

ISSN 0044-4669

Том 65, Номер 1

Январь 2025



ФИЦ ИУ РАН

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



НАУКА
— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 65, номер 1, 2025 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Коллокационно-вариационные подходы численного решения
интегральных уравнений Вольтерра первого рода

M. V. Булатов

3

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

On spectral approximations for the stability analysis of boundary layers

G. V. Zasko

10

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Первая начально-краевая задача для параболических систем в полуограниченной области
с криволинейной боковой границей

E. A. Бадерко, K. D. Федоров

23

Нелинейный метод угловых пограничных функций в случае влияния точки перегиба

A. И. Денисов, И. В. Денисов

36

Теория разрешимости особых интегродифференциальных уравнений
в классе обобщенных функций

H. С. Габбасов

50

Исследование динамических процессов в упругом слое, находящимся
на поверхности сжимаемой жидкости

H. B. Расулова, M. B. Расулов

62

Формулы Фейнмана–Каца для решений нестационарно возмущенных
эволюционных уравнений

Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев

69

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Моделирование верхнемантийной конвекции в зоне субдукции

A. H. Четырбоцкий

88

Spatial optimal disturbances of three-dimensional aerodynamic boundary layers

A. V. Boiko, K. V. Demyanko, S. A. Kusnetsova, Yu. M. Nechepurenko, G. V. Zasko

97

Течение идеальной жидкости сквозь пристеночный стационарный зернистый слой
в форме полубесконечной ступени

O. Б. Гуськов

110

ИНФОРМАТИКА

Стабильные матчинги, функции выбора и линейные порядки

A. В. Карзанов

120

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.968.2

КОЛЛОКАЦИОННО-ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА¹⁾

© 2025 г. М. В. Булатов^{1,*}

¹664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, Институт динамики систем
и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Россия

*e-mail: mvbul@icc.ru

Поступила в редакцию 14.02.2024 г.

Переработанный вариант 28.08.2024 г.

Принята к публикации 26.09.2024 г.

Рассмотрены линейные уравнения Вольтерра первого рода. Выделен класс таких задач, которые имеют единственное решение, для численного решения которых предложены коллокационно-вариационные методы. Суть данных алгоритмов заключается в том, что приближенное решение находят в узлах равномерной сетки (условие коллокации), которые дают недоопределенную систему линейных алгебраических уравнений. Полученную таким образом систему дополняют условием минимума целевой функции, которая аппрокси-мирует квадрат нормы приближенного решения. В итоге получают задачу квадратичного программирования: целевая функция (квадрат нормы приближенного решения) — квадратичная, ограничения (условия коллокации) — равенства. Данная задача решается методом множителей Лагранжа. Детально рассмотрены достаточно простые методы третьего порядка. Приведены результаты расчетов тестовых задач. Обсуждается дальнейшее развитие данного подхода для численного решения других классов интегральных уравнений. Библ. 12. Табл. 4.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, квадратурные формулы, коллокация, метод множите-
лей Лагранжа.

DOI: 10.31857/S0044466925010016, EDN: CDHTSA

1. ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена численному решению линейных интегральных уравнений Вольтерра вида

$$\int_0^t K(t, \tau)x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq 1, \quad (1)$$

где $f(t)$ и $K(t, \tau)$ — заданные функции с достаточно гладкими элементами, $x(t)$ — искомая функция. При

$$K(t, t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1], \quad f(0) = 0, \quad (2)$$

и непрерывных функциях $K(t, t), K'_t(\tau, t)|_{\tau=t}, f'(t)$ существует единственное непрерывное решение данной задачи (см., например, [1], [2]).

Подходы к численному решению уравнения (1) с условием (2) можно найти в монографиях [4]–[6] (колло-
кационные и многошаговые методы), [7] (блочные методы), диссертации [8]. В [9] представлены результаты по
данной тематике и трудности, которые возникают при разработке методов решения уравнения (1).

В настоящей работе предложены одношаговые методы решения обозначенных задач, которые себя отлич-
но зарекомендовали при решении дифференциально-алгебраических уравнений (см. [10] и приведенную там
библиографию) и являются обобщением статьи [11].

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 22-11-00173).

2. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ И АЛГОРИТМЫ

При построении методов решения исходной задачи нам потребуются некоторые результаты из теории приближенного интегрирования. Подробно остановимся на четырехточечных квадратурных формулах третьего порядка, которые потребуются для дальнейшего изложения.

Зададим на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h = 1/N$, и положим, что для достаточно гладкой функции $g(t)$ известно $g(t_i)$. Тогда

$$\int_{t_{i-3}}^{t_i} g(t) dt \approx h[b_1 g_{i-3} + b_2 g_{i-2} + b_3 g_{i-1} + b_4 g_i], \quad (3)$$

$$\int_{t_{i-3}}^{t_{i-1}} g(t) dt \approx h[a_1 g_{i-3} + a_2 g_{i-2} + a_3 g_{i-1} + a_4 g_i], \quad (4)$$

где коэффициенты a_j, b_j , $j = \overline{1, 4}$, удовлетворяют условиям третьего порядка, т.е. квадратурные формулы (3), (4) точны для любых полиномов степени не выше трех.

Опуская элементарные выкладки, получим, что данные коэффициенты являются решением СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4.5 \\ 8/3 & 9 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Полагая в (5) $a_1 = a$, $b_1 = b$ — свободные параметры, получим, что решением СЛАУ (5) являются

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a, 7/3 - 3a, -2/3 + 3a, 1/3 - a), \quad (6)$$

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (b, 2.25 - 3b, 3b, 0.75 - b). \quad (7)$$

Приступим к описанию методов приближенного решения ИУВ (1) предполагая, что $x_0 = x(0)$ задано или заранее вычислено. Данные алгоритмы основаны на квадратурных формулах (3) и (4) с коэффициентами, удовлетворяющими соотношениям (6) и (7) соответственно. Для простоты изложения положим N кратно трем и обозначим

$$f_i = f(t_i), \quad K_{ij} = K(t_i, t_j), \quad x_i \approx x(t_i).$$

В этом случае для уравнения (1) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{i-1}} K(t_{i-1}, \tau) x(\tau) d\tau &= \int_0^{3h} K(t_{i-1}, \tau) x(\tau) d\tau + \int_{3h}^{5h} K(t_{i-1}, \tau) x(\tau) d\tau + \cdots + \int_{t_{i-3}}^{t_{i-1}} K(t_{i-1}, \tau) x(\tau) d\tau = \\ &= h[b_1 K_{i-1,0} x_0 + b_2 K_{i-1,1} x_1 + b_3 K_{i-1,2} x_2 + b_4 K_{i-1,3} x_3] + (b_1 K_{i-1,3} x_3 + b_2 K_{i-1,4} x_4 + \\ &+ b_3 K_{i-1,5} x_5 + b_4 K_{i-1,6} x_6) + \cdots + (a_1 K_{i-1,i-3} x_{i-3} + a_2 K_{i-1,i-2} x_{i-2} + a_3 K_{i-1,i-1} x_{i-1} + a_4 K_{i-1,i} x_i) = \\ &= h \sum_{j=0}^{i-3} p_{ij} K_{i-1,j} x_j + h[a_1 K_{i-1,i-3} x_{i-3} + a_2 K_{i-1,i-2} x_{i-2} + a_3 K_{i-1,i-1} x_{i-1} + a_4 K_{i-1,i} x_i] = f_{i-1} \end{aligned} \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^{t_i} K(t_i, \tau) x(\tau) d\tau &= \int_0^{3h} K(t_i, \tau) x(\tau) d\tau + \int_{3h}^{6h} K(t_i, \tau) x(\tau) d\tau + \cdots + \int_{t_{i-3}}^{t_i} K(t_i, \tau) x(\tau) d\tau = \\ &= h[(b_1 K_{i,0} x_0 + b_2 K_{i,1} x_1 + b_3 K_{i,2} x_2 + b_4 K_{i,3} x_3) + (b_1 K_{i,3} x_3 + b_2 K_{i,4} x_4 + b_3 K_{i,5} x_5 + b_4 K_{i,6} x_6) + \cdots + (b_1 K_{i,i-3} x_{i-3} + \\ &+ b_2 K_{i,i-2} x_{i-2} + b_3 K_{i,i-1} x_{i-1} + b_4 K_{i,i} x_i)] = h \sum_{j=0}^{i-3} p_{ij} K_{i,j} x_j + h[b_1 K_{i,i-3} x_{i-3} + b_2 K_{i,i-2} x_{i-2} + b_3 K_{i,i-1} x_{i-1} + b_4 K_{i,i} x_i] = f_i, \end{aligned} \quad (9)$$

$$i = 3, 6, 9, \dots, N.$$

Точки t_{i-1} и t_i будем называть коллокационными точками или узлами коллокации.

Полагая $x(0) = x_0$ заданным и используя вышеприведенные квадратурные формулы, получим, что x_{i-2} , x_{i-1} и x_i являются решением СЛАУ

$$\begin{pmatrix} ha_2 K_{i-1,i-2} & ha_3 K_{i-1,i-1} & ha_4 K_{i-1,i} \\ hb_2 K_{i,i-2} & hb_3 K_{i,i-1} & hb_4 K_{i,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i-2} \\ x_{i-1} \\ x_i \end{pmatrix} = -h \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{i-3} p_{ij} K_{i-1,j} x_j + a_1 K_{i-1,i-3} x_{i-3} \\ \sum_{j=0}^{i-3} p_{ij} K_{i,j} x_j + b_1 K_{i,i-3} x_{i-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \end{pmatrix}$$

или в векторно-матричном виде

$$A_i X_i = B_i, \quad (10)$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} ha_2 K_{i-1,i-2} & ha_3 K_{i-1,i-1} & ha_4 K_{i-1,i} \\ hb_2 K_{i,i-2} & hb_3 K_{i,i-1} & hb_4 K_{i,i} \end{pmatrix}, \quad X_i = (x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)^T,$$

$$B_i = -h \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{i-3} p_{ij} K_{i-1,j} x_j + a_1 K_{i-1,i-3} x_{i-3} \\ \sum_{j=0}^{i-3} p_{ij} K_{i,j} x_j + b_1 K_{i,i-3} x_{i-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \end{pmatrix}.$$

Данные системы имеют размерность (2×3) , т.е. являются недоопределенными.

Будем смотреть на СЛАУ (10) как на ограничения типа равенств для поиска минимума квадрата нормы приближенного решения $y_i(t)$, $t \in [t_{i-3}, t_i]$, $y_{i+1}(t_i) = y_i(t_i)$, $t \in [t_{i-3}, t_i]$ $i = 3, 4, \dots, N$. В этом случае мы будем иметь задачу на условный минимум

$$\|y\|^2 \rightarrow \min \quad (11)$$

при ограничениях типа равенств (10).

Если норма функции $y(x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, t)$ выбрана неудачно, например, в пространстве непрерывных или непрерывно-дифференцируемых функций, то задача (11) с ограничениями (10) будет достаточно сложной, поэтому будем считать

1) $y(t) = L_3(x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, t)$ — интерполяционный полином третьей степени, проходящий через точки (x_{i-m}, t_{i-m}) , $m = 0, 1, 2, 3$;

2)

$$\|y(t)\|^2 = \|L_3(\cdot)\|^2 = \sum_{m=0}^r \int_{t_{i-3}}^{t_i} L_3^{(m)}(t) L_3^{(m)}(t) dt, \quad 0 \leq r \leq 3. \quad (12)$$

Здесь мы ограничимся частным случаем (12), а именно, $r = 3$ и для вычисления определенного интеграла в формуле (12) воспользуемся какой-либо известной квадратурной формулой (см., например, [12]). Тогда имеем

$$\begin{aligned} \|L_3(\cdot)\|^2 &= \sum_{m=0}^3 \int_{t_{i-3}}^{t_i} L_3^{(m)}(x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, t) L_3^{(m)}(x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, t) dt \approx \\ &\approx h \left[\left\| \sum_{m=0}^3 \alpha_m^0 x_{i-3+m} \right\|^2 + \left\| \sum_{m=0}^3 (\alpha_m^1 x_{i-3+m})/h \right\|^2 + \left\| \sum_{m=0}^3 (\alpha_m^2 x_{i-3+m})/h^2 \right\|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{m=0}^3 (\alpha_m^3 x_{i-3+m})/h^3 \right\|^2 \right] = \varphi(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\sum_{m=0}^3 (\alpha_m^q x_{i-3+m})/h^q \approx x^{(q)}(\xi_i^p)$, $\xi_i^p \in [t_{i-3}, t_i]$, а норма конечномерного вектора здесь понимается как евклидова.

Коэффициенты α_m^q зависят от выбора квадратурной формулы и формулы приближенного вычисления $L_3^{(m)}(x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, t)$.

Коэффициенты α_m^3 определены единственным образом из очевидного равенства $\Delta^3 x_i = (x_i - 3x_{i-1} + 3x_{i-2} - x_{i-3})$, т.е. $\alpha^3 = (1, -3, 3, -1)$.

Например, при $\bar{t} = t_{i-3}$ коэффициенты $\alpha^0 = (0, 0, 0, 1)$, $\alpha^1 = 1/6(2, -9, 18, -11)$, $\alpha^2 = (-1, 4, -5, 2)$.

При $\bar{t} = t_{i-2}$ коэффициенты $\alpha^0 = (0, 0, 1, 0)$, $\alpha^1 = 1/6(-1, 6, -3, -2)$, $\alpha^2 = (0, 1, -2, 0)$.

При $\bar{t} = t_{i-1}$ коэффициенты $\alpha^0 = (0, 1, 0, 0)$, $\alpha^1 = 1/6(2, 3, -6, 1)$, $\alpha^2 = (1, -2, 1, 0)$.

При $\bar{t} = t_i$ коэффициенты $\alpha^0 = (1, 0, 0, 0)$, $\alpha^1 = 1/6(11, -18, 9, -2)$, $\alpha^2 = (2, -5, 4, -1)$.

Таким образом, учитывая, что x_0 задано, на каждом отрезке интегрирования $[t_{i-3}, t_i]$, $i = 3, 4, \dots, N$, имеем задачу квадратичного программирования: найти минимум целевой функции $\varphi(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$ при ограничениях типа равенств (10).

В силу того что умножение целевой функции (13) на произвольное ненулевое число не влияет на нахождение аргумента условного минимума, то данная задача эквивалентна задаче

$$\min \psi(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = h^6 \left\| \sum_{m=0}^3 a_m^0 x_{i-3+m} \right\|^2 + h^4 \left\| \sum_{m=0}^3 (a_m^1 x_{i-3+m})/h \right\|^2 + h^2 \left\| \sum_{m=0}^3 (a_m^2 x_{i-3+m})/h^2 \right\|^2 + \|\Delta^3 x_i\|^2 \quad (14)$$

с ограничениями (10).

Так как первое, второе и третье слагаемые в (14) содержат малые слагаемые порядка h^6, h^4, h^2 соответственно, то их можно отбросить (или часть из них). Например, ограничиваясь в (14) только третьим и четвертым слагаемым или только последним получим, две задачи математического программирования:

1) найти

$$\min \psi_1(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = h^2 \left\| \sum_{m=0}^3 (a_m^2 x_{i-3+m})/h^2 \right\|^2 + \|\Delta^3 x_i\|^2, \quad (15)$$

2) найти

$$\min \psi_2(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = \|\Delta^3 x_i\|^2 \quad (16)$$

при ограничениях типа равенств (10).

Задачи (15), (10) и (16), (10) можно решить методом множителей Лагранжа. Так как целевые функции (15) и (16) являются квадратичными, а ограничения (10) есть равенства, то решением данных задач является решение соответствующих СЛАУ. Например, решением задач (16) с ограничениями (10) является решение СЛАУ вида

$$\mathcal{A}_i X_i = \mathcal{B}_i, \quad (17)$$

где

$$\mathcal{A}_i = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ hb_2 K_{i-1,i-2} & hb_3 K_{i-1,i-1} & hb_4 K_{i-1,i} \\ ha_2 K_{i,i-2} & ha_3 K_{i,i-1} & ha_4 K_{i,i} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$X_i = (x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)^\top,$$

$$\mathcal{B}_i = (x_{i-3}, B_i^\top)^\top,$$

где вектор B_i определен по формуле (10).

Утверждение. Пусть для интегрального уравнения (1) выполнены условия:

1) элементы $K(t, \tau)$, $f(t)$ принадлежат классу $C_{[0,1]}^4$;

2) $K(t, t) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$, $f(0) = 0$, $x_0 = x(0)$.

