ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2023, № 2, с. 36–45

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 519.688

ВЫЧИСЛЕНИЕ СВЯЗНЫХ КОМПОНЕНТ ДОПОЛНЕНИЯ К АМЕБЕ МНОГОЧЛЕНА ОТ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Т. А. Жуков[a],*, Т. М. Садыков[a],**

[a]Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова,
117997 Москва, Стремянный пер., 36, Россия
**E-mail: Zhukov.TA@rea.ru*
***E-mail: Sadykov.TM@rea.ru*

Поступила в редакцию 13.05.2022 г.
После доработки 03.08.2022 г.
Принята к публикации 30.10.2022 г.

В настоящей работе предложен метод вычисления и визуализации амебы многочлена Лорана нескольких комплексных переменных, применимый в произвольной размерности. Разработанные на основе этого метода алгоритмы реализованы в виде общедоступного сетевого сервиса `http://amoebas.ru/`, позволяющего осуществлять интерактивный расчет амеб многочленов двух переменных и содержащего набор рассчитанных амеб и их сечений в более высоких размерностях. Тестирование корректности и скорости работы предложенных алгоритмов осуществлено с использованием набора оптимальных многочленов двух, трех и четырех переменных, для генерации которых применен функционал системы компьютерной алгебры `Mathematica`. Разработанный программный код позволяет, в частности, осуществлять генерацию оптимального гипергеометрического многочлена от произвольного числа переменных с носителем в произвольном зонотопе, заданном набором порождающих векторов.

DOI: 10.31857/S0132347423020164, **EDN:** MHCDUI

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие амебы [2], [3, глава 1] многочлена Лорана нескольких комплексных переменных прочно вошло в современную математику и широко используется в многочисленных приложениях. В частности, оно возникает в задачах математической физики [4, 5] и при построении решений разностных уравнений и их систем [1]. Известно, что фазовая диаграмма мер Гиббса для димеров на графе может быть представлена в виде амебы ассоциированной спектральной кривой [6, Теорема 4.1]. Изучение распределения энергии в квантовых термодинамических ансамблях естественным образом приводит к рассмотрению понятия амебы и ее т.н. контура [7]. Двойственность Лежандра между энтропией и свободной энергией позволяет вычислять последнюю в рамках теории колчанов как площадь амебы, заданной многочленом Ньютона для модели димеров [8]. С понятием амебы связан ряд важных открытых вопросов, в частности, остающаяся недоказанной на протяжении длительного времени гипотеза М. Пассаре о сплошном свойстве амебы произвольного максимально разреженного многочлена. Эти и многие другие приложения теории амеб в математической физике [9] и вещественной алгебраической геометрии [10] обуславливают давно назревшую необходимость в разработке алгоритмов и общедоступного программного обеспечения для вычисления амеб многочленов Лорана нескольких комплексных переменных.

Попытки создания таких алгоритмов и их программной реализации предпринимались многими исследователями на протяжении трех последних десятилетий. В их основе лежали численное решение алгебраического уравнения относительно выделенного переменного или группы переменных [11–15], аппроксимация амеб с помощью сумм квадратов [16], полиэдральная аппроксимация фиксированной компоненты дополнения к амебе [17], подход с использованием циклических результантов [18] и другие методы [19]. Существенную роль в работах [16, 18] играют методы современной компьютерной алгебры. Сетевой ресурс `http://dvbogdanov.ru/amoeba` позволяет генерировать программный код на языке среды MATLAB для расчета аффинных и компактифицированных амеб многочленов двух переменных [20, 21]. Текущие границы применимости данного подхода иллюстрируются набором данных `www.researchgate.net/publication/338341129_Giant_amoeba_zoo`.

Однако, несмотря на значительный прогресс по сравнению с первоначальным представлением авторов определения амебы о виде амеб многочленов нескольких комплексных переменных (см. [2], стр. 194, рис. 16), задача вычисления и визуализации амебы многочлена нескольких комплексных переменных (особенно в размерности 3 и выше) в настоящий момент не может считаться удовлетворительно разрешенной. Причин этому несколько: общедоступный программный код для генерации амеб дает приемлемые результаты лишь для многочленов невысокой степени и, как правило, в размерности 2; при этом некоторые из имеющихся решений существенно опираются на функционал коммерческих программных продуктов с закрытым кодом; отсутствует общедоступный сетевой сервис для интерактивной генерации амеб достаточно сложных многочленов двух и трех переменных; не существует инструментария для визуализации деформации амебы многочлена, зависящего от параметров. Настоящая работа призвана восполнить этот пробел.

Высокая вычислительная трудность задачи расчета и визуализации амебы многочлена нескольких переменных обусловлена, в первую очередь, следующими обстоятельствами:

1. За исключением тривиального одномерного случая, амеба многочлена является неограниченным подмножеством вещественного линейного пространства.

2. Амеба $\mathscr{A}_f$ многочлена f двух переменных имеет конечную площадь. В размерности три и выше отношение меры пересечения $\mathscr{A}_f \cap B(a,r)$ амебы многочлена f с шаром радиуса r и центром в точке a к объему этого шара стремится к нулю при $r \to \infty$ для любого многочлена f и любой точки $a \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, определение местоположения амебы многочлена в пространстве $\mathbb{R}^n$ само по себе является, как правило, нетривиальной задачей.

3. Ограниченные связные компоненты дополнения к амебе могут быть сколь угодно малы, а получение оценок снизу на их размеры является весьма трудоемкой задачей.

4. Количество связных компонент дополнения к амебе многочлена f с фиксированным многогранником Ньютона $\mathscr{N}$ может принимать (в зависимости от выбора коэффициентов f) произвольные значения в диапазоне от числа вершин многогранника $\mathscr{N}$ до числа целых точек в нем [13].

