

УДК 004.421.6

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМЫ ОДУ

© 2024 г. А. Д. Брюно^{a, *}, В. Ф. Еднерал^{b, **}^aИнститут прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
125047 Москва, Миусская площадь, д. 4^bНаучно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1(2)

*E-mail: abruno@keldysh.ru

**E-mail: edneral@theory.sinp.msu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2023

После доработки: 10.09.2023

Принята к публикации 01.10.2023

Изучается интегрируемость автономной двумерной полиномиальной системы ОДУ с вырожденной особой точкой в начале координат, зависящей от шести параметров. Условие интегрируемости первого квазиоднородного приближения позволяет фиксировать один из параметров на счетном множестве его значений. Дальнейший анализ проводится для одного такого значения и пяти свободных параметров. С помощью метода степенной геометрии система приводится к невырожденной форме при помощи процесса расщепления (blowup). Далее методом нормальной формы вычисляются необходимые условия локальной интегрируемости. Иными словами, ищутся такие условия на параметры, при которых исходная система является локально интегрируемой вблизи вырожденной стационарной точки. В результате решения этих условий мы нашли семь двухпараметрических семейств в пятимерном параметрическом пространстве. При значениях параметров из этих семейств были найдены первые интегралы системы. Громоздкие вычисления, возникающие в обсуждаемой задаче, были выполнены средствами компьютерной алгебры.

Ключевые слова: вырожденная система ОДУ, методы нормальной формы и степенной геометрии

DOI: 10.31857/S0132347424020044 **EDN:** RPDZLZ

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании нелинейных систем ОДУ желательнее получить точные решения таких систем в виде формул. Если такие решения найдены, можно изучать свойства системы вблизи этих решений. К сожалению, для большинства систем ОДУ в общем виде точные решения найти не удастся. Но когда система зависит от параметров, мы можем попытаться найти семейства значений параметров, при которых такая система допускает точное решение. Здесь мы предлагаем и проверяем новый подход к поиску таких семейств. Отметим, что если под точным решением подразумевать существование решения в квадратурах, то для автономной системы ОДУ вопрос сводится к изучению ее интегрируемости. Но для интегрируемости двумерной автономной динамической системы достаточно иметь один первый интеграл движения, поэтому задача о точных решениях сводится здесь к поиску случаев интегрируемости и вычислению соответствующих интегралов.

В работах Пуанкаре и более поздних математиков была сформулирована идея приведения системы ОДУ к нормальной форме — к виду, наиболее про-

стому для исследования. Приведенная к нормальной форме система, по сути, имеет порядок на единицу меньше исходной. В случае разрешенной относительно производных автономной двумерной системы она преобразуется к автономной одномерной и становится, таким образом, интегрируемой в квадратурах.

Нормализующее преобразование, как правило, записывается в виде бесконечного формального ряда и возникает вопрос о его сходимости. Условия сходимости нормализующего преобразования получены и исследованы в работах [1, 2] и выполняются далеко не всегда. Однако если система ОДУ зависит от параметров, существует возможность, что при некоторых значениях параметров эти условия все же выполняются. Иными словами, мы можем записать условия интегрируемости в виде условия на параметры системы. Все сказанное относится к локальному анализу, в котором изучение системы ОДУ производится в малых окрестностях некоторых точек фазового пространства, причем наибольший интерес представляют собой окрестности неподвижных точек, в которых существуют решения, не

зависящие от независимой переменной, то есть решения — константы. Итак, возможно записать условие локальной интегрируемости как некоторое алгебраическое условие на параметры системы. Но если система имеет несколько неподвижных точек, то нужно искать семейства параметров, при которых система локально интегрируема во всех этих точках одновременно. Если такие семейства существуют, то система, возможно, глобально интегрируема при соответствующих значениях параметров. Интегралы системы при этих значениях параметров следует затем искать другими методами. Эту схему удается реализовать на практике.

Для иллюстрации указанного подхода мы рассматриваем вырожденную двумерную систему автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенную относительно производных и с полиномиальной правой частью пятого порядка. Система зависит от шести параметров. Один из параметров удается фиксировать исходя из условия интегрируемости первого квазиоднородного приближения. Пять параметров затем рассматриваются свободными.

Выбор такой системы определялся, во-первых, тем, что она принадлежит к классу ОДУ без линейной части. Такой класс систем ранее практически не исследовался. Во-вторых, после расщепления эта система распадается на несколько нильпотентных систем, которые мы и исследуем. Таким образом мы проверяем подход также и для нильпотентных систем.

Настоящая работа завершает цикл статей [3, 4, 5]. В ней закончено рассмотрение всех полученных случаев интегрируемости рассматриваемой ниже вырожденной системы ОДУ. Исследование последнего из них потребовало изучения резонанса 27-го порядка, формула нормализующего преобразования для которого содержит свыше 8 миллионов слагаемых. Эта работа заняла более года. Результат (первый интеграл) оказался, впрочем, вполне компактным, см. формулу (9.14). Очевидно, что столь громоздкие символьные вычисления невозможны без применения систем компьютерной алгебры. Безальтернативность использования компьютерных систем символьных вычислений подчеркивалась также в работе [6].

Применение метода нормальной формы к исследованию интегрируемости систем нелинейных ОДУ рассматривалось в работе [7]. Обсуждаемый подход был также успешно применен к поиску интегрируемых случаев обобщенного уравнения Льева [8, 9, 10]. Исследована также система Баутина [11].

Примером доказательства неинтегрируемости системы ОДУ методом нормальной формы может служить работа [12].

2. ИССЛЕДУЕМАЯ СИСТЕМА

Мы будем рассматривать систему

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha y^3 + \beta x^3 y + a_0 x^5 + a_1 x^2 y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma x^2 y^2 + \delta x^5 + b_0 x^4 y + b_1 x y^3.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Эта система является подсемейством системы, представленной в работе [13]. x и y здесь зависимые переменные, функции независимой переменной — времени t . Системы с нильпотентной матрицей линейной части подробно исследованы Ляпуновым и другими авторами. Система (2.1) представляет собой простейший случай двумерной системы без линейной части с ломаной Ньютона (см. главу II в [2]), состоящей из единственного ребра. В общем случае такие системы не изучались. Однако система с подобным носителем рассматривалась в [13], где авторы положили $-\alpha = \beta = 1$ и $3\beta + 2\gamma = 0$ и изучили гамильтонов подслучай этой системы с дополнительным предположением, что соответствующий гамильтониан свободен от квадратичных множителей. Мы изучаем здесь общий случай, когда система (2.1) негамильтонова.

3. УПРОЩЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим первое квазиоднородное приближение системы (2.1) и необходимые условия его локальной интегрируемости. Это приближение имеет вид [3]

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \alpha \tilde{y}^3 + \beta \tilde{x}^3 \tilde{y}, \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = \gamma \tilde{x}^2 \tilde{y}^2 + \delta \tilde{x}^5, \quad (3.1)$$

где $\alpha \neq 0$ и $\delta \neq 0$. Используя линейное преобразование $x = \sigma \tilde{x}$, $y = \tilde{y}$, мы можем исключить эти два ненулевых параметра и вместо (3.1) получить систему

$$\frac{dx}{dt} = -y^3 - bx^3 y, \quad \frac{dy}{dt} = cx^2 y^2 + x^5. \quad (3.2)$$

Любая двумерная автономная квазиоднородная система имеет первый интеграл, но не обязательно гладкий. Нас интересует достаточно гладкая интегрируемость системы (3.1), во всяком случае без существенных особенностей в начале координат, поскольку мы ищем условия на параметры, при которых система (2.1) является гладко интегрируемой.

В работе [3] был доказан следующий результат.

Теорема 1. В случае $D(3b+2c)^2 - 24 \neq 0$ система (3.2) аналитически интегрируема тогда и только тогда, когда число $N = (3b - 2c)/\sqrt{D}$ рационально.

В этой статье мы изучим частный случай $c = 1/b$, $b \neq 0$, когда $N = 1$ и $D = (3b - 2/b)^2$. В силу теоремы 1 первое квазиоднородное приближение имеет аналитический интеграл, хотя это не гамильтонова система. Случай $b^2 = 2/3$, при котором $D = 0$, будет рассмотрен отдельно.

Далее мы будем изучать проблему интегрируемости упрощенной системы, в которой остается 5 свободных параметров

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y^3 - bx^3y + a_0x^5 + a_1x^2y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= (1/b)x^2y^2 + x^5 + b_0x^4y + b_1xy^3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, теперь мы рассматриваем систему с пятью произвольными параметрами a_i, b_i , ($i = 0, 1$) и $b \neq 0$.

4. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ К НЕВЫРОЖДЕННОМУ ВИДУ

Это можно сделать, используя расщепление (см. Главу 1, п. 1.8 в [2]) при помощи обратимого степенного преобразования

$$x = uv^2, \quad y = uv^3 \quad (4.1)$$

с масштабированием времени $u^2v^7dt = d\tau$. В результате система (3.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -3u - (3b + 2/b)u^2 - 2u^3 + \\ &+ (3a_1 - 2b_1)u^2v + (3a_0 - 2b_0)u^3v, \\ \frac{dv}{d\tau} &= v + (b + 1/b)uv + u^2v + \\ &+ (b_1 - a_1)uv^2 + (b_0 - a_0)u^2v^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Следует изучить эту систему на инвариантных линиях $u = 0$ и $v = 0$.

Техника определения конкретного вида степенного преобразования для расщепления вырожденной точки описана в § 5 главы III книги [14].

5. О НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ И УСЛОВИИ СХОДИМОСТИ НОРМАЛИЗУЮЩЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В окрестности неподвижной точки $X = 0$ система вида (4.2) всегда может быть записана в обозначениях

$$\frac{dX}{dt} = AX + \Phi(X), \quad (5.1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор переменных, A — матрица линейных членов системы, а степенной ряд $\tilde{\Phi}(X)$ не содержит свободных и линейных по X членов. Линейной заменой переменных

$$X = BY, \quad (5.2)$$

приведем матрицу A к жордановой форме $J = B^{-1}AB$ и систему (5.1) к виду

$$\frac{dY}{dt} = JY + \tilde{\Phi}(Y). \quad (5.3)$$

Формальная квазитожественная замена координат

$$Y = Z + \Xi(Z), \quad (5.4)$$

где $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — вектор, а $\xi_j(Z)$ — формальные степенные ряды, приводит (5.3) к нормальной форме [1, 2]

$$\frac{dZ}{dt} = JZ + \Psi(Z). \quad (5.5)$$

Линейная часть системы при таком преобразовании не меняется.

Мы запишем эту нормальную форму в виде

$$\frac{dz_j}{dt} = z_j g_j(Z) = z_j \sum_{Q \in N_j} g_{jQ} Z^Q, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.6)$$

$$N_j = \{Q : Q \in \mathbb{Z}^n, Q + E_j \geq 0\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

E_j означает единичный вектор с j -той ненулевой компонентой. Другими словами, $Q = (q_1, \dots, q_n)$ — это вектор с целочисленными компонентами, которые все неотрицательны за исключением j -того элемента, он может быть равен -1 . Мы используем мультииндексную запись $Z^{Q_{z_1^{q_1} \dots z_n^{q_n}}}$. В формуле (5.6) мы предположили, что J является диагональной матрицей. Это предположение сделано лишь для упрощения записи, поскольку в данной работе необходимости в рассмотрении жорданова случая не возникает. Имеются формулы и для общего жорданового случая.

Обозначим вектор, состоящий из собственных значений матрицы A и являющийся диагональю матрицы J , как $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Система (5.6) называется *резонансной нормальной формой*, если:

а) J — жорданова матрица,

б) в записи (5.6) есть только *резонансные члены* $z_{ji} g_{jQ} Z^Q$, для которых скалярное произведение векторов обнуляется

$$\langle Q, \Lambda \rangle = q_1 \lambda_1 + \dots + q_n \lambda_n = 0. \quad (5.7)$$

Теорема 2 ([1, 2]). *Существует формальное преобразование (5.4), приводящее систему к ее нормальной форме (5.6).*

В работах [1, 2] сформулировано условие А на коэффициенты нормальной формы (5.6) и условие ω на собственные значения матрицы А. Выполнение этих двух условий гарантирует сходимость нормализующего преобразования (5.4).

Условие А. В нормальной форме (5.6)

$$g_j = \lambda_j \alpha(Z) + \bar{\lambda}_j \beta(Z), \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.8)$$

где $\alpha(Z)$ и $\beta(Z)$ — некоторые степенные ряды, не зависящие от индекса j .

Пусть

$$\omega_k = \min \langle Q, \Lambda \rangle \text{ по всем } Q \in N_1 \cup \dots \cup N_n, \\ \langle Q, \Lambda \rangle \neq 0, \sum_{j=1}^n q_j < 2^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Условие ω (условие на малые знаменатели). *Сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \log \omega_k > -\infty,$$

Это слабое арифметическое условие на собственные числа Λ . В двумерном резонансном случае условие ω выполняется, и далее здесь мы его обсуждать не будем.