Тогда справедлива оценка $\|x_i - x(t_i)\| = O(h^3)$, $i = 3, 4, \dots, N$, где x_{i-2}, x_{i-1}, x_i являются решениями задач (17).

Доказательство основано на дискретном аналоге леммы Гронуолла–Беллмана (см. [3], [6]).

Отметим, что если положить в (12) $r < 3$, то получим другое семейство алгоритмов. Например, при $r = 2$ (по аналогии с задачей (14)) будем иметь задачи на условный минимум квадратичной функции:

1) найти

$$\min \Omega(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = \left\| \sum_{m=0}^3 (a_m^2 x_{i-3+m}) \right\|^2 + h^2 \left\| \sum_{m=0}^3 (a_m^1 x_{i-3+m}) \right\|^2 + h^4 \left\| \sum_{m=0}^3 (a_m^0 x_{i-3+m}) \right\|^2 \quad (19)$$

при ограничениях типа равенств (10).

При $r = 1$ будем иметь

2) найти

$$\min \Gamma(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = \left\| \sum_{m=0}^3 (a_m^1 x_{i-3+m}) \right\|^2 + h^2 \left\| \sum_{m=0}^3 (a_m^0 x_{i-3+m}) \right\|^2 \quad (20)$$

при ограничениях типа равенств (10).

По аналогии с (13) данные задачи эквивалентны поиску условного минимума функций $\Omega(x_i, x_{i-1}, x_{i-2})$ и $\Gamma(x_i, x_{i-1}, x_{i-2})$ соответственно.

Так же, как и для случая $r = 3$, для случая $r = 2$ в формуле (19) слагаемые, содержащие h^4 или h^2 , можно отбросить. А для $r = 1$ можно отбросить слагаемое, содержащее h^2 .

Тогда получим семейство алгоритмов: для $r = 2$ найти

$$\min \Omega_1(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = \left\| \sum_{m=0}^3 (\alpha_m^2 x_{i-3+m}) \right\|^2 + h^2 \left\| \sum_{m=0}^3 (\alpha_m^1 x_{i-3+m}) \right\|^2 \quad (21)$$

или

$$\min \Omega_2(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = \left\| \sum_{m=0}^3 (\alpha_m^2 x_{i-3+m}) \right\|^2 \quad (22)$$

при ограничениях типа равенств (10).

Для $r = 1$ будем иметь семейство методов: найти

$$\min \Gamma_1(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, h) = \left\| \sum_{m=0}^3 (\alpha_m^1 x_{i-3+m}) \right\|^2 \quad (23)$$

при ограничениях типа равенств (10).

Для решения задач (21)–(23) можно применять метод множителей Лагранжа. Условный минимум функций Ω , Ω_1 , Ω_2 и Γ , Γ_1 в этом случае находится точно из решения соответствующих СЛАУ.

Отметим, что исследование на устойчивость и скорость сходимости методов (19)–(23) представляет собой отдельный интерес. Свойства данных алгоритмов будут зависеть не только от выбора квадратурных формул (см. формулу (6)), т.е. от параметров a и b , но и от выбора аппроксимации производных решения (см. формулы (12) и (13)), т.е. от параметров α_m^l , $0 \leq l, m \leq 3$. Были рассмотрены различные варианты таких подходов. Предварительный анализ данных алгоритмов показал, что они обладают свойством устойчивости.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

В данном разделе приведены расчеты тестовых примеров по алгоритму (17) с параметрами $a = 1/3(1, 4, 1, 0)^\top$, $b = 1/4(3, 0, 9, 0)^\top$. Результаты представлены в виде таблиц. Принято обозначение $er = \max_{i=1, N} |x(t_i) - x_i|$.

Пример 1 (см. [6], с. 149). Рассмотрим ИУ

$$(r^2 + 1) \int_0^t \cos(t - \tau)x(\tau)d\tau = \sin(t) + r(\exp(rt) - \cos(t)), \quad t \in [0, 1],$$

точное решение которого $x(t) = \exp(rt)$. Результаты расчетов при $r = 1$, $a = 1/3(1, 4, 1, 0)^\top$, $b = 1/4(3, 0, 9, 0)^\top$ представлены в табл. 1.

Результаты расчетов этого примера при значении параметров $a = 1/3(0, 7, -2, 1)^\top$, $b = 1/4(0, 9, 0, 3)^\top$, $r = 1$ представлены в табл. 2.

Пример 2 (см. [6], с. 517). Рассмотрим ИУ

$$\alpha \int_0^t \exp(\alpha(t - \tau))x(\tau)d\tau = (\exp(\alpha t) - \exp(-\alpha t))/2, \quad t \in [0, 1],$$

точное решение которого $x(t) = \exp(-\alpha t)$. Результаты расчетов при значениях параметров $\alpha = 3$, $a = 1/3(1, 4, 1, 0)^\top$, $b = 1/4(3, 0, 9, 0)^\top$ представлены в табл. 3.

Результаты расчетов данного примера при значении параметров $a = 1/3(0, 7, -2, 1)^\top$, $b = 1/4(0, 9, 0, 3)^\top$, $\alpha = 3$ представлены в табл. 4.

Численные расчеты данных примеров согласуются с утверждением. Кроме приведенных выше примеров были проведены многочисленные расчеты других тестовых примеров, которые не содержат жестких компонент, при различных выборах параметров a и b по алгоритму (17). Данные эксперименты также хорошо согласуются с утверждением.

Таблица 1. Численные расчеты примера 1 при $r = 1$, $a = 1/3(1, 4, 1, 0)^\top$, $b = 1/4(3, 0, 9, 0)^\top$

h	0.1	0.05	0.025
er	0.0039	0.0006	0.00009

Таблица 2. Численные расчеты примера 1 при $r = 1$, $a = 1/3(0, 7, -2, 1)^\top$, $b = 1/4(0, 9, 0, 3)^\top$

h	0.1	0.05	0.025
er	0.0027	0.0004	0.00006

Таблица 3. Расчеты для примера 2 при значениях параметров $\alpha = 3$, $a = 1/3(1, 4, 1, 0)^\top$, $b = 1/4(3, 0, 9, 0)^\top$

h	0.1	0.05	0.025
er	0.085	0.012	0.0018

Таблица 4. Результаты расчетов примера 2 при значении параметров $\alpha = 3$, $a = 1/3(0, 7, -2, 1)^\top$, $b = 1/4(0, 9, 0, 3)^\top$

h	0.1	0.05	0.025
er	0.02	0.0035	0.00052

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье был выделен класс интегральных уравнений Вольтерра первого рода, для численного решения которых предложены коллокационно-вариационные методы третьего порядка. Данные алгоритмы сводятся к решению задачи математического (квадратичного) программирования — целевая функция квадратичная (некий аналог квадрата нормы приближенного решения) с ограничениями типа равенств (условие коллокации). Такая задача эквивалентна нахождению решения невырожденной СЛАУ. Численные расчеты показали перспективность дальнейшей разработки данного подхода. Далее планируется детальное исследование коллокационно-вариационных методов (21)–(23), методов более высокого порядка и для более общих задач, в частности, для интегральных уравнений Вольтерра, имеющих степень неустойчивости (см. [3]) больше единицы и уравнений первого рода с ядром, содержащим слабую особенность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
3. Апарин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.
4. Brunner H. Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2017. 402 p.
5. Brunner H. Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. Cambridge: Univer. Press, 2004.
6. Brunner H., van der Houwen P.J. The numerical solution of Volterra equations, CWI Monographs 3. Amsterdam: North Holland, 1986.
7. Linz P. Analytical and numerical methods for Volterra equations. SIAM, Philadelphia, 1985.
8. Тен Мен Ян. Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра 1 рода. Дисс... канд. физ.-матем. наук, Иркутск, 1985.
9. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1978.
10. Bulatov M., Solovarova L. Collocation-variation difference schemes with several collocation points for differential-algebraic equations // Appl. Numer. Math. 2020. V. 149. P. 153–163. DOI: 10.1016/j.apnum.2019.06.014.
11. Булатов М.В., Маркова Е.В. Коллокационно-вариационные подходы к решению интегральных уравнений Вольтерра I рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 1. С. 105–112.
12. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.

COLLOCATION-VARIATIONAL APPROACHES TO SOLVE THE VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND NUMERICALLY

M. V. Bulatov*

V. M. Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch
of the Russian Academy of Science, Irkutsk, 664033 Russia

*e-mail: mvbul@icc.ru

Received: 14 February 2024

Revised: 28 August 2024

Accepted: 26 September 2024

Abstract. Linear Volterra equations of the first kind are considered. A class of problems that have a single solution is identified, and collocation-variational methods are proposed to solve them numerically. The essence of these algorithms is that the approximate solution is found at the nodes of a uniform grid (the collocation condition) that yield an underdetermined system of linear algebraic equations. The system thus obtained is supplemented by the condition of minimum of the objective function, which approximates the squared norm of the approximate solution. As a result, a quadratic programming problem is obtained, viz. the objective function (the squared norm of the approximate solution) is quadratic, and the constraints (the collocation conditions) are equalities. This problem is solved by the method of Lagrange multipliers. Sufficiently simple third-order methods are considered in detail. The calculation results for test problems are given. Further development of this approach to solve other classes of integral equations numerically is discussed.

Keywords: Volterra integral equations, quadrature formulas, collocation, Lagrange multipliers method

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 532.51

ON SPECTRAL APPROXIMATIONS FOR THE STABILITY ANALYSIS OF BOUNDARY LAYERS¹⁾

© 2025 г. G.V. Zasko^{1,*}

¹Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Gubkina str. 8, Moscow, 119333, Russia

*e-mail: zasko.gr@bk.ru

Поступила в редакцию 02.09.2024 г.

Переработанный вариант 02.09.2024 г.

Принята к публикации 26.09.2024 г.

Approximation of spectral and boundary-value problems arising in the stability analysis of incompressible boundary layers is considered. As an alternative to the collocation method with mappings, the Galerkin–collocation method based on Laguerre functions is adopted. A robust numerical implementation of the latter method is discussed. The methods are compared within the stability analysis of the Blasius and Ekman layers. The Galerkin–collocation method demonstrates an exponential convergence rate for scalar stability characteristics and has a number of advantages.

Ключевые слова: spectral methods, Galerkin–collocation method, Laguerre functions, incompressible boundary layers, linear stability analysis, non-modal stability analysis.

DOI: 10.31857/S0044466925010027, EDN: CDGWXI

1. INTRODUCTION

Three-dimensional small-amplitude disturbances against a main laminar flow are of interest in numerical studies of boundary-layer instabilities. Equations governing the evolution of such disturbances are considered on the half-line $y > 0$, where y is the wall-normal coordinate, with the boundary conditions

$$u = v = w = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, y \rightarrow +\infty \quad (1.1)$$

for the velocity components u , v and w (see, e.g., [1–3]). The boundary conditions (1.1) represent the no-slip condition at the flow-exposed surface $y = 0$ and decaying of disturbances at far distance from the surface. This paper devotes to approximations on y of such problems.

Spectral methods, including collocation and Galerkin–collocation methods, are a good choice for the approximation of governing equations, since the equations are linear while sought disturbances are smooth functions of y . Within the collocation method, the solution is approximated by a series of infinitely-differentiable functions with a non-finite supply; and the expansion coefficients are determined by requiring the equations to be satisfied at given grid nodes called collocation points. Within the Galerkin–collocation method, the equations are approximated in the weak form, Lagrange interpolation functions associated with some grid are used as trial and test functions, and the inner products are computed by a high-order quadrature formula associated with the same grid. Note that the Galerkin–collocation method is often called the Galerkin method with numerical integration [4]. For problems considered on a finite interval, these spectral methods are discussed, for example, in [4–6]; and procedures from the well-known software packages [7, 8] can be used for the numerical implementation of these methods.

There are three main approaches for approximating problems considered on the half-line $y > 0$ under the boundary conditions (1.1). The first one introduces an artificial boundary at finite but large distance y_{\max} from the surface. Then the equations are considered on the interval $(0, y_{\max})$ under some (e.g., zero or asymptotic [9]) boundary conditions at $y = y_{\max}$ instead of those at infinity. Coupled with a spectral method for the finite interval, this approach is widely used in numerical studies of boundary-layer instabilities (see [3] and references therein). This approach requires choosing the sufficient value of y_{\max} for a particular problem, and y_{\max} might depend on flow parameters. Note that boundary conditions for the velocity components at any $y = y_{\max}$ might allow for solutions that do not decay as $y \rightarrow +\infty$. For boundary-layer stability problems, solutions with such a behavior are known; these solutions correspond to the modes of continuous spectrum [1, 3], with their physical relevance being still an open question.

The second approach uses a mapping that transform a system of functions with well-established approximation properties on a finite interval (for example, the Lagrange interpolation polynomials associated with the Chebyshev points)

¹⁾ The work is supported by the Russian Science Foundation (grant No. 22-11-00025).

into that on a half-line [4, 10]. The approximation properties of such mapped systems of functions are discussed in [11]. From [12, 13] onwards, various mappings are compared for model problems. This approach is used in hydrodynamic and aerodynamic applications [10, 14, 15].

The third approach [11, 16] uses the Laguerre functions $\hat{L}_k(y) = L_k(y) \exp(-y/2)$, where L_k is the Laguerre polynomial of degree k . As to our knowledge, spectral methods based on the Laguerre functions have not been previously used for studying boundary-layer instabilities.

In [11] the convergence of the spectral Galerkin method based on either mapped systems of polynomials or the Laguerre functions is studied theoretically. Upper bounds on the approximation errors are obtained for both type of methods and then verified on model elliptic equations. Note that these bounds are obtained in different norms. For the method based on the Laguerre functions, the norm is the usual (i.e., with the unit weight function) L_2 -norm over the half-line; this norm has a clear physical interpretation in the study of boundary-layer instabilities — it is the disturbance kinetic energy density. For the method based on mapped systems of polynomials, that is the weighted norm determined by the mapping. The work [11] provides a number of examples, where either the first method converges faster than the second one, or the second one converges faster than the first one, or both methods show close results. It is of interest to compare these methods for boundary-layer stability problems.

The present work is organized as follows. In Section 2, we describe the approximation by the Galerkin–collocation method based on the Laguerre functions of the equations governing evolution of small-amplitude disturbances of viscous incompressible boundary layers. Section 3 devotes to a robust numerical implementation of this method. Section 4 compares the proposed method with the collocation method with mappings for the stability analysis of the Blasius and Ekman layers. Section 5 summarizes the results.

Throughout this paper, $\|\cdot\|_2$ denotes the 2-norm for vectors and matrices, the superscripts T and $*$ denote the symbols of transposition and conjugate transposition respectively, and δ_{ij} denotes the Kronecker delta.

2. APPROXIMATION OF PROBLEMS ARISING WITHIN THE STABILITY ANALYSIS OF BOUNDARY LAYERS

In the Cartesian coordinates, x (streamwise), y (wall-normal) and z (spanwise), consider a flow of a viscous incompressible fluid over the flat surface $y = 0$. Against the background of a main laminar flow, we consider three-dimensional small-amplitude time-dependent disturbances which are represented as follows

$$(u', v', w', p') = (u, v, w, p)e^{i\alpha x + i\gamma z}, \quad (2.1)$$

where u , v , w , and p are the complex-valued amplitudes of the streamwise, wall-normal and spanwise velocity components, and the pressure, respectively. The amplitudes depend only on y and t . Here t is the time, α is the streamwise wavenumber, and γ is the spanwise wavenumber.

Two problems are considered in this paper to present and compare approximation methods in the wall-normal direction y .

The first problem is the temporal stability analysis of the Blasius layer under the local-parallel assumption. In this case, it is assumed that the linear dimensionless equations governing the evolution of small-amplitude disturbances are as follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + i\alpha U_B u + \frac{dU_B}{dy} v + i\alpha p - \frac{1}{Re} \Delta_{\alpha\gamma} u &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + i\alpha U_B v + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re} \Delta_{\alpha\gamma} v &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + i\alpha U_B w + i\gamma p - \frac{1}{Re} \Delta_{\alpha\gamma} w &= 0, \\ iau + \frac{\partial v}{\partial y} + i\gamma w &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

where Re is the Reynolds number, and $\Delta_{\alpha\gamma} = -\alpha^2 + \partial^2/\partial y^2 - \gamma^2$. The streamwise velocity $U_B(y) = df/dy$ of the main flow depends only on y ; and f satisfies the Blasius equation

$$2 \frac{d^3 f}{dy^3} + \frac{d^2 f}{dy^2} f = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(+\infty) = 1,$$

which can be solved by standard numerical methods (see, e.g., references in [3]). A physical interpretation of the equations (2.2) as well as the definition of the Reynolds number can be found in [2, 3].