5. Численный расчет достаточно сложной амебы многочлена высокой степени возможен лишь при весьма высокой точности вычислений. Например, при расчете амебы многочлена десятой степени от двух переменных с целыми коэффициентами в квадрате $[-20,20]\times[-20,20]$ необходимо оперировать величинами порядка $e^{10\cdot 20} \simeq 7.22597 \times 10^{86}$, поддерживая точность вычислений, сравнимую с $e^{-10\cdot 20} \simeq 1.38389\times 10^{-87}$. Многочисленные компьютерные эксперименты показывают, что уменьшение точности расчета приводит, как правило, к быстрому накоплению вычислительной погрешности и потере связи результата расчета с подлинной геометрией амебы.

В настоящей работе представлен новый метод вычисления и визуализации амебы многочлена нескольких комплексных переменных, применимый в произвольной размерности. Разработанные алгоритмы вычисления амеб многочленов нескольких переменных реализованы в виде общедоступного сетевого сервиса `http://amoebas.ru/`. Данный ресурс позволяет в интерактивном режиме выполнять расчет и визуализацию амеб многочленов двух переменных, а также содержит заранее рассчитанные облака точек, аппроксимирующие амебы некоторых оптимальных гипергеометрических многочленов [22] трех и четырех переменных. Для визуализации четырехмерных амеб на сайте выполняется отрисовка их сечений трехмерными гиперплоскостями.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Всюду в дальнейшем $n \geq 2$ обозначает размерность пространства комплексных переменных, $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\ldots,x_n^{\pm 1}]$ – многочлен Лорана от переменных $(x_1,\ldots,x_n)\in \mathbb{C}^n$. Обозначим через $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ проколотую комплексную плоскость и рассмотрим отображение $\mathrm{Log} : (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{R}^n$, определенное формулой

$$\mathrm{Log} : \mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n) \mapsto (\ln|x_1|,\ldots,\ln|x_n|).$$

Амебой (см. [2, глава 6, определение 1.4]) *алгебраического множества* $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$ называется образ $\mathrm{Log}V$, который обозначается $\mathscr{A}_V$. Данное название связано с характерной формой множества $\mathscr{A}_V$ в случае, когда множество V является комплексной алгебраической кривой $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : f(x,y) = 0\}$. Соответствующая такому множеству амеба, как правило, ограничивает шарообразные “вакуоли” и содержит тонкие “щупальца”, уходящие в бесконечность (см. примеры амеб в работах [14, 20, 21] и на сайте `http://amoebas.ru/`).

Амеба подмножества комплексного пространства лишь логарифмической шкалой отличается от его диаграммы Рейнхардта. Помимо амебы, были предложены и исследованы другие проекции комплексного пространства $\mathbb{C}^n$ на вещественное пространство той же размерности, на следующие ключевые аналитические и топологические свойства дополнения к алгебраической гиперповерхности. К их числу относятся, в частности, компактифицированная амеба (см. [2], глава 6, теорема 1.12 и рис. 19) и "амебоподобный" полиэдральный комплекс, конструкция которого предложена в работе [21]. Следующий результат [2], глава 6, следствие 1.6 устанавливает простую связь между амебой многочлена Лорана f и разложениями рациональной функции $1/f$ в ряды Лорана с центром в нуле.

Теорема 1 (см. [2], глава 6). *Дополнение* ${}^c\mathcal{A}_f := \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{A}_f$ *к амебе многочлена* f *есть объединение конечного числа непересекающихся связных компонент. Эти компоненты выпуклы и находятся во взаимно-однозначном соответствии с разложениями рациональной функции* $1/f$ *в ряды Лорана с центром в начале координат.*

Выпуклость связных компонент дополнения к амебе алгебраической гиперповерхности выгодно отличает ее от всех конкурирующих проекций комплексного пространства в вещественное и, как будет показано далее, играет существенную роль в построении алгоритмов для вычисления амеб.

Напомним, что *носителем* многочлена Лорана f называется конечное множество целых точек $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, таких, что моном $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ входит в многочлен f с ненулевым коэффициентом. *Многогранником Ньютона* $\mathcal{N}_f$ многочлена Лорана f называется выпуклая оболочка (в пространстве $\mathbb{R}^n$) носителя многочлена f. Следующий результат показывает, что многогранник Ньютона $\mathcal{N}_f$ несет в себе информацию о геометрии амебы $\mathcal{A}_f$ [23, теорема 2.8 и предложение 2.6].

Теорема 2 (см. [23]). *Пусть* f *— многочлен Лорана. Обозначим через* $\{M\}$ *семейство связных компонент дополнения к амебе* ${}^c\mathcal{A}_f$. *Существует инъективное отображение*

$$\nu_f : \{M\} \to \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{N}_f, \tag{2.1}$$

такое, что конус, двойственный к $\mathcal{N}_f$ *в точке* $\nu_f(M)$, *совпадает с конусом рецессии множества* M.

Целочисленный вектор $\nu_f(M)$ называется *порядком компоненты* M дополнения к амебе многочлена f. Из приведенных теорем следует, что число связных компонент дополнения к амебе $\mathcal{A}_f$ ограничено снизу числом вершин многогранника $\mathcal{N}_f$ и сверху — числом целых точек в данном многограннике. Нижняя граница была получена в [2]. Варьируя коэффициенты многочлена Лорана f с заданным многогранником Ньютона, можно добиться достижения как верхней [10], так и нижней [13] границы для числа связных компонент множества ${}^c\mathcal{A}_f$. Более того, вершины многогранника Ньютона всегда лежат в образе отображения ν_f. Из теоремы 2 следует, что конусы тех связных компонент множества ${}^c\mathcal{A}_f$, которые соответствуют вершинам многогранника $\mathcal{N}_f$, заведомо имеют непустую внутренность. В то же время связные компоненты дополнения амебы, соответствующие внутренним точкам многогранника Ньютона, являются ограниченными.

