
МЕХАНИКА МАШИН

УДК 533.6:534.1

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОУПРУГОГО ОТКЛИКА
ДИСКА, ИМЕЮЩЕГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИЙ ПОДВЕС
И ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО СО СЛОЕМ ВЯЗКОГО ГАЗА**© 2024 г. В. С. Попов^{1, 2, *}, А. А. Попова¹¹*Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А.,
Саратов, Россия*²*Институт проблем точной механики и управления — обособленное структурное
подразделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального
исследовательского центра “Саратовский научный центр Российской академии наук”,
Саратов, Россия***e-mail: vic_p@bk.ru*

Поступила в редакцию 11.08.2023 г.

После доработки 25.03.2024 г.

Принята к публикации 19.04.2024 г.

В статье предложена математическая модель нелинейных аэроупругих колебаний диска, имеющего подвес с жесткой кубической нелинейностью и взаимодействующего со слоем вязкого газа, пульсирующего за счет заданного возмущения на его контуре. Проведен асимптотический анализ, позволивший свести исходную модель к обобщенному уравнению Дуффинга, на базе решения которого методом гармонического баланса найден основной аэроупругий отклик диска и его фазовый сдвиг. Характеристики, в частных случаях, обеспечивают переход к несжимаемой вязкой жидкости и линейно-упругому подвесу, а их численное исследование позволило установить, что сжимаемость газа приводит к возрастанию значений резонансных частот и увеличению амплитуд колебаний диска. Расчеты показали возможность подавления неустойчивых колебаний диска вблизи резонансных частот путем изменения толщины слоя газа. Полученные результаты можно использовать для изучения динамики газовых и жидкостных демпферов и опор, а также чувствительных упругоподатливых элементов датчиков давления.

Ключевые слова: Моделирование, жесткий диск, нелинейно-упругий подвес, кубическая нелинейность, вязкий газ, нелинейные колебания, аэроупругий отклик

DOI: 10.31857/S0235711924040011, **EDN:** OZTMKV

Разработка и исследование изделий современного машиностроения, во многих вопросах, тесно связаны с фундаментальными проблемами создания математических моделей, максимально приближенных к оригиналу. В частности, модели взаимодействия элементов конструкций со слоем жидкости или газа необходимы при разработке и исследовании газо- и гидроопор [1], чувствительных элементов датчиков давления, газо- и гидродемпфирования колебаний в приборах [2]. Например, в [3] разработана плоская модель упорного подшипника с абсолютно жесткими направляющей и ползуном, имеющим адаптированный профиль, при рассмотрении поддерживающего смазочного слоя как вязкой несжимаемой жидкости с учетом

зависимости ее вязкости от давления и температуры. Упрощенный подход для оценки упругой деформации поверхности бесконечно протяженного подшипника под действием давления в смазочном слое газа предложен в [4]. Его суть состоит в рассмотрении кольцевой пленки смазочного слоя «развернутой» на плоскость, т.е. переходу к плоской задаче, и добавлении к толщине слоя линейного члена пропорционального давлению газа с коэффициентом пропорциональности, связанным с модулем упругости деформируемой поверхности подшипника. Строгий подход требует постановки и решения связанных задач гидро- и аэроупругости [5, 6]. Приведем краткий обзор таких исследований. В [7] исследовано взаимодействие штампа на линейно-упругом подвесе, являющимся частью дна бесконечно длинного канала, со слоем идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, находящейся в нем. Установлено, что вблизи штампа в жидкости возникают, наряду с бегущими, стоячие волны, и показана возможность сведения амплитуд последних к нулю варьированием частоты вибраций штампа. В [8] рассмотрено взаимодействие идеальной жидкости, находящейся в абсолютно жесткой трубе с чувствительным элементом датчика давления, установленного на ее торце. Получено и численно исследовано интегро-дифференциальное уравнение динамики чувствительного элемента датчика, связывающее его деформацию с давлением и температурой среды на входе в трубопровод. Собственные колебания и устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем идеальной сжимаемой жидкости численно изучены в [9] методом конечных элементов. Оценено влияния толщины слоя на собственные частоты колебаний пластины и критические скорости, при которых происходит потеря устойчивости. Установившиеся колебания стенок бесконечно длинного канала, образованного двумя параллельными пластинами, опирающимися на упругое основание Винклера, и взаимодействующими с пульсирующим слоем вязкой жидкости между ними, исследованы в [10]. Аналогичная задача для более общего случая канала конечной длины ранее решена в [11]. Численное моделирование взаимодействия сжимаемого газа, при учете и без учета его вязкости, с абсолютно жестким диском на линейно-упругом подвесе, проведено в [12, 13], в рамках исследования процесса срабатывания предохранительного клапана. Модель взаимодействия слоя вязкой несжимаемой жидкости, находящейся в узком канале с параллельными стенками, с его торцевой стенкой на нелинейно-упругом подвесе предложена в [14]. Рассмотрено применение модели для исследования гидроупругой реакции демпфера сильфонного типа. Модель плоского газового демпфера в рамках взаимодействия вязкого газа, заполняющего зазор между двумя параллельными жесткими стенками, и жесткой пластины, находящейся внутри зазора и перемещающейся с постоянной скоростью в направлении нормали к его стенкам, предложена в [15].