Теорема 3 ([1, 2]). *Если у системы (5.3) вектор Λ удовлетворяет условию ω и нормальная форма (5.5) удовлетворяет условию А, то нормализующее преобразование (5.4) аналитично.*

Рассмотрим подробнее условие А в двумерном случае. Пусть отношение соответствующих двух собственных чисел рационально

$$\lambda_1/\lambda_2 = -m/n \quad \text{или} \quad n\lambda_1 = -m\lambda_2, \quad (5.9)$$

где m и n — натуральные числа. Тогда, учитывая (5.6) и (5.9), мы можем написать условие А (5.8) в виде системы

$$n \frac{d \log(z_1)}{dt} = n(\lambda_1 \cdot \alpha(Z) + \bar{\lambda}_1 \cdot \beta(Z)), \\ m \frac{d \log(z_2)}{dt} = m(\lambda_2 \cdot \alpha(Z) + \bar{\lambda}_2 \cdot \beta(Z)). \quad (5.10)$$

Суммируя эти два равенства, вследствие (5.9), получим

$$\frac{d \log(z_1^n z_2^m)}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad z_1^n z_2^m = \text{const.} \quad (5.11)$$

Итак, в нормализованной системе $z_1^n z_2^m$ — первый интеграл движения. Это соответствует локальной

интегрируемости исходной системы в начале координат, поскольку условия А достаточно для сходимости нормализующего преобразования вблизи неподвижной точки. В случае же нулевого собственного значения $\lambda_i = 0$, условие А имеет вид $g_i(Z) = 0$ и тогда в нормализованной системе z_i — первый интеграл движения.

6. УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Условие А является необходимым и достаточным условием локальной интегрируемости двумерной системы вблизи элементарной неподвижной точки [1, 2]. Это условие является сильным алгебраическим условием на коэффициенты нормальной формы. Для локальной интегрируемости исходной системы (3.3) вблизи вырожденной (неэлементарной) стационарной точки необходимо иметь локальную интегрируемость вблизи каждой из элементарных стационарных точек, которые возникают в результате описанного выше процесса расщепления.

Условие А представляет собой бесконечный ряд полиномиальных уравнений на параметры системы. Совокупность соответствующих многочленов образует идеал над полиномиальным кольцом. В силу теоремы Гильберта о базисе [16], такая бесконечная система эквивалентна конечной. Проблема состоит в том, что мы можем лишь предполагать, что многочлены низлежащих порядков такой системы уже образуют ее базис. Однако изученные нами примеры двумерных систем ОДУ подтверждают такое предположение. В любом случае, если условие А в виде бесконечной совокупности уравнений является необходимым и достаточным, то любое конечное подмножество соответствующих уравнений будет необходимым условием. Это будет конечная система алгебраических уравнений относительно параметров исходной системы, ее решения будут соответствовать необходимым условиям локальной интегрируемости системы вблизи соответствующей неподвижной точки расщепленной системы (4.2), а следовательно — необходимым условиям интегрируемости исходной системы (3.3). Но вырожденной точке системы (3.3) соответствуют несколько неподвижных точек системы (4.2), следовательно искомым условием интегрируемости будет выполнение соответствующих условий во всех неподвижных точках одновременно.

7. УСЛОВИЕ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДЛЯ РАСЩЕПЛЕННОЙ СИСТЕМЫ

При степенном преобразовании (4.1) неподвижная точка системы (3.3) $x = y = 0$ раздувается в две инвариантные прямые $u = 0$ и $v = 0$. Вдоль

прямой $u=0$ система (4.2) имеет единственную стационарную точку $u=v=0$. Вдоль второй линии $v=0$ эта система имеет четыре элементарных стационарных точки

$$u=0, \quad u=-\frac{1}{b}, \quad u=-\frac{3b}{2}, \quad u=\infty. \quad (7.1)$$

Итак, необходимым условием локальной интегрируемости системы (3.3) вблизи точки $x=y=0$ является локальная интегрируемость вблизи этих неподвижных точек одновременно.

Лемма 1 ([3]). Вблизи точек $u=v=0$ и $u=\infty, v=0$ система (4.2) локально интегрируема.

Таким образом, мы должны исследовать условия локальной интегрируемости на двух других стационарных точках (7.1). Тогда у нас будут условия локальной интегрируемости системы (3.3) вблизи точки $X=0$.

Рассмотрим стационарную точку $u=-1/b, v=0$. Сначала мы ограничимся случаем $b^2=2/3$, когда линейная часть системы (4.2) после сдвига $u=w-1/b$ не имеет чисто нулевых собственных значений. При $b^2=2/3$ преобразованная система в новых переменных $\tilde{u}$ и v в линейной части имеет ячейку Жордана с обоими нулевыми собственными значениями. Этот случай мы изучим ниже с помощью еще одного степенного преобразования.

Чтобы упростить собственные значения, мы еще раз отмасштабируем время множителем $d\tau = (2-3b^2)/b^2 d\tau_1$. После этого получим вектор собственных значений системы (4.2) в этой точке в виде $(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 0)$. Таким образом, нормальная форма системы будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau_1} &= -z_1 + z_1 g_1(z_2), \\ \frac{dz_2}{d\tau_1} &= z_2 g_2(z_2), \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $g_{1,2}(x)$ — формальные степенные ряды от x . Коэффициенты этих рядов являются рациональными функциями параметров системы a_0, a_1, b_0, b_1 и b . Можно доказать, что знаменатель каждой из этих рациональных функций пропорционален некоторой целой степени $k(n)$ многочлена $(2-3b^2)$. Их числители являются полиномами от параметров системы

$$g_{1,2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{1,2;n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1)}{(2-3b^2)^{k(n)}} x^n.$$

Условие А интегрируемости уравнения (7.2) выглядит как $g_2(x) \equiv 0$. Это эквивалентно бесконечной полиномиальной системе уравнений

$$p_{2,n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

Мы вычислили первые три полинома $p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}$ с помощью нашей программы [15] и получили два решения соответствующего конечного подмножества уравнений (7.3) при $b \neq 0$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -b_0 b, \quad b_1 = 0, \quad b^2 \neq 2/3 \quad (7.4)$$

и

$$a_0 = a_1 b, \quad b_0 = b_1 b, \quad b^2 \neq 2/3. \quad (7.5)$$

Добавление следующего уравнения $p_{2,4}=0$ к подмножеству уже решенных уравнений не меняет эти решения. Мы предполагаем, что полученные первые уравнения уже образуют тот конечный базис, который должен существовать у полиномиальной системы по теореме Гильберта [16].

