_A &= \psi''_A, \quad \phi_A = \phi''_A, \\ t'' &= \sqrt{\frac{g}{H_0}} t, \quad x'' = \frac{x}{H_0} \beta, \quad z'' = \frac{z}{H_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь новые вводимые безразмерные переменные помечены двумя штрихами.

Понятия акустической и внутренней гравитационной волн для неизотермической стратификации строго не определены; эти термины используются в физической литературе применительно к неизотермической стратификации на физическом уровне строгости. Мы будем использовать безразмерные переменные (8), (9) при анализе системы уравнений (3).

Для введенных безразмерных функций (8), (9) можно записать две эквивалентные системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 \psi'_G}{\partial t'} + \frac{\partial \rho_0 u'_G}{\partial x'} + \frac{\partial \rho_0 w'_G}{\partial z'} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 u'_G}{\partial t'} + \frac{\partial (\rho_0 \eta (\psi'_G + \phi'_G))}{\partial x'} &= 0, \\ \beta^2 \frac{\partial \rho_0 w'_G}{\partial t'} + \frac{\partial (\rho_0 \eta (\psi'_G + \phi'_G))}{\partial z'} + \rho_0 \psi'_G &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 \phi'_G}{\partial t'} + (\gamma - 1) \left[ \frac{\partial \rho_0 u'_G}{\partial x'} + \frac{\partial \rho_0 w'_G}{\partial z'} \right] + \frac{\alpha}{\eta} \rho_0 w'_G &= 0; \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 \psi''_A}{\partial t''} + \beta^2 \frac{\partial \rho_0 u''_A}{\partial x''} + \frac{\partial \rho_0 w''_A}{\partial z''} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 u''_A}{\partial t''} + \frac{\partial \rho_0 \eta (\psi''_A + \phi''_A)}{\partial x''} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 w''_A}{\partial t''} + \frac{\partial \rho_0 \eta (\psi''_A + \phi''_A)}{\partial z''} + \rho_0 \psi''_A &= 0, \\ \frac{\partial \rho_0 \phi''_A}{\partial t''} + (\gamma - 1) \left[ \beta^2 \frac{\partial \rho_0 u''_A}{\partial x''} + \frac{\partial \rho_0 w''_A}{\partial z''} \right] + \frac{\alpha}{\eta} \rho_0 w''_A &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

различающиеся только используемыми переменными.

Уравнения (10), (11) содержат члены с малыми параметрами. После пренебрежения слагаемыми пропорциональными  $\beta^2$  в (10), (11), приходим к упрощенным уравнениям динамики волн. Будем называть упрощенные уравнения усеченными.

#### 3.1. Усеченные уравнения для волн первого типа

Приближенные уравнения получим из (10), отбрасывая слагаемые пропорциональные  $\beta^2$ . В третьем уравнении системы (10) отбросим член

вертикального ускорения  $\beta^2 \frac{\partial \rho_0 w'_G}{\partial t'}$ . Дифференцируя по  $t'$  полученное приближенное уравнение и исключая  $\phi'_G$  и  $\psi'_G$  через первое и четвертое уравнения системы (10), можно получить еще одно упрощенное уравнение.

Приближение, в котором членом вертикального ускорения  $\beta^2 \frac{\partial \rho_0 w'_G}{\partial t'}$  в третьем уравнении системы (10) пренебрегают, называют в геофизической литературе квазистатическим [15].

Полученных два приближенных уравнения, второе и первое (или четвертое) уравнения системы (10) образуют вместе замкнутую систему уравнений. Используя размерные переменные, упрощенную замкнутую систему уравнений, следующую из (10), можно записать в удобном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}_G}{\partial t} + \gamma g H \left[ \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_G}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_G}{\partial z} \right] + \\ + \alpha g \rho_0 \bar{w}_G = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \bar{u}_G}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}_G}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{P}_G}{\partial z} + \rho_0 g \bar{\psi}_G = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma H \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_G}{\partial x} + \gamma H \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_G}{\partial z} + \alpha \rho_0 \bar{w}_G \right] + \\ + \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_G}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_G}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $\bar{P}_G = \rho_0 g H (\bar{\psi}_G + \bar{\phi}_G) = P_0 (\bar{\psi}_G + \bar{\phi}_G)$  — волновая добавка к фоновому давлению  $P_0(z) = \rho_0(z) g H(z)$ . Черточки над символами, обозначающими физические величины, помещены чтобы напоминать о различии между точными решениями уравнений (3) и приближенными решениями, получаемыми из (12).

Обозначим  $\bar{\lambda}_G(x, z, t) = \begin{pmatrix} \bar{P}_G(x, z, t) \\ \bar{u}_G(x, z, t) \end{pmatrix}$ . Интеграл энергии для (12) имеет вид

$$\begin{aligned} E_G(\lambda_G) = \frac{1}{2} \int_{R^2} \rho_0(z) \left[ \bar{u}_G^2 + \frac{\bar{P}_G^2}{\gamma g H \rho_0(z)} + \right. \\ \left. + \frac{(\bar{P}_G + \gamma H(z) \partial \bar{P}_G / \partial z)^2}{\gamma \alpha \rho_0(z) g H} \right] d\Omega < \infty. \end{aligned} \quad (13)$$

Необходимо дополнить уравнения (12) начальными условиями, которые должны соответствовать протяженному вдоль оси  $Ox$  начальному возмущению. Пусть функции  $\bar{P}_0(x, z)$ ,  $\bar{u}_0(x, z)$  описывают некоторое начальное возмущение, имеющее конечную энергию:  $E_G(\lambda_{G,0}) < \infty$ , где  $\lambda_{G,0} = \begin{pmatrix} \bar{P}_0(x, z) \\ \bar{u}_0(x, z) \end{pmatrix}$ .

При этом, пусть функции  $\bar{P}_0(x, z)$ ,  $\bar{u}_0(x, z)$  таковы, что их типичные пространственные масштабы  $l_{0x}, l_{0z}$  (где  $l_{0z} \lesssim H$ ) вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  совпадают:  $\frac{l_{0z}}{l_{0x}} = O(1)$ . Тогда начальные условия, соответствующие требованию  $\beta \ll 1$ , можно выразить через функции  $\bar{P}_0(x, z)$ ,  $\bar{u}_0(x, z)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{P}_G(x, z, t = 0) &= \sqrt{\beta} \bar{P}_0(\beta x, z), \\ \bar{u}_G(x, z, t = 0) &= \sqrt{\beta} \bar{u}_0(\beta x, z). \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) коэффициент  $\beta$ , предшествующий  $x$ , производит растяжение функций  $\bar{P}_0(x, z)$ ,  $\bar{u}_0(x, z)$  вдоль оси  $x$ . Таким образом, для характерных масштабов функций  $\bar{P}_G(x, z, t = 0)$ ,  $\bar{u}_G(x, z, t = 0)$  вдоль  $x$  и  $z$  осей справедлива оценка  $\frac{l_z}{l_x} = \frac{l_{0z}}{\beta^{-1} l_{0x}} = \beta O(1)$ .

Множитель  $\sqrt{\beta}$  введен в (14) для удобства, чтобы энергия  $E$  начального возмущения не зависела от  $\beta$ . Вследствие линейности уравнений, этот множитель не влияет на результат.

Дополним уравнения (12) начальными условиями (14), требованием конечности интеграла волновой энергии и дополнительными условиями

$$\int_{R^2} \rho_0 \bar{w}_G^2 d\Omega < \infty, \quad \int_{R^2} \rho_0 \left( \frac{\partial \bar{w}_G}{\partial z} \right)^2 d\Omega < \infty. \quad (15)$$

**Теорема 1.** Искомое решение задачи (12),

$$(14), (15) \text{ обозначим } \bar{X}_G(x, z, t, \beta) = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_G \\ \bar{u}_G \\ \bar{w}_G \\ \bar{\phi}_G \end{pmatrix}. \text{ Пусть}$$

$X_G(x, z, t, \beta)$  — решение уравнений (3) для начальных условий  $X_G(x, z, t = 0, \beta) = \bar{X}_G(x, z, t = 0, \beta)$ .