Однако в приведенных выше работах не рассмотрены аэроупругие колебания диска на нелинейно-упругом подвесе при его взаимодействии с пульсирующим слоем вязкого газа. Поэтому предлагаемое исследование нацелено на постановку и решение такой задачи.

Постановка задачи аэроупругости: основные положения и допущения. Рассмотрим узкий канал с параллельными стенками, схематично представленный на рис. 1. Стенки канала образованы двумя абсолютно жесткими дисками одинаковых радиусов R , оси симметрии которых совпадают с осью симметрии канала. Нижний диск закреплен и считается неподвижным. Верхний диск имеет нелинейно-упругий подвес, позволяющий ему совершать колебания в вертикальном направлении. Подвес будем рассматривать как нелинейно-упрочняющуюся пружину, восстанавливающая сила которой имеет линейную и нелинейную составляющие. Первая пропорциональна перемещению диска, а вторая – пропорциональна кубу его перемещения, т.е. рассмотрим случай жесткой кубической нелинейности подвеса [16, 17]. Канал заполнен вязким газом, а на контуре примыкает к торцевой полости, заполненной тем

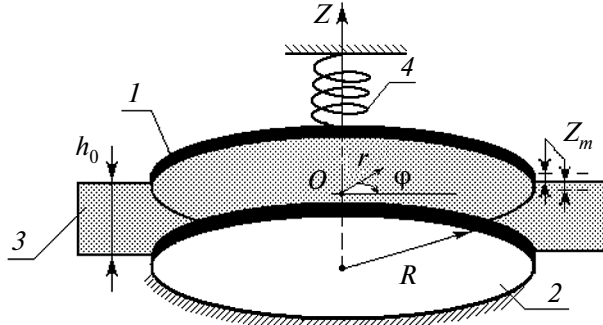


Рис. 1. Схема узкого канала, образованного двумя параллельными соосными дисками: 1 – верхний абсолютно жесткий диск, имеющий подвес 4 с жесткой кубической нелинейностью; 2 – нижний абсолютно жесткий неподвижный диск; 3 – вязкий газ, находящийся в канале и торцевой полости.

же газом. Полагаем, что в невозмущенном состоянии в газе, находящемся в канале и торцевой полости, постоянное давление p_0 , которое принимаем за начало отсчета давления. В невозмущенном состоянии расстояние между дисками h_0 и, в силу узости канала, $h_0 \ll R$. В торцевой полости, т.е. в торцевом сечении канала, возбуждается пульсация давления p_1 по гармоническому закону, накладываемая на постоянный уровень давления p_0 . За счет этой пульсации верхний диск совершает нелинейные колебания с амплитудой $z_m \ll h_0$. Действием силы тяжести, вследствие малой плотности газа, пренебрегаем. Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат $r\phi z$, ось z которой совпадает с осью симметрии дисков, а ее центр находится в геометрическом центре канала. В силу осевой симметрии канала рассмотрим осесимметричную постановку. Далее исследуем установившиеся нелинейные колебания [16, 17] диска, взаимодействующего со слоем вязкого газа, полагая, аналогично гидродинамической теории смазки, что состояние газа и стенок канала изотермическое [1, 18]. Такое допущение позволяет принять динамическую вязкость газа постоянной, а закон изменения его плотности считать баротропным.