Построение многочленов $p_{2,n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1)$ общего вида для больших порядков n весьма сложная техническая проблема. Значительно проще построить эти полиномы при условиях (7.4) и (7.5) для фиксированных значений параметра b . Мы проверили решения подмножества уравнений

$$\begin{aligned} p_{2,n}(b, a_0 = a_1 b, a_1, b_0 = b_1 b, b_1) &= 0, \\ n &= 1, 2, \dots, 28, \end{aligned}$$

при $b=1$ и $b=2$. Во всяком случае до 28-го порядка все уравнения выполняются, поэтому предположим, что в неподвижной точке $u=-1/b, v=0$ решения (7.4) и (7.5) удовлетворяют условию А.

Рассмотрим вторую неподвижную точку $u=-3b/2, v=0$. Изменим масштаб времени $d\tau = (2-3b^2)d\tau_2$. Получим вектор собственных значений системы (4.2) в этой точке в виде $(-1/4, 3/2)$. Таким образом нормальная форма имеет резонанс седьмого порядка.

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau_2} &= -(1/4)z_1 + z_1 r_1(z_1^6 z_2), \\ \frac{dz_2}{d\tau_2} &= (3/2)z_2 + z_2 r_2(z_1^6 z_2), \end{aligned} \quad (7.6)$$

где $r_{1,2}(x)$ также формальные степенные ряды, причем в (7.6) они зависят от единственной резонансной переменной $z_1^6 z_2$.

$$r_{1,2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{1,2;n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1)}{(2-3b^2)^{l(n)}} x^n.$$

Условие А для уравнения (7.6) выглядит как $6r_1(x) + r_2(x) = 0$. Оно эквивалентно бесконечной полиномиальной системе уравнений

$$6q_{1,n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1) + q_{2,n}(b, a_0, a_1, b_0, b_1) = 0, \\ n = 7, 14, \dots \quad (7.7)$$

Мы вычислили многочлены $q_{1,7}, q_{2,7}$ и решили соответствующие уравнения из множества (7.7) при значениях параметров из решения (7.5). Мы нашли пять различных двухпараметрических решений (b и a_1 — свободные параметры)

$$\begin{aligned} 1) & b_1 = -2a_1, a_0 = a_1b, b_0 = b_1b, b^2 \neq 2/3, \\ 2) & b_1 = (3/2)a_1, a_0 = a_1b, b_0 = b_1b, b^2 \neq 2/3, \\ 3) & b_1 = (8/3)a_1, a_0 = a_1b, b_0 = b_1b, b^2 \neq 2/3 \end{aligned} \quad (7.8)$$

и

$$\begin{aligned} 4) & b_1 = \frac{197 - 7\sqrt{745}}{24}a_1, a_0 = a_1b, b_0 = b_1b, b^2 \neq 2/3, \\ 5) & b_1 = \frac{197 + 7\sqrt{745}}{24}a_1, a_0 = a_1b, b_0 = b_1b, b^2 \neq 2/3. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Мы проверили выполнение (7.7) до $n=49$ для решений (7.8) при значениях $b=1$ и $b=2$ и произвольном (символьном) a_1 .

В то же время решения (7.8) являются частными случаями решения (7.5) при соответствующих значениях b_1 , а решение (7.4) — частный случай (7.8) при значениях $a_0 = b_1 = 0$, т.е. полученные решения справедливы для обеих точек одновременно.

Решения (7.9), начиная с порядка $n=14$, верны только при дополнительном условии $a_1=0$. Но при этом решения (7.9) — лишь частный случай решения (7.8). Итак, в соответствии с основным предположением мы можем предположить

Гипотеза 1. При $b \neq 0$ и $b^2 \neq 2/3$, выполнение какого-либо из равенств:

$$\begin{aligned} 1) & b_1 = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = -b_0; \\ 2) & b_1 = -2a_1, \quad a_0 = a_1b, \quad b_0 = -2a_1b; \\ 3) & b_1 = (3/2)a_1, \quad a_0 = a_1b, \quad b_0 = (3/2)a_1b; \\ 4) & b_1 = (8/3)a_1, \quad a_0 = a_1b, \quad b_0 = (8/3)a_1b. \end{aligned} \quad (7.10)$$

является условием локальной интегрируемости системы (4.2) во всех стационарных точках многообразия $v=0$ и, таким образом, является необходимым условием локальной интегрируемости системы (3.3) вблизи вырожденной точки $x=y=0$.

Итак, каждое из условий (7.10) является следствием условия А, поэтому, чтобы доказать эту гипотезу, нам необходимо доказать что при выполнении любого из условий (7.10) выполняется условие А. Т.е. что при решении всей бесконечной цепочки уравнений ни одно из условий (7.10) не исчезнет, в то же время и новых решений у системы при ее пополнении появиться не может. В силу существо-

вания у бесконечной нетеровой системы конечного базиса [16], такое доказательство представляется возможным, но пока мы его не нашли. Обнаружилось, однако, другая возможность применения соотношений (7.10).

8. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Заметим, что если согласиться с гипотезой 1, то можно сформулировать следующее утверждение

Гипотеза 2. Условия (7.10) являются необходимыми условиями существования достаточно гладкого первого интеграла системы (4.2).

Действительно, если предположить существование функции, однозначной в некоторой области и представляющей собой интеграл движения, то в каждой точке этой области, включая неподвижные, должна иметь место локальная интегрируемость. Первые интегралы для каждого случая из (7.10) выписаны в Приложении. Интегралы были вычислены методами Лагунинского [17] или Дарбу [4, 18] при помощи системы МАТЕМАТИКА-11.

Заменой переменных, обратной к (4.1), мы получили также первые интегралы исходной вырожденной системы (3.3). Заметим, что для каждого такого случая из выражения для первого интеграла можно выписать решение системы в квадратурах, т.е. мы проинтегрировали исходную систему для некоторых двумерных множеств параметров. Еще три первых интеграла получены ниже для случая $b^2=2/3$.