Пусть $f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_{m-1}\zeta^{m-1} + \zeta^m$ — многочлен одного переменного $\zeta \in \mathbb{C}$ с корнями $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$. Будем без ограничения общности предполагать, что $|\zeta_1| \le |\zeta_2| \le \ldots \le |\zeta_m|$. Амеба многочлена f есть конечное множество точек $\ln|\zeta_1|$, ..., $\ln|\zeta_m|$, из которого исключены повторяющиеся элементы. Типичная компонента дополнения ${}^c\mathcal{A}_f$ к амебе данного многочлена есть (непустой) интервал $(\ln|\zeta_k|, \ln|\zeta_{k+1}|)$ для некоторого $k = 1, \ldots, m-1$, порядок данной компоненты равен k. Таких компонент может, однако, не быть вовсе, в случае, если все корни многочлена $f(\zeta)$ лежат на некоторой окружности $\{|\zeta| = r\} \subset \mathbb{C}$ с центром в точке $\zeta = 0$. Кроме того, всегда присутствуют две неограниченные компоненты дополнения $(-\infty, \ln|\zeta_1|)$ и $(\ln|\zeta_m|, \infty)$, чьи порядки равны 0 и m, соответственно. Таким образом, в одномерном случае вычисление амебы многочлена сводится к нахождению его корней. Для решения данной задачи существует широкий спектр точных и приближенных методов и в настоящей работе мы не рассматриваем этот частный случай, предполагая всюду в дальнейшем, что $n \ge 2$.

Задача вычисления амебы многочлена двух или более переменных может, конечно, рассматриваться как задача разрешения алгебраического уравнения относительно одного из входящих в него переменных. Ключевое отличие от одномерного случая состоит в том, что при $n \ge 2$ алгебраическое уравнение необходимо решать для всевозможных значений прочих присутствующих в нем переменных. В общем случае осуществить это не представляется возможным, что заставляет обращаться к другим методам вычисления амеб многочленов нескольких переменных.

В некоторых простейших случаях амеба многочлена может быть вычислена точно, а ее граница явно задана трансцендентными уравнениями. Например, амеба многочлена двух переменных $f(x, y) = 1 + x + y$ имеет вид

$$\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le e^s + e^t, e^s - 1 \le e^t \le e^s + 1\}.$$

Аналогичное описание допускает амеба любой комплексной гиперплоскости в произвольной размерности. Амеба многочлена $f(x, y) = a + x + y + xy$ с произвольным комплексным параметром a есть множество решений неравенства (см. [13, стр. 57])

$$(e^{2s} - |a|^2)^2 + (e^{2s} - 1)^2 e^{4t} - \\ - 2e^{2t}(e^{2s}(|a|^2 - 4\Re a + e^{2s} + 1) + |a|^2) \leq 0.$$

Сложность вычисления границы амебы многочлена быстро растет с увеличением его степени и числа переменных. Несмотря на это, контуры амеб произвольных классических и обобщенных дискриминантов [2] допускают бирациональную параметризацию Горна–Капранова [24]. Однако амеба многочлена достаточно высокой степени, чьи коэффициенты не обладают многочисленными свойствами симметрии, допускает, вообще говоря, лишь приближенное описание. Построение множества, аппроксимирующего амебу с заданной точностью, является задачей высокой вычислительной сложности.

Под вычислением амебы многочлена Лорана f мы будем всюду в дальнейшем понимать построение достаточно плотного облака точек, лежащих в пересечении амебы с заданной областью $D \subset \mathbb{R}^n$, такой, что D содержит точки любой связной компоненты дополнения ${}^c\mathscr{A}_f$.

3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ АМЕБЫ МНОГОЧЛЕНА НА ОСНОВЕ ПОРЯДКА КОМПОНЕНТЫ ЕЕ ДОПОЛНЕНИЯ

В работе [23] показано, что каждой точке дополнения к амебе $\mathscr{A}_f$ многочлена f можно сопоставить целую точку из многогранника Ньютона $\mathscr{N}_f$ с помощью *отображения порядка* ν_f:

$$\nu_f : {}^c\mathscr{A}_f \to \mathscr{N}_f \cap \mathbb{Z}^n, \quad \mathbf{s} \mapsto (u_1, \ldots, u_n),$$

где

$$u_j := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathrm{Log}\,\mathbf{x}=\mathbf{s}} \frac{x_j \partial_j f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{x_1 \ldots x_n}, \tag{3.1}$$

для всех $j = 1, \ldots, n$ и $i = \sqrt{-1}$. Всюду в дальнейшем вектор $\nu_f(\mathbf{s})$ называется *порядком точки* $\mathbf{s} \in {}^c\mathscr{A}_f$. Любые две точки, лежащие в одной связной компоненте дополнения к амебе многочлена f, имеют одинаковый порядок, называемый порядком этой компоненты (см. формулу (2.1) в Теореме 2); более того, порядки точек из разных компонент дополнения к амебе различны. Таким образом, порядок $\nu_f(\mathbf{s})$ является классификатором точек дополнения к амебе многочлена f, позволяющим устанавливать их принадлежность к компоненте заданного порядка.

В работе [23] показано, что для $s \in {}^c\mathscr{A}_f$ интеграл (3.1) допускает представление в следующем существенно более простом виде:

$$u_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|x_j| = e^{s_j}} \frac{\partial_j f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} dx_j, \tag{3.2}$$

причем значение данного интеграла не зависит от $\arg x_k$ при $k \neq j$. Поведение интеграла (3.2) в случае, когда точка s лежит внутри или на границе амебы $\mathscr{A}_f$, является, вообще говоря, весьма сложным. В этом случае интеграл (3.2) может оказаться расходящимся, однако в большинстве случаев он сходится, а его значение существенным образом зависит от $\arg x_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Скачок интеграла (3.2) может быть выявлен с помощью символьно-численных алгоритмов контурного интегрирования и использован в качестве критерия принадлежности точки $\mathbf{s}$ амебе многочлена f. Данное наблюдение является основой алгоритма вычисления амеб, представленного в настоящей работе и реализованного в виде сетевого сервиса `http://amoebas.ru/`.