Гармонический закон пульсации давления газа на торце по контуру канала (в торцевой полости) считаем заданным в виде

$$p_1 = p_m \sin \omega t, \quad (1)$$

где p_m – амплитуда пульсации давления; ω – заданная частота пульсации; t – время.

Уравнение движения верхнего диска как массы на нелинейной пружине запишем как

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + F_r = F_d, \quad (2)$$

где z – закон движения диска; m – масса диска; F_r – восстанавливающая сила нелинейно-упругого подвеса; F_d – возмущающая сила, действующая со стороны пульсирующего вязкого газа в канале.

Принимая во внимание ангармоничность колебаний верхнего диска представим закон его движения в виде $z = z_m f(\theta t)$. Здесь $\theta = 1/T$ – характерная частота нелинейных колебаний верхнего диска, а T – характерный период его нелинейных колебаний.

Восстанавливающая сила нелинейно-упругого подвеса как пружины с жесткой кубической нелинейностью запишем, согласно [17], как

$$F_r = n_1 z + n_3 z^3, \quad (3)$$

где n_1 — линейный коэффициент жесткости подвеса; n_3 — коэффициент жесткости кубической составляющей восстанавливающей силы подвеса. Так как подвес нелинейно-упрочняющийся, то восстанавливающая сила нелинейно возрастает с ростом перемещений диска, т.е. имеет место жесткая нелинейность и полагается, что $n_3 > 0$ [16, 17].

Возмущающая сила F_d определяется нормальным напряжением q_{zz} вязкого газа на границе его контакта с поверхностью диска. В общем виде данное напряжение можно представить как [18]

$$q_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} - \left(\frac{2}{3}\mu - \mu' \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \text{ при } z = \frac{h_0}{2} + z_{mf}, \quad (4)$$

где p — давление газа (направлено внутрь объема газа); μ — коэффициент динамической вязкости газа, μ' — вторая или объемная вязкость; V_z — проекция скорости газа на ось z ; V_r — проекция скорости газа на ось r .

Принимая во внимание сказанное выше, запишем выражение для F_d в виде

$$F_d = - \int_0^R \int_0^{2\pi} q_{zz} \Big|_{z=\frac{h_0}{2}+z_{mf}} r dr d\theta = -2\pi \int_0^R q_{zz} \Big|_{z=\frac{h_0}{2}+z_{mf}} r dr. \quad (5)$$

Совместно с уравнением движения диска (2) необходимо рассматривать уравнения движения вязкого газа в узком канале. Учтем, что в предлагаемой постановке движение газа можно принять как ползущее [1, 18]. Тогда уравнения его движения представляют собой уравнения Навье—Стокса для сжимаемой жидкости, локальное и конвективное ускорения из которых исключены

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} \right) + \left(\mu' + \frac{1}{3}\mu \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \left(\mu' + \frac{1}{3}\mu \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right).$$

Уравнения (6) замыкаем уравнением неразрывности для сжимаемой среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho V_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0, \quad (7)$$

и баротропным законом изменения плотности вязкого газа

$$\frac{p}{\rho} = c^2. \quad (8)$$

Здесь ρ — плотность газа; c — изотермическая скорость звука в газе (при нормальных условиях).

Уравнения (6)–(8) дополним условиями на границах контакта вязкого газа со стенками канала. В качестве условий выбираем условия прилипания вязкого газа к стенкам канала [18]

$$V_r = 0, V_z = \frac{dz}{dt} \text{ при } z = \frac{h_0}{2} + z_m f(\theta t), V_r = 0, V_z = 0 \text{ при } z = -\frac{h_0}{2}. \quad (9)$$

Кроме того, запишем условия для давления на торце канала и на оси симметрии. Эти условия представляют собой условие совпадения давления в торцевом сечении канала с давлением в торцевой полости и условие ограниченности давления на оси симметрии, которые запишем в виде

$$p = p_1(\omega t) \text{ при } r = R, r \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0. \quad (10)$$

Здесь учтено, что за начало отсчета давления в канале и торцевой полости принят его постоянный уровень p_0 , соответствующий невозмущенному состоянию. Кроме того, будем иметь в виду, что согласно [18] при изотермическом процессе, а также для случаев одноатомных газов, объемная вязкость μ' может быть положена равной нулю. Поэтому далее считаем в (4), (6) $\mu' = 0$.