9. СЛУЧАЙ $b^2=2/3$

Заметим, что выбор знака b не имеет значения из-за линейного автоморфизма $\{x, y, b, a_0, a_1, b_0, b_1\} \rightarrow \{-x, -y, -b, a_0, -a_1, b_0, -b_1\}$ системы (3.3). Положим ниже $b = +\sqrt{2/3}$. В этом случае обе стационарные точки $u = -3b/2, v = 0$ и $u = -1/b, v = 0$ схлопываются в одну и после сдвига $u \rightarrow w - 1/b$ вместо (4.2) имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} = & v(-92\sqrt{32}a_0 + 92a_1 + 3\sqrt{32}b_0 - 3b_1) + \\ & + wv(272a_0 - 3\sqrt{6}a_1 - 9b_0 + 2\sqrt{6}b_1) + \\ & + w^2v(-9\sqrt{32}a_0 + 3a_1 + 3\sqrt{6}b_0 - 2b_1) + \\ & + \sqrt{6}w^2 - 2w^3 + w^3v(3a_0 - 2b_0), \\ \frac{dv}{d\tau} = & v^2(-32a_0 + \sqrt{32}a_1 + 32b_0 - \sqrt{32}b_1) + \\ & + wv^2(\sqrt{6}a_0 - a_1 - \sqrt{6}b_0 + b_1) + \\ & + w^2v^2(-a_0 + b_0) - \sqrt{66}wv + w^2v. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Эта система имеет нулевые собственные значения в стационарной точке $w = v = 0$, поэтому мы должны снова применить степенное преобразование.

9.1. Подслучай $3a_0 - 2b_0 = b(3a_1 - 2b_1)$

Этот случай является расширением условий $a_0 = a_1 b$, $b_0 = b_1 b$ из (7.5). Если $b^2 = 2/3$, уравнение (9.1) можно переписать так

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} = & \frac{3v}{2b}[(3a_0 - 2b_0) - b(3a_1 - 2b_1)] + \\ & + wv(272a_0 - 3\sqrt{6}a_1 - 9b_0 + 2\sqrt{6}b_1) + \\ & + w^2v(-9\sqrt{32}a_0 + 3a_1 + 3\sqrt{6}b_0 - 2b_1) - \\ & - 2w^3 + w^3v(3a_0 - 2b_0) + \sqrt{6}w^2, \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} = & v^2(-32a_0 + \sqrt{32}a_1 + 32b_0 - \sqrt{32}b_1) + \\ & + wv^2(\sqrt{6}a_0 - a_1 - \sqrt{6}b_0 + b_1) + \\ & + w^2v^2(-a_0 + b_0) - \sqrt{6}6wv + w^2v. \end{aligned}$$

Мы видим, что в системах (9.1) и (9.2) коэффициент при v в линейной части первого уравнения равен нулю, если $3a_0 - 2b_0 = b(3a_1 - 2b_1)$. В этом подслучае мы используем преобразование

$$u \rightarrow w - 1/b, \quad v \rightarrow rw, \quad \dot{v} \rightarrow \dot{r}w + r\dot{w}, \quad (9.3)$$

с масштабированием по времени путем деления уравнений на $w/\sqrt{6}$, т.е. $\tilde{\tau} = w\tau/\sqrt{6}$. Тогда из системы (4.2) при $b^2 = 2/3$ можно получить

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tilde{\tau}} = & 6w + 3(3a_1 - 2b_1)rw - 2\sqrt{6}w^2 - \\ & - 2\sqrt{6}(3a_1 - 2b_1)rw^2 + 2(3a_1 - 2b_1)rw^3, \\ \frac{dr}{d\tilde{\tau}} = & -7r - (9a_1 - \sqrt{32}b_0 - 5b_1)r^2 + 3\sqrt{6}rw + \\ & + (7\sqrt{6}a_1 - 2b_0 - 13\sqrt{23}b_1)r^2w - \\ & - (8a_1 - \sqrt{32}b_0 - 163b_1)r^2w^2. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Это трехпараметрическая система с резонансом 13-го порядка в стационарной точке $w = 0, r = 0$ на инвариантной прямой $w = 0$. Вдоль этой линии есть еще одна стационарная точка. Для нее можно доказать локальную интегрируемость системы, и она не дает никаких дополнительных ограничений на параметры.

Мы вычислили нормальную форму для системы (9.4) до 26-го порядка и получили два уравнения для условия А. Это $A_{13} = 0$ и $A_{26} = 0$, где A_{13} и A_{26} приведены в [19]. Каждое из этих уравнений шестого и двенадцатого порядков однородно по параметрам

a_1, b_0 и b_1 системы (3.3). Многочлены A_{13} и A_{26} обнуляются при условиях (7.5).

Однородные алгебраические уравнения с тремя переменными можно переписать как неоднородные уравнения с двумя переменными. Если мы предположим, что $a_1 = 0$, мы получим только одномерные и нульмерные решения в пространстве параметров. В случае $a_1 \neq 0$ подставляем $b_0 = c_0 a_1$, $b_1 = c_1 a_1$ и получаем систему двух уравнений с двумя переменными $A_{13}(c_0, c_1) = 0$, $A_{26}(c_0, c_1) = 0$. Результат этих многочленов по каждой из двух переменных тождественно равен нулю, так что достаточно решить только уравнение $A_{13}(c_0, c_1) = 0$. Полином A_{13} факторизуется в произведение четырех множителей, включая a_1^6

$$\begin{aligned} A_{13} = & 48 \left(c_1 - \frac{3}{2} \right) a_1^6 \times \left(c_0 - \frac{1}{12} \sqrt{6} c_1 + \frac{1}{2} \sqrt{6} \right)^2 \times \\ & \times [409790784 c_0^3 - 104 \sqrt{6} c_0^2 \times (-9152256 + 3385633 c_1) - \\ & - 208 c_0 (-10917702 + c_1 (-360720 + 3319927 c_1)) + \\ & + \sqrt{6} (-718439040 + c_1 (2461047528 + \\ & + c_1 (-1944898681 + 441207868 c_1)))]]. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Из первых двух множителей получаем пару решений $c_1 = 3/2$ и $c_1 = 6 + 2\sqrt{6}c_0$ или

$$\begin{aligned} 5) \quad a_0 = & (2b_0 + b(3a_1 - 2b_1))/3, \\ b_1 = & 3a_1/2, \quad b = \sqrt{2/3}, \\ 6) \quad a_0 = & (2b_0 + b(3a_1 - 2b_1))/3, \\ b_1 = & 6a_1 + 2\sqrt{6}b_0, \quad b = \sqrt{2/3}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Для решений (9.6) мы вычислили нормальную форму системы (9.5) до 36-го порядка и получили для каждого случая линейную систему. Итак, это случаи локальной интегрируемости.

Мы изучили решения двухпараметрическим случаем с коэффициентами над алгебраическим расширением рациональных чисел с алгебраическим числом $\sqrt{6}$. Последний множитель в (9.5) не имеет таких корней. Однако в принципе возможно существование решений в других алгебраических расширениях.

Соответствующая пара первых интегралов системы для найденных параметров (9.6) выписана в Приложении.