The second problem is the temporal stability analysis of the Ekman layer. In this case, it is assumed that the linear dimensionless equations governing the evolution of small-amplitude disturbances are as follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathrm{i}\alpha U_E + \mathrm{i}\gamma W_E)u + \frac{dU_E}{dy}v + \mathrm{i}\alpha p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta_{\alpha\gamma}u &= \frac{1}{\mathrm{Ro}}w, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathrm{i}\alpha U_E + \mathrm{i}\gamma W_E)v + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta_{\alpha\gamma}v &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathrm{i}\alpha U_E + \mathrm{i}\gamma W_E)w + \frac{dW_E}{dy}v + \mathrm{i}\gamma p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta_{\alpha\gamma}w &= -\frac{1}{\mathrm{Ro}}u, \\ \mathrm{i}au + \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\gamma w &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

where Re is the Reynolds number, and $\mathrm{Ro} = \mathrm{Re}/2$ is the Rossby number. The streamwise velocity $U_E(y) = 1 - \cos(y)\mathrm{e}^{-y}$ and spanwise velocity $W_E(y) = \sin(y)\mathrm{e}^{-y}$ of the main flow depend only on y and are known analytically. A physical interpretation of the equations (2.3) as well as the definition of the Reynolds and Rossby numbers can be found in [14].

Within the stability analysis, the velocity components satisfy the boundary conditions (1.1) for both considered problems. In addition, we consider the disturbance kinetic energy density

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} |u|^2 + |v|^2 + |w|^2 dy \quad (2.4)$$

as a physically-relevant measure of disturbance magnitude.

2.1. Approximation by the Galerkin–collocation method based on the Laguerre functions

Let us consider the equations (2.2) under the boundary conditions (1.1). Suppose \mathcal{L}_2 is the space of complex-valued functions square-integrable over the half-line $y > 0$. This space is equipped with the inner product and the norm that is similar to the energy functional (2.4). Suppose \mathcal{H}_0 is the space, whose elements satisfy zero boundary condition at $y = 0$ and belong to \mathcal{L}_2 together with their first derivatives. Let us multiply the momentum equations by $f_u, f_v, f_w \in \mathcal{H}_0$ and the continuity equation by $f_p \in \mathcal{L}_2$; and integrate these equations over the half-line $y > 0$, using the integration by parts. Thus, we obtain the weak form of the equations (2.2). We seek for $u, v, w \in \mathcal{H}_0$ and $p \in \mathcal{L}_2$ (at any fixed t) such that the weak form of the equations (2.2) is valid for any $f_u, f_v, f_w \in \mathcal{H}_0$ and $f_p \in \mathcal{L}_2$.

Let L_k be the Laguerre polynomial of degree k . Suppose $0 = y_0 < \dots < y_n$ is the Laguerre–Gauss–Radau grid, whose non-zero nodes are the roots of the derivative of L_{n+1} . The Laguerre–Gauss–Radau quadrature formula

$$\int_0^{+\infty} f(y)\mathrm{e}^{-y} dy \approx \sum_{i=0}^n f(y_i)\kappa_i, \quad \kappa_i = \frac{1}{(n+1)L_n^2(y_i)}$$

associated with this grid is exact for any polynomial of degree $2n$ or less [17]. Then, the following quadrature formula is valid

$$\int_0^{+\infty} f(y) dy \approx \sum_{i=0}^n f(y_i)\hat{\kappa}_i, \quad \hat{\kappa}_i = \kappa_i \mathrm{e}^{y_i}. \quad (2.5)$$

Suppose $\ell_i(y)$ are the Lagrange interpolation polynomials for the Laguerre–Gauss–Radau grid. Likewise, $\bar{\ell}_i(y)$ are those for the grid $y_1 < \dots < y_n$. It is easy to see that

$$\ell_i(y) = \frac{L_n(y) - L_{n+1}(y)}{(y - y_i)L_n(y_i)}. \quad (2.6)$$

In the sequel, functions of the form

$$\begin{aligned} \psi_i(y) &= \ell_i(y)\mathrm{e}^{-(y-y_i)/2}, \quad i = 0, \dots, n, \\ \phi_i(y) &= \bar{\ell}_i(y)\mathrm{e}^{-(y-y_i)/2}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.7)$$

are called the Laguerre interpolation functions. The functions $\psi_i(y)$ at $1 \leq i \leq n$ equal zero at $y = 0$. These functions are used as trial functions for the velocity components, and as test functions for the momentum equations. The functions

$\phi_i(y)$ are used as trial functions for the pressure, and as test functions for the continuity equation. The quadrature formula (2.5) is used for computing the inner products.

Let us point out the approximation of some operators in the weak form of (2.2). Let g_v be the approximation of a function from \mathcal{H}_0 by ψ_i ($i = 1, \dots, n$), and g_p be the column whose elements are the corresponding expansion coefficients. Likewise, let g_p be the approximation of a function from \mathcal{L}_2 by ϕ_i ($i = 1, \dots, n$), and g_p be the column whose elements are the corresponding expansion coefficients. Then, the following equalities are valid

$$\int_0^{+\infty} \frac{dg_v}{dy} \frac{dg_v}{dy} dy = (\mathbf{D}^T \mathbf{K} \mathbf{D} g_v, g_v), \quad (2.8)$$

$$\int_0^{+\infty} g_p \frac{dg_v}{dy} dy = (\mathbf{D}^T \mathbf{K} \mathbf{P} g_p, g_v), \quad \int_0^{+\infty} \frac{dg_v}{dy} g_p dy = (\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{D} g_v, g_p), \quad (2.9)$$

where the Euclidean inner product is denoted by the braces, \mathbf{K} is the diagonal matrix of order $n + 1$ whose entries are the quadrature weights (2.5), \mathbf{D} is the matrix of size $(n + 1) \times n$ whose entries are the derivatives of $\psi_i(y)$ ($i = 1, \dots, n$) at the Laguerre-Gauss-Radau nodes, and \mathbf{P} is the matrix of size $(n + 1) \times n$ whose entries are the values of $\phi_i(y)$ at the Laguerre-Gauss-Radau nodes. Note that the equalities (2.8), (2.9) hold since the quadrature (2.5) is exact for any function of the form $p(y)e^{-y}$, where $p(y)$ is a polynomial of degree $2n$ or less. The matrix \mathbf{D} is called the differentiation matrix. The matrix \mathbf{P} is called the projection matrix; only $\phi_i(y_0)$ have to be computed since $\phi_i(y_j) = \delta_{ij}$ at the interior nodes by definition. The computation of the matrices \mathbf{D} and \mathbf{P} is discussed in Section 3.

As a result of the described approximation of the equations (2.2), we obtain a system of ordinary differential and algebraic equations of the form

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= Jv + Gp, \\ Fv &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

where v is the $3n$ -component column, whose elements represent the values of the velocity components at the interior grid nodes. In (2.10), v is additionally scaled such that $\|v\|_2^2$ correspond to the energy functional (2.4). Here J , G , and F are matrices of size $3n \times 3n$, $3n \times n$, and $n \times 3n$, respectively. The ordinary differential equations in (2.10) correspond to the momentum equations, while the algebraic equations correspond to the continuity equation. From (2.8) and (2.9), it is easy to see that the discrete analogue of the Laplace operator is a symmetric negative-definite matrix as well as the equality $F = -G^*$ is valid.

Similar to the polynomial interpolation, approximation properties of the functions (2.7) are determined by the Lebesgue function $\Phi(y)$ and the Lebesgue constant L_Φ

$$\Phi(y) = \sum_{i=0}^n |\psi_i(y)|, \quad L_\Phi = \max_{y>0} \Phi(y). \quad (2.11)$$

At given n , the function $\Phi(y)$ is equal to 1 at $y = y_i$ and decays exponentially at $y > y_n$. Figure 1 shows the function $\Phi(y)$ at $n = 32$; it is qualitatively the same at other n . As for the polynomial interpolation, the Lebesgue constant L_Φ increases with n . Figure 1 shows that the increase of L_Φ is at logarithmic rate. In addition, the increase of L_Φ is compared to the increase of the Lebesgue constant for polynomial interpolation at the Chebyshev points. It is shown that the values of L_Φ are slightly smaller, while the growth rate is similar.

2.2. Scaling for the stability analysis of boundary layers

Within the boundary-layer stability analysis, there are two characteristic wall-normal length scales — the thickness of the laminar boundary layer y_{BL} , and the finite height y_{max} such that disturbances might be regarded as negligible at $y > y_{max}$. The value of y_{BL} can be found before the stability analysis, using only the main flow data (see introduction in [18] and references therein). In contrast, the value of y_{max} can be found only within the stability analysis by studying the convergence of the sought disturbances with increasing y_{max} . We also note that some disturbances (e.g., Tollmien-Schlichting waves) can extend significantly above the boundary layer, i.e., y_{max} can be much larger than y_{BL} . This physical discussion leads to the following requirements. The grid nodes should be separated such that both the boundary-layer domain ($0 < y < y_{BL}$) and its outside are covered. In addition, as n increases, both the number of nodes inside and outside the boundary layer must increase.

Therefore, the Laguerre-Gauss-Rado grid $0 = y_0 < \dots < y_n$ should be scaled, since these nodes are distributed along the entire half-line $y \geq 0$, with y_n increasing with n . For example, one can satisfy these requirements by the scaling

$$y_i := y_i/\sigma, \quad \hat{\kappa}_i := \hat{\kappa}_i/\sigma, \quad \psi'_j(y) := \sigma \psi'_j(y), \quad (2.12)$$

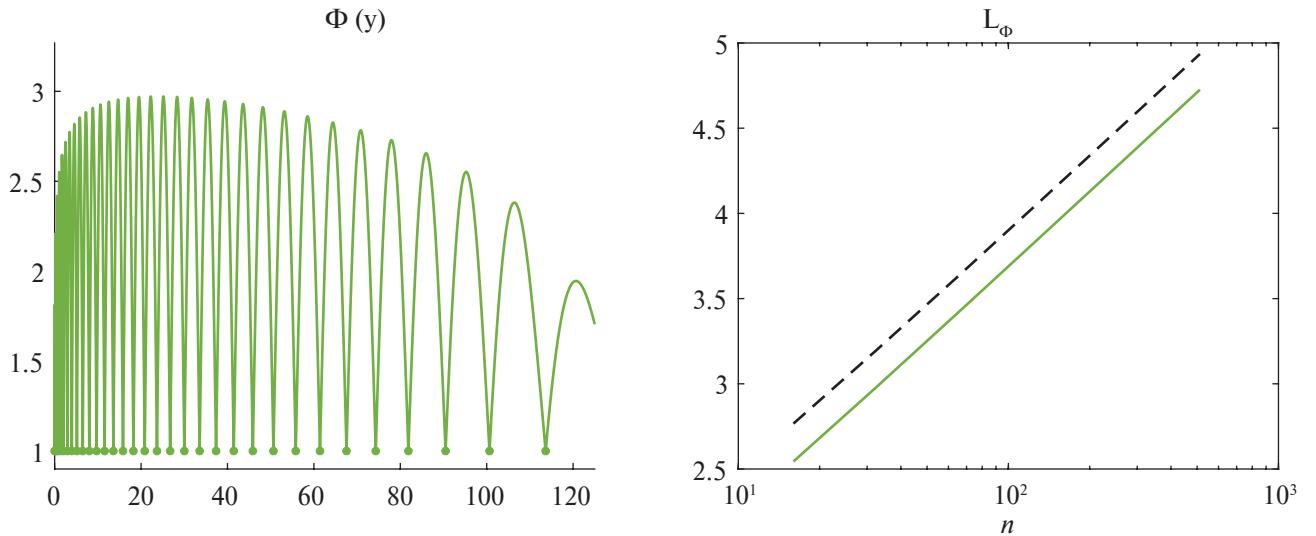


Figure 1. On the left: the Lebesgue function $\Phi(y)$ (2.11) at $n = 32$. The Laguerre–Gauss–Radau nodes are marked with green dots. On the right: the increase of L_Φ (green solid) with n , and that of the Lebesgue constant for the polynomial interpolation for the Chebyshev grid (black dashed).

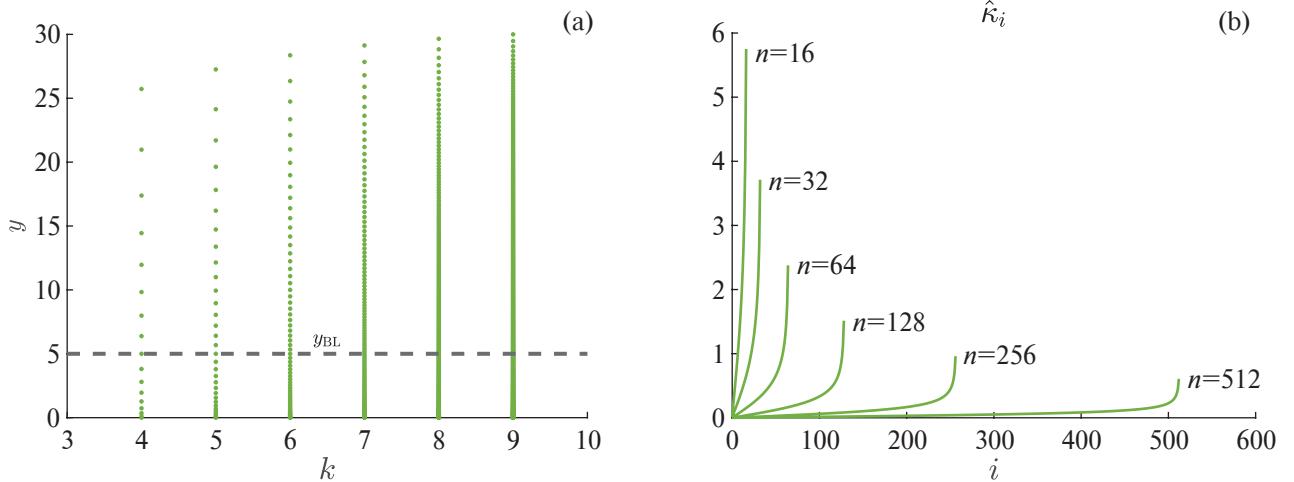


Figure 2. On the left: the Laguerre–Gauss–Radau nodes under the scaling (2.12) at fixed $y_{BL} = 5$ and at $n = 2^k$, where $k = 4, \dots, 9$. The independent variable y is stretched along the vertical axis. On the right: the quadrature weights $\hat{\kappa}_i$ (2.5) under the scaling (2.12) at the same y_{BL} and n .

where $\sigma = y_m/y_{BL}$ is a scaling factor, and m is the integer part of $n/2$. This scaling means that the half of the grid nodes lies inside the boundary layer. An advantage of (2.12) is that this scaling does not depend on y_{max} . Note that this is not the only possible way of scaling. For example, one can additionally adjust the parameter m for a particular problem.

Figure 2 shows the Laguerre–Gauss–Radau nodes y_i and weights $\hat{\kappa}_i$ under the scaling (2.12) at various n with y_{BL} being fixed. Note that y_n increases slowly with n and $\hat{\kappa}_n$ decreases with n under the scaling (2.12).

2.3. Approximation by the collocation method with mappings

Let us briefly describe the approximation of the equations (2.2) under the boundary conditions (1.1) by collocation method.

Let $-1 = s_0 < \dots < s_{n+1} = 1$ be the Chebyshev points, i.e., $s_i = -\cos(\pi i/(n+1))$. Suppose $l_i(s)$ are the Lagrange interpolation polynomials for this grid, and $\bar{l}_i(s)$ are those for the grid $s_1 < \dots < s_n$. Let $y = g(s)$ ($s = g^{-1}(y)$) be a smooth monotonic function that ensures an one-to-one mapping between the interval $-1 \leq s \leq 1$ and the half-line $y \geq 0$ such that $g(-1) = 0$, $g(0) = y_{BL}$, and $g(1) = +\infty$. Such a mapping guarantees that the half of the grid nodes $y_i^g = g(s_i)$ lies inside the boundary layer, similarly to the scaling (2.12). Then we use the functions $\psi_i^g(y) = l_i(g^{-1}(y))$ as basis functions for the velocity components and the functions $\phi_i^g(y) = \bar{l}_i(g^{-1}(y))$ as basis functions for the pressure. The functions $\psi_i^g(y)$

at $1 \leq i \leq n$ satisfy zero boundary conditions at $y = 0$ and $y \rightarrow +\infty$. The approximation properties of such functions are discussed in [11].