Асимптотический анализ сформулированной задачи аэроупругости. Для изучения аэроупругих колебаний диска – стенки канала перейдем к рассмотрению безразмерной задачи введя следующие характерные для нее малые параметры и безразмерные переменные

$$\psi = \frac{h_0}{R} \ll 1, \lambda = \frac{z_m}{h_0} \ll 1, \tau = \theta t, \xi = \frac{r}{R}, \varsigma = \frac{z + h_0/2}{h_0}, V_z = z_m \theta U_\varsigma, \\ V_r = \frac{z_m \theta}{\psi} U_\xi, p = P \frac{\mu z_m \theta}{h_0 \psi^2}. \quad (11)$$

Плотность газа представим как $\rho = \rho_0 + \rho^*$, где ρ_0 – плотность газа в невозмущенном состоянии, ρ^* – плотность газа в возмущенном состоянии, изменяющаяся по баротропному закону $p/\rho = c^2$ (здесь и далее в уравнениях верхний индекс *, обозначающий возмущенное состояние газа, будем опускать и учитывать, что $p_1(\omega t) = \mu z_m \theta (\delta \psi^2)^{-1} P_1(\tau \omega / \theta)$. Тогда, подставляя (11) в (6)–(10), получим следующие безразмерные уравнения динамики вязкого газа в узком канале

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \psi^2 \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} - \frac{4}{3} \frac{U_\xi}{\xi^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi \partial \varsigma} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varsigma} = \psi^2 \left[\psi^2 \left(\frac{\partial^2 U_\varsigma}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_\varsigma}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi \partial \varsigma} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U_\xi}{\partial \varsigma} \right) + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 U_\varsigma}{\partial \varsigma^2} \right],$$

$$\frac{\theta^2 \ell^2}{2} \frac{\partial P}{\partial \tau} + \lambda \frac{\theta^2 \ell^2}{2} \left(U_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + U_\varsigma \frac{\partial P}{\partial \varsigma} \right) + \left(\frac{\delta^2 \theta}{\mu / \rho_0} + \lambda \frac{\theta^2 \ell^2}{2} P \right) \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} U_\xi + \frac{\partial U_\varsigma}{\partial \varsigma} \right) = 0,$$

и дополняющие их граничные условия

$$U_\xi = 0, U_\varsigma = \frac{df(\tau)}{d\tau} \text{ при } \varsigma = 1 + \lambda f(\tau), U_\xi = 0, U_\varsigma = 0 \text{ при } \varsigma = 0, \quad (13)$$

$$P = P_1(\tau \omega / \theta) \text{ при } \xi = 1, \xi \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0.$$

Как принято в гидродинамической теории смазки [18], перейдем к рассмотрению тонкого слоя газа, исключая из рассмотрения в (12) члены порядка ψ^2 . Затем, применим к упрощенным уравнениям тонкого слоя и граничным условиям (13) метод возмущений [19], рассматривая асимптотические разложения по малому параметру λ искомого гидродинамических параметров. Ограничиваясь первым членом разложения, в результате получим безразмерную задачу гидромеханики для тонкого слоя вязкого газа:

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\theta^2 \ell^2}{c^2} \frac{\mu/\rho_0}{h_0^2 \theta} \frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} U_\xi + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (14)$$

с граничными условиями

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad (15)$$

$$P = P_1(\tau\omega / \theta) \text{ при } \xi = 1, \quad \xi \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0.$$

Подставляя (11) в нормальное напряжение (4) и исключая из него члены порядка ψ^2 , а также учитывая, что согласно второго уравнения (14) P не зависит от ζ , выражение для возмущающей силы (5), запишем в виде

$$F_d = 2\pi R^2 \frac{\mu z_m \theta}{h_0 \psi^2} \int_0^1 P \xi d\xi. \quad (16)$$

Используем метод итераций для решения (14) с граничными условиями (15). На первой итерации полагаем газ несжимаемым, т.е. считаем $c^2 \rightarrow \infty$, что позволяет исключить из рассмотрения первый член, учитывающий сжимаемость газа, в последнем уравнении (14). На второй итерации учитываем сжимаемость газа, т.е. принимаем во внимание исключенный член, подставляя в него давление, найденное на первом шаге итерации. Тогда на первой итерации находим

$$U_\xi = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad U_\zeta = \frac{3\zeta^2 - 2\zeta^3}{12} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \right), \quad P = P_1(\tau\omega / \theta) + 3(\xi^2 - 1) \frac{df(\tau)}{d\tau}. \quad (17)$$