Входные данные алгоритма: размерность пространства переменных $n \geq 2$; многочлен $f(\mathbf{x})$ от n комплексных переменных $x_1, \ldots, x_n$; множество вершин $\mathrm{vert}(\Pi)$ прямоугольного параллелепипеда $\Pi \subset \mathbb{R}^n$; малое число $\varepsilon > 0$, равное линейному размеру наименьшего элемента объема в $\mathbb{R}^n$, подлежащего проверке на предмет принадлежности амебе многочлена $f(\mathbf{x})$. Предполагается, что объем параллелепипеда Π не равен нулю, а длина по крайней мере одного из его ребер больше ε.

Результатом работы алгоритма является облако точек, аппроксимирующее множество ${}^c\mathscr{A}_f \cap \Pi$ с точностью ε.

Схема работы алгоритма состоит в следующем. Будем обозначать через $S(\Pi)$ конечное множество прямоугольных параллелепипедов в пространстве $\mathbb{R}^n$ и положим на первом шаге работы алгоритма $S(\Pi) := \{\Pi\}$.

Пусть Π_α – некоторый элемент множества $S(\Pi)$. Если длина всех его ребер меньше ε, то Π_α исключается из множества $S(\Pi)$ и осуществляется переход к следующему его элементу. В противном случае каждая из точек множества $\mathrm{vert}(\Pi_\alpha)$ проверяется на принадлежность амебе многочлена $f(x)$ путем выявления скачка интеграла (3.2) по его параметрам $\arg x_k$, $k \neq j$.

Если все точки множества $\mathrm{vert}(\Pi_\alpha)$ лежат в одной и той же связной компоненте дополнения к амебе $\mathscr{A}_f$, то, в силу выпуклости и открытости любой такой компоненты, делается вывод об отсутствии точек амебы $\mathscr{A}_f$ в Π_α. Координаты точек $\mathrm{vert}(\Pi_\alpha)$ и порядок содержащей их компоненты дополнения к амебе сохраняются, и выполняется переход к следующему элементу множества $S(\Pi)$. Если рассмотрены все элементы данного множества, то алгоритм завершает работу.

Если же множество $\mathrm{vert}(\Pi_\alpha)$ содержит точки амебы $\mathscr{A}_f$ или точки, лежащие в разных компонентах ее дополнения, то параллелепипед Π_α разбивается на 2^n равных параллелепипедов своими n плоскостями симметрии, параллельными координатным плоскостям в $\mathbb{R}^n$. Эти параллелепипеды добавляются к множеству $S(\Pi)$ и описанный выше процесс повторяется, пока не будут рассмотрены все элементы данного множества. В двумерном случае результатом выполнения данного дихотомического (по каждой размерности) процесса является аппроксимирующее амебу квадродерево, см. рис. 1.

По завершении перебора элементов множества $S(\Pi)$ для каждого возможного значения порядка компоненты дополнения к амебе $\mathscr{A}_f$ сформирован список точек (вершин рассмотренных параллелепипедов), лежащих в компоненте с данным порядком. Для отрисовки этой компоненты берется выпуклая оболочка всех точек из данного списка.

Блок-схема изложенного выше алгоритма представлена на рис. 2. Данный алгоритм реализован на языке программирования C# и лежит в основе вычислительного функционала сетевого сервиса `http://amoebas.ru/`. Объем связной компоненты дополнения к амебе может быть сколь угодно мал, а число таких компонент, вообще говоря, весьма сложным образом зависит от коэффициентов многочлена. Эта зависимость не является непрерывной. Например, дополнение к амебе многочлена $x + y + \lambda xy + x^2y + xy^2$ при $\lambda > 0$ содержит компоненту порядка (1,1) в том и только том случае, когда $\lambda > 4$ (см. [22]). При этом площадь данной компоненты стремится к нулю при $\lambda \to 4+$. В силу этих причин предложенный алгоритм не может, вообще говоря, гарантировать обнаружение связной компоненты, чей диаметр меньше величины ε. Более того, мера подмножества в пространстве аргументов комплексных переменных, на котором наблюдается скачок интеграла (3.2), может быть сколь угодно мала, если степень многочлена достаточно высока, а его коэффициенты велики. Однако в некоторых классах частных случаев скорость работы предложенного алгоритма допускает оценку снизу. Например, в случае, когда f – оптимальный гипергеометрический многочлен n комплексных переменных, алгоритм позволяет не более чем за $n2^{n-1}\mathrm{Vol}(\Pi)(1+1/\varepsilon)^n$ шагов, представленных на блок-схеме 2, выявить все связные компоненты дополнения к амебе $\mathscr{A}_f$, лежащие в параллелепипеде Π, и такие, что все их линейные размеры не меньше ε. Данное обстоятельство является следствием строгой логарифмической выпуклости функции, определяющей коэффициенты такого многочлена, благодаря которой проверку скачка интеграла (3.2) достаточно осуществлять в двух точках в пространстве аргументов комплексных переменных многочлена f.

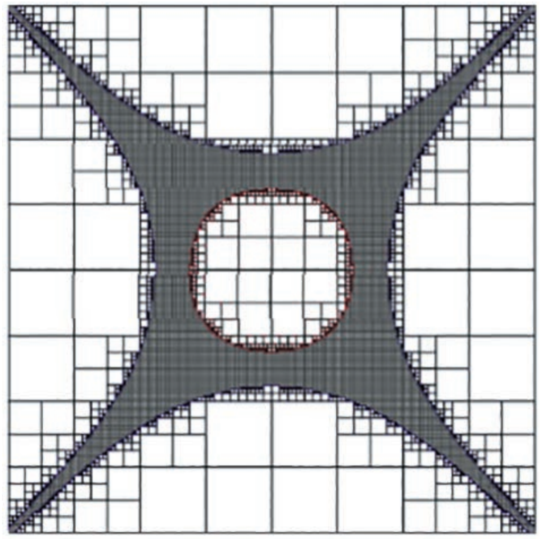

Рис. 1. Квадродерево в дополнении к амебе многочлена $x + y + x^2y + xy^2 + 7xy$.