For computing the energy functional (2.4), we use the quadrature formula

$$\int_0^{+\infty} f(y) dy = \int_{-1}^1 f(g(s)) \frac{dg}{ds} ds \approx \sum_{i=0}^n f(y_i^g) \hat{\varkappa}_i,$$

where $\hat{\varkappa}_i = \varkappa_i(dg/ds(s_i))$, and \varkappa_i are the weights of the Clenshaw–Curtis quadrature [6]. This formula is exact for any functions of the form $l(g^{-1}(y))$, where l is a polynomial of degree n or less. The values of the derivatives of $\psi_i^g(y)$ and $\phi_i^g(y)$ at the grid nodes can be computed by the procedures from [7] or [8], coupled with the chain rule.

As a result of the described approximation of the equations (2.2), we obtain a system of ordinary differential and algebraic equations of the form (2.10). Note that the collocation method does not ensure that the discrete analogue of the Laplace operator is a symmetric negative-definite matrix. In addition, the equality $F = -G^*$ does not hold, in general.

As a mapping, the following ones are used in the present paper

$$g(s) = y_{BL} \tan\left(\frac{\pi}{4}(1+s)\right), \quad g^{-1}(y) = \frac{4}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{y_{BL}}\right) - 1, \quad (2.13)$$

$$g(s) = y_{BL} \frac{1+s}{1-s}, \quad g^{-1}(y) = \frac{y-y_{BL}}{y+y_{BL}}, \quad (2.14)$$

$$g(s) = -\frac{y_{BL}}{\ln(2)} \ln\left(\frac{1-s}{2}\right), \quad g^{-1}(y) = 1 - 2^{-y/y_{BL}+1}. \quad (2.15)$$

The algebraic (2.14) and exponential (2.15) mappings are known [4]; and the mapping with the tangent function (2.13) is currently implemented in LOTTRAN software package [15], which is designed for predicting an onset of laminar–turbulent transition in industrial applications.

Figure 3 shows the streamwise velocity $U_B(y)$ of the Blasius layer and the streamwise $U_E(y)$ and spanwise $W_E(y)$ velocities of the Ekman layer. For both considered main flows, the typical values of y_{BL} (see, [9, 14]) are marked, while the values of y_{max} correspond to the upper limits of the subfigures. In addition, Figure 3 shows the Laguerre–Gauss–Radau nodes under the scaling (2.12), and the grid nodes y_i^g obtained by either the mapping (2.13), (2.14), or (2.15).

3. NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE GALERKIN–COLLOCATION METHOD

To implement the approximation method described in Section 2.1, one has to compute the nodes y_i and weights $\hat{\varkappa}_i$ of the quadrature formula (2.5), the derivatives of $\psi_i(y)$ (2.7) at the grid nodes, and the values of $\phi_i(y)$ (2.7) at $y = 0$. In this section, we provide an algorithm for computing these quantities; the proposed algorithm is stable, including the case of large n .

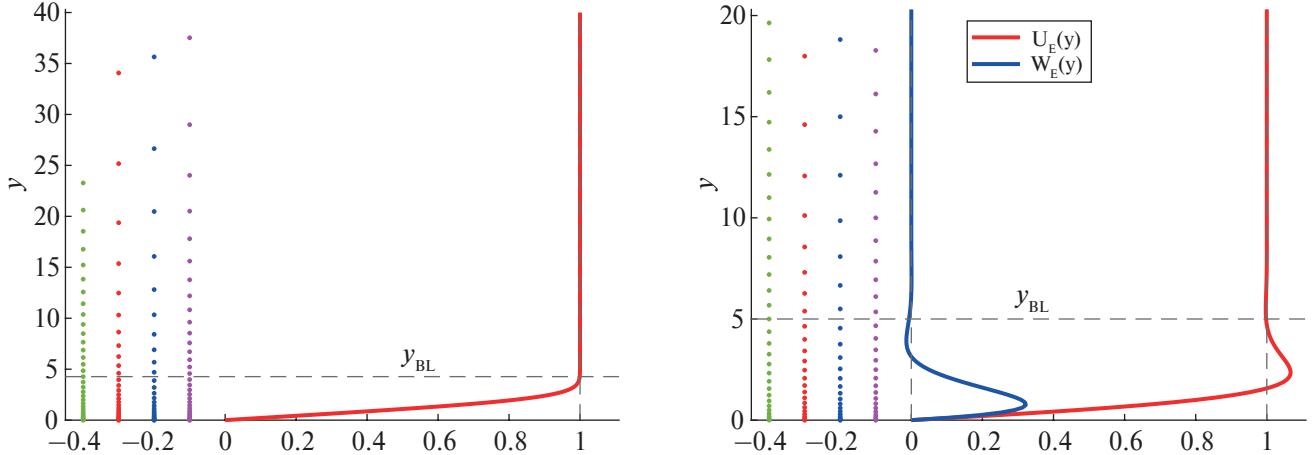


Figure 3. The independent variable y is along the vertical axis. On the left: the Blasius velocity profile $U_B(y)$ ($y_{BL} = 4.27$, $y_{max} = 40$). On the right: the Ekman velocity profiles, $U_E(y)$ and $W_E(y)$ ($y_{BL} = 5$, $y_{max} = 20$). The Laguerre–Gauss–Radau nodes under the scaling (2.12) (green dots) and the Chebyshev points under the mappings (2.13), (2.14), and (2.15) (red, blue and pink dots, respectively) at $n = 32$.

By definition [19], the Laguerre polynomials are orthogonal in the inner product

$$\int_0^{+\infty} L_k(y) L_m(y) e^{-y} dy = \delta_{km}$$

with the exponential weight function. They satisfy the following three-term relations

$$\begin{aligned} L_0(y) &= 1, & L_1(y) &= 1 - y, \\ -kL_{k-1}(y) + (2k+1)L_k(y) - (k+1)L_{k+1}(y) &= yL_k(y), \end{aligned} \quad (3.1)$$

and can be represented as

$$L_k(y) = \frac{e^y}{k!} \frac{d^k (e^{-y} y^k)}{dy^k}. \quad (3.2)$$

In addition, the Laguerre polynomials satisfy the relations

$$L'_{n+1}(y) - L'_n(y) = -L_n(y), \quad (3.3)$$

$$yL'_{n+1}(y) = (n+1)(L_{n+1}(y) - L_n(y)), \quad (3.4)$$

whose derivation from (3.1) and (3.2) is straightforward, see [20].

It is known [17] that the Laguerre–Gauss–Radau nodes y_i are eigenvalues of the symmetric tridiagonal matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 3 & -2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -(n-1) & 2n-1 & -n \\ 0 & & & -n & n \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

This allows for the robust computation of y_i .

3.1. Some results

The quadrature weights $\hat{\kappa}_i$ (2.5) are determined by $L_n(y_i)$, which can be computed by the three-term relations (3.1). At large n and i , the values of $|L_n(y_i)|$ appear to be very large (up to the machine infinity), and the values of κ_i appear to be very small (up to the machine zero). Therefore, the stable computation of $\hat{\kappa}_i = \kappa_i e^{y_i}$ is an issue. At the same time, the values of $\hat{\kappa}_i$ are bounded from below since the Laguerre functions are bounded, $|\hat{L}_n(y)| \leq 1$, at any n and y [16].

We propose to compute the weights $\hat{\kappa}_i$ (2.5) by

$$\hat{\kappa}_i = \frac{\exp(y_i - 2 \ln(|L_n(y_i)|))}{n+1}, \quad (3.6)$$

with an additional scaling at computing $L_n(y_i)$ by (3.1). If we have $|L_k(y_i)| > c$ at some $k < n$, where c is a given threshold parameter, then we divide the previously computed $L_k(y_i)$ and $L_{k-1}(y_i)$ by c and keep using the three-term relation. This scaling by c is done whenever the result exceeds c in absolute value. As a result, we have $\ln(|L_n(y_i)|) = n_c \ln(c) + \ln(|\tilde{L}_n(y_i)|)$, where n_c is the number of fractions done, and $\tilde{L}_n(y_i)$ is the value obtained by the procedure. Numerical experiments show the overall procedure is robust to round-off errors at large n and i ; the computed values of $\hat{\kappa}_i$ up to $n = 512$ are shown in Figure 2.

Let us consider the numerical interpolation by the Laguerre interpolation functions (2.7). The following statement is valid.

Lemma 1. Suppose the function $f(y)$ is equal to f_i at some grid $0 \leq \tilde{y}_1 < \dots < \tilde{y}_n$. Then, the interpolant $I_n(f)$ constructed with the functions of the form

$$\tilde{\ell}_i(y) e^{-(y-\tilde{y}_i)/2},$$

where $\tilde{\ell}_i(y)$ are the Lagrange interpolation polynomials for this grid, is represented as

$$I_n(f) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\hat{\lambda}_i}{y - \tilde{y}_i} f_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n \frac{\hat{\lambda}_i e^{(y-\tilde{y}_i)/2}}{y - \tilde{y}_i} \right), \quad (3.7)$$

$$\text{where } \hat{\lambda}_i = \frac{e^{\tilde{y}_i/2}}{\prod_{k \neq i} (\tilde{y}_i - \tilde{y}_k)}.$$

Proof. It is straightforward that the following representation

$$I_n(f) = \tilde{\ell}(y)e^{-y/2} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\lambda}_i}{y - y_i} f_i \quad (3.8)$$

is valid, where $\tilde{\ell}(y) = \prod_{i=1}^n (y - \tilde{y}_i)$. Then, (3.8) and

$$1 \equiv \sum_{i=1}^n \tilde{\ell}_i(y) = \tilde{\ell}(y) \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\lambda}_i e^{-\tilde{y}_i/2}}{y - \tilde{y}_i},$$

end the proof.

As for the polynomial interpolation (see, e.g., [6]), the representation (3.7) is called the barycentric form of the interpolant, while $\hat{\lambda}_i$ are called the barycentric weights. The barycentric weights can be computed in a robust way due to the following statement.

Theorem 1. Suppose $0 = y_0 < \dots < y_n$ are the Laguerre–Gauss–Radau nodes, and $\hat{\kappa}_i$ are the quadrature weights in (2.5). Then, the barycentric weights $\hat{\lambda}_i$ for this grid, and those $\hat{\lambda}_i^0$ for the grid $y_1 < \dots < y_n$, are represented as

$$\hat{\lambda}_i = c(n)(-1)^i \sqrt{\hat{\kappa}_i}, \quad (3.9)$$

$$\hat{\lambda}_i^0 = c(n)(-1)^i y_i \sqrt{\hat{\kappa}_i}, \quad (3.10)$$

where

$$c(n) = \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{(n+1)!}.$$

Proof. Let us prove (3.10) first. The polynomial $\ell_0(y) = \prod_{i=1}^n (y - y_i)$ has the same roots as $L'_{n+1}(y)$; therefore, these polynomials differ only by a multiplicative factor. Using that the leading coefficient of $L_{n+1}(y)$ is equal to $(-1)^{n+1}/(n+1)!$, we obtain that

$$\hat{\lambda}_i^0 = \frac{e^{y_i/2}}{\ell'_0(y_i)} = \frac{e^{y_i/2}}{(-1)^{n+1} n! L''_{n+1}(y_i)}. \quad (3.11)$$

For the interior Laguerre–Gauss–Radau nodes, it is valid that

$$y_i L''_{n+1}(y_i) = -(n+1) L'_n(y_i) = -(n+1) L_n(y_i), \quad (3.12)$$

where the left equality is obtained by taking the first derivative of (3.4), and the right one follows from (3.3). Substituting (3.12) into (3.11) and using the definition of $\hat{\kappa}_i$ (2.5), we obtain the statement (3.10) up to a sign. To end the proof, note that $\hat{\lambda}_i^0$ have to change the sign, with $\hat{\lambda}_n^0 > 0$.

To prove (3.9), note that

$$\ell(y) = \prod_{i=0}^n (y - y_i) = y \ell_0(y),$$

and therefore

$$\hat{\lambda}_i = \frac{e^{y_i/2}}{\ell'(y_i)} = \frac{e^{y_i/2}}{\ell_0(y_i) + y_i \ell'_0(y_i)}. \quad (3.13)$$

For the interior grid nodes the first term in the denominator of (3.13) equals 0, while the second term is expressed in terms of $\hat{\lambda}_i$; those lead to (3.9) at $i > 0$. For the boundary node $y_0 = 0$, we have $\ell(0) = (-1)^{n+1} n! L'_{n+1}(0)$. To end the proof, note that the Laguerre polynomials satisfy $L'_k(0) = -k$, and therefore $\hat{\lambda}_0^0 = (-1)^n / (n+1)!$.

Note that the statement similar to (3.9) is proven in [21] for the polynomial interpolation for the Laguerre–Gauss–Radau grid.

The barycentric weights $\hat{\lambda}_i$ and $\hat{\lambda}_i^0$ contain the multiplicative factor $c(n)$, which decays at very large rate with increasing n . At some n , this factor becomes smaller than the machine zero. However, there is no need to compute $c(n)$ for the interpolant representation (3.7), since the barycentric weights are involved both in the nominator and denominator. Thus, the interpolant representation (3.7) with the barycentric weights computed by Theorem 1 allow for the numerical interpolation from the Laguerre–Gauss–Radau grid to another grid. In addition, substituting (3.10) into (3.7) at the point $y = 0$, the following corollary is obtained.

Corollary 1. Suppose $0 < y_1 < \dots < y_n$ are the interior Laguerre–Gauss–Radau nodes, $\hat{\kappa}_j$ are the quadrature weights in (2.5) corresponding to these nodes, and $\phi_j(y)$ are the Laguerre interpolation functions (2.7) for this grid. Then,

$$\phi_j(0) = \frac{(-1)^j \sqrt{\hat{\kappa}_j}}{\sum_{j=1}^n (-1)^j \sqrt{\hat{\kappa}_j} e^{-y_j/2}}.$$

One can also derive the explicit formula for the derivatives of the interpolation Laguerre functions $\psi_j(y)$ (2.7) at the Laguerre–Gauss–Radau nodes. Note that such formula is given in [16], Eq. (3.17), but without a proof.

Theorem 2. Suppose $0 = y_0 < \dots < y_n$ are the Laguerre–Gauss–Radau nodes, $\hat{\kappa}_i$ are the quadrature weights in (2.5), and $\psi_j(y)$ are the Laguerre interpolating functions (2.7) for this grid. Then

$$\psi'_j(y_i) = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j} \sqrt{\hat{\kappa}_j}}{\sqrt{\hat{\kappa}_i}(y_i - y_j)}, & i \neq j, \\ 0, & i = j \neq 0, \\ -\frac{n+1}{2}, & i = j = 0. \end{cases}$$

Proof. The derivative of the function $\psi_j(y)$ (2.7) is as follows

$$\psi'_j(y) = \left(\ell'_j(y) - \frac{1}{2} \ell_j(y) \right) e^{-(y-y_j)/2}, \quad (3.14)$$

where $\ell_j(y)$ are the Lagrange interpolation polynomials. By (2.6), it is valid that

$$(y - y_j) \ell_j(y) = \frac{L_n(y) - L_{n+1}(y)}{L_n(y_j)}. \quad (3.15)$$

By taking the derivative of (3.15), we obtain that

$$\ell'_j(y_i) = \frac{L_n(y_i)}{(y_i - y_j)L_n(y_j)}$$

at $i \neq j$. Substituting this expression to (3.14) and using the result for the barycentric weights (3.9), we prove the theorem at $i \neq j$.

By taking the second derivative of (3.15), we obtain that

$$2\ell'_j(y_j) = \frac{L'_n(y_j)}{L_n(y_j)}.$$

At $y_0 = 0$, it is valid that $L_n(0) = 1$ and $L'_n(0) = -n$. At other nodes y_j , it is valid that $L'_n(y_j) = L_n(y_j)$ (3.3). Thus,

$$2\ell'_j(y_j) = \begin{cases} 1, & j \neq 0, \\ -n, & j = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

The substitution of (3.16) into (3.14) ends the proof at $i = j$.