Выполняя вторую итерацию подставляем давление (17) в третье уравнение системы (14), а затем решая ее с условиями (15) нашли закон изменения давления в канале в виде

$$P = P_1 + 3(\xi^2 - 1) \frac{df}{d\tau} + 3(\xi^2 - 1) \frac{\theta^2 \ell^2}{c^2} \frac{\mu/\rho_0}{h_0^2 \theta} \frac{dP_1}{d\tau} + \frac{9}{14} (\xi^4 - 4\xi^2 + 3) \frac{\theta^2 \ell^2}{c^2} \frac{\mu/\rho_0}{h_0^2 \theta} \frac{d^2 f}{d\tau^2}. \quad (18)$$

Осуществляя подстановку (18) в (16) и проводя интегрирование, а затем переходя к размерным переменным определяем возмущающую силу

$$F_d = \pi R^2 p_1 - \pi R^2 T_g \frac{dp_1}{dt} - K_g \frac{dz}{dt} + M_g \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad (19)$$

$$\text{где } K_g = \frac{3\pi}{2} \frac{R^4 \mu}{h_0^3}, \quad T_g = \frac{3}{2} \frac{\mu R^2}{c^2 \rho_0 h_0^2}, \quad M_g = \frac{15\pi}{8} \frac{\mu^2 R^6}{c^2 \rho_0 h_0^5}.$$

С учетом (1), (3), (19) запишем уравнение движения диска (2) в виде

$$(m - M_g) \frac{d^2 z}{dt^2} + K_g \frac{dz}{dt} + n_1 z + n_3 z^3 = 2\pi R^2 \left(p_1 - T_g \frac{dp_1}{dt} \right) = \pi R^2 p_m A(\omega) \sin(\omega t - \gamma(\omega)). \quad (20)$$

Здесь $A(\omega) = \sqrt{1 + (T_g \omega)^2}$, $\operatorname{tg} \gamma(\omega) = T_g \omega$.

Уравнение (20) является обобщением уравнения осциллятора Дуффинга. Оно позволяет исследовать частные случаи: вязкой несжимаемой жидкости при $c^2 \rightarrow \infty$ ($M_g = 0$, $T_g = 0$) и линейного упругого подвеса диска, если считать $n_3 = 0$. Заметим, что в правой части (20), в общем случае, две составляющих: первая определяется законом пульсации давления в торцевой полости, вторая – производной по времени от данного закона. Из (20) следует, что сжимаемость газа приводит к появлению дополнительного фазового сдвига γ , а также к уменьшению инерционных свойств колебательной системы по сравнению со случаем несжимаемой жидкости ($T_g = 0$ и $M_g = 0$). Вязкость газа и геометрические размеры канала определяют демпфирующие свойства колебательной системы (коэффициент K_g).

Основной аэроупругий отклик диска и его фазовый сдвиг. Для решения (20) используем метод гармонического баланса [17, 20]. Примем во внимание, что при изучении колебаний механических систем главное внимание уделяется основным колебаниям на частоте вынуждающей силы [17]. Поэтому при проведении метода считаем частоту колебаний диска близкой к частоте пульсации давления в торцевой полости $\theta \approx \omega$ и ищем решение в виде $z = z_m \sin(\omega t - \gamma)$ (т.е., применяя метод, рассматриваем одночленное разложение в ряд Фурье на основной частоте). Правую часть (20) представляем как $\pi R^2 p_m A(\omega) \sin(\omega t - \gamma + \phi)$, учитывая фазовый сдвиг ϕ за счет сил вязкого трения газа [17]. В результате получаем следующую алгебраическую систему:

$$\left[n_1 + \frac{3}{4} n_3 z_m^2 - (m - M_g) \omega^2 \right] z_m = \pi R^2 p_m A(\omega) \cos \phi, \quad K_g \omega z_m = \pi R^2 p_m A(\omega) \sin \phi. \quad (21)$$

Разрешая (21), находим основной нелинейный аэроупругий отклик диска

$$z_m = \frac{\pi R^2 p_m \sqrt{1 + (T_g \omega)^2} / (m - M_g)}{\sqrt{(\omega_*^2 - \omega^2)^2 + (K_g \omega / (m - M_g))^2}} \quad (22)$$

и его фазовый сдвиг

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{K_g \omega / (m - M_g)}{\omega_*^2 - \omega^2}. \quad (23)$$

Здесь $\omega_*^2 = (n_1 + (3/4)n_3 z_m^2) / (m - M_g)$ – скелетная кривая, определяющая изменение собственной частоты консервативной нелинейной системы, соответствующей рассматриваемой нами при $K_g = 0$, т.е. при исключении вязкости газа.