Пусть начальные условия (14) квазистатической задачи (12), (15) удовлетворяют условию  $E_G(\bar{\lambda}_G(x, z, 0)) < \infty$  и соотношениям

$$\begin{aligned} E_G \left( \frac{\partial \bar{\lambda}_G(x, z, 0)}{\partial x} \right) < \infty, \\ E_G \left( \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, 0)}{\partial x^2} \right) < \infty. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда решения обеих задач (полной и усеченной) существуют, и для любого  $t \leq t_0 < \infty$  асимптотически при  $\beta \rightarrow 0$  совпадают, т. е.

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \left\| \bar{X}_G(x, z, t, \beta) - X_G(x, z, t, 0) \right\| = 0. \quad (17)$$

Первое из условий (16) Теоремы 1 важно для существования решения усеченных уравнений. Второе важно для существования предельного

перехода от решений полной задачи к решениям усеченных уравнений.

Теорема 1 показывает, что система уравнений (3) обладает классом частных решений, удовлетворяющих свойству (17), и этот признак можно использовать для определения внутренних гравитационных волн как в случае изотермической, так и неизотермической стратификации атмосферы.

Внутренние гравитационные волны с  $\beta = \frac{H}{l_x} \ll 1$  называют длинными.

Более точные усеченные уравнения для линейных длинных внутренних гравитационных волн можно формально вывести с любой точностью с помощью итерационной процедуры по параметру  $\beta$ . Теорема 1 дает условия применимости квазистатического приближения при моделировании распространения длинных линейных внутренних гравитационных волн в атмосфере.

### 3.2. Усеченные уравнения для волн второго типа

Рассмотрим систему уравнений (11). Опустим в (11) слагаемые, пропорциональные  $\beta^2$ .

В отличие от ранее рассмотренного случая гравитационных волн, полученная таким образом упрощенная система уравнений, состоящая из второго и третьего уравнений системы (11) и из упрощенных первого и четвертого уравнений системы (11), является системой четвертого порядка по времени. Это означает, что эта система не только описывает интересующие нас волны второго типа, но и имеет какие-то другие решения, не представляющие интереса и которые нужно исключить.

Исключим  $\rho_0 w_A''$  из упрощенных первого и четвертого уравнений системы (11) и проинтегрируем полученное уравнение по  $t''$  и придем к формуле

$$\frac{\partial}{\partial z''} \left[ \rho_0 \phi_A'' \frac{\eta}{\alpha} - (\gamma - 1) \frac{\eta}{\alpha} \rho_0 \phi_A'' \right] - \rho_0 \psi_A'' = F_1(x'', z''). \quad (18)$$

Здесь  $F_1(x'', z'')$  — некоторая функция, возникшая при интегрировании уравнения. Функцию  $F_1(x'', z'')$  можно определить исходя из следующих соображений. Очевидно, волновые уравнения должны иметь нулевое решение, ибо можно рассматривать волну с нулевой амплитудой. Следовательно, можно положить  $F_1(x'', z'') \equiv 0$ .

Из формулы (18) и из третьего уравнения системы (11) следует другая формула, которая связывает динамические переменные:

$$\frac{\partial}{\partial z''} \left[ \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 u_A''}{\partial z''} - \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 w_A''}{\partial x''} \right] + \frac{\partial}{\partial z''} \left( \frac{\alpha + 1}{\alpha} \rho_0 u_A'' \right) - \frac{\partial \rho_0 w_A''}{\partial x''} = F_2(x'', z''). \quad (19)$$

По тем же причинам, что описаны выше, положим  $F_2(x'', z'') = 0$ .

В размерных переменных замкнутая система уравнений для волн второго типа выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial t} + \rho_0 \bar{w}_A &= 0, \quad \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} - \rho_0 \bar{\psi}_A = 0, \quad (20) \\ \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ g \alpha \left( \bar{f}_A + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} \right) + g \bar{f}_A \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 \bar{u}_A}{\partial z} - \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_A}{\partial x} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\alpha + 1}{\alpha} \rho_0 \bar{u}_A \right) - \frac{\partial \rho_0 \bar{w}_A}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\bar{f}_A = \frac{H}{\alpha} \rho_0 [\bar{\phi}_A - (\gamma - 1) \bar{\psi}_A]$ . Черточки над буквами помещены для того, чтобы не путать точные решения уравнений (3) с приближенными, получаемыми из (20).

Сформулируем начальные условия для (20).

Обозначим  $\bar{\lambda}_A(x, z, t) = \begin{pmatrix} \bar{f}_A(x, z, t) \\ \bar{w}_A(x, z, t) \end{pmatrix}$ . Функционал энергии для (20) имеет вид

$$\begin{aligned} E_A(\bar{\lambda}_A) &= \frac{1}{2} \int_{R^2} \left[ \rho_0 \bar{w}_A^2 + \frac{\bar{f}_A^2}{\rho_0 \gamma H} \alpha g + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g \alpha^2}{\rho_0 \gamma H} \left( \bar{f}_A + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} \right)^2 \right] d\Omega < \infty. \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть функции  $\bar{f}_0(x, z)$ ,  $\bar{w}_0(x, z)$  описывают некоторое начальное возмущение с конечной энергией:  $E(\bar{\lambda}_{A,0}) < \infty$ , где  $\bar{\lambda}_{A,0} = \begin{pmatrix} \bar{f}_0(x, z) \\ \bar{w}_0(x, z) \end{pmatrix}$ , и пусть

$\frac{l_{0z}}{l_{0x}} = O(1)$ , где  $l_{0x}$ ,  $l_{0z}$  — характерные пространственные масштабы вдоль осей  $x$ ,  $z$  для функций  $\bar{f}_0(x, z)$ ,  $\bar{w}_0(x, z)$ , соответственно. Начальные условия для (20), соответствующие требованию  $\beta \ll 1$ , можно записать через функции  $f_0(x, z)$ ,  $w(x, z)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{f}_A(x, z, t = 0) &= \sqrt{\beta} \bar{f}_0(\beta x, z), \\ \bar{w}_A(x, z, t = 0) &= \sqrt{\beta} \bar{w}_0(\beta x, z). \end{aligned} \quad (22)$$

Для единственности решения четвертого уравнения системы (20) добавим требования:

$$\int_{R^2} \rho_0 \bar{u}_A^2 d\Omega < \infty, \quad \int_{R^2} \left( \frac{\partial}{\partial z} \rho_0 \bar{u}_A \right)^2 \frac{1}{\rho_0} d\Omega < \infty. \quad (23)$$

**Теорема 2.** Решение задачи (20), (23) для началь-

ных условий (22) обозначим  $\bar{X}_A(x, z, t, \beta) = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_A \\ \bar{u}_A \\ \bar{w}_A \\ \bar{\phi}_A \end{pmatrix}$ , а

$X_A(x, z, t, \beta)$  пусть решение уравнений (3) для начальных условий  $X_A(x, z, t = 0, \beta) = \bar{X}_A(x, z, t = 0, \beta)$ .

Пусть начальные условия (22) удовлетворяют условию  $E_A(\bar{\lambda}_A(x, z, 0)) < \infty$ , где  $\bar{\lambda}_A(x, z, 0) = \begin{pmatrix} \bar{f}_A(x, z, 0) \\ \bar{w}_A(x, z, 0) \end{pmatrix}$ , и соотношениям

$$E_A\left(\frac{\partial \bar{\lambda}_A(x, z, 0)}{\partial x}\right) < \infty, \quad E_A\left(\frac{\partial^2 \bar{\lambda}_A(x, z, 0)}{\partial x^2}\right) < \infty. \quad (24)$$

Тогда решения обеих, усеченной и общей задач, существуют, и на конечных временах асимптотически совпадают, т.е.

$$\|\bar{X}_A(x, z, t, \beta) - X_A(x, z, t, \beta)\| \rightarrow 0 \quad (25)$$

при  $\beta \rightarrow 0$ ,  $0 \leq t \leq t_0 < \infty$ .

Первое из ограничений Теоремы 2 накладывается для существования и единственности решения усеченной задачи. Второе условие важно для существования предельного перехода от решения полной задачи к решению усеченной.

Уравнения (20) описывают квазивертикальное распространение волн и, возможно, колебания волн в атмосферном резонаторе, если таковой существует. Мы говорим о квазивертикальном распространении волн потому, что  $x$  — координата содержится в эволюционных уравнениях только как параметр.