To sum up, the Galerkin–collocation method based on the Laguerre functions can be implemented as follows. The Laguerre–Gauss–Radau nodes y_i are computed as the eigenvalues of (3.5). The quadrature weights $\hat{\kappa}_i$ associated with this grid are computed by (3.6) with an additional scaling while using the three-term relations (3.1). Then, the values and derivatives of the functions (2.7) at the grid nodes are computed, see Corollary 1 and Theorem 2. For the interpolation of a grid function given at the nodes y_i to another grid, the barycentric formula (3.7) is used, where the barycentric weights are computed by Theorem 1; the multiplicative factor $c(n)$ is common for all barycentric weights at given n , therefore there is no need to compute it. The proposed algorithm performs robustly, including the case of large n .

4. NUMERICAL EXPERIMENTS

As a result of the approximation of either the system (2.2) or (2.3) under the boundary conditions (1.1) by either the Galerkin–collocation method from Section 2.1 or the collocation method from Section 2.3, we obtain a differential-algebraic system of the form (2.10).

Note that v lies in the kernel of F . Let Q_F be a rectangular matrix, whose columns form an orthonormal basis in the kernel of F . Likewise, let Q_G be a rectangular matrix, whose columns form an orthonormal basis in the kernel of G^* . Under an additional assumption that both F , G and $Q_G^* Q_F$ are of full rank, the system (2.10) is equivalent to the system of ordinary differential equations

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{H}\mathbf{q}, \quad (4.17)$$

where $\mathbf{q} = Q_F v$, and $\mathbf{H} = (Q_G^* Q_F)^{-1} Q_G^* J Q_F$. The detailed justification of such a reduction of differential-algebraic systems is given in [22]; the assumption made is valid for the considered problems. Note that the approximation by the Galerkin–collocation method ensures that $F = -G^*$, and therefore $Q_F = Q_G$. It is also worth noting that $\|\mathbf{q}\|_2^2 = \|v\|_2^2$ is the discrete analogue of the energy functional (2.4).

Within the numerical stability analysis, the eigenvalue of H with the largest real part is of the most interest [2, 3]. This eigenvalue is called the leading eigenvalue, and the corresponding eigenvector is called the leading eigenvector; we denote the leading eigenvalue by λ_{\max} . The another quantity of physical interest [2, 3] is

$$\Gamma_{\max} = \max_{0 \leq t \leq T} \|\exp(t\mathbf{H})\|_2^2,$$

which is called the maximum energy amplification. The quantity Γ_{\max} represents the maximum possible growth of the disturbance kinetic energy density at given time period $t \in [0, T]$. In case the matrix H is non-normal, the value of Γ_{\max} might significantly exceed the growth of the leading eigenvector $\exp(2\lambda_{\max} T)$ [2, 3]; in this case, the initial disturbance at which Γ_{\max} is achieved (which is called the optimal disturbance [2, 3]) usually differs from the leading eigenvector. The maximum energy amplification Γ_{\max} can be computed by the efficient matrix algorithm [23] based on a low-rank approximation; this algorithm guarantees the result with a given accuracy.

To compare the approximation methods, we study the convergence of both scalar characteristics λ_{\max} and Γ_{\max} . Comparing the methods by the convergence of vector characteristics, namely either the leading eigenvector or the optimal disturbance, could not be done quantitatively due to additional errors from interpolation from one grid to another.

For the considered test problems, the stability analysis can be performed only numerically. To establish the referential values $\hat{\lambda}_{\max}$ and $\hat{\Gamma}_{\max}$, we set the artificial boundary y_{\max} with zero boundary conditions for the velocity components at $y = y_{\max}$ and then approximate the equations by the Galerkin–collocation method with the Lagrange interpolation polynomials for the Gauss–Lobatto grid as trial and test functions. The approximation properties of these basis functions are well-established [4], while the method was widely used for hydrodynamic stability problems considered on finite domains. Therefore, this method is reliable that is the most important for obtaining referential values. For boundary-layer stability problems, this method is certainly inefficient, since the Gauss–Lobatto nodes are refined both to $y = 0$ and $y = y_{\max}$, while the value of y_{\max} has to be tuned manually. Tracking the convergence of the referential solution by increasing n and y_{\max} , we achieve the convergence of $\hat{\lambda}_{\max}$ and $\hat{\Gamma}_{\max}$ up to a desired precision.

As the first test problem, we perform temporal stability analysis of the Ekman layer (2.3). The Ekman layer could be considered as the simplest model of atmospheric boundary layers, with its stability being studied in detail (see [14] and references therein). Using the results of [14], we choose the parameter values as $\text{Re} = 500$, $y_{BL} = 5$, $\alpha = -|k|\sin(\epsilon)$, $\gamma = |k|\cos(\epsilon)$, and $T = 50$, where $|k| = 0.5$, $\epsilon = \pi/9$. The referential values of the leading eigenvalue $\hat{\lambda}_{\max} = 0.02375517 + 0.026959526i$ and the maximum energy amplification $\hat{\Gamma}_{\max} = 207.14602$ are computed at $y_{\max} = 20$ and $n = 128$.

Figure 4 demonstrates the relative errors at computing λ_{\max} and Γ_{\max} for various approximation methods. All methods show an exponential convergence rate of λ_{\max} with increasing n . However, only the Galerkin–collocation method based on the Laguerre functions shows an exponential convergence rate of Γ_{\max} . Note that Γ_{\max} converges slightly faster than λ_{\max} for this method. It is also worth noting that there are no significant differences between collocation methods at various mappings. Additional experiments not presented in this paper show that these findings remain qualitatively the same at increasing or decreasing the Reynolds number.

As the second test problem, we perform temporal stability analysis of the Blasius layer (2.2). This main flow could be considered as the simplest model of aerodynamic boundary layers, with its stability being studied in detail (see [2, 3] and references therein). Using the results of [9], we choose the parameter values as $\text{Re} = 999$, $\alpha = 0.25$, and $\gamma = 0$ for computing λ_{\max} ; and the parameter values $\text{Re} = 999$, $\alpha = 0.3$, $\gamma = 1$, $T = 50$ for computing Γ_{\max} . The typical boundary-layer thickness is $y_{BL} = 4.27$. The referential values of the leading eigenvalue $\hat{\lambda}_{\max} = 0.00213694 - 0.08843026i$ and the maximum energy amplification $\hat{\Gamma}_{\max} = 279.334811$ are computed at $y_{\max} = 40$ and $n = 256$.

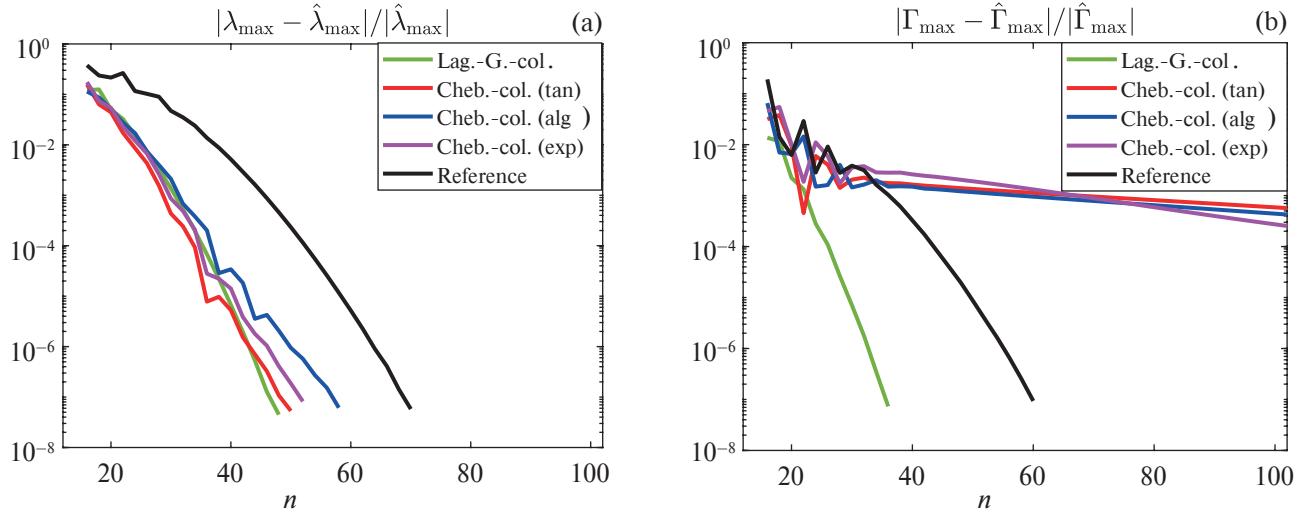


Figure 4. The relative error at computing λ_{\max} (on the left) and Γ_{\max} (on the right) with increasing n for the Ekman layer. Results for the Galerkin–collocation method based on the Laguerre functions with scaling (2.12) are marked with green. Those for the method used to obtain referential values are marked with black. Those for the collocation methods with mappings (2.13), (2.14) and (2.15) are marked with red, blue and pink, respectively.

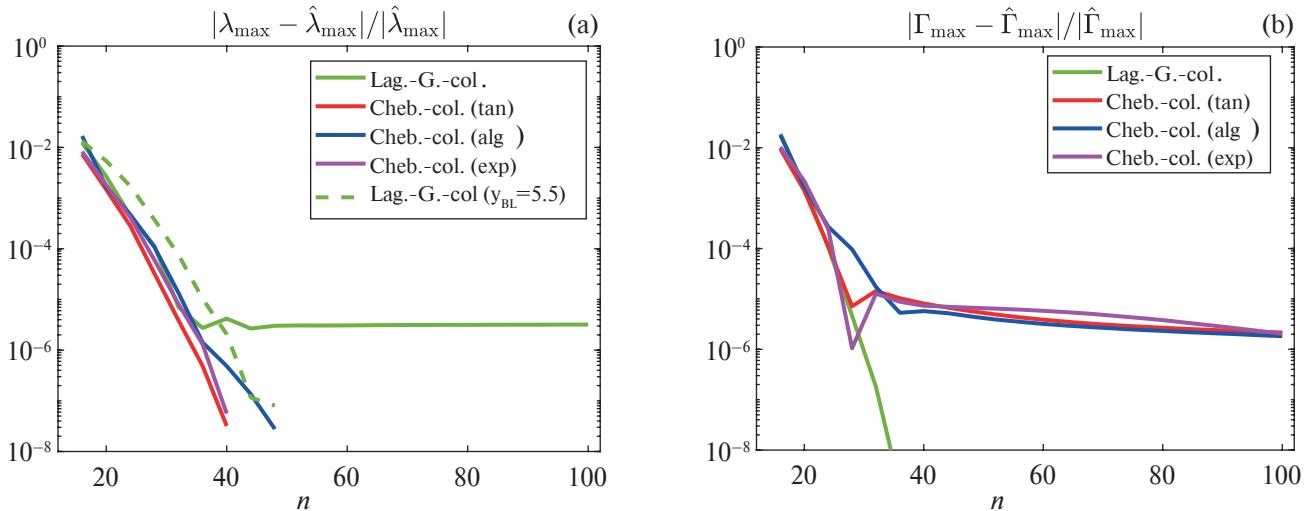


Figure 5. The relative error at computing λ_{\max} (on the left) and Γ_{\max} (on the right) with increasing n for the Blasius layer. The colors mean the same as for Figure 4. In addition, results for the Galerkin–collocation method based on the Laguerre functions with scaling (2.12) are shown at larger $y_{BL} = 5.5$ (green dotted).

Figure 5 demonstrates the relative errors at computing λ_{\max} and Γ_{\max} for various approximation methods. The collocation method shows an exponential convergence rate of λ_{\max} with increasing n ; and there are no significant differences between mappings used. In contrast, for the Galerkin–collocation method based on the Laguerre functions, the accuracy that can be achieved is limited; nevertheless, the obtained accuracy might be more than enough in applications. This issue is remedied by choosing a larger y_{BL} , that is also shown in Figure 5. One can also improve the scaling (2.12) by increasing the share of the nodes outside the boundary layer.

As for the Ekman layer, the Galerkin collocation method based on the Laguerre functions shows an exponential convergence rate of Γ_{\max} , while the collocation method leads to a slower convergence of Γ_{\max} . This disadvantage of the collocation method appears to be irremediable; and the reason is an ill approximation of the operator d^2/dy^2 , which leads to the presence of slowly damped unphysical solutions. The basis for this conclusion are as follows. First, it is observed that convergence to the referential value $\hat{\Gamma}_{\max}$ for the collocation method is from above, i.e., $\Gamma_{\max} > \hat{\Gamma}_{\max}$. Second, let us consider the discrete analogue of the operator d^2/dy^2 on the half-line under zero boundary conditions at $y = 0$ and $y = +\infty$; denote this matrix by L . The collocation method, in general, does not ensure the symmetry of L , although in this case it provides negative definiteness. Nevertheless, the matrix L resulted as the approximation by the collocation method

has a large condition number (e.g., of order 10^9 at $n = 32$ at the mapping (2.13)), and the spectrum of L contains several very small in absolute value negative eigenvalues corresponding to strongly oscillating eigenvectors. For comparison, L has the conditional number of order 10^5 at $n = 32$, when approximated by the Galerkin–collocation method based on the Laguerre functions.

5. SUMMARY

This paper proposes the Galerkin collocation method based on the Laguerre functions for approximating spectral and boundary-value problems arising in studying boundary-layer instabilities. These problems considered on the half-line $y > 0$, where y is the wall-normal coordinate. The robust numerical implementation of this method is proposed (see Section 3), including the procedure for computing the weights of the Laguerre–Gauss–Radau quadrature formula, the explicit expressions for values and derivatives of the Laguerre interpolation functions at the grid nodes, and the procedure for numerical interpolation from the Laguerre–Gauss–Radau grid to another grid.

Within temporal stability analysis of the Blasius and Ekman layers, the proposed method is compared to the collocation method with mappings; the latter method is often used for numerical analysis of boundary-layer instabilities. The comparison is made at computing both the leading eigenvalue λ_{\max} and the maximum energy amplification Γ_{\max} . It is shown that both type of methods show an exponential convergence rate of λ_{\max} ; and differences between the methods are insignificant. However, the Galerkin–collocation method based on the Laguerre functions shows an exponential convergence rate of Γ_{\max} , while the collocation method leads to a slower convergence of this quantity. It is shown that Γ_{\max} converges faster than λ_{\max} for the Galerkin–collocation method based on the Laguerre functions.

The Galerkin collocation method based on the Laguerre functions might be successfully applied as the wall-normal approximation for more complex boundary-layer stability problems (see the recent work [24]).

The author of this work declares that he has no conflicts of interest.

REFERENCES

1. *Zhilulev V.N., Tumin A.M.* Origin of Turbulence: Dynamic Theory of Excitation and Evolution of Instabilities in Boundary Layers. Nauka, Novosibirsk, 1987 (in Russian).
2. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and Transition in Shear Flows. New York: Springer New York. 2000. 558 p.
3. *Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V.* Physics of Transitional Shear Flows: instability and laminar-turbulent transition in incompressible near-wall shear layers. Berlin: Springer–Verlag. 2011. 272 p.
4. *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.* Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains. Springer, Berlin, 2006.
5. *Boyd J.P.* Chebyshev and Fourier Spectral Methods (2nd ed.). Dover Publications, New York, 2000.
6. *Trefethen L.N.* Approximation Theory and Approximation Practice. SIAM, 2019.
7. *Weideman J.A.C., Reddy S.C.* A MATLAB Differentiation Matrix Suite // ACM Trans. Math. Soft. 2000. V. 26, P. 465–519.
8. *Driscoll T.A., Hale N., Trefethen L.N.* Chebfun Guide. 2014.
9. *Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M.* Asymptotic boundary conditions for the analysis of hydrodynamic stability of flows in regions with open boundaries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2019. V. 34, N. 1, P. 15–29.
10. *Spalart P.R., Moser R.D., Rogers M.M.* Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and two periodic directions // J. Comput. Phys. 1991. V. 96, P. 297–324.
11. *Shen J., Wang L.-L.* Some recent advances on spectral methods for unbounded domains // Comm. Comput. Phys. 2009. V. 5, N. 2–4, P. 195–241.
12. *Grosch C.E., Orszag S.A.* Numerical solution of problems in unbounded regions: coordinate transforms // J. Comput. Phys. 1977. V. 25, P. 273–296.
13. *Boyd J.P.* The optimization of convergence for Chebyshev polynomial methods in an unbounded domain // J. Comput. Phys. 1982. V. 45, P. 43–79.
14. *Foster R.C.* Structure and energetics of optimal Ekman layer perturbations // J. Fluid Mech. 1997. V. 333, P. 97–123.