Заметим, при $n_3 = 0$ скелетная характеристика совпадает с собственной частотой линейного консервативного осциллятора. Переходя к безразмерной частоте

$\eta = \sqrt{\omega^2 (m - M_g) / n_1}$ запишем (22), (23) в виде

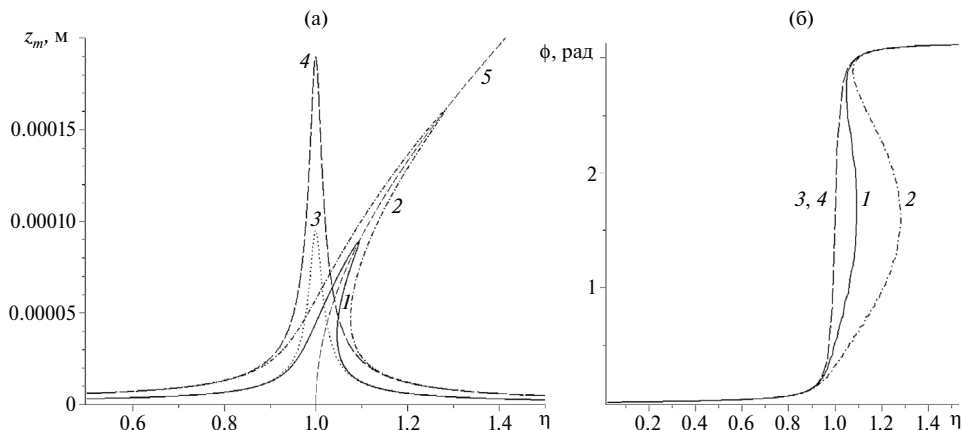


Рис. 2. Аэроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) диска при учете сжимаемости газа ($h_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\eta = 1$ соответствует $\omega = 14235.35$ рад/с): 1 – нелинейно-упругий подвес диска $p_m = 10^4$ Па; 2 – нелинейно-упругий подвес диска $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па; 3 – линейно-упругий подвес диска $p_m = 10^4$ Па; 4 – линейно-упругий подвес диска $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па; 5 – скелетная кривая η^* .

$$z_m = \frac{\pi R^2 p_m \sqrt{1 + (T_g \eta)^2 n_1 / (m - M_g) / n_1}}{\sqrt{(\eta_*^2 - \eta^2)^2 + S^2 \eta^2}}, \quad (24)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{S \eta}{\eta_*^2 - \eta^2}, \quad (25)$$

где $\eta_*^2 = 1 + (3/4)n_3 z_m^2 / n_1$ – безразмерная скелетная характеристика, $S^2 = K_g^2 / ((m - M_g)n_1)$.

Найденные основной аэроупругий отклик и фазовый сдвиг (22)–(25) при $n_3 \neq 0$ являются неявными функциями, однако, их исследование можно провести численно. Приведем пример такого исследования для следующих исходных данных: $R = 0.2$ м, $h_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\rho_0 = 1.2$ кг/м³, $\mu = 18.1 \cdot 10^{-6}$ кг/(м·с), $c = 290$ м/с, $n_1 = 6 \cdot 10^8$ Н/м, $n_3 = 2 \cdot 10^{16}$ Н/м³, $m = 3$ кг, $p_m = 10^4$ Па.

На рис. 2–4 представлены результаты расчетов нелинейного и линейного ($n_3 = 0$) аэроупругих откликов диска и соответствующих им фазовых сдвигов по (24), (25) для амплитуд пульсации давления в торцевой полости $p_m = 10^4$ Па; $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па. Графики на рис. 2 соответствуют случаю вязкого сжимаемого газа, а на рис. 3 – случаю вязкого несжимаемого газа (жидкости, т.е. при $M_g = 0$ и $T_g = 0$). На рис. 4 приведены графики для вязкого сжимаемого газа при уменьшенном зазоре между дисками $h_0 = 3.5 \cdot 10^{-4}$ м.