В частном случае изотермической атмосферы, когда  $\rho_0(z) = \rho_0(0)e^{-\frac{z}{H}}$ ,  $H = \text{const}$ , система уравнений (3) решается аналитически, и в такой модели акустические волны выделяют по ветви дисперсионного соотношения для этих волн [3, 4]. Теорема 2 показывает, что система уравнений (3) обладает классом частных решений, удовлетворяющих свойству (25), и этот признак можно положить в основу определения акустических волн в неизо-термической атмосфере.

Подобные уравнениям (20) усеченные уравнения для длинных акустических волн формально можно вывести с любой желаемой точностью с помощью итерационной процедуры по параметру  $\beta$ . Уравнения последующих приближений учитывают горизонтальное распространение акустических волн.

#### 4. РАСЩЕПЛЕНИЕ НА ПОДЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ И АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН

В случае изотермической стратификации волновые решения системы уравнений (3)

классифицированы. Они являются либо внутренними гравитационными, либо акустическими волнами. Волны этих двух типов различают по ветвям дисперсионного соотношения, которым волны соответствуют [3, 4].

Реальная атмосфера неизо-термическая, и коэффициенты уравнений (3) зависят от координаты  $z$  и могут варьироваться в широких пределах. Анализ показал, что у системы уравнений (3) существуют решения двух типов, которые различаются по функциональной зависимости от горизонтального масштаба возмущения, и у волны каждого типа динамические переменные связаны парой характерных только для волн данного типа стационарных соотношений.

Эти стационарные соотношения, связывающие гидродинамические переменные у волн каждого типа, вычислены асимптотически при  $\beta \rightarrow 0$ . В динамике атмосферы большую роль играют волны, у которых  $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$ . Поэтому выведенные стационарные соотношения конструктивны.

Мы получили, что частные решения системы уравнений (3), которые при  $\beta \rightarrow 0$  асимптотически удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0 g \Psi = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma H \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \gamma H \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} + \alpha \rho_0 w \right] + \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0,$$

можно ассоциировать с внутренними гравитационными волнами. Частные решения системы уравнений (3), которые при  $\beta \rightarrow 0$  асимптотически удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \rho_0 \Psi = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 u}{\partial z} - \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \rho_0 w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\alpha + 1}{\alpha} \rho_0 u \right) - \frac{\partial \rho_0 w}{\partial x} = 0,$$

можно ассоциировать с акустическими волнами.

Соотношения (26), (27) не содержат время  $t$  явно. Первое из соотношений (26) совпадает с квазистатическим приближением, широко используемым при моделировании крупномасштабных и среднемасштабных атмосферных и океанических процессов [7, 9, 10, 11]. Второе уравнение в (26) — следствие первого. Оно выводится из первого с помощью уравнений для плотности и температуры. Это уравнение часто называют диагностическим [11].

Уравнения (27) выведены в [12]. Ниже покажем, что в случае бесконечной атмосферы множество решений уравнений (27) дает ортогональное дополнение к множеству решений уравнений (26) до полного функционального пространства. Следовательно, формулы (27) важны.

Формулы (27), (26) выведены для волн с  $\beta^2 = \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \ll 1$ . Однако применимость этих формул шире. Рассмотрим короткие волны, переход к пределу которых соответствует  $\frac{l_z}{H}, \frac{l_x}{H} \rightarrow 0$ . Из (27) в этом пределе получаются классические для акустики формулы [14]

$$P_A = c_s^2 \rho_0 \Psi_A, \quad \frac{\partial u_A}{\partial z} - \frac{\partial w_A}{\partial x} = 0. \quad (28)$$

Здесь  $P_A(x, z, t) = P_0(z)(\Psi_A(x, z, t) + \Phi_A(x, z, t))$  — волновая добавка к фоновому давлению;  $\rho_0 \Psi_A$  — массовая плотность возмущения;  $c_s$  — скорость звука. Таким образом, формулы (27) можно рассматривать как уточнение формул классической акустики. Аналогичное замечание касается внутренних

гравитационных волн: формулы (26) выведены для волн с  $\beta^2 \ll 1$ , но применимы и к коротким волнам.

Соотношения (26), (27) можно использовать для выделения в начальных условиях вкладов, ответственных за возникновение акустических и гравитационных волн, по отдельности. Рассмотрим

такие 4-столбцы  $X_G(x, z) = \begin{pmatrix} \Psi_G(x, z) \\ u_G(x, z) \\ w_G(x, z) \\ \Phi_G(x, z) \end{pmatrix} \in h$ , ком-

поненты  $\Psi_G(x, z), u_G(x, z), w_G(x, z), \Phi_G(x, z)$  которых удовлетворяют соотношениям (26). Пусть  $h_G$  обозначает подмножество гильбертова пространства  $h$ , состоящее из таких столбцов  $X_G \in h$ . Пространство  $h$  было введено ранее. Каждый элемент  $X_G \in h_G$  можно записать следующим образом:

$$X_G(x, z) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial P_G(x, z)}{\partial z} \frac{1}{\rho_0 g H} \\ u_G(x, z) \\ -\int_{-\infty}^z \frac{\partial u_G(x, \xi)}{\partial x} d\xi - \int_{-\infty}^z \frac{1}{\gamma H(\xi) \rho_0(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} \rho_0(\eta) \frac{\partial u_G(x, \eta)}{\partial x} d\eta d\xi \\ \left( P_G(x, z) - \frac{\partial P_G(x, z)}{\partial z} \right) \frac{1}{\rho_0 g H} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

В формулах (29) функции  $\Psi_G, \Phi_G, w_G$  выражены через  $P_G, u_G$  с использованием соотношений (26).

Будем искать  $(h_G)_\perp \subset h$ . Элементы  $X_{G\perp} \in (h_G)_\perp \subset h$  удовлетворяют условию ортогональности

$$\{X_G, X_{G\perp}\} = 0 \quad (30)$$

для каждого  $X_G \in h_G$ . Скалярное произведение  $\{\cdot, \cdot\}$  в (30) понимается в смысле (6).

Если подставить (29) в (30) и проинтегрировать по частям, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{R^2} \frac{P_G}{\rho_0} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \Phi_{G\perp} \frac{H}{\alpha} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (\gamma - 1) \frac{H}{\alpha} \rho_0 \Psi_{G\perp} \right) - \rho_0 \Psi_{G\perp} \right] d\Omega + \\ & + \int_{R^2} \rho_0 u_G \left[ u_{G\perp} - \frac{1}{\rho_0(z)} \int_{-\infty}^z \rho_0(\xi) \frac{\partial}{\partial x} w_{G\perp}(x, \xi) d\xi + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^z \frac{1}{\gamma H(\xi) \rho_0(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} \rho_0(\eta) \frac{\partial}{\partial x} w_{G\perp}(x, \eta) d\eta d\xi \right] d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Первая часть формулы (31) получается просто. Вторая часть выводится сначала для функций  $X_G \in C_0^\infty$ . Затем, используя непрерывность скалярного произведения и то, что  $C_0^\infty$  всюду плотно в  $h$ , получаем остальную часть формулы (31). Вследствие произвольности функций  $P_G(x, z), u_G(x, z)$  из (31) следует:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} f_{G\perp} - \rho_0 \Psi_{G\perp} = 0, \\ & \rho_0 u_{G\perp} - \int_{-\infty}^z \rho_0(\xi) \frac{\partial}{\partial x} (w_{G\perp}(x, \xi)) d\xi + \\ & + \rho_0(z) \int_{-\infty}^z \frac{1}{\gamma H(\xi) \rho_0(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} \rho_0(\eta) \frac{\partial}{\partial x} (w_{G\perp}(x, \eta)) d\eta d\xi = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $f_{G\perp} \equiv \frac{\rho_0 H}{\alpha} (\Phi_{G\perp} - (\gamma - 1) \Psi_{G\perp})$ . Первая формула в (32) совпадает по форме с первым уравнением в (27). Вторая формула после двойного дифференцирования дает некоторое выражение, аналогичное второму уравнению в (27). Таким образом,

$$(h_G)_\perp = h_A, \quad h_A \cup h_G = h, \quad (33)$$



где  $h_A$  — множество столбцов  $X_A(x, z, t) \in h$ . Компоненты столбцов  $X_A$  удовлетворяют соотношениям (27).