4. СЕТЕВОЙ СЕРВИС ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ИЗОБРАЖЕНИЯ АМЕБ МНОГОЧЛЕНОВ ДВУХ И ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Визуализация амебы многочлена трех переменных достаточно высокой степени, вычисленной в виде облака точек, является в большинстве случаев концептуально и технически нетривиальной задачей ввиду сложной геометрической структуры амебы: наличия в “теле” амебы “полостей” и уходящих на бесконечность параллельных слоев, а также возможности присутствия на границе амебы подмножеств негладкости границы с труднопредсказуемой структурой. В силу этих причин в сетевом сервисе `http://amoebas.ru/amoeba_3d.html` визуализация амебы многочлена f трех переменных осуществляется путем отрисовки пересечений всех компонент дополнения ${}^c\mathscr{A}_f$ с кубом $[-a,a]\times[-a,a]\times[-a,a]$ для некоторого значения $a > 0$. По умолчанию все эти компоненты отрисованы полупрозрачными, при этом каждая из них может быть сделана непрозрачной путем ее выбора с помощью левой кнопки мыши. Сама же амеба $\mathscr{A}_f$ представлена как пустое пространство между компонентами своего

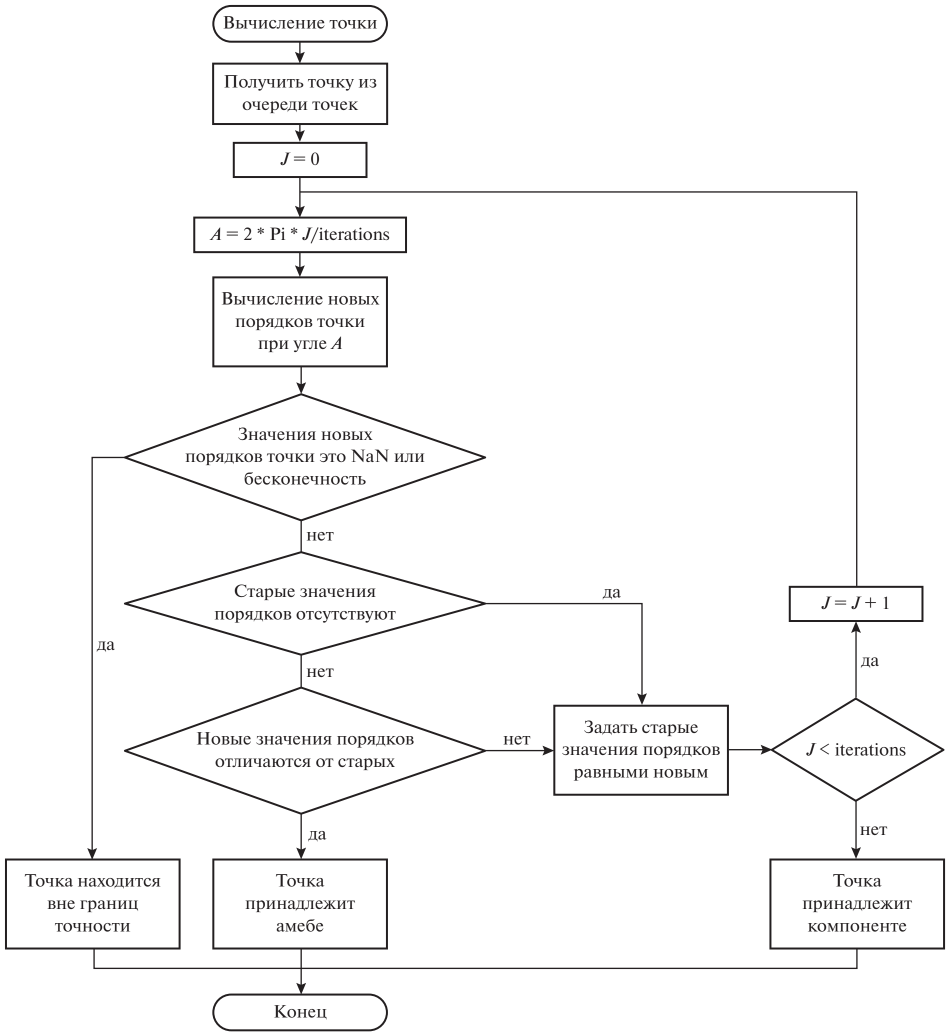

Рис. 2. Упрощенная схема работы алгоритма классификации точек пространства по принадлежности к амебе и связным компонентам ее дополнения всех возможных порядков.

дополнения. Визуализация амеб осуществляется с помощью пакета интерактивной трехмерной графики `plotly` (см. `https://plotly.com/`), обеспечивающего возможность приближения, удаления и вращения амебы, а также движения “наблюдателя” внутри нее.

Различные компоненты дополнения к амебе окрашены в различные цвета. Длина волны, соответствующая цвету связной компоненты дополнения к амебе многочлена f двух переменных, пропорциональна евклидову расстоянию от порядка компоненты до центра тяжести многоугольника $\mathcal{N}_f$ (см. рис. 3).