9.2. Подслучай $3a_0 - 2b_0 \neq b(3a_1 - 2b_1)$

Если мы воспользуемся преобразованием

$$v \rightarrow w^2 p, \quad \dot{v} \rightarrow 2\dot{w}wp + w^2 \dot{p} \quad \text{и} \quad \tilde{\tau} = w\tau/\sqrt{6}, \quad (9.7)$$

то получаем из системы (9.1) систему

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{d\tau} = & -13p - 7\sqrt{6}a_0p^2w^3 + 60a_0p^2w^2 - \\
 & -57\sqrt{\frac{3}{2}}a_0p^2w + 27a_0p^2 - 7\sqrt{6}a_1p^2w^2 + \\
 & + 39a_1p^2w - 9\sqrt{6}a_1p^2 + 5\sqrt{6}b_0p^2w^3 - \\
 & -42b_0p^2w^2 + 39\sqrt{\frac{3}{2}}b_0p^2w - 18b_0p^2 + \\
 & + 5\sqrt{6}b_1p^2w^2 - 27b_1p^2w + 6\sqrt{6}b_1p^2 + 5\sqrt{6}pw, \\
 \frac{dw}{d\tau} = & 6w + 3\sqrt{6}a_0pw^4 - 27a_0pw^3 + \\
 & + 27\sqrt{\frac{3}{2}}a_0pw^2 - \frac{27}{2}a_0pw + 3\sqrt{6}a_1pw^3 - \\
 & -18a_1pw^2 + 9\sqrt{\frac{3}{2}}a_1pw - 2\sqrt{6}b_0pw^4 + \\
 & + 18b_0pw^3 - 9\sqrt{6}b_0pw^2 + 9b_0pw - \\
 & -2\sqrt{6}b_1pw^3 + 12b_1pw^2 - 3\sqrt{6}b_1pw - 2\sqrt{6}w^2.
 \end{aligned} \quad (9.8)$$

Вдоль инвариантной прямой $w=0$ эта система имеет две неподвижных точки с координатами

$$\begin{aligned}
 w = 0, p = 0 \\
 w = 0, p = \frac{13}{3(9a_0 - 3\sqrt{6}a_1 - 6b_0 + 2\sqrt{6}b_1)}.
 \end{aligned} \quad (9.9)$$

В начале координат имеем резонанс 19-го порядка, а во второй неподвижной точке имеем систему с резонансом 27-го порядка. Знаменатель в координатах второй точки отличен от нуля из-за условия $3a_0 - 2b_0 \neq b(3a_1 - 2b_1)$.

При резонансе 19-го порядка условие **A** выполняется при обнулении однородного 4-мерного полинома 6-го порядка над алгебраическим расширением целых чисел, см. файл [20]. Он состоит из 84 членов и факторизуется системой МАТНЕМАТИКА-11 над алгебраическим расширением $\sqrt{6}$ на два множителя. Первый из них линейный

$$2a_0 + 2\sqrt{6}a_1 + 4b_0 + 3\sqrt{6}b_1. \quad (9.10)$$

Второй множитель — однородный многочлен 5-го порядка. Он включает 5-й порядок каждого отдельного параметра, поэтому он не факторизуется. Итак, подходящим решением условия **A** является лишь корень многочлена (9.7)

$$a_0 = -(2\sqrt{6}a_1 + 4b_0 + 3\sqrt{6}b_1)/20. \quad (9.11)$$

Во второй стационарной точке имеем резонанс 27-го порядка. Здесь мы должны были вычислить до этого порядка ряды с рациональными коэффици-

циентами по 6 переменным p, w, a_0, a_1, b_0, b_1 . Нечисленные знаменатели в коэффициентах возникают из-за рационального сдвига в точке (9.9). Для упрощения мы воспользовались решением условия **A** для 19-го порядка (9.11), т.е. фиксировали a_0 и получили трехпараметрическую систему в дробях с ненулевыми знаменателями. Для упрощения мы ввели новый параметр $r = 6\sqrt{6}a_1 + 12b_0 - \sqrt{6}b_1$, который представляет собой знаменатель сдвига (9.9) при соответствующем a_0 , если и заменить

$$b_0 = \frac{1}{12}(-6\sqrt{6}a_1 + \sqrt{6}b_1 + r).$$

После этого мы диагонализировали линейную часть матрицы во второй стационарной точке. В ходе этого процесса мы заработали еще один знаменатель, который обозначили как $h = 130a_1 - 75b_1 - 9\sqrt{6}r$. При помощи этого нового параметра мы исключили параметр b_1 , положив $b_1 = 26a_1/15 - h/75 - 3\sqrt{6}r/25$. Сначала мы предположили, что этот знаменатель $h \neq 0$. Затем вычислили нормальную форму до 27-го порядка по 3 параметрам r, h и a_1 . В итоге получили в исходных параметрах весьма простое уравнение, выделяющее этот случай

$$(2a_1 + 3b_1) = 0,$$

после перехода от r, h к исходным параметрам.

Вычисление нормальной формы в этом случае было выполнено при помощи специальной программы на языке Standard Lisp [22]. Для этого потребовалось около 700 000 секунд, или 8 суток на скалярном процессоре с тактовой частотой 3,60 ГГц. При этом оказалось достаточно 8 ГБ ОЗУ оперативной памяти. Получили 8 248 088 членов нормализующего преобразования и 754 члена нормальной формы. Числитель этой нормальной формы представляет собой однородный многочлен 54-го порядка по 3 параметрам. Коэффициенты этого многочлена содержат более чем сто цифр. Этот многочлен факторизуется. Числитель состоит из ненулевого множителя r^{27} , однородного множителя 24-го порядка и квадрата линейного полинома $2a_1 + 3b_1$, см. файл [21]. Прежде чем получить этот результат, мы пытались использовать задержанные вычисления, модулярную арифметику и т.д.

Таким образом, последнее, 7-е решение условия интегрируемости выглядит так

$$\begin{aligned}
 a_0 = -(2\sqrt{6}a_1 + 4b_0 + 3\sqrt{6}b_1)/20, \quad a_1 = -\frac{3}{2}b_1, \\
 3a_0 - 2b_0 \neq b(3a_1 - 2b_1), \quad b = \sqrt{2/3}.
 \end{aligned} \quad (9.12)$$

Случай $h=0$ проще для расчета и представляет собой частный случай условия (9.12)

$$\begin{aligned} a_0 &= -(2\sqrt{6}a_1 + 4b_0 + 3\sqrt{6}b_1) / 20, \\ a_1 &= -\frac{3}{2}b_1, \\ b_0 &= -\frac{5a_1}{3\sqrt{6}}, \quad b = \sqrt{2/3}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Седьмое условие похоже на случаи 3) и 5) выше, однако соответствующее множество параметров не пересекается ни с одним из случаев 1) – 6). Соответствующий первый интеграл для 7-го случая приведен в Приложении.