Вследствие (33) каждое начальное условие  $X(x, z, t = 0)$  гидродинамической задачи можно однозначно представить в виде суммы:

$$X(x, z, t = 0) = X_G(x, z, t = 0) + X_A(x, z, t = 0). \quad (34)$$

Любой момент времени может быть выбран в качестве начального; поэтому  $X_G(x, z, t) \in h_G$ ,  $X_A(x, z, t) \in h_A$  и эти волны можно рассматривать как параметризованные временем  $t$  кривые в  $h_A$ ,  $h_G$ , и  $\{X_A(x, z, t), X_G(x, z, t)\} = 0$ .

Свойства (33) доказывают полноту предложенного раздельного описания внутренних гравитационных и акустических волн, т.е. никакие иные решения не существуют ни при какой стратификации.

Чтобы вычислить начальные условия для акустической и гравитационной подзадач, составим замкнутую систему уравнений, состоящую из (26), (27) и естественного условия (34).

На основании (33), решение системы уравнений (26), (27), (34) существует и единственно. Здесь в качестве неизвестных функций подразумеваются компоненты вектор-функций  $X_A(x, z, t = 0)$ ,  $X_G(x, z, t = 0)$ .

На основе полученных результатов построим следующую теорему:

**Теорема 3.** Пусть начальные условия

$$X(x, z, t = 0) = \sqrt{\beta} X_0(\beta x, z) \quad (35)$$

для системы (3) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} X_0(x, z) \in h, \quad \frac{\partial}{\partial x} X_0(x, z) \in h, \\ \frac{\partial}{\partial z} X_0(x, z) \in h, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} X_0(x, z) \in h. \end{aligned} \quad (36)$$

Тогда при  $t \leq t_0 < \infty$  решение  $X(x, z, t, \beta)$  задачи (3) можно асимптотически представить в виде суммы

$$X(x, z, t, \beta) \rightarrow \bar{X}_A(x, z, t, \beta) + \bar{X}_G(x, z, t, \beta) \quad (37)$$

при  $\beta \rightarrow 0$

решений усеченных уравнений (12), (20). Решения всех выписанных задач существуют. Начальные условия для (12), (20) могут быть получены решением замкнутой системы уравнений (26), (27), (34).

Мы здесь не касаемся методов решения системы уравнений (26), (27), (34).

#### 4.1. Распределение энергии начального возмущения между волнами различных типов

Пусть  $E$  — энергия начального возмущения, и  $E_A$ ,  $E_G$  — энергии акустической и гравитационной

волн. Из физических соображений ясно, что  $E = E_A + E_G$ . Формулы (33) позволяют доказать это соотношение для произвольной стратификации; доказательство очевидное и здесь не приводится.

Соотношения (26), (27) можно использовать для получения количественной оценки энергий  $E_A$ ,  $E_G$ . Для иллюстрации рассмотрим случай

$$\begin{aligned} u(x, z, t = 0) = w(x, z, t = 0) = \\ = \psi(x, z, t = 0) \equiv 0, \\ \phi(x, z, 0) = \phi_0(x, z). \end{aligned} \quad (38)$$

Рассмотрим простой случай, когда атмосфера изотермическая,  $H = \text{const}$ . Решение уравнений (26), (27), (34) дает начальные условия для акустических и гравитационных волн:

$$\begin{aligned} u_A(x, z, 0) = u_G(x, z, 0) = \\ = w_A(x, z, 0) = w_G(x, z, 0) = 0, \\ \phi_A(x, z, 0) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \phi_0(x, z), \\ \phi_G(x, z, 0) = \frac{1}{\gamma} \phi_0(x, z), \\ \psi_A(x, z, 0) = -\psi_G(x, z, 0) = \\ = \left( \phi_0(x, z) - \int_{-\infty}^z \phi_0(x, z) dz \frac{1}{H} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Для энергий  $E_A$ ,  $E_G$  получаем формулы:

$$E_{A,G} = gH \int_{R^2} \rho_0(z) \left( \frac{\phi_{A,G}^2}{\gamma - 1} + \psi_{A,G}^2 \right) d\Omega. \quad (40)$$

Нет необходимости вычислять интегралы в (40), поскольку можно воспользоваться дополнительной формулой

$$E = E_A + E_G = gH \int_{R^2} \rho_0(z) \phi_0^2(x, z) d\Omega. \quad (41)$$

В результате совместного рассмотрения формул (39), (40), (41) получаем:

$$E_A = \frac{\gamma - 1}{\gamma} E, \quad E_G = \frac{E}{\gamma}, \quad \frac{E_A}{E_G} = \gamma - 1. \quad (42)$$

Такие формулы применимы и к трехмерному случаю.

В [13] были рассчитаны энергии внутренних гравитационных и акустических волн, возникающих в результате нагрева среды падающим метеором. Зависимость нагрева среды от времени задавалась  $\delta$ -функцией. Задача с таким источником может быть переформулирована в задачу Коши с начальным возмущением поля температуры. Можно

сравнить формулу (42) и формулу из работы [13]. Сравнение формул показывает, что они совпадают. В [13] зависимость нагрева от координат задавалась функцией Гаусса, и при этом предположение  $l_z \ll l_x$  не использовалось. При выводе (42) функциональная зависимость начального возмущения от координат не конкретизировалась, но использовалось предположение  $l_z \ll l_x$ . Поскольку результаты совпали, то можно сделать предположение, что отношение  $\frac{E_A}{E_G}$  не зависит от формы начального возмущения температуры и определяется только газовой постоянной  $\gamma$ .

В случае, когда  $\psi(x, z, 0) \neq 0$ , но все другие компоненты начального условия равны нулю, энергии  $E_A$ ,  $E_G$  вычисляются аналогично. Отношение  $\frac{E_A}{E_G}$  также не зависит от формы начального возмущения:  $\frac{E_A}{E_G} = 1/(\gamma - 1)$ .

Случаи, когда начальные возмущения заданы для функций  $u$ ,  $w$ , более трудны для анализа. Отношение  $\frac{E_A}{E_G}$  в этом случае зависит от формы начального возмущения. Используя теорию возмущений с малым параметром  $\beta$ , можно показать, что  $\frac{E_A}{E_G} = O(\beta^{-2})$  при

$$\begin{aligned} u(x, z, 0) &= \phi(x, z, 0) = \\ &= \psi(x, z, 0) \equiv 0, \quad w(x, z, 0) \neq 0, \end{aligned} \quad (43)$$

и  $\frac{E_A}{E_G} = O(\beta^2)$  при

$$\begin{aligned} w(x, z, 0) &= \phi(x, z, 0) = \\ &= \psi(x, z, 0) \equiv 0 \quad u(x, z, 0) \neq 0. \end{aligned} \quad (44)$$

#### 4.2. Начальные условия для акустических и внутренних гравитационных волн в случае начального температурного возмущения

Известно, что горизонтальная компонента групповой скорости внутренних гравитационных волн больше вертикальной [8, 15], для большинства наблюдаемых в атмосфере гравитационных волн она значительно больше. Поэтому атмосферные внутренние гравитационные волны распространяются почти горизонтально. Существует представление о том, что, если источник волн находится в нижней атмосфере, на высотах до 15 км, то гравитационные волны достигают высот 80–500 км только спустя большое время. Ниже будет показано, что в некоторых случаях внутренние гравитационные и акустические волны могут возникать практически во всей толще атмосферы выше начального возмущения мгновенно.

Предположим, задано начальное температурное возмущение (38). На Рис. 1 для примера

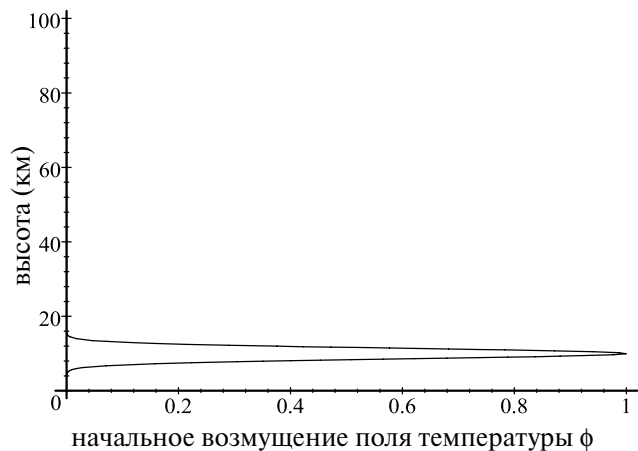


Рис. 1. Вертикальный профиль начального температурного возмущения  $\phi(x, z, 0)$ .