Тестирование алгоритмов вычисления амеб и оценку скорости их работы целесообразно проводить на многочленах, чьи амебы имеют предсказуемую, но при этом достаточно сложную структуру. Для этой цели хорошо подходят т.н. оптимальные гипергеометрические многочлены нескольких переменных [22]: число связных компонент дополнения к амебе такого многочлена является максимально возможным, то есть, совпадает с числом целых точек в его многограннике Ньютона. Для генерации оптимальных гипергеометрических многочленов от трех переменных, амебы которых представлены на общедоступном сетевом ресурсе `http://amoebas.ru/amoeba_3d.html`, был использован, в частности, следующий программный код в системе компьютерной алгебры `Mathematica 11.3`:

```
OptimalPolynomialSimplex[dimension_,
  degree_,power_]:=
Block[{variables,coefficient,exponents},
variables=Table[x_j,{j,1,dimension}];
coefficient[vector_]:=
(Gamma[1+degree-Total[vector]]
```

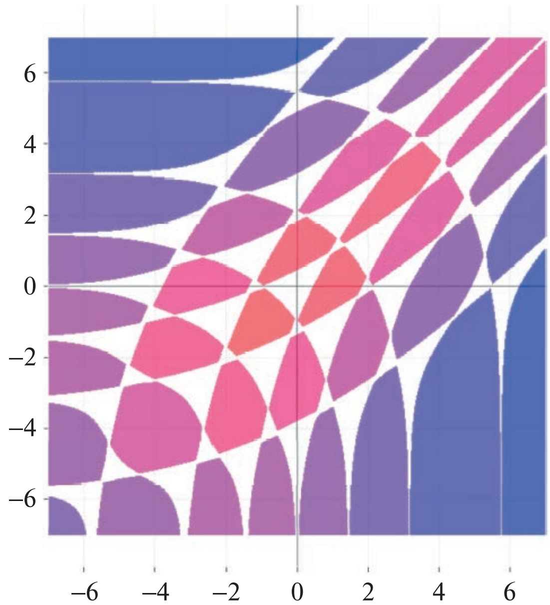

Рис. 3. Связные компоненты дополнения к амебе многочлена $x^7 + 343x^6y + 343x^6 + 9261x^5y^2 + 74088x^5y + 9261x^5 + 42875x^4y^3 + 1157625x^4y^2 + + 1157625x^4y + 42875x^4 + 42875x^3y^4 + 2744000x^3y^3 + 9261000x^3y^2 + 2744000x^3y + 42875x^3 + 9261x^2y^5 + 1157625x^2y^4 + 9261000x^2y^3 + 9261000x^2y^2 + 1157625x^2y + 9261x^2 + 343xy^6 + 74088xy^5 + 1157625xy^4 + 2744000xy^3 + 1157625xy^2 + 74088xy + 343x + y^7 + 343y^6 + 9261y^5 + 42875y^4 + 42875y^3 + 9261y^2 + 343y + 1$.

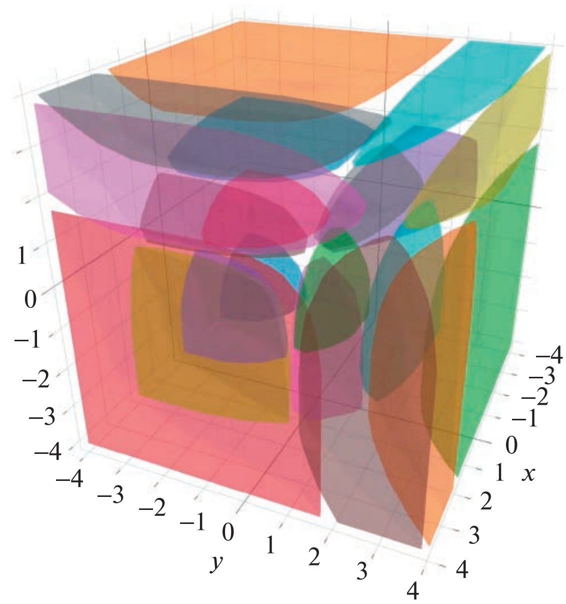

Рис. 4. Связные компоненты дополнения к амебе многочлена $x^3 + 9x^2y + 9x^2z + 9x^2 + 9xy^2 + 36xyz + 36xy + 9xz^2 + 36xz + 9x + y^3 + 9y^2z + 9y^2 + 9yz^2 + 36yz + 9y + z^3 + 9z^2 + 9z + 1$.

```
(Times @@ Gamma[vector + 1]))^-power;
exponents=Flatten[Outer @@
(Join[List, Table[Range[0, degree],
dimension]]), dimension-1];
Factor[(coefficient /@ exponents).
(Times @@@ (variables# & /@ expo-
nents))]]
```

Результатом работы функции `OptimalPolynomialSimplex` является оптимальный [22] многочлен степени `degree` с заданным числом переменных, равным `dimension`. Коэффициенты данного многочлена заданы сужением строго логарифмически вогнутой функцией на множество целых точек симплекса с вершинами (0,0,…,0), (`degree`, 0,…,0),…,(0,…,0, `degree`). Технический параметр `power` позволяет управлять "степенью логарифмической вогнутости" коэффициентов генерируемого многочлена, отвечающей за геометрию его амебы. Непрерывная деформация амеб, соответствующая изменению данного параметра в пределах некоторых интервалов, представлена на сайте `http://amoebas.ru/`. Примерами многочленов, генерируемых функцией `OptimalPolynomialSimplex`, являются многочлены, чьи амебы представлены на рис. 4 и 5.

Обширный класс выпуклых многогранников, важных в многочисленных приложениях алгебраической и вычислительной геометрии, образуют зонотопы. Напомним, что под зонотопом понимается сумма Минковского конечного числа отрезков в вещественном пространстве. Следующий фрагмент программного кода на языке системы компьютерной алгебры `Mathematica 11.3` предназначен для генерации оптимального гипергеометрического многочлена с носителем в произвольном зонотопе с вершинами в узлах целочисленной решетки, заданном как сумма Минковского векторов из списка `vectors`.

```
OptimalPolyZonotope[vectors_,power_]:=
Block[{dimension,variables,crossProducts,
normals,sumsOfVectors,massCenter,
constants,coefficient,maxDegree,ex-
ponents},
dimension=Length[First[vectors]];
variables=Table[x_j,{j,1,dimension}];
crossProducts=Cross @@@ Subsets[vectors,
  {dimension-1}];
normals=Join[crossProducts,-
crossProducts];
sumsOfVectors=
```

Таблица 1.