10. ВЫВОДЫ

Для пятипараметрической негамильтоновой вырожденной двумерной системы (4.2) мы изучили возможные необходимые условия интегрируемости. Мы нашли 7 семейств, удовлетворяющих этим условиям. Эти семейства были найдены как двумерные многообразия в параметрическом пространстве. Для каждого из них мы вычислили первый интеграл движения. Для каждого такого интеграла может быть выписано соответствующее решение исследуемой системы в квадратурах.

11. ПРИЛОЖЕНИЕ

Случаи интегрируемости и первые интегралы выглядят следующим образом.

1. При $b_1 = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = -b_0b$ первый интеграл системы (4.2) выглядит так

$$I_{1uv} = u^2(3b + 2u)v^6.$$

Интеграл в переменных исходной системы уравнений (3.3)

$$I_{1xy} = 2x^3 + 3by^2.$$

2. При $b_1 = -2a_1$, $a_0 = a_1b$, $b_0 = -2a_1b$ интеграл для системы (4.2) это

$$I_{2uv} = u^2v^6(3b + u(2 - 6a_1bv)).$$

Интеграл в переменных исходной системы (3.3)

$$I_{2xy} = 2x^3 - 6a_1bx^2y + 3by^2.$$

3. При $b_1 = (3/2)a_1$, $a_0 = a_1b$, $b_0 = (3/2)a_1b$ интеграл для системы (4.2)

$$\begin{aligned} I_{3uv} &= [4 - 4a_1uv + 3^{5/6}a_1 \times \\ &\times {}_2F_1(2/3, 1/6; 5/3; -2u/(3b)) \times \\ &\times uv(3 + 2u/b)^{1/6}] / [u^{1/3}v(3b + 2u)^{1/6}]. \end{aligned}$$

Этот интеграл в переменных исходной системы уравнений (3.3)

$$\begin{aligned} I_{3xy} &= [a_1x^2(-4 + 3^{5/6}{}_2F_1(2/3, 1/6; 5/3; -2x^3/(3by^2)) \times \\ &\times (3 + 2x^3/(by^2))^{1/6}) + 4y] / [y^{4/3}(3b + 2x^3/y^2)^{1/6}]. \end{aligned}$$

Здесь ${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция [23].

4. При $b_1 = (8/3)a_1$, $a_0 = a_1b$, $b_0 = (8/3)a_1b$ интеграл для системы (4.2)

$$\begin{aligned} I_{4uv} &= [u(3 + 2a_1^2bu) + 6a_1bv] / \\ &/ [3u[u^3(6 + a_1^2bu) + 6a_1^2bu^2v + 9bv^2]^{1/6}] - \\ &- 8a_1 \frac{\sqrt{-b}}{3^{5/3}} B_{6+a_1\sqrt{-6bu}+3v\sqrt{-6b/u^3}} \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6} \right). \end{aligned}$$

Этот интеграл в переменных исходной системы уравнений (3.3)

$$\begin{aligned} I_{4xy} &= \frac{2a_1^2bx^7 + 6a_1by^5 + 3x^4y^2}{3x^4y^2\sqrt[6]{\frac{a_1^2bx^{12}}{y^8} + \frac{6a_1^2bx^5}{y^3} + \frac{9by^2}{x^2} + \frac{6x^9}{y^6}}} - \\ &- 8a_1 \frac{\sqrt{-b}}{(3^{5/3})} B_{6+a_1\sqrt{-6bx^3/y^2}+3y/x\sqrt{-6by^6/x^9}} \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6} \right). \end{aligned}$$

Здесь $B_\lambda(a, b)$ – неполная бета-функция [23].

Вычисление интегралов 1–4 описано в работе [4]. Там же обсуждаются их аналитические свойства.

5. При

$$a_0 = (2b_0 + b(3a_1 - 2b_1))/3, \quad b_1 = (3/2)a_1, \quad b = \sqrt{2/3}$$

первым интегралом системы (9.4) будет

$$\begin{aligned} I_{5rv} &= \frac{(6b_0 - 3\sqrt{6}a_1)w + 9a_1 - 3\sqrt{6}b_0 + \frac{42}{r}}{w^{7/6}\sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{2}{3}}w}} - \\ &- \frac{\sqrt[6]{12}(3\sqrt{3}a_1 + 4\sqrt{2}b_0){}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3/2}}{w}\right)}{\sqrt{w}} \end{aligned}$$

Интеграл в переменных исходной системы уравнений (3.3)

$$\begin{aligned} I_{5xy} &= \frac{6x^2[(2b_0 - \sqrt{6}a_1)y + 14x] + 42\sqrt{6}y^2}{(2x^3 + \sqrt{6}y^2)^{7/6}} + \\ &+ \frac{\sqrt[3]{2}(3\sqrt{6}a_1 + 8b_0){}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3y^2}{\sqrt{6}x^3 + 3y^2}\right)}{\sqrt{\frac{2x^3}{y^2} + \sqrt{6}}}. \end{aligned}$$

6. При

$$a_0 = (2b_0 + b(3a_1 - 2b_1))/3, \quad b_1 = 6a_1 + 2\sqrt{6}b_0, \quad b = \sqrt{2/3}$$

первым интегралом системы (9.4) будет

$$\begin{aligned} I_{6rw} &= \left(r^6 w^7 (3 - \sqrt{6}w)^2 \right)^{-2a_1 - \sqrt{6}b_0} \times \\ &\times R(r, w)^{-2(3a_1 + \sqrt{6}b_0)}, \quad \text{где } R(r, w) = \\ &= r \left(\sqrt{6}a_1 w - 3a_1 + 3b_0 w - 3\sqrt{\frac{3}{2}}b_0 \right) + 1. \end{aligned}$$

Соответствующий интеграл в переменных исходной системы уравнений (3.3) это

$$\begin{aligned} I_{6xy} &= \frac{(\sqrt{6}xy^2 + 2x^4)^6}{x^6 y^{14} \left(\frac{x^3}{y^2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^7} \times \\ &\times \left(\frac{2(\sqrt{6}a_1 + 3b_0)x^2 y}{2x^3 + \sqrt{6}y^2} + 1 \right)^{\frac{2(3a_1 + \sqrt{6}b_0)}{2a_1 + \sqrt{6}b_0}}. \end{aligned}$$