15. Boiko A.V., Demyanko K.V., Kirilovskiy S.V., Nechepurenko Yu.M., Poplavskaya T.V. Modeling of transonic transitional three-dimensional flows for aerodynamic applications // AIAA Journal. 2021. V. 59, N. 9, P. 3598–3610.
16. Shen J. Stable and efficient spectral methods in unbounded domains using Laguerre functions // SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 28, P. 1113–1133.
17. Gautschi W. Gauss-Radau formulae for Jacobi and Laguerre weight functions // Math. Comp. Simul. 2000. V. 54, P. 403–412.
18. Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M., Zasko G.V. On the use of probability-based methods for estimating the aerodynamic boundary-layer thickness // Fluids. 2021. V. 6, P. 267.
19. Szegő G. Orthogonal Polynomials (4th ed.). American Mathematical Society Colloquium Publications, 1975.
20. Shen J., Tang T. Spectral and High-Order Methods with Applications. Science Press, Beijing, 2006.
21. Wang P., Huybrechs D., Vandewalle S. Explicit barycentric weights for polynomial interpolation in the roots or extrema of classical orthogonal polynomials // Math. Comp. 2014. V. 83, P. 2893–2914.
22. Nechepurenko Yu.M. On the dimension reduction of linear differential-algebraic control systems // Doklady Mathematics. 2012. V. 86, N. 1, P. 457–459.
23. Nechepurenko Yu.M., Sadkane M. A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm // SIAM J. Matr. Anal. Appl. 2011. V. 32, N. 2, P. 349–363.
24. Zasko G.V., Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M. Simulating the propagation of boundary-layer disturbances by solving boundary-value and initial-value problems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model., 2024, V. 39, N. 2, P. 47–59.

ON SPECTRAL APPROXIMATIONS FOR THE STABILITY ANALYSIS OF BOUNDARY LAYERS

G.V. Zasko^{a,*}

^a*G. I. Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Moscow, 119333 Russia*

**e-mail: zasko.gr@bk.ru*

Received: 02 September 2024

Revised: 02 September 2024

Accepted: 26 September 2024

Abstract. Approximation of spectral and boundary-value problems arising in the stability analysis of incompressible boundary layers is considered. As an alternative to the collocation method with mappings, the Galerkin–collocation method based on Laguerre functions is adopted. A robust numerical implementation of the latter method is discussed. The methods are compared within the stability analysis of the Blasius and Ekman layers. The Galerkin-collocation method demonstrates an exponential convergence rate for scalar stability characteristics and has a number of advantages.

Keywords: spectral methods, Galerkin–collocation method, Laguerre functions, incompressible boundary layers, linear stability analysis, non-modal stability analysis

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956.4

ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ
ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2025 г. Е. А. Бадерко^{1,*}, К. Д. Федоров^{1,**}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: baderko.ea@yandex.ru

**e-mail: konstantin-dubna@mail.ru

Поступила в редакцию 09.09.2024 г.

Переработанный вариант 09.09.2024 г.

Принята к публикации 26.09.2024 г.

Рассмотрена первая начально-краевая задача для параболической системы второго порядка в полуограниченной области на плоскости. Коэффициенты системы удовлетворяют двойному условию Дини. Функция, задающая боковую границу области, непрерывно дифференцируема на отрезке. При непрерывно дифференцируемой правой части граничного условия первого рода и начальной функции, которая является непрерывной и ограниченной вместе со своими первой и второй производными, установлено, что решение поставленной задачи непрерывно и ограничено в замыкании области вместе со своими старшими производными. Доказаны соответствующие оценки. Дано интегральное представление решения. Если боковая граница области имеет “углы”, а граничная функция – кусочно-непрерывную производную, то в этом случае доказано, что, несмотря на негладкость боковой границы и граничной функции, старшие производные решения непрерывны всюду в замыкании области, кроме угловых точек, и при этом ограничены. Билл. 22.

Ключевые слова: параболические системы, первая начально-краевая задача, негладкая боковая граница, граничные интегральные уравнения, условие Дини.

DOI: 10.31857/S0044466925010038, EDN: CDGSQC

ВВЕДЕНИЕ

Предметом исследования настоящей работы является первая начально-краевая задача для параболической системы второго порядка (одномерной по пространственной переменной) с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в полуограниченной области Ω на плоскости.

Если коэффициенты параболической системы удовлетворяют условию Гельдера, функция g , задающая боковую границу области, достаточно гладкая, а именно, из класса $H^{1+\alpha/2}[0, T]$, где $0 < \alpha < 1$, и если правая часть граничного условия первого рода $\psi \in H^{1+\alpha/2}[0, T]$, начальная функция $h \in H^{2+\alpha}(\mathbb{R})$, правая часть системы $f \in H^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega})$, то согласно [1] (см. также [2, с. 706]) существует единственное решение первой начально-краевой задачи в классе $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$.

Естественно возникает вопрос: если в цитируемом выше результате В.А.Солонникова (см. [1]) положить $\alpha = 0$ в условиях для боковой границы, правой части граничного условия и начальной функции, то можно ли утверждать, что решение будет принадлежать пространству $C^{2,1}(\bar{\Omega})$.

В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос для параболической системы второго порядка с коэффициентами, которые удовлетворяют двойному условию Дини, в полуограниченной области на плоскости. А именно, для такой системы доказывается, что если $g \in C^1[0, T]$, $\psi \in C^1[0, T]$, $h \in C^2(\mathbb{R})$ и $f \in H^\omega(\bar{\Omega})$, где $\omega \in \mathcal{D}$ (см. ниже (1)), то решение первой начально-краевой задачи принадлежит классу $\widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$ (см. ниже (2)). Пространство $\widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$ совпадает с пространством $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$ при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$, при этом их нормы эквивалентны. Доказываются соответствующие оценки. Дается интегральное представление решения.

“Пошаговое” применение полученного результата позволяет рассмотреть случай, когда боковая граница области Ω является негладкой, а именно, может иметь “углы”. В этом случае доказывается, что если функции g и ψ имеют кусочно-непрерывные производные на отрезке $[0, T]$, $h \in C^2(\mathbb{R})$, $f \in H^\omega(\bar{\Omega})$, где $\omega \in \mathcal{D}$, то (несмотря на негладкость боковой границы и граничной функции) старшие производные решения непрерывны всюду в замыкании области, кроме угловых точек, и при этом ограничены. Доказываются соответствующие оценки.

Однозначная разрешимость в классе $C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$ рассматриваемых в данной работе задач следует из [3]–[6].

Достаточно слабые условия на коэффициенты системы, боковую границу области, правую часть граничного условия первого рода и начальную функцию не позволяют применить известные методы, которые используются для изучения характера гладкости решения первой начально-краевой задачи (см. [1], [2, с. 461]) в пространстве $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$, где $0 < \alpha < 1$.

Ранее в [7], [8] была изучена первая начально-краевая задача с нулевым начальным условием для однородной параболической системы в области Ω , боковая граница которой допускает наличие “клюва” при $t = 0$. Если $\psi \in C^1[0, T]$, то при выполнении двух естественных условий согласования $(\psi(0) = \psi'(0) = 0)$, несмотря на негладкость боковой границы области, было показано, что такая задача разрешима в классе $\widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$. Метод настоящей статьи существенно опирается на этот результат.

Заметим, что начально-краевые задачи для параболических систем моделируют процессы тепло- и массопереноса в многокомпонентных материалах (см., например, [9]–[11]), а рассматриваемый характер негладкости боковой границы области – возможное резкое изменение границ некоторых металлов (железо, марганец, титан, олово и др.) при фазовых превращениях (см., например, [12, с. 49–52]).

В настоящей работе также исследуется задача Коши в полосе D на плоскости. Хорошо известно, согласно [1] (см. также [2, с. 361]), что если коэффициенты параболической системы удовлетворяют условию Гельдера и если начальная функция $h \in H^{2+\alpha}(\mathbb{R})$, правая часть системы $f \in H^{\alpha, \alpha/2}(\bar{D})$, где $0 < \alpha < 1$, то задача однозначно разрешима в пространстве $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{D})$.

Мы изучаем вопрос о характере гладкости решения, когда в цитируемом выше результате В.А. Солонникова (см. [1]) рассматривается $\alpha = 0$. А именно, для неоднородной параболической системы с коэффициентами, удовлетворяющими двойному слову Дини, доказывается, что если $h \in C^2(\mathbb{R})$ и $f \in H^\omega(\bar{D})$, где $\omega \in \mathcal{D}$, то решение задачи Коши принадлежит пространству $\widehat{C}^{2,1}(\bar{D})$ (в [13] этот случай был рассмотрен для однородной системы). При этом решение имеет вид суммы параболических потенциалов Пуассона и объемных масс. Этот результат используется при рассмотрении указанной выше первой начально-краевой задачи, а также имеет самостоятельный интерес.

Работа состоит из пяти разделов. В разд. 1 вводятся функциональные пространства и формулируются основные теоремы. Раздел 2 посвящен рассмотрению задачи Коши и изучению вопроса о характере регулярности ее решения. В разд. 3 устанавливается разрешимость рассмотренной ранее в [8] первой начально-краевой задачи в области с негладкой при $t = 0$ боковой границей и исследуется характер гладкости полученного решения при отсутствии второго условия согласования. Раздел 4 посвящен доказательству теорем о характере регулярности и об интегральном представлении решения первой начально-краевой задачи в области с боковой границей класса $C^1[0, T]$. В разд. 5 доказывается теорема о характере регулярности решения поставленной задачи в области, боковая граница которой может иметь “углы”.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть числа $T > 0$, $m \in \mathbb{N}$ фиксированы. Для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [0, T]$ введем пространство $C[\alpha, \beta]$ непрерывных (вектор-) функций $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$, с нормой

$$\|\varphi; [\alpha, \beta]\|^{(0)} = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |\varphi(t)|.$$

Через $C^1[\alpha, \beta]$ обозначим пространство (вектор-) функций $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$, непрерывных вместе со своей первой производной, с нормой

$$\|\psi; [\alpha, \beta]\|^{(1)} = \max_{t \in [\alpha, \beta]} |\psi(t)| + \max_{t \in [\alpha, \beta]} |\psi'(t)|.$$

Через $C^2(\mathbb{R})$ обозначим пространство (вектор-) функций $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, непрерывных и ограниченных вместе со своей первой и второй производными, с нормой

$$\|h; \mathbb{R}\|^{(2)} = \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}} |h^{(k)}(x)|.$$

Модулем непрерывности, согласно [14, с. 150–151], называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $\omega(0) = 0$. Модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\tilde{\omega}(z) = \int_0^z \omega(x)x^{-1} dx < \infty, \quad z > 0. \quad (1)$$

Через \mathcal{D} обозначим множество, состоящее из модулей непрерывности, удовлетворяющих условию (1).

На плоскости \mathbb{R}^2 переменных x и t рассматриваем полосу

$$D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < T\}.$$

Через $H^\omega(\bar{D})$ обозначим пространство непрерывных (вектор-) функций $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которых конечно выражение

$$\|f; D\|^\omega = \sup_{(x,t) \in D} |f(x, t)| + \sup_{\substack{(x,t), (x+\Delta x, t) \in D \\ |\Delta x| \neq 0}} \frac{|f(x + \Delta x, t) - f(x, t)|}{\omega(|\Delta x|)},$$

где $\omega \neq 0$ – модуль непрерывности.

Пусть $\Omega \subset D$. Через $C(\bar{\Omega})$ обозначим пространство (вектор-) функций u , непрерывных в $\bar{\Omega}$. Положим $C^{2,1}(\bar{\Omega})$ – пространство (вектор-) функций u , непрерывных и ограниченных вместе со своими первыми по x, t и второй производной по x в $\bar{\Omega}$.

Следуя [2, с. 16], через $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, обозначим пространство (вектор-) функций u , непрерывных вместе со своими первыми по x, t и второй производной по x в $\bar{\Omega}$, для которых конечно выражение

$$\begin{aligned} \|u\|_\Omega^{(2+\alpha)} = & \sum_{2l+k \leqslant 2} \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{l+k} u}{\partial t^l \partial x^k}(x, t) \right| + \\ & + \sum_{2l+k=2} \left(\sup_{\substack{(x,t), (x+\Delta x, t) \in \Omega \\ |\Delta x| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta x|^\alpha} \left| \Delta_x \frac{\partial^{l+k} u}{\partial t^l \partial x^k}(x, t) \right| + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in \Omega \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{\alpha/2}} \left| \Delta_t \frac{\partial^{l+k} u}{\partial t^l \partial x^k}(x, t) \right| \right) + \\ & + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in \Omega \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}} \left| \Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|. \end{aligned}$$

Здесь и далее

$$\Delta_x f(x, t) = f(x + \Delta x, t) - f(x, t), \quad \Delta_t f(x, t) = f(x, t + \Delta t) - f(x, t),$$

для любой функции f .

Для матрицы B (или вектора b) через $|B|$ (соответственно, $|b|$) обозначаем максимум из модулей элементов B (компонент b).

Под значениями (вектор-) функций и их производных на границе области понимаем их предельные значения “изнутри” области.

Через $\widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$ обозначим подпространство (вектор-) функций $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$, для которых конечно выражение

$$\|u; \Omega\|^{(2)} = \sum_{2l+k \leqslant 2} \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{l+k} u}{\partial t^l \partial x^k}(x, t) \right| + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in \Omega \\ |\Delta t| \neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{1/2}} \left| \Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|. \quad (2)$$

Кроме того, полагаем

$$\widehat{C}_0^{2,1}(\bar{\Omega}) = \{u \in \widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega}) : u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0\}.$$

Заметим, что пространство $\widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$ совпадает с пространством $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$ при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$, при этом нормы $\|\cdot; \Omega\|^{(2)}$ и $\|\cdot\|_\Omega^{2+0}$ эквивалентны.

Через $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ обозначим пространство (вектор-) функций u , непрерывных и ограниченных вместе со своей первой производной по x в $\bar{\Omega}$, с нормой

$$\|u; \Omega\|^{(1)} = \sup_{(x,t) \in \Omega} |u(x, t)| + \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|.$$

Пусть ω_0 – модуль непрерывности, удовлетворяющий двойному условию Диши:

$$\widetilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < \infty, \quad z > 0,$$

и такой, что для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ функция $v(z) = \omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z > 0$, почти убывает, а именно, существует $C > 0$ такое, что $v(z_1) \leq C v(z_2)$, $z_1 \geq z_2 > 0$.

В полосе D рассмотрим равномерно параболический по Петровскому (см. [15]) оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=0}^2 A_k(x, t) \frac{\partial^k u}{\partial x^k},$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^\top$, $m \in \mathbb{N}$, и $A_k = \|a_{ijk}\|_{i,j=1}^m$, $k = 0, 1, 2$, суть $m \times m$ матрицы, элементы которых — веществен-нозначные функции, определенные в \bar{D} и удовлетворяющие следующим условиям:

(а) для собственных чисел μ_r матрицы A_2 выполнено $\operatorname{Re} \mu_r(x, t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x, t) \in \bar{D}$, $r = 1, \dots, m$;

(б) функции a_{ijk} ограничены в \bar{D} и справедливы оценки

$$\left| a_{ijk}(x + \Delta x, t + \Delta t) - a_{ijk}(x, t) \right| \leq \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2}),$$

где $(x, t), (x + \Delta x, t + \Delta t) \in \bar{D}$, $i, j = 1, \dots, m$, $k = 0, 1, 2$.

Пусть

$$Z(x, t; A_2(\xi, \tau)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \exp(-A_2(\xi, \tau)\sigma^2 t) d\sigma,$$

где $x, \xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $0 \leq \tau \leq T$. Справедливы неравенства (см. [16, с. 298, 306]):

$$\left| \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; A_2(\xi, \tau)) \right| \leq C(l, k) t^{-(2l+k+1)/2} \exp(-cx^2/t), \quad (3)$$

$$\left| \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; A_2(\xi + \Delta\xi, \tau)) - \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; A_2(\xi, \tau)) \right| \leq C(l, k) t^{-(2l+k+1)/2} \omega_0(|\Delta\xi|) \exp(-cx^2/t), \quad (4)$$

где $x, \xi, \xi + \Delta\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $0 \leq \tau \leq T$, $k, l \geq 0$.