n	`degree`	`power`	Многочлен от n комплексных переменных	Число уровней 2^n-дерева	Время расчета, с.
2	2	2	$x^2 + 4xy + 4x + y^2 + 4y + 1$	9	10.79
2	3	2	$x^3 + 9x^2y + 9x^2 + 9xy^2 + 36xy + 9x + y^3 + 9y^2 + 9y + 1$	9	29.46
2	4	2	$x^4 + 16x^3y + 16x^3 + 36x^2y^2 + 144x^2y + 36x^2 +$ $+16xy^3 + 144xy^2 + 144xy + 16x + y^4 + 16y^3 + 36y^2 + 16y + 1$	9	61.30
2	5	2	$x^5 + 25x^4y + 25x^4 + 100x^3y^2 + 400x^3y + 100x^3 + 100x^2y^3 +$ $+900x^2y^2 + 900x^2y + 100x^2 + 25xy^4 + 400xy^3 +$ $+900xy^2 + 400xy + 25x + y^5 + 25y^4 + 100y^3 + 100y^2 + 25y + 1$	9	106.66
3	2	2	$x^2 + 4xy + 4xz + 4x + y^2 + 4yz + 4y + z^2 + 4z + 1$	7	202.52
3	6	1	$2x^2y^2z^2 + x^2y^2z + x^2yz^2 + 2x^2yz +$ $+xy^2z^2 + 2xy^2z + 2xyz^2 + 16xyz + 2xy + 2xz + x + 2yz + y + z + 2$	7	268.14
3	3	2	$x^3 + 9x^2y + 9x^2z + 9x^2 + 9xy^2 + 36xyz +$ $+36xy + 9xz^2 + 36xz + 9x + y^3 + 9y^2z + 9y^2 + 9yz^2 +$ $+36yz + 9y + z^3 + 9z^2 + 9z + 1$	7	460.32
3	4	2	$x^4 + 16x^3y + 16x^3z + 16x^3 + 36x^2y^2 + 144x^2yz + 144x^2y + 36x^2z^2 +$ $+144x^2z + 36x^2 + 16xy^3 + 144xy^2z + 144xy^2 +$ $+144xyz^2 + 576xyz + 144xy + 16xz^3 + 144xz^2 + 144xz +$ $+16x + y^4 + 16y^3z + 16y^3 + 36y^2z^2 + 144y^2z + 36y^2 + 16yz^3 +$ $+144yz^2 + 144yz + 16y + z^4 + 16z^3 + 36z^2 + 16z + 1$	7	894.35
3	5	2	$x^5 + 25x^4y + 25x^4z + 25x^4 + 100x^3y^2 + 400x^3yz + 400x^3y + 100x^3z^2 +$ $+400x^3z + 100x^3 + 100x^2y^3 + 900x^2y^2z + 900x^2y^2 + 900x^2yz^2 + 3600x^2yz +$ $+900x^2y + 100x^2z^3 + 900x^2z^2 + 900x^2z + 100x^2 + 25xy^4 + 400xy^3z +$ $+400xy^3 + 900xy^2z^2 + 3600xy^2z + 900xy^2 + 400xyz^3 + 3600xyz^2 + 3600xyz +$ $+400xy + 25xz^4 + 400xz^3 + 900xz^2 + 400xz + 25x + y^5 + 25y^4z + 25y^4 +$ $+100y^3z^2 + 400y^3z + 100y^3 + 100y^2z^3 + 900y^2z^2 + 900y^2z + 100y^2 +$ $+25yz^4 + 400yz^3 + 900yz^2 + 400yz + 25y + z^5 + 25z^4 +$ $+100z^3 + 100z^2 + 25z + 1$	7	1558.12
4	2	2	$w^2 + 4wx + 4wy + 4wz + 4w + x^2 + 4xy + 4xz +$ $+4x + y^2 + 4yz + 4y + z^2 + 4z + 1$	5	1438.40
4	3	2	$w^3 + 9w^2x + 9w^2y + 9w^2z + 9w^2 + 9wx^2 + 36wxy + 36wxz + 36wx + 9wy^2 +$ $+36wyz + 36wy + 9wz^2 + 36wz + 9w + x^3 + 9x^2y + 9x^2z + 9x^2 + 9xy^2 +$ $+36xyz + 36xy + 9xz^2 + 36xz + 9x + y^3 + 9y^2z + 9y^2 + 9yz^2 +$ $+36yz + 9y + z^3 + 9z^2 + 9z + 1$	5	4574.97