7. При значениях параметров

$$\begin{aligned} a_0 &= -(2\sqrt{6}a_1 + 4b_0 + 3\sqrt{6}b_1)/20, \quad a_1 = \\ &= -\frac{3}{2}b_1, \quad 3a_0 - 2b_0 \neq b(3a_1 - 2b_1), \quad b = \sqrt{2/3} \end{aligned}$$

интеграл в переменных системы (9.8) будет

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2(\sqrt{6}a_1 + 3b_0)x^2 y}{2x^3 + \sqrt{6}y^2} + 1 \right)^{\frac{2(3a_1 + \sqrt{6}b_0)}{2a_1 + \sqrt{6}b_0}} \times \\ &\times p^{12} w^{26} (2w(3p(2w(w \times (2w(2b_0 w - 6\sqrt{6}b_0 + 5b_1) + \\ &+ 90b_0 - 25\sqrt{6}b_1) - 60\sqrt{6}b_0 + 150b_1) + \\ &+ 15(9b_0 - 5\sqrt{6}b_1)) - 54\sqrt{6}b_0 + 225b_1) - \\ &- 20(3\sqrt{6} - w(w^2 - 2\sqrt{6}w + 9))) + \\ &+ 27(6b_0 - 5\sqrt{6}b_1)p + 90). \end{aligned}$$

Интеграл в переменных исходной системы уравнений (3.3) выглядит так

$$\begin{aligned} I_{7xy} &= 48b_0 x^5 y + 120b_1 x^2 y^3 + \\ &+ 40\sqrt{6}x^3 y^2 + 40x^6 + 60y^4. \end{aligned} \quad (9.14)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bruno A.D. Analytical form of differential equations (I,II) // Trans. Moscow Math. Soc., 1971. V. 25. P. 131–288; 1972. V. 26. P. 199–239.
2. Bruno A.D. Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Berlin:Springer-Verlag, 1989. 348 p.
3. Bruno A.D., Edneral V.F. On the integrability of a planar system of ODEs near a degenerate stationary point // Zap. Nauchn. Semin. Sankt-Peterburgskogo otdeleniya matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova RAN (Proc. Sci. Semin. St. Petersburg Branch of the Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences). 2009. V. 373. P. 34–47.
4. Edneral V.F., Romanovski V.G. Calculation of first integrals of a two-dimensional ODE system near a degenerate stationary point by computer algebra tools // Program. Comput. Software. 2011. V. 37. P. 99–103.
5. Bruno A.D., Edneral V.F., Romanovski V.G. On New Integrals of the Algaba-Gamero-Garcia System // Proceedings of 19th International Workshop (CASC 2017). Eds. V.P.Gerd et al. Lecture Notes in Computer Science, Springer, Switzerland, 2017. V. 10490. P. 40–50. doi: 10.1007/978-3-319-66320-3_4.
6. Gutnik S.A., Sarychev V.A. Symbolic-analytic methods for studying equilibrium orientations of a satellite on a circular orbit // Program. Comput. Software. 2021. V. 47. P. 119–123.
7. Bruno A.D., Edneral V.F. Normal forms and integrability of ODE systems // Program. Comput. Software. 2006. V. 32. P. 139–144.
8. Liénard A. Etude des oscillations entretenues // Revue générale de l'électricité. 1928. V. 23. P. 901–912 and 946–954.
9. Cherkas L.A. Conditions for a Liénard equation to have a center, Differential Equations. 1976. V. 12. № 2. P. 292–298.
10. Edneral V.F. Integrable Cases of the Polynomial Liénard-type Equation with Resonance in the Linear Part // Mathematics in Computer Science, 2023. V. 17. № 19. doi: 10.1007/s11786-023-00567-6.
11. Bautin N.N. On the number of limit cycles which appear with the variation of the coefficients from an equilibrium point of focus or center type // AMS Transl. Ser. I. 1962. V. 5. P. 396–414.
12. Bruno A.D., Edneral V.F. Algorithmic analysis of local integrability // Dokl. Math. 2009. V. 79. № 1. P. 48–52.
13. Algaba A., Gamero E., Garcia C. The integrability problem for a class of planar systems // Nonlinearity, 2009. V. 22. P. 395–420.
14. Bruno A.D. Power Geometry in Algebraic and Differential Equations // Elsevier Science, Amsterdam, 2000. 348 p.
15. Edneral V.F., Khanin R. Application of the resonant normal form to high-order nonlinear odes using MATHEMATICA // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 2003. V. 502. № 2–3. P. 643–645.

16. *Hilbert D.* Über die Theorie der algebraischen Formen // *Mathematische Annalen*, 1890. V. 36. P. 473–534.
17. *Malykh M.D.* On Application of M.N. Lagutinski Method to Integration of Differential Equations in Symbolic Form. Part 1 // *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 2017. V. 25. № 2. P. 103–112.
doi: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-103-112 .
18. *Romanovski V.G., Shafer D.S.* The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach // *Birkhäuser, Boston*, 2009. 330 p.
19. Equations from condition A for the 13th and 26th orders.
<https://disk.yandex.ru/d/-R1MKEiZz2vWeA..>
20. Factorized equation of condition A of the 19th order.
<https://disk.yandex.ru/i/U5GS1P-WPe8ZFg>.
21. Factorized condition A of the 27th order.
<https://disk.yandex.ru/i/fWHaojf5vM17uA>.
22. *Edneral V.F., Khrustalev, O.A.* Package for reducing ordinary differential equations to normal form // *Program. Comput. Software*. 1992. V. 18. № 5. P. 234–239.
23. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill, 1953. V. I.

INTEGRATION OF A DEGENERATE SYSTEM OF ODEs

© 2024 A. D. Bruno^a, V. F. Edneral^b

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia*

^b*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

The integrability of a two-dimensional autonomous polynomial system of ordinary differential equations (ODEs) with a degenerate singular point at the origin that depends on six parameters is investigated. The integrability condition for the first quasihomogeneous approximation allows one of these parameters to be fixed on a countable set of values. The further analysis is carried out for this value and five free parameters. Using the power geometry method, the system is reduced to a non-degenerate form through the blowup process. Then, the necessary conditions for its local integrability are calculated using the method of normal forms. In other words, the conditions for the parameters under which the original system is locally integrable near the degenerate stationary point are found. By resolving these conditions, we find seven twoparameter families in the five-dimensional parametric space. For parameter values from these families, the first integrals of the system are found. The cumbersome calculations that occur in the problem under consideration are carried out using computer algebra.

Keywords: degenerate system of ODEs, normal form and power geometry methods