изображена зависимость начального возмущения поля температуры от высоты для случая, когда тепловой источник задан гауссовой функцией с максимумом на высоте 10 км, и имеет полуширину 4 км.

Формулы (39) дают начальные условия для акустической и гравитационной волн. Амплитуда начального возмущения температуры для акустической волны будет равна  $\frac{1}{3}$  от амплитуды начального возмущения, а амплитуда начального возмущения температуры для гравитационной волны будет равна  $\frac{2}{3}$  от амплитуды начального возмущения. У внутренней гравитационной и акустической волн начальные возмущения плотности отличны от нуля, несмотря на то, что в начальном условии (38) начальное возмущение плотности газа отсутствует (рис. 2, рис. 3).

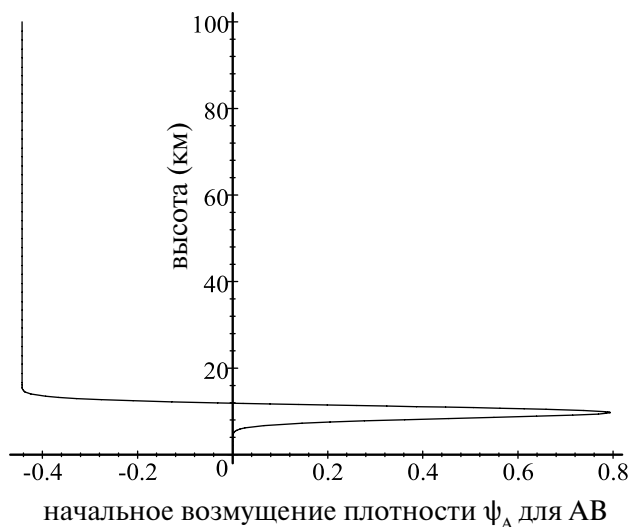


Рис. 2. Вертикальный профиль возмущения плотности  $\psi_A(x = 0, z, t = 0)$ .

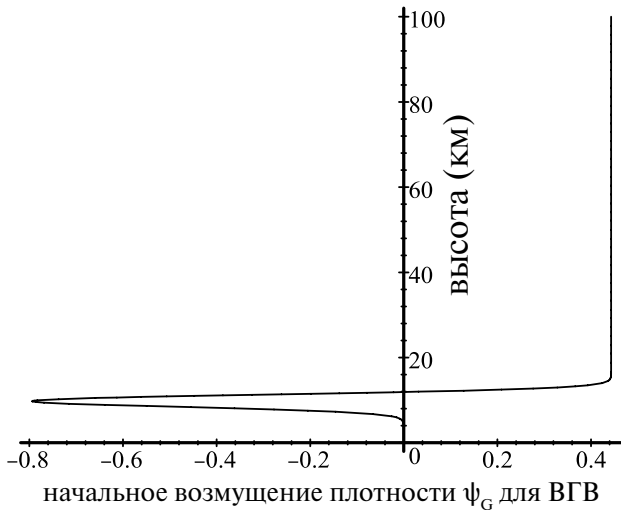


Рис. 3. Вертикальный профиль возмущения плотности  $\psi_G(x=0, z, t=0)$ .

Рис. 3 показывает, что внутренние гравитационные и акустические волны при  $t > 0$  возникли на всех высотах выше начального возмущения.

Общая волна равна сумме акустической и гравитационной волн и сумме возмущений плотности, соответствующих акустической и гравитационной волнам, при  $t = 0$  равна нулю. Таким образом, при  $t = 0$  возмущения плотности, производимые гравитационной и акустическими волнами полностью компенсируют друг друга, и результирующее, суммарное возмущение плотности отсутствует. При  $t > 0$  эта взаимная компенсация волн нарушается, главным образом за счет распространения более быстрых, акустических волн. Поэтому можно обнаружить гравитационные волны на тех высотах, на которые они не могли бы проникнуть за столь малое время за счет вертикального распространения. Получается эффект, будто гравитационные волны распространяются вверх со скоростью звука.

### 5. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЛНАХ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ НА ПОДЗАДАЧИ О ВОЛНАХ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

Технику расщепления задачи об атмосферных волнах на отдельные подзадачи о распространении акустических и гравитационных волн можно обобщить на случай распространения волн над плоской Землей. Естественно, уравнения (12), (20), (34) справедливы в этом случае вплоть до границы области, и их нужно дополнить граничными условиями на поверхности Земли.

Накладываем стандартное граничное условие  $w(x, z=0, t) = 0$ , где  $z = 0$  соответствует уровню поверхности Земли. Учитывая независимость волновых ветвей, из него получаем

$$\bar{w}_G(x, z=0, t) = 0, \quad \bar{w}_A(x, z=0, t) = 0. \quad (45)$$

Граничное условие (45) для  $w_G$  может быть использовано непосредственно, в то время как для акустической подзадачи кроме условия (45) требуется граничное условие на поверхности для величины  $u_A$ .

Поступая так же, как при выводе (32), получаем

$$\rho_0 \bar{u}_A + \gamma H (\rho_0 \bar{u}_A)_z = \gamma H (\rho_0 \bar{w}_A)_x + \alpha \rho_0(z) \int_0^z \frac{1}{\gamma H(\xi) \rho_0(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} (\rho_0(\eta) w_A(x, \eta, t))_x d\eta d\xi.$$

Полагая  $z = 0$ , и используя (45) для  $w_A$ , получаем искомое граничное условие для акустической подзадачи

$$\left[ \rho_0 \bar{u}_A + \gamma H (\rho_0 \bar{u}_A)_z \right]_{z=0} = 0. \quad (46)$$

Для единственности решения наложим еще одно граничное условие на поверхности Земли. Его можно вывести из уравнения для вертикального импульса в (20).

Полагая в этом уравнении  $z = 0$  и используя (45), получаем

$$\left[ \frac{\partial \rho_0 g H (\psi_A + \phi_A)}{\partial z} + \rho_0 g \psi_A \right]_{z=0} = 0. \quad (47)$$

Уравнения (12), (20), (34) вместе с граничными условиями (45), (46), (47) дают полную математическую постановку задачи для определения  $\bar{X}_A(x, z, t = 0)$ ,  $\bar{X}_G(x, z, t = 0)$ .

#### 5.1. Влияние отражающей поверхности на волны

Предположим, что при  $t = 0$  имеем локализованную нагретую область, и поле возмущений температуры описывается функцией  $\phi(x, z, 0)$ . Будем также считать, что  $u(x, z, 0) \equiv 0$ ,  $w(x, z, 0) \equiv 0$ . В случае безграничной среды, начальные условия для акустической и гравитационной волн описываются формулами в (39).

Если же рассматриваются волны в полубесконечной среде, над плоской земной поверхностью, то необходимо учесть граничное условие (47). Тогда начальные возмущения температуры и плотности для акустической и гравитационной волн будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \phi_A(x, z, 0) &= \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \phi(x, z, 0) + A(x) e^{-\frac{\alpha z}{H}} \frac{1}{\rho_0(z)}, \\ \psi_A(x, z, 0) &= \frac{1}{\gamma} \left( \phi(x, z, 0) - \frac{1}{H} \int_0^z \phi(x, z, 0) dz \right) - \\ &\quad - \frac{b(x)}{H \rho_0(z)} * e^{-\frac{\alpha z}{H}}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}\phi_G(x, z, 0) &= \frac{1}{\gamma} \phi(x, z, 0) - A(x) e^{-\frac{\alpha z}{H}} \frac{1}{\rho_0(z)}, \\ \psi_G(x, z, 0) &= -\psi_A(x, z, 0),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A(x) &= -\frac{b(x)(\gamma - 2)}{H}, \quad \alpha = \gamma - 1, \\ b(x) &= \left( -\frac{H^2 \frac{d}{dz} \phi(x, z=0)}{-2\gamma + 2 + \gamma^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(-\gamma - 2) H \phi(x, z=0)}{(-2\gamma + 2 + \gamma^2) \gamma} \right) \rho_0(0).\end{aligned}$$

По сравнению с (39), формулы (48) содержат дополнительные слагаемые, пропорциональные  $e^{-\frac{\alpha z}{H}} \frac{1}{\rho_0(z)}$ , которые являются следствием влияния граничной отражающей поверхности.