Выводы и заключение. Проведенное исследование позволило установить, что изменение плотности газа в канале приводит к дополнительному фазовому сдвигу в заданном на торцах законе пульсации давления. Численное исследование нелинейного и линейного аэроупругого отклика диска и его фазового сдвига показало, что сжимаемость газа приводит, в сравнении с несжимаемым случаем, к возрастанию значений амплитуд колебаний диска и незначительному уменьшению инерционных свойств рассматриваемой колебательной системы, что проявляется в небольшом увеличении значений резонансных частот диска. Жесткая кубическая нелинейность подвеса ведет к изгибу характеристик вправо и росту значений резонансных частот с ростом

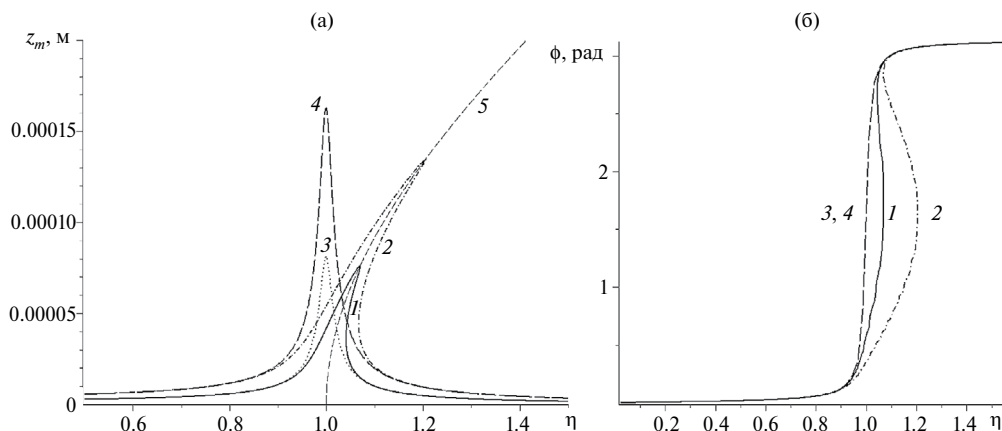


Рис. 3. Аэроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) диска без учета сжимаемости газа ($h_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\eta = 1$ соответствует $\omega = 14142.13$ рад/с): 1 – нелинейно-упругий подвес диска $p_m = 10^4$ Па; 2 – нелинейно-упругий подвес диска $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па; 3 – линейно-упругий подвес диска $p_m = 10^4$ Па; 4 – линейно-упругий подвес диска $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па; 5 – скелетная кривая η^* .

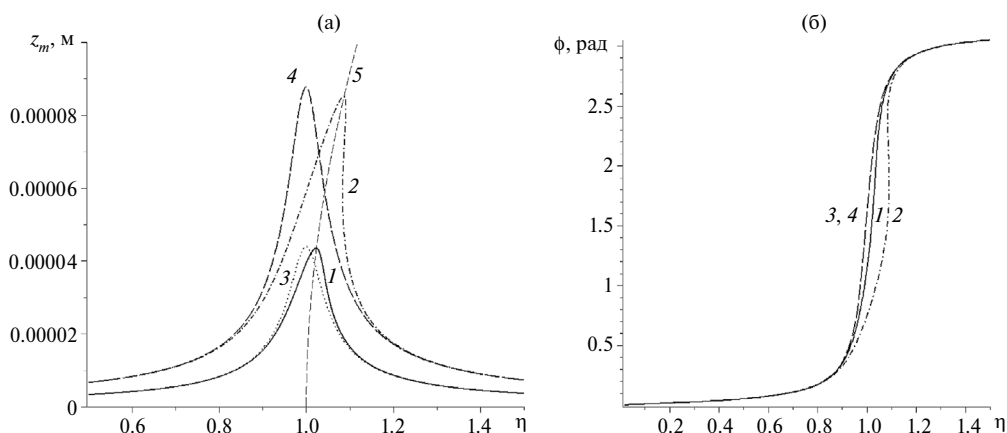


Рис. 4. Аэроупругий отклик (а) и фазовый сдвиг (б) диска при учете сжимаемости газа ($h_0 = 3.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\eta = 1$ соответствует $\omega = 14725.56$ рад/с): 1 – нелинейно-упругий подвес диска $p_m = 10^4$ Па; 2 – нелинейно-упругий подвес диска $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па; 3 – линейно-упругий подвес диска $p_m = 10^4$ Па; 4 – линейно-упругий подвес диска $p_m = 2 \cdot 10^4$ Па; 5 – скелетная кривая η^* .