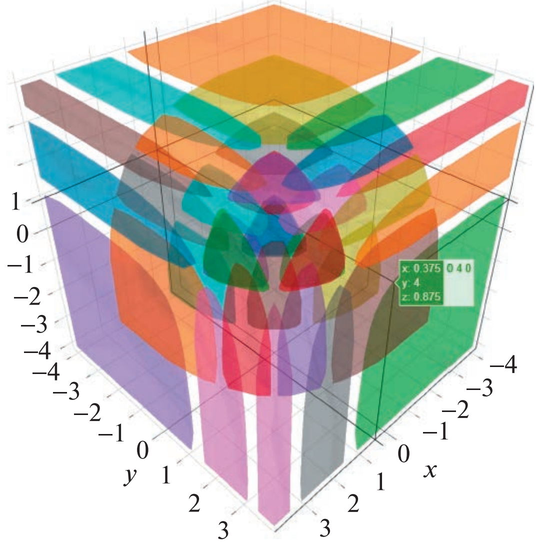

Рис. 5. Связные компоненты дополнения к амебе многочлена $x^4 + 16x^3y + 16x^3z + 16x^3 + 36x^2y^2 + 144x^2yz + 144x^2y + 36x^2z^2 + 144x^2z + 36x^2 + 16xy^3 + 144xy^2z + 144xy^2 + 144xyz^2 + 576xyz + 144xy + 16xz^3 + 144xz^2 + 144xz + 16x + y^4 + 16y^3z + 16y^3 + 36y^2z^2 + 144y^2z + 36y^2 + 16yz^3 + 144yz^2 + 144yz + 16y + z^4 + 16z^3 + 36z^2 + 16z + 1.$

```
  Join[Table[0,dimension],Union[Total /@
  Drop[Subsets[vectors],1]]];
massCenter=
  Total[sumsOfVectors]/Length[sumsOf
Vectors];
distanceFromSideToMassCenter[side-
Normal_]:=
  Max[Norm /@ ((#.sideNormal)
   sideNormal/Norm[sideNormal]^2 & /@
(# - massCenter & /@ sumsOfVec-
tors))];
constants=
distanceFromSideToMassCen-
ter[#]Norm[#] & /@ normals;
coefficient[vec_]:=
  Simplify[(Times @@ Gamma /@
      (1+constants   +((vec+massCen-
ter).# & /@
    normals)))^-power];
maxDegree=Abs[Max[Max /@ (Total /@
  Subsets[vectors])]];
exponents=
  Flatten[Outer@@(Join[List,
   Table[Range[-maxDegree,maxDegree],
      dimension]]),dimension-1];
Numerator[
   Factor[
     (coefficient /@ exponents).
     (Times @@@ (variables^# & /@ expo-
nents))
   ]]]
```

Результаты расчета и визуализации амеб оптимальных гипергеометрических многочленов с носителями в зонотопах представлены на сайте `http://amoebas.ru/`. Таблица 1 содержит данные о скорости расчета амеб многочленов двух, трех и четырех переменных, генерируемых с помощью приведенного выше программного кода, для различных значений размерности (`dimension`), степени многочлена (`degree`), степени логарифмической вогнутости его коэффициента (power) и числа уровней квадродерева, с помощью которого аппроксимируется амеба. Расчеты выполнялись на компьютере с центральным процессором Intel Xeon Gold 6146 с тактовой частотой 3.20 ГГц и 128 Гб оперативной памяти.

5. ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 22-21-00556, https://rscf.ru/project/22-21-00556/.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А., Рябенко А.А., Хмельнов Д.Е.* Лорановы, рациональные и гипергеометрические решения линейных q-разностных систем произвольного порядка с полиномиальными коэффициентами // Программирование, 2018, No 2. С. 60–73.
2. *Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V.* Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. Birkhäuser, 1994.
3. *Viro O.* What is an amoeba? // Notices of the AMS. 2002. V. 49. Issue 8. P. 916–917.
4. *Cherkis S.A., Ward R.S.* Moduli of monopole walls and amoebas // J. High Energy Physics. 2012. Issue 5. 90.
5. *Fujimori T., Nitta M., Ohta K., Sakai N., Yamazaki M.* Intersecting solitons, amoeba, and tropical geometry // Physical Review D – Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology. 2008. V. 78. Issue 10. 105004.
6. *Kenyon R., Okounkov A., Sheffield S.* Dimers and amoebae // Ann. Math. 2006. V. 163. P. 1019–1056.
7. *Passare M., Pochekutov D., Tsikh A.* Amoebas of complex hypersurfaces in statistical thermodynamics // Mathem. Physics, Analysis, and Geometry. 2013. V. 16. Issue 1. P. 89–108.
8. *Zahabi A.* Quiver asymptotics and amoeba: Instantons on toric Calabi–Yau divisors // Physical Review D. 2021. V. 103. Issue 8. 086024.
9. *Maeda T., Nakatsu T.* Amoebas and instantons // International Journal of Modern Physics A. 2007. V. 22. Issue 5. P. 937–983.

10. *Mikhalkin G.* Real algebraic curves, the moment map and amoebas // Ann. Math. 2000. V. 151. Issue 2. P. 309–326.
11. *Forsberg M.* Amoebas and Laurent series. 1998. Doctoral thesis presented at Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm. ISBN 91-7170-259-8.
12. *Leksell M., Komorowski W.* Amoeba Program: Computing and visualizing amoebas for some complex-valued bivariate expressions // http://qrf.servequake.com/amoeba/AmoebaProgram.pdf
13. *Rullgård H.* Topics in geometry, analysis, and inverse problems. 2003. Doctoral thesis presented at Stockholm University. ISBN 91-7265-738-3. http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:190169/FULLTEXT01.pdf
14. *Theobald T.* Computing amoebas // Experimental Math. 2002. V. 11. Issue 4. P. 513–526.
15. *Timme S.* A package to compute amoebas in 2 and 3 variables // https://github.com/saschatimme/PolynomialAmoebas.jl
16. *Theobald T., De Wolff T.* Approximating amoebas and coamoebas by sums of squares // Math. of Computation. 2015. V. 84(291). P. 455–473.
17. *Purbhoo K.* A Nullstellensatz for amoebas // Duke Math. J. 2008. V. 141. Issue 3. P. 407–445.
18. *Forsgård J., Matusevich L.F., Mehlhop N., De Wolff T.* Lopsided approximation of amoebas // Math. of Computation. 2018. V. 88. P. 485–500.
19. *Anthony E., Grant S., Gritzmann P., Rojas J.M.* Polynomial-time amoeba neighborhood membership and faster localized solving // Mathematics and Visualization. 2015. V. 38. P. 255–277.
20. *Bogdanov D.V., Kytmanov A.A., Sadykov T.M.* Algorithmic computation of polynomial amoebas // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2016. V. 9890. P. 87–100.
21. *Nisse M., Sadykov T.M.* Amoeba-shaped polyhedral complex of an algebraic hypersurface // J. Geom. Analysis. 2019. V. 29. Issue 2. P. 1356–1368.
22. *Bogdanov D.V., Sadykov T.M.* Hypergeometric polynomials are optimal // Math. Z. 2020. V. 296. Issue 1–2. P. 373–390.
23. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A.K.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 45–70.
24. *Klausen R.P.* Kinematic singularities of Feynman integrals and principal A-determinants // J. High Energy Physics. 2022. Issue. 2. 4.