Известно, что в случае изотермической атмосферы, т. е. при  $H = \text{const}$ ,  $\rho_0(z) = \rho_0(0) e^{-\frac{z}{H}}$ , система (3) при граничном условии  $w(x, z=0, t) = 0$  имеет два частных решения, называемых волнами Лэмба [15, 8]. В изотермической атмосфере волны Лэмба распространяются со скоростью звука ( $c_s = \sqrt{gH}$  и  $-c_s$ ). Функции  $e^{-\frac{\alpha z}{H}} \frac{1}{\rho_0(z)}$  зависят от вертикальной координаты  $z$  как волна Лэмба, и мы можем заключить, что появление слагаемых, пропорциональных  $e^{-\frac{\alpha z}{H}} \frac{1}{\rho_0(z)}$ , связано с возникновением волн Лэмба. Волны Лэмба, в нашем описании, попадают в класс внутренних гравитационных волн. Но при этом в начальном условии для акустических волн содержится некоторый вклад, который при  $t = 0$  компенсирует изменение параметров, обусловленное появлением волн Лэмба.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе произведен анализ линеаризованных гидродинамических уравнений для газа, стратифицированного полем тяжести. Стратификация плотности газа произвольная, но предполагается устойчивой. Этот общий случай называется неизотермической атмосферой.

Введено гильбертово пространство в пространстве столбцов-функций, и система гидродинамических уравнений записана как одно операторное уравнение Шредингера типа (с самосопряженным эволюционным оператором), откуда следует существование решения начальной задачи.

Показано, что система уравнений имеет два типа решений, различающихся функциональной зависимостью от горизонтального масштаба возмущения. В частном случае экспоненциальной стратификации плотности уравнения решаются аналитически и выделенные классы решений совпадают с акустическими и гравитационными волнами. Поэтому можно ассоциировать выделенные классы решений с акустическими и гравитационными волнами и в общем случае неизотермической стратификации.

Для интересного для геофизических приложений случая длинных волн ( $\beta^2 = \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \ll 1$ ) предложены упрощенные системы уравнений для акустических и гравитационных волн и показана асимптотическая при  $\beta^2 \rightarrow 0$  сходимость решений сформулированных упрощенных задач к решением точной задачи.

Показано, что у волны каждого типа, у акустической волны и внутренней гравитационной, динамические переменные связаны парой характерных для данного типа волн стационарных соотношений. Выведены асимптотические при  $\beta^2 = \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \rightarrow 0$  формулы для этих стационарных соотношений.

Наличие у волн каждого типа пары стационарных соотношений, связывающих гидродинамические переменные, позволило поставить задачу о выделении в начальном условии вкладов акустических и гравитационных волн. Доказано существование решения этой поставленной задачи о выделении вкладов акустических и гравитационных волн и отсутствие каких-либо решений иного типа, при любой устойчивой стратификации. Произведено асимптотическое при  $\beta^2 = \left(\frac{l_z}{l_x}\right)^2 \rightarrow 0$  расщепление исходной задачи на подзадачи о распространении акустических и гравитационных волн.

Проанализировано распределение энергии начального возмущения по типам волн и для случаев начального температурного возмущения и начального возмущения плотности в атмосфере с экспоненциальной стратификацией плотности выведены явные формулы для отношения энергий; показано, что отношение энергий акустической и внутренней гравитационной волн  $\frac{E_A}{E_G}$  в этих случаях не зависит от формы начального возмущения и определяется адиабатической постоянной газа  $\gamma$ .

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, шифр проекта 116234986.

Авторы благодарят Гордина В.А. за внимание к работе и практические советы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ  
СИСТЕМЫ (3) ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
ДЛЯ ТЯЖЕЛОГО ГАЗА

Перепишем уравнения (3) в матричной форме:

$$-i \frac{\partial X}{\partial t} + \hat{L}X = 0. \quad (49)$$

Здесь  $\hat{L}$  — матричный дифференциальный оператор

$$\hat{L}X = -\frac{i}{\rho_0(z)} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho_0 g H (\psi + \phi)}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho_0 g H (\psi + \phi)}{\partial z} + \rho_0 g \psi \\ (\gamma - 1) \left( \frac{\partial \rho_0 u}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} \right) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 w \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Столбец  $X$  был определен в разделе 2.

Пусть  $h$  — гильбертово пространство столбцов-функций со скалярным произведением (6). Оператор  $\hat{L}$ , область определения  $D(\hat{L}) = \{X : X \in h, \hat{L}X \in h\}$  которого всюду плотна, в  $h$  самосопряжен. Производные в (50) будем понимать в смысле распределений Шварца [17]. Из самосопряженности оператора следует существование решения  $X(x, z, t) \in h$  уравнений (49) для любого  $X(x, z, 0) \in h$  [16, 18] (см. также [17], теорему Хилле–Иосиды и ее приложения). Решение действительно, если начальные условия действительные.

Доказательство существования решений линейных уравнений для волн в стратифицированном поле тяжести газе дано также в [19, 20]. В этих работах представлена техника доказательства, которая заключается в том, что система уравнений сначала сводится к одному уравнению, и потом это уравнение исследуется.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Пусть  $\bar{\lambda}_G(x, z, t) = \begin{pmatrix} \bar{P}_G(x, z, t) \\ \bar{u}_G(x, z, t) \end{pmatrix}$ . Перепишем первое, второе и четвертое уравнения системы (12) в виде:

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \bar{\lambda}_G + \bar{L}_G \bar{\lambda}_G = 0. \quad (51)$$

Здесь  $\bar{L}_G$  — такой оператор, что

$$\bar{L}_G \bar{\lambda}_G = -\frac{i}{\rho_0} \begin{pmatrix} \gamma g H \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 \bar{u}_G) + \gamma g H \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 \bar{w}) + \alpha g \rho_0 \bar{w} \\ \frac{\partial}{\partial x} \bar{P}_G \end{pmatrix}, \quad (52)$$

и

$$\bar{w}_G = -\int_{-\infty}^z \frac{\partial \bar{u}_G(x, \xi, t)}{\partial x} d\xi - \int_{-\infty}^z \frac{1}{\gamma(H\xi)\rho_0(\xi)} \int_{\infty}^{\xi} \rho_0(\eta) \frac{\partial \bar{u}_G(x, \eta, t)}{\partial x} d\eta d\xi \quad (53)$$

— решение четвертого уравнения системы (12), удовлетворяющее требованиям (15) при условии

$\int_{R^2} \rho_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_G \right)^2 d\Omega < \infty$ . Введем скалярное произведение столбцов  $\bar{\lambda}_{G_1}, \bar{\lambda}_{G_2}$  формулой:

$$\langle \bar{\lambda}_{G_1}, \bar{\lambda}_{G_2} \rangle_{G_\lambda} = \int_{R^2} \left[ \rho_0 \bar{u}_{G_1}^* \bar{u}_{G_2} + \frac{\bar{P}_{G_1}^* \bar{P}_{G_2}}{\gamma \rho_0 g H} + \frac{\left( \bar{P}_{G_1} + \gamma H \frac{\partial \bar{P}_{G_1}}{\partial z} \right)^* \left( \bar{P}_{G_2} + \gamma H \frac{\partial \bar{P}_{G_2}}{\partial z} \right)}{\gamma \rho_0 g H} \right] d\Omega. \quad (54)$$

Это скалярное произведение порождает гильбертово пространство  $\bar{h}_{G_\lambda}$ . Оператор  $\bar{L}_G$  с всюду плотной областью определения  $D(\bar{L}_G) = \{\bar{\lambda}_G : \bar{\lambda}_G \in \bar{h}_{G_\lambda}, \bar{L}_G \bar{\lambda}_G \in \bar{h}_{G_\lambda}\}$  является самосопряженным. Поэтому существует решение задачи (51), оно принадлежит  $\bar{h}_{G_\lambda}$  [16, 18, 17]. Все компоненты 4-вектора

$$\bar{X}_G(x, z, t, \beta) = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_G(x, z, t) \\ \bar{u}_G(x, z, t) \\ \bar{w}_G(x, z, t) \\ \bar{\Phi}_G(x, z, t) \end{pmatrix} \in h \text{ можно легко вос-}$$

становить по решению  $\bar{\lambda}_G(x, z, t) \in \bar{h}_{G_\lambda}$ .