Положим $D^* = \{(x, t; \xi, \tau) \in \bar{D} \times \bar{D} : t > \tau\}$. Известно (см. [17], если $m = 1$, и [18], если $m \geq 2$), что при условиях (а), (б) существует фундаментальная матрица решений $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ системы $Lu = 0$, для нее выполнены оценки:

$$\left| \frac{\partial^{l+k} \Gamma}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C(t - \tau)^{-(2l+k+1)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad 0 \leq 2l + k \leq 2, \quad (5)$$

и, кроме того, для функции

$$W(x, t; \xi, \tau) \equiv \Gamma(x, t; \xi, \tau) - Z(x - \xi, t - \tau; A_2(\xi, \tau))$$

справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial^{l+k} W}{\partial t^l \partial x^k}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2}) (t - \tau)^{-(2l+k+1)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad 0 \leq 2l + k \leq 2, \quad (6)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial W}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) \right| \leq C \frac{|\Delta t|^{1/2} \tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad (7)$$

$(x, t; \xi, \tau), (x, t + \Delta t; \xi, \tau) \in D^*$, $0 < \Delta t \leq t - \tau$.

Пусть Ω — полуограниченная область следующего вида:

$$\Omega = \{(x, t) \in D \mid x > g(t)\}, \quad g \in C[0, T],$$

с боковой границей

$$\Sigma = \{(x, t) \in \bar{D} \mid x = g(t)\}.$$

Рассмотрим задачу о нахождении (вектор-) функции $u \in C(\bar{\Omega})$, являющуюся классическим решением уравнения

$$Lu = f, \quad (x, t) \in \Omega, \quad (8)$$

удовлетворяющей начальному условию

$$u(x, 0) = h(x), \quad x \geq g(0), \quad (9)$$

и граничному условию первого рода

$$u(g(t), t) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10)$$

Следуя [8], для $\varphi \in C[0, T]$ положим

$$S\varphi(x, t) = \int_0^t Y(x, t; g(\tau), \tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \quad (11)$$

где

$$Y(x, t; g(\tau), \tau) = \int_0^{+\infty} \Gamma(x, t; g(\tau) - r, \tau)dr, \quad (x, t) \in \bar{D}, \quad 0 \leq \tau < t.$$

Кроме того, для любых непрерывных и ограниченных функций $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ положим

$$Ph(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, 0)h(\xi)d\xi, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_m)^\top, \quad (x, t) \in \bar{D}, \quad (12)$$

$$Vf(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau)f(\xi, \tau)d\xi, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^\top, \quad (x, t) \in \bar{D}. \quad (13)$$

Основными результатами работы являются следующие три теоремы.

Пусть $P_0 = (g(0), 0)$. Через $\hat{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus P_0)$ обозначим пространство (вектор-) функций u , непрерывных вместе со своей первой производной по x в $\bar{\Omega}$ и имеющих непрерывные в $\bar{\Omega} \setminus P_0$ вторую по x и первую по t производные, для которых конечно выражение (2).

Теорема 1. Пусть выполнены условия (а), (б) и $g \in C^1[0, T]$. Тогда для любых (вектор-) функций $f \in H^\omega(\bar{D})$, где $\omega \in \mathcal{D}$, $h \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1[0, T]$ с условием согласования

$$\psi(0) = h(g(0)), \quad (14)$$

для решения $u \in C^{1,0}(\bar{\Omega})$ задачи (8)–(10) справедливы включение $u \in \hat{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus P_0)$ и оценка

$$\|u; \Omega\|^{(2)} \leq C \left(\|\psi; [0, T]\|^{(1)} + \|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^\omega \right). \quad (15)$$

Если, кроме того, выполнено второе условие согласования

$$\psi'(0) = g'(0)h'(g(0)) + \sum_{k=0}^2 A_k(g(0), 0)h^{(k)}(g(0)) + f(g(0), 0), \quad (16)$$

то для решения $u \in C^{1,0}(\bar{\Omega})$ задачи (8)–(10) справедливо включение $u \in \hat{C}^{2,1}(\bar{\Omega})$.

Здесь и далее через C обозначаем положительные постоянные, зависящие от T, δ, m , коэффициентов оператора L и боковой границы Σ , конкретный вид которых для нас неважен.

Замечание 1. Существование и единственность решения задачи (8)–(10) в классе $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ следует из [3]–[6].

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого решения $u \in C^{1,0}(\bar{\Omega})$ задачи (8)–(10) имеет место интегральное представление

$$u(x, t) = S\varphi(x, t) + Ph(x, t) + Vf(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\Omega},$$

где $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ – единственное в пространстве $C[0, T]$ решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\int_0^t Y(g(t), t; g(\tau), \tau)\varphi(\tau)d\tau = \psi(t) - Ph(g(t), t) - Vf(g(t), t), \quad t \in [0, T]. \quad (17)$$

Замечание 2. Если $m = 1$, то утверждения теорем 1, 2 справедливы для любого ограниченного решения задачи (8)–(10) (см. [19]).

Замечание 3. В случае $f \equiv 0, h \equiv 0$, при выполнении условий $\psi \in C^1[0, T]$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, существование решения задачи (8)–(10) в классе $u \in \widehat{C}_0^{2,1}(\overline{\Omega})$ доказано в [8]. При этом допускается негладкость боковой границы Σ при $t = 0$, а именно, предполагается выполненным условие

$$g \in C[0, T], \quad |g'(t)| \leq \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad 0 < t \leq T, \quad (18)$$

где ω – некоторый модуль непрерывности.

Далее рассмотрим случай, когда боковая граница Σ области Ω является негладкой, а именно, имеет углы.

Пусть на интервале $(0, T)$ задано множество точек

$$\{t_1, \dots, t_N \in (0, T) \mid 0 < t_1 < \dots < t_N < T\}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Через $PC^1[0, T]$ обозначим пространство непрерывных (вектор-) функций $\psi \in C[0, T]$, производные ψ' которых кусочно-непрерывны со множеством (19) точек разрыва первого рода, с нормой

$$\|\psi; [0, T]\|_N^{(1)} = \sum_{k=0}^N \|\psi; [t_k, t_{k+1}]\|^{(1)}, \text{ где } t_0 = 0, \quad t_{N+1} = T.$$

Пусть

$$P = \{P_0, P_1, \dots, P_N\}, \text{ где } P_k = (g(t_k), t_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Через $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P)$ обозначим пространство (вектор-) функций u , непрерывных вместе со своей первой производной по x в $\overline{\Omega}$ и имеющих непрерывные в $\overline{\Omega} \setminus P$ вторую по x и первую по t производные, для которых конечно выражение (2).

Теорема 3. Пусть выполнены условия (а), (б) и $g \in PC^1[0, T]$. Тогда для любых (вектор-) функций $f \in H^\omega(\overline{D})$, где $\omega \in \mathcal{D}$, $h \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in PC^1[0, T]$, с условием согласования (14), для решения $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$ задачи (8)–(10) справедливы включение $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P)$ и оценка

$$\|u; \Omega\|^{(2)} \leq C \left(\|\psi; [0, T]\|_N^{(1)} + \|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^\omega \right). \quad (20)$$

Замечание 4. Существование и единственность решения задачи (8)–(10) в классе $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ следует из [3]–[6].

2. О ЗАДАЧЕ КОШИ

Лемма 1. Пусть выполнены условия (а), (б). Тогда для любой (вектор-) функции $f \in H^\omega(\overline{D})$, где $\omega \in \mathcal{D}$, объемный потенциал Vf принадлежит пространству $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$ и справедлива оценка

$$\|Vf; D\|^{(2)} \leq C \|f; D\|^\omega.$$

Доказательство. Так как потенциал Vf удовлетворяет уравнению

$$Lu = f \text{ в } D,$$

то для доказательства включения $Vf \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$ достаточно установить неравенства

$$\left| \frac{\partial^k Vf}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq C \|f; D\|^\omega t^{1-k/2}, \quad k = 0, 1, \quad (21)$$

$$\left| \frac{\partial^2 Vf}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq C \left(\widetilde{\omega}(t^{1/2}) + \widetilde{\omega}_0(t^{1/2}) \right) \|f; D\|^\omega, \quad (22)$$

$$\left| \Delta_t \frac{\partial Vf}{\partial x}(x, t) \right| \leq C \|f; D\|^\omega |\Delta t|^{1/2}, \quad (23)$$

$(x, t), (x, t + \Delta t) \in \overline{D}$. Оценки (21), (22) доказываются аналогично методу, изложенному в [20, с. 109–110].

Докажем оценку (23). При $0 < t \leq \Delta t$ неравенство (23) следует из оценки (21) при $k = 1$. В случае $0 < \Delta t < t$ справедливо представление

$$\Delta_t \frac{\partial Vf}{\partial x}(x, t) = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t + \Delta t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi - \int_{t-\Delta t}^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{t-\Delta t} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi \equiv$$

$$\equiv J_1(x, t, \Delta t) + J_2(x, t, \Delta t) + J_3(x, t, \Delta t).$$

Оценим J_1 (интеграл J_2 оценивается аналогично). Из неравенства (5) имеем

$$\left| J_1(x, t, \Delta t) \right| \leq C \|f; D\|^{\omega} \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{d\tau}{(t + \Delta t - \tau)^{1/2}} \leq C \|f; D\|^{\omega} |\Delta t|^{1/2}.$$

Оценим J_3 . Из представления

$$J_3(x, t, \Delta t) = \int_0^{t-\Delta t} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial Z}{\partial x}(x - \xi, t - \tau; A_2(\xi, \tau)) f(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{t-\Delta t} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial W}{\partial x}(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi$$

и неравенств (3), (7) следует оценка

$$\left| J_3(x, t, \Delta t) \right| \leq C |\Delta t|^{1/2} \|f; D\|^{\omega} \int_0^{t-\Delta t} \left(\frac{|\Delta t|^{1/2}}{(t - \tau)^{3/2}} + \frac{\tilde{\omega}_0((t - \tau)^{1/2})}{t - \tau} \right) d\tau \leq C \|f; D\|^{\omega} (1 + \tilde{\omega}_0(T^{1/2})) |\Delta t|^{1/2}.$$

Отсюда получаем неравенство (23). Лемма 1 доказана.

В [13] доказана следующая

Лемма 2. Пусть выполнены условия (а), (б). Тогда для любой (вектор-) функции $h \in C^2(\mathbb{R})$ потенциал Пуассона Ph принадлежит пространству $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$ и справедлива оценка:

$$\|Ph; D\|^{(2)} \leq C \|h; \mathbb{R}\|^{(2)}.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$Lu = f, \quad (x, t) \in D, \quad u(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Из лемм 1, 2 следует

Теорема 4. Пусть выполнены условия (а), (б). Тогда для любых $f \in H^{\omega}(\overline{D})$, где $\omega \in \mathcal{D}$, и $h \in C^2(\mathbb{R})$ (вектор-) функция

$$u(x, t) = Vf(x, t) + Ph(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D},$$

является единственным в классе $C^{2,1}(\overline{D})$ решением задачи (24). Это решение принадлежит пространству $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$, и справедлива оценка

$$\|u; D\|^{(2)} \leq C (\|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^{\omega}).$$

Замечание. Единственность решения задачи (24) в классе $C^{2,1}(\overline{D})$ следует из [21].

3. О ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ С НУЛЕВЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассмотрим следующую первую начально-краевую задачу:

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad u \Big|_{t=0} = 0, \quad u \Big|_{\Sigma} = \psi. \quad (25)$$

В этом разделе боковая граница Σ допускает при $t = 0$ наличие “клюва” (см. (18)).

Лемма 3. Пусть выполнены условия (а), (б) и (18). Тогда для любой (вектор-) функции $\psi \in C^1[0, T]$ с условием $\psi(0) = 0$ решением задачи (25) является (векторный) параболический потенциал (см. (11))

$$u(x, t) = S\varphi(x, t), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}, \quad (26)$$

где $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ единственное в пространстве $C[0, T]$ решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\int_0^t Y(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (27)$$

При этом справедливы включение $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P_0)$ и оценка

$$\|u; \Omega\|^{(2)} \leq C \|\psi; [0, T]\|^{(1)}. \quad (28)$$

Если, кроме того, выполнено условие $\psi'(0) = 0$, то справедливо включение $u \in \widehat{C}_0^{2,1}(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Ищем решение в виде потенциала (26) с плотностью φ , подлежащей определению. Для любой $\varphi \in C[0, T]$ потенциал (26) удовлетворяет уравнению и начальному условию из (25). Подставляя (26) в граничное условие из (25), для определения неизвестной плотности $\varphi \in C[0, T]$ получаем интегральное уравнение Вольтерры первого рода (27). Из леммы 4 работы [8] следует, что это уравнение имеет единственное решение $\varphi \in C[0, T]$ и справедлива оценка

$$\|\varphi; [0, T]\|^{(0)} \leq C\|\psi; [0, T]\|^{(1)}. \quad (29)$$

Подставляя решение φ уравнения (27) в выражение (26), получим, что определенная таким образом функция u является решением задачи (25). При этом из лемм 1–3 работы [8] следует включение $u \in \widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus P_0)$ и оценка

$$\|u; \Omega\|^{(2)} \leq C\|\varphi; [0, T]\|^{(0)}.$$

Отсюда и из (29) получаем неравенство (28).

Если дополнительно выполнено условие $\psi'(0) = 0$, то из теоремы 1 работы [8] следует включение $u \in \widehat{C}_0^{2,1}(\bar{\Omega})$. Лемма 3 доказана.

Замечание. Если модуль непрерывности в (18) дополнительно удовлетворяет условию (1), то однозначная разрешимость задачи (25) в классе $u \in C^{1,0}(\bar{\Omega})$ следует из результатов работ [3], [6].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2

С помощью замены (см. (12), (13))

$$u(x, t) = v(x, t) + Ph(x, t) + Vf(x, t), \quad (30)$$

поставленная задача (8)–(10) сводится к задаче

$$Lv = 0 \text{ в } \Omega, \quad (31)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad (32)$$

$$v(g(t), t) = \Psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (33)$$

где

$$\Psi(t) = \psi(t) - Ph(g(t), t) - Vf(g(t), t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Из условия согласования (14), неравенства (21) при $k = 0$, а также из леммы 2 получаем, что $\Psi(0) = 0$. Из условия $g \in C^1[0, T]$, включений $Ph, Vf \in \widehat{C}^{2,1}(\bar{D})$ (см. леммы 1, 2) и равенства

$$\Psi'(t) = \psi'(t) - g'(t) \left(\frac{\partial Ph}{\partial x}(g(t), t) + \frac{\partial Vf}{\partial x}(g(t), t) \right) - \frac{\partial Ph}{\partial t}(g(t), t) - \frac{\partial Vf}{\partial t}(g(t), t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

получаем, что $\Psi \in C^1[0, T]$.

Из леммы 3 следует, что решением задачи (31)–(33) является (векторный) параболический потенциал

$$v(x, t) = S\varphi(x, t),$$

где (вектор-) функция φ единственное в пространстве $C[0, T]$ решение уравнения (17). При этом $v \in \widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus P_0)$ и справедлива оценка

$$\|v; \Omega\|^{(2)} \leq C\|\Psi; [0, T]\|^{(1)}.$$

Если дополнительно выполнено условие согласования (16), то $\Psi'(0) = 0$. В этом случае из леммы 3 следует включение $v \in \widehat{C}_0^{2,1}(\bar{\Omega})$.

Подставляя полученную функцию v в представление (30) и используя леммы 1, 2, получаем окончательно утверждения теорем 1 и 2.

Введем вспомогательные функциональные пространства и рассмотрим две леммы, необходимые для дальнейшего.