амплитуд пульсации давления в торцевой полости в сравнении с линейным случаем. Изгиб кривых аэроупругого отклика, как известно [16, 17], может приводить к неустойчивым колебаниям диска со скачкообразным изменением амплитуд в частотном диапазоне данного изгиба. Расчеты, представленные на рис. 2, 3, показали возможность данных колебаний. С другой стороны, показано, что уменьшение зазора между дисками ведет к подавлению амплитуд колебаний и интенсивности изгиба характеристик (рис. 4), и, как следствие, к подавлению возможности неустойчивых колебаний. В случае линейно-упругого подвеса диска изгиба кривых аэроупругого отклика и фазового сдвига вправо нет, т.е. резонансная частота не зависит от амплитуды пульсации давления в торцевой полости и отсутствует зона неустойчивых колебаний. При

этом кривые фазового сдвига для разных амплитуд пульсации давления совпадают (рис. 2–4, кривые фазового сдвига 3, 4).

Предложенная в статье модель нелинейных аэроупругих колебаний диска и полученные на ее основе аэроупругий отклик и фазовый сдвиг, а также результаты исследования данных характеристик можно использовать для изучения динамики газовых и жидкостных демпферов и опор с нелинейно- и линейно-упругими связями, а также для упругих чувствительных элементов датчиков давления, имеющих нелинейно-упругий подвес.

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00159.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Константиnescу В. Н.* Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
2. *Распопов В. Я.* Микромеханические приборы. М.: Машиностроение, 2007. 400 с.
3. *Хасьянова Д. У., Мукутадзе М. А.* Оптимизация опорной поверхности подшипника скольжения по параметру несущей способности с учетом зависимости вязкости смазочного материала от давления и температуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 4. С. 66.
4. *Турчак Л. И., Шидловский В. П.* Математическое моделирование проблем газовой смазки // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 2. С. 329.
5. *Горшков А. Г., Морозов В. И., Пономарев А. Т., Шклярчук Ф. Н.* Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 592 с.
6. *Païdoussis M. P.* Dynamics of cylindrical structures in axial flow: A review // Journal of Fluids and Structures. 2021. V. 107. 103374.
7. *Indeitsev D. A., Osipova E. V.* Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water // Technical Physics. 2000. V. 45. № 12. P. 1513.
8. *Velmisov P. A., Pokladova Y. V.* Mathematical modelling of the “Pipeline—pressure sensor” system // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1353. 01208.
9. *Бочкарев С. А., Лекомцев С. В., Матвеев В. П.* Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 108.
10. *Tulchinsky A., Gat A. D.* Frequency response and resonance of a thin fluid film bounded by elastic sheets with application to mechanical filters // J. of Sound and Vibration. 2019. V. 438. P. 83.
11. *Могилевич Л. И., Попов В. С., Попова А. А.* Динамика взаимодействия пульсирующей вязкой жидкости со стенками щелевого канала, установленного на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 1. С. 15.
12. *Королева М. Р., Мищенкова О. В., Редер Т., Тенев В. А., Чернова А. А.* Численное моделирование процесса срабатывания предохранительного клапана // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. № 4. С. 495.
13. *Raeder T., Mishchenkova O. V., Koroleva M. R., Tenenev V. A.* Nonlinear processes in safety systems for substances with parameters close to a critical state // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2021. V. 17. No. 1. P. 119.
14. *Barulina M., Santo L., Popov V. Popova A., Kondratov D.* Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations // Mathematics. 2022. V. 10. 3844.
15. *Шевцова Е. В.* Газовое демпфирование в микромеханических приборах // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2006. № 2 (63). С. 100.
16. *Nayfeh A. H., Mook D. T.* Nonlinear oscillations New York: Wiley, 1979. 720 p.
17. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.
18. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
19. *Van Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. Stanford: The Parabolic Press, 1975. 271 p.
20. *Krack M., Gertss J.* Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems. New York: Springer, 2019. 159 p.