Интегралы в (15) существуют, если  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \bar{\lambda}_G(t=0), \frac{\partial}{\partial x} \bar{\lambda}_G(t=0) \right\rangle_{\lambda_G} < \infty$ . Существование решения доказано.

Перейдем к доказательству утверждения, что решение системы укороченных уравнений (12) дает приближенное частное решение системы уравнений (3) точной задачи. Пусть  $X_G(x, z, t, \beta)$  является решением уравнений (49), которое удовлетворяет начальным условиям  $X_G(x, z, t=0, \beta) = \bar{X}_G(x, z, t=0, \beta)$ , где  $\bar{X}_G(x, z, t=0, \beta)$  дается формулами (14). Для разности решений  $\Delta X = \bar{X}_G(x, z, t, \beta) - X_G(x, z, t, \beta)$  усеченной и полной систем уравнений можно написать уравнение

$$-i \frac{\partial \Delta X}{\partial t} + \hat{L} \Delta X = -i \bar{Q}_G, \quad \bar{Q}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial \bar{w}_G}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оценим  $\|\bar{Q}_G\|$ . При условиях  $\frac{\partial \bar{\lambda}_G}{\partial x}, \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G}{\partial x^2} \in \bar{h}_{G\lambda}$  мы получаем из второго и четвертого уравнений системы (12) соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{R^2} \frac{1}{\gamma H \rho_0} \left[ \gamma H \frac{\partial^2 (\rho_0 \bar{w}_G)}{\partial t \partial z} + \alpha \frac{\partial (\rho_0 \bar{w}_G)}{\partial t} \right]^2 d\Omega + \\ & + \int_{R^2} \frac{\alpha}{\gamma H} \rho_0 \left( \frac{\partial \bar{w}_G}{\partial t} \right)^2 d\Omega = \\ & = \int_{R^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \bar{P}_G}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 (\rho_0 \bar{w}_G)}{\partial t \partial z} \gamma H + \alpha \frac{\partial (\rho_0 \bar{w}_G)}{\partial t} \right] d\Omega. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка:  $\int_{R^2} \rho_0 \left( \frac{\partial \bar{w}_G}{\partial t} \right)^2 d\Omega \leq \frac{\max(\gamma H)^2}{\min \alpha} \int_{R^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{P}_G}{\partial x^2} \right)^2 \frac{1}{\rho_0(z)} d\Omega$ . Коэффициенты

уравнений (51) не зависят  $x$ , поэтому решения удовлетворяют закону сохранения

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, t)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, t)}{\partial x^2} \right\rangle_{\lambda_G} = \\ & = \left\langle \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, 0)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \bar{\lambda}_G(x, z, 0)}{\partial x^2} \right\rangle_{\lambda_G}, \end{aligned}$$

аналогичному закону сохранения энергии. Отсюда следует неравенство:

$$\begin{aligned} \|\bar{Q}_G\|^2 &= \int_{R^2} \rho_0 \left( \frac{\partial \bar{w}_G}{\partial t} \right)^2 d\Omega \leq M_1^2 \beta^4, \\ M_1^2 &= E_G \left( \frac{\frac{\partial^2 \bar{P}_0(x, z)}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 \bar{u}_0(x, z)}{\partial x^2}} \right). \end{aligned}$$

$M_1$  — постоянная, не зависящая от параметра  $\beta$ . Из устойчивости решений системы уравнений (49) по правой части следует сходимость  $X_G(x, z, t, \beta)$  к  $X_G(x, z, t, \beta)$  при  $\beta \rightarrow 0$ :

$$\|X_G(x, z, t, \beta) - \bar{X}_G(x, z, t, \beta)\| \leq M_1 \beta^2 t_0, \quad 0 \leq t \leq t_0 < \infty.$$

Теорема 1 доказана.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть  $\bar{\lambda}_A(x, z, t) = \begin{pmatrix} \bar{f}_A(x, z, t) \\ \bar{w}_A(x, z, t) \end{pmatrix}$ . Перепишем первое, второе и четвертое уравнения системы (20) в виде:

$$-i \frac{\partial \bar{\lambda}_A}{\partial t} + \bar{L}_A \bar{\lambda}_A = 0. \quad (55)$$

Здесь  $\bar{L}_A$  — оператор, такой что

$$\bar{L}_A \bar{\lambda}_A = -\frac{i}{\rho_0(z)} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left[ g \alpha \left( \bar{f}_A + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} \right) \right] + g \frac{\partial \bar{f}_A}{\partial z} \right).$$

Введем скалярное произведение столбцов  $\bar{\lambda}_{A_1}, \bar{\lambda}_{A_2}$  формулой:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda}_{A_1}, \bar{\lambda}_{A_2} \rangle_{A_\lambda} &= \\ \langle \bar{\lambda}_{A_1}, \bar{\lambda}_{A_2} \rangle_{A_\lambda} &= \int_{R^2} \left[ \rho_0^* \bar{w}_{A_1} \bar{w}_{A_2} + \frac{\bar{f}_{A_1}^* \bar{f}_{A_2} \alpha g}{\gamma H \rho_0} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha^2 g}{\rho_0 \gamma H} \left( \bar{f}_{A_1} + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{A_1}}{\partial z} \right)^* \left( \bar{f}_{A_2} + \frac{\gamma H}{\alpha} \frac{\partial \bar{f}_{A_2}}{\partial z} \right) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (56)$$

Это скалярное произведение порождает гильбертово пространство, которое обозначим  $h_{A_\lambda}$ . Оператор  $\bar{L}_A$  с всюду плотной областью определения  $D(\bar{L}_A) = \{\bar{\lambda}_A : \bar{\lambda}_A \in h_{A_\lambda}, \bar{L}_A \bar{\lambda}_A \in h_{A_\lambda}\}$  является самосопряженным. Мы опять приходим к уравнению Шредингеровского типа. Поскольку для операторных уравнений этого типа существование решений доказано [16, 18, 17], можно утверждать, что решение задачи (55) существует и принадлежит  $h_{A_\lambda}$ .

По решению  $\bar{\lambda}_A(x, z, t) \in h_{A_\lambda}$  можно легко восстановить все компоненты 4-вектора

$$\bar{X}_A = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_A \\ \bar{u}_A \\ \bar{w}_A \\ \bar{\Phi}_A \end{pmatrix} \in h. \text{ При этом функция } \bar{u}_A(x, z, t) \text{ вы-}$$

ражается через  $\bar{w}_A(x, z, t)$  посредством последнего уравнения системы (20). Общее решение  $u_A(x, z, t)$  этого уравнения содержит две произвольных функции переменных  $x$  и  $t$ . Частное решение для  $\bar{u}_A(x, z, t)$ , квадратично интегрируемое над  $R^2$ , может быть получено предельным переходом  $a \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow -\infty$  из решения краевой задачи с граничными условиями  $\bar{u}(b) = 0$ ,  $\rho_0(a) \bar{u}(a) = 0$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho_0 \bar{u}_A &= -\rho_0 \int_{-\infty}^z \frac{1}{\gamma H(\xi) \rho_0(\xi)} \int_{-\infty}^{\xi} \rho_0(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \bar{w}_A(x, \eta, t) d\eta d\xi \\ &+ \int_{-\infty}^z \rho_0(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \bar{w}_A(x, \xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (57)$$

Интегралы существуют, если функция  $\frac{\partial}{\partial x} \bar{w}_A(x, z, t)$  квадратично интегрируема (с весом  $\rho_0(z)$ ). Последнее выполняется, если  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \bar{\lambda}_A(t=0), \frac{\partial}{\partial x} \bar{\lambda}_A(t=0) \right\rangle_{\lambda_A} < \infty$ . Существование решения доказано.

Покажем, что решение системы укороченных уравнений (20) дает приближенное частное решение системы уравнений (3) точной задачи. Пусть  $X_A(x, z, t, \beta)$  является решением системы (49), удовлетворяющим начальным условиям  $X_A(x, z, t=0, \beta) = \bar{X}_A(x, z, t=0, \beta)$ , и  $\bar{X}_A(x, z, t=0, \beta)$  дается формулами (22). Для разности  $\Delta X = \bar{X}_A(x, z, t, \beta) - X_A(x, z, t, \beta)$  решений укороченной и полной систем уравнений справедливо соотношение

$$-i \frac{\partial \Delta X}{\partial t} + \hat{L} \Delta X = -i \bar{Q}_A, \quad \bar{Q}_A = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \bar{u}_A}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \\ -(\gamma - 1) \frac{\partial \bar{u}_A}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Оценим  $\|\bar{Q}_A\|$ . Разберем случай, когда  $\sqrt{\rho_0(z)} \bar{w}_A$  является непрерывной функцией, дважды непрерывно дифференцируемой по  $x$  и достаточно быстро убывающей при  $|z| \rightarrow \infty$  и при  $|x| \rightarrow \infty$ , чтобы функция была квадратично интегрируемой. Пусть  $w_0(x, z, t)$  обозначает решение уравнений (3), соответствующее случаю  $\beta = 1$  в (22). Обозначим  $u_0(x, z, t)$  решение уравнения (57), соответствующее  $w_0(x, z, t)$ . Тогда  $\bar{w}_A(x, z, t) = \sqrt{\beta} w_0(\beta x, z, t)$ . Выражение (57) показывает, что из  $\left| \frac{\partial^2 \bar{w}_A(x, z, t, \beta)}{\partial x^2} \right| = \sqrt{\beta} \left| \frac{\partial^2 w_0(\beta x, z, t)}{\partial x^2} \right| \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow 0$  как  $\beta^{\frac{3}{2}} \rightarrow 0$  следует  $|\bar{u}_A(x, z, t, \beta)| = \beta^{\frac{3}{2}} |u_0(\beta x, z, t)| \rightarrow 0$  как  $\beta^{\frac{3}{2}} \rightarrow 0$ . Стало быть,  $\left( \int_{R_2} \rho_0(z) (\bar{u}_A(x, z, t, \beta))^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow 0$  как  $\beta^2 \rightarrow 0$  и  $\|\bar{Q}_A\| \rightarrow 0$  как  $\beta^2 \rightarrow 0$ .

Из устойчивости решений системы уравнений (49) по правой части следует сходимость  $\bar{X}_A(x, z, t, \beta)$  к  $X_A(x, z, t, \beta)$  при  $\beta \rightarrow 0$ :

$$\|X_A(x, z, t, \beta) - \bar{X}_A(x, z, t, \beta)\| \leq M_2 \beta^2 t_0, \quad (59) \\ 0 \leq t \leq t_0 < \infty.$$

Здесь  $M_2$  постоянная, независимая от параметра  $\beta$ , которая здесь не выписана. Оценку (59)

стандартным образом можно расширить на класс функций, указанных в Теореме 2.

Теорема 2 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов В.М., Кулешов Ю.В. Изменение спектра инфразвукового сигнала при распространении волн от земной поверхности до высот ионосферы // Акуст. журн. 2014. Т. 60(1). С. 21–30.
2. Петухов Ю.В. О возможности безотражательного распространения плоских акустических волн в непрерывно-стратифицированных средах // Акуст. журн. 2022. Т. 68(2). С. 129–138.
3. Hines C.O. Atmospheric gravity waves. In *Thermospheric circulation*; Mir Press: Moscow, 1975.
4. Yeh K.C. and Liu C.H. Acoustic-Gravity Waves in the Upper Atmosphere // *Reviews of Geophysics and Space Physics*. 1974. V. 12. P. 193–216.
5. Григорьев Г.И. Акустико-гравитационные волны в атмосфере Земли (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. 42(1). С. 3–24.
6. Kshevetskii S.P., Kurdyayeva Y.A., Gavrilov N.M. Spectra of Acoustic-Gravity Waves in the Atmosphere with a Quasi-Isothermal Upper Layer // *Atmosphere*. 2021. V. 12. P. 818.
7. Марчук Г.И. Численные методы в прогнозе погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 356 с.
8. Gossard E.E., Hooke W.H. *Waves in the Atmosphere*, Elsevier Scientific Publishing Company, New York, 1975. 456 pp.
9. Richmond A.D., Matsushita S. Thermospheric response to a magnetic substorm // *J. Geoph. Res.* 1975. V. 80. P. 2839–2850.
10. Lions J.L., Temam R., Wang S. New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications // *Nonlinearity*. 1992. V. 5. P. 237–288.
11. Юдин В.А., Гаврилов Н.М. Алгоритм расчета распространения гравитационных волн от нестационарных локальных источников в стратифицированной атмосфере // Деп. в ВИНТИ, 1985. № 2865–85. 41 с.
12. Кшевецкий С.П. О длинных акустико-гравитационных волнах в атмосфере с произвольной стратификацией по плотности // *Известия РАН. Физ. атмосферы и океана*. 1992. Т. 28. № 5. С. 558–559.
13. Голицин Г.С., Григорьев Г.И., Докучаев В.П. Излучение акустико-гравитационных волн при движении метеоров в атмосфере // *Изв. АН СССР. Физ. атмосферы и океана*. 1977. Т. 13. № 9. С. 926–935.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика*. М.: Наука, 1988. 735 с.
15. Дикий Л.А. Теория колебаний земной атмосферы. Ленинград. Гидрометеиздат, 1969. 194 с.
16. Ладженская О.А. О разрешимости нестационарных операторных уравнений // *Матем. сб.* 1956. Т. 39(81). № 4. С. 491–524.

17. Richtmyer R.D. Principles of Advanced Mathematical Physics. Springer: New York, NY, USA, 1978.
18. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. М.: Издательство Московского университета. 1983.
19. Габов С.А., Свешиников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986. 288с.
20. Габов С.А., Свешиников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. 344с.

## Waves in heavy stratified gas: Splitting into acoustic and gravity waves subproblems

S. P. Kshevetskii<sup>a,b,c,\*</sup> Yu. A. Kurdyeva<sup>d,\*\*</sup> and N. M. Gavrilov<sup>c,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Kant Baltic Federal University, A. Nevskogo str. 14, Kaliningrad, 236041 Russia

<sup>b</sup>A. M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of the Russian Academy of Sciences, Pyzhevsky per., 3, Moscow, 119017, Russia

<sup>c</sup>Saint Petersburg State University, Universitetskaya nab., 7/9, Saint Petersburg, 199034 Russia

<sup>d</sup>Kaliningrad Branch of the N.V. Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation of the Russian Academy of Sciences, ul. Pionerskaya 61, Kaliningrad, 236035 Russia

\*e-mail: spkshev@gmail.com

\*\*e-mail: yakurdyeva@gmail.com

\*\*\*e-mail: n.gavrilov@spbu.ru

Two-dimensional linearized hydrodynamic equations describing the wave propagation in a stratified heavy gas are considered. The hydrodynamic equation system is reformulated as a single Schrödinger type operator equation. The waves with  $\beta = \frac{l_z}{l_x} \ll 1$  are considered, where  $l_z$  and  $l_x$  are the characteristic

vertical and horizontal scales, respectively, and the asymptotic behavior of solutions as  $\beta \rightarrow 0$ . It is shown that the set of solutions depending on  $\beta$  form two disjoint classes. For solutions from each of the selected classes, its own, asymptotic as  $\beta \rightarrow 0$ , approximate equation system is proposed. The selected classes of solutions are acoustic and internal gravity waves. It is shown that the hydrodynamic variables of acoustic and gravity waves are related by certain stationary relationships, different for each class. This allows to pose the problem of separating the contributions of acoustic and gravity waves in the initial condition. The existence of a solution to this wave separation problem is shown. Examples of solving the problem of dividing the general problem into subproblems on the propagation of acoustic and gravity waves are given. Estimates for the division of the energy of the initial disturbance by wave type are obtained.

**Keyword:** fluid dynamic equations, long waves, asymptotic solutions, operator equation, Hilbert space, acoustic waves, internal gravity waves, dispersion relation