Через $C^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus P_0)$ обозначим пространство (вектор-) функций u , непрерывных вместе со своей первой производной по x в $\bar{\Omega}$ и имеющих непрерывные и ограниченные в $\bar{\Omega} \setminus P_0$, вторую по x и первую по t производные, для которых конечно выражение

$$\|u; \Omega\|^{2,1} = \sum_{2r+s \leqslant 2} \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t) \right|.$$

Через $C^2([a, +\infty))$, $a \in \mathbb{R}$, обозначим пространство (вектор-) функций $h : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, непрерывных и ограниченных вместе со своей первой и второй производными, с нормой

$$\|h; [a, +\infty)\|^{(2)} = \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in [a, +\infty)} |h^{(k)}(x)|.$$

Лемма 4. Пусть

$$u \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P_0), \quad \bar{h}(x) = u(x, T), \quad x \geq g(T).$$

Тогда справедливы включение

$$\bar{h} \in C^2[g(T), +\infty), \quad (34)$$

оценка

$$\|\bar{h}; [g(T), +\infty)\|^{(2)} \leq \|u, \Omega\|^{2,1} \quad (35)$$

и предельные соотношения

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_T, T) \\ (x,t) \in \Omega}} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) = \bar{h}^{(k)}(x_T), \quad k = 1, 2, \quad x_T \geq g(T). \quad (36)$$

Доказательство. Сделаем замену переменной

$$y = x - g(t)$$

и положим

$$v(y, t) = u(y + g(t), t), \quad (y, t) \in [0, +\infty) \times [0, T]. \quad (37)$$

Тогда

$$\frac{\partial^k v}{\partial y^k}(y, t) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, t) \Big|_{x=y+g(t)}, \quad k = 0, 1, 2, \quad (y, t) \in [0, +\infty) \times [0, T].$$

Введем обозначение

$$\hat{h}(y) = v(y, T), \quad y \in [0, +\infty).$$

В силу (37) справедливы включение $\hat{h} \in C[0, +\infty)$ и оценка

$$\sup_{y \in [0, +\infty)} |\hat{h}(y)| \leq \sup_{(x,t) \in \Omega} |u(x, t)|.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$h_n(y) = v(y, T - 1/n), \quad y \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $1/n < T/2$. Зафиксируем произвольно $M > 0$. Имеем $h_n(y) \in C^2[0, M]$, последовательность функций $(h_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к функции $\hat{h}(y)$ на $[0, M]$, последовательность производных $(h'_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится равномерно на отрезке $[0, M]$ в силу равномерной непрерывности $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $[0, M] \times [T/2, T]$. Следовательно, существует $\hat{h}' \in C[0, M]$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(y) = \hat{h}'(y), \quad y \in [0, M],$$

и

$$\sup_{y \in [0, +\infty)} |\hat{h}'(y)| \leq \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right|.$$

Аналогично, получаем, что существует $\hat{h}'' \in C[0, M]$, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h''_n(y) = \hat{h}''(y), \quad y \in [0, M],$$

и

$$\sup_{y \in [0, +\infty)} |\hat{h}''(y)| \leq \sup_{(x,t) \in \Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right|.$$

В силу произвольности $M > 0$, отсюда следует, что имеет место включение $\widehat{h} \in C^2[0, +\infty)$ и оценка

$$\|\widehat{h}; [0, +\infty)\|^2 \leq \|u, \Omega\|^{2,1}.$$

Возвращаясь к функции \bar{h} , получаем включение (34), оценку (35) и предельные соотношения (36). Лемма 4 доказана.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 5. *Если $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \setminus P_0)$ и $h(x) = u(x, 0)$, то справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0, 0) \\ (x,t) \in \Omega}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = h'(x_0), \quad x_0 \geq g(0),$$

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x_0, 0) \\ (x,t) \in \Omega}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = h''(x_0), \quad x_0 > g(0).$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Заметим (см. [22, с. 587–588]), что любую функцию $h \in C^2([a, +\infty))$ можно продолжить на всю числовую ось с сохранением класса $h^* \in C^2(\mathbb{R})$, причем

$$\|h^*; \mathbb{R}\|^{(2)} \leq C\|h; [a, +\infty)\|^{(2)}. \quad (38)$$

Перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть $u \in C^{1,0}(\bar{\Omega})$ – решение задачи (8)–(10). Положим

$$h_k(x) = u(x, t_k), \quad x \geq g(t_k), \quad k = 0, \dots, N,$$

$$\Omega_k = \{(x, t) \in D \mid x > g(t), \quad t_k < t < t_{k+1}\}, \quad k = 0, \dots, N,$$

где

$$t_0 = 0, \quad t_{N+1} = T.$$

Докажем сначала, что

$$u \in \widehat{C}^{2,1}(\bar{\Omega}_k \setminus P_k), \quad k = 0, \dots, N, \quad (39)$$

причем

$$\|u, \Omega_k\|^{(2)} \leq C \left(\left\| \psi; [0, T] \right\|_N^{(1)} + \|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^{(0)} \right), \quad k = 0, \dots, N. \quad (40)$$

В самом деле, для $k = 0$ включение (39) и оценка (40) сразу следуют из теоремы 1. Предположим, что (39), (40) выполнены для некоторого k , $0 \leq k \leq N - 1$. В силу леммы 4 справедливы включение

$$h_{k+1} \in C^2[g(t_{k+1}), +\infty)$$

и оценка

$$\|h_{k+1}; [g(t_{k+1}), +\infty)\|^{(2)} \leq \|u, \Omega_k\|^{2,1}. \quad (41)$$

Обозначим продолжение функции h_{k+1} на всю числовую ось с сохранением класса через $h_{k+1}^* \in C^2(\mathbb{R})$. Из неравенства (38) следует оценка

$$\|h_{k+1}^*; \mathbb{R}\|^{(2)} \leq C\|h_{k+1}; [g(t_{k+1}), +\infty)\|^{(2)}. \quad (42)$$

Рассмотрим u на множестве Ω_{k+1} . Функция $u \in C^{1,0}(\bar{\Omega}_{k+1})$ является решением первой начально-краевой задачи

$$Lu = f \text{ в } \Omega_{k+1}, \quad (43)$$

$$u(x, t_{k+1}) = h_{k+1}^*(x), \quad x \geq g(t_{k+1}), \quad (44)$$

$$u(g(t), t) = \psi(t), \quad t_{k+1} \leq t \leq t_{k+2}, \quad (45)$$

где

$$\psi \in C^1[t_{k+1}, t_{k+2}], \quad h_{k+1}^* \in C^2(\mathbb{R}),$$

причем справедливо условие согласования

$$\psi(t_{k+1}) = h_{k+1}(g(t_{k+1})) = h_{k+1}^*(g(t_{k+1})).$$

Из теоремы 1 для решения $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}_{k+1})$ задачи (43)–(45) справедливы включение (39) с заменой в нем k на $k+1$ и оценка

$$\|u; \Omega_{k+1}\|^{(2)} \leq C \left(\|\psi; [0, T]\|_N^{(1)} + \|h_{k+1}^*; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^\omega \right).$$

Отсюда, используя неравенства (41), (42), получаем оценку (40) с заменой в ней k на $k+1$. Таким образом, (39), (40) доказаны по индукции.

Заметим, что из включения (39) и неравенства (40) следует оценка

$$\left| \Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq C |\Delta t|^{1/2}, \quad (x, t), \quad (x, t + \Delta t) \in \overline{\Omega},$$

и из результатов работ [3], [4] — неравенства

$$\left| \frac{\partial^s u}{\partial x^s}(x, t) \right| \leq C \left(\|\psi; [0, T]\|_N^{(1)} + \|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^\omega \right), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}, \quad s = 0, 1. \quad (46)$$

Далее, учитывая леммы 4, 5, делаем вывод, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t_k) = h_k''(x), \quad x > g(t_k), \quad k = 1, \dots, N,$$

причем $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывна и ограничена на всем множестве $\overline{\Omega} \setminus P$, и справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq C \left(\|\psi; [0, T]\|_N^{(1)} + \|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^\omega \right), \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \setminus P. \quad (47)$$

Наконец, из лемм 4, 5 получаем, что

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x,t_k-0) \\ (x,t) \in \Omega_{k-1}}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x,t_k+0) \\ (x,t) \in \Omega_k}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{s=0}^2 A_s(x, g(t_k)) h_k^{(s)}(x) + f(x, t_k), \quad x > g(t_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Отсюда и из непрерывности u на $\overline{\Omega}$ следует, что в точках (x, t_k) , $x > g(t_k)$, $k = 1, \dots, N$, существует $\frac{\partial u}{\partial t}$. Учитывая непрерывность производных $\frac{\partial^s u}{\partial x^s}$, $s = 0, 1, 2$, и неравенства (46), (47), получаем непрерывность и ограниченность $\frac{\partial u}{\partial t}$ на всем множестве $\overline{\Omega} \setminus P$, и оценку

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right| \leq C \left(\|\psi; [0, T]\|_N^{(1)} + \|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^\omega \right), \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \setminus P.$$

Таким образом, справедливы включение $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P)$ и неравенство (20). Теорема 3 доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 3 и из леммы 4 следует, что старшие производные решения $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P)$ задачи (8)–(10) непрерывны “снизу” в точках множества $P \setminus P_0$, а именно:

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (g(t_k), t_k) \\ (x,t) \in \Omega_{k-1}}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(g(t_k), t_k), \quad k = 1, \dots, N,$$

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (g(t_k), t_k) \\ (x,t) \in \Omega_{k-1}}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(g(t_k), t_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Матем. ин-та В.А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.
- Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

3. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Analysis. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
4. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333–1343.
5. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. АН. 2022. Т. 503. № 2. С. 26–29.
6. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 4. С. 584–595.
7. *Федоров К.Д.* О первой начально-краевой задаче для модельной параболической системы в области с криволинейными боковыми границами // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 12. С. 1623–1634.
8. *Федоров К.Д.* Гладкое решение первой начально-краевой задачи для параболических систем в полуограниченной области с негладкой боковой границей на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2022. Т. 58. № 10. С. 1400–1413.
9. *Ворошин Л.Г., Хусид Б.М.* Диффузионный массоперенос в многокомпонентных системах. Минск: Наука и техн., 1979. 255 с.
10. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
11. *Криштал М.А.* Многокомпонентная диффузия в металлах. М.: Металлургия, 1985. 177 с.
12. *Гуляев А.П.* Металловедение. М.: Металлургия, 1986. 544 с.
13. *Бадерко Е.А., Федоров К.Д.* О гладкости потенциала Пуассона для параболических систем второго порядка на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2023. Т. 59. № 12. С. 1606–1618.
14. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
15. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.
16. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 428 с.
17. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$ -параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
18. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини. 1992. Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294-В92.
19. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи матем. наук. 1962. Т. 17. № 3 (105). С. 3–146.
20. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964. 444 с.
21. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифференц. ур-ния. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.
22. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Наука, 1968. 607 с.

THE FIRST INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC SYSTEMS IN A SEMI-BOUNDED DOMAIN WITH CURVILINEAR LATERAL BOUNDARY

E. A. Baderko* and K. D. Fedorov**

*Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental
and Applied Mathematics, Moscow, 119991 Russia*

**e-mail: baderko.ea@yandex.ru*

***e-mail: konstantin-dubna@mail.ru*

Received: 09 September 2024

Revised: 09 September 2024

Accepted: 26 September 2024

Abstract. The first initial boundary value problem for a second-order parabolic system in a semi-bounded domain on the plane is considered. The coefficients of the system satisfy the double Dini condition. The function defining the lateral boundary of the domain is continuously differentiable on the closed interval. When the right-hand side of the boundary condition of the first kind is continuously differentiable and the initial function is continuous and bounded together with its first and second derivatives, it is established that the solution of the problem is continuous and bounded in the closure of the domain together with its higher order derivatives. The corresponding estimates are proved. An integral representation of the solution is given. If the lateral boundary of the domain has “corners” and the boundary function has a piecewise continuous derivative, it is proved that, despite the lateral boundary and the boundary function being non-smooth, the higher order derivatives of the solution are continuous everywhere in the closure of the domain, except the corner points, and are bounded.

Keywords: parabolic systems, first initial boundary value problem, nonsmooth lateral boundary, boundary integral equations, Dini condition

УДК 517.956.4

НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД УГЛОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ВЛИЯНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

© 2025 г. А. И. Денисов^{1,*}, И. В. Денисов¹

¹300026 Тула, пр-т Ленина, 125, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Россия
*e-mail: den_tspu@mail.ru

Поступила в редакцию 10.03.2024 г.

Переработанный вариант 10.03.2024 г.

Принята к публикации 26.09.2024 г.

В прямоугольнике $\Omega = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассматривается начально-краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Предполагается, что в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - u_0^3, \quad \text{где } u_0 = u_0(k) < 0.$$

Для построения асимптотики решения задачи используется нелинейный метод угловых пограничных функций. Ранее был рассмотрен случай, когда граничное значение φ в угловых точках отделено от точки перегиба $u = 0$ условием

$$u_0(k) < \varphi(k) \leq \frac{u_0(k)}{2} < 0,$$

при котором на роль барьерных подошли функции "простейшего" вида, пригодные сразу во всей рассматриваемой области. В настоящей работе рассматривается случай

$$\frac{u_0(k)}{2} < \varphi(k) < 0,$$

при котором область приходится разбивать на части, в каждой подобласти строить свои барьерные функции с учетом их непрерывной стыковки на общих границах подобластей, а затем проводить слаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений. В результате получается полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике. Библ. 15.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

DOI: 10.31857/S0044466925010047, **EDN:** CDCFNP

ВВЕДЕНИЕ

Сингулярно возмущенные задачи с малым параметром для уравнений с частными производными встречаются в различных задачах математической физики. В их решениях, как правило, возникают пограничные слои, где происходит резкий переход между разными характерными модами. Типичный пример – это задачи обтекания тел вязкой жидкостью, когда вблизи поверхности тела скорость потока резко падает до нуля. Другой пример – это задачи диффузии, когда на границе области поддерживается постоянная концентрация или постоянный поток. В статье рассматриваются именно такие задачи, когда вблизи угловых точек прямоугольника возникают пограничные слои, сшивающие решение для начальных и граничных условий. Проводится подробное описание угловых пограничных слоев при кубических нелинейностях в уравнении.

Такие задачи имеют более чем полувековую историю. Общая теория для линейных параболических уравнений была построена В.Ф. Бутузовым в середине 1970-х годов. Для нелинейных эллиптических и параболических уравнений с краевыми условиями первого рода разработка теории началась в работах И.В. Денисова в 1990-х годах. В настоящее время достаточно подробно исследованы только задачи с квадратичными нелинейностями. Кубические нелинейности исследованы лишь в частных случаях.

Нелинейный метод угловых пограничных функций является естественным обобщением (линейного) метода угловых пограничных функций В.Ф. Бутузова (см. [1], [2]). При построении асимптотических разложений решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями первого рода (задача Дирихле) приходится доказывать существование подходящих решений нелинейных уравнений. Это делается с помощью барьерных функций, построение которых представляет основную проблему (см. [3]–[9]). В настоящее время разработаны возможные виды "простейших" гладких барьерных функций для оценки решений нелинейных задач, определяющих главные члены угловой части асимптотики. Если же гладкие барьеры не удается построить сразу во всей рассматриваемой области, то предполагается выполнение следующих шагов:

- 1) разбиение области на части;
- 2) построение в каждой подобласти нижних и верхних решений задачи;
- 3) непрерывнаястыковка нижних и верхних решений на общих границах подобластей;
- 4) последующее сглаживание кусочно-непрерывных нижних и верхних решений.

Для обоснования построенной асимптотики решения применяется универсальный метод дифференциальных неравенств Н.Н. Нефедова (см. [10]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим через Ω прямоугольник $\{(x, t) \mid 0 < x < 1, 0 < t < T\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где ε – малый положительный параметр. Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. Функции $F(u, x, t, \varepsilon)$, $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. Вырожденное уравнение $F(u, x, t, 0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \bar{u}_0(x, t)$.

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

Условие 3. Производная $F'_u(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Условие 4. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0),$$

имеет решение $\Pi_0(x, \tau)$ при $\tau \geq 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x, \infty) = 0$ (здесь параметр $x \in [0, 1]$).

Условие 5. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2 \frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k, t) + z_1, k, t, 0), \quad (4)$$

прямые $z_1 = \Psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k, t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1, z_2) = (0, 0)$ при $y \rightarrow \infty$ (здесь t – параметр, $k = 0$ или 1).

В силу условий 1–3 точка $(z_1, z_2) = (0, 0)$ является точкой покоя типа седла систем (4).

При сделанных предположениях нельзя гарантировать существование решения задачи (1)–(3). Кроме этого, даже если решение задачи существует, его явное представление, как правило, получить не удается. Поэтому для доказательства существования решения задачи (1)–(3) требуются дополнительные условия, которые будут сформулированы ниже.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Решение задачи (1)–(3) ищется в виде асимптотического ряда по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$, состоящего из шести частей:

$$u(x, t, \varepsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*). \quad (5)$$

Здесь \bar{u} – регулярная часть асимптотики, играющая роль внутри прямоугольника Ω , Π , Q и Q^* – погранслойные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника Ω соответственно $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, P и P^* – угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника Ω соответственно $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана и подробно описана в [11]. Однако, для построения угловых пограничных функций требуются обозначения, вводимые при построении предыдущих частей асимптотики. В связи с этим процедуру построения регулярной и погранслойной частей асимптотики всякий раз приходится схематично повторять.

В уравнении (1) функция F заменяется выражением, аналогичным (5):

$$F(u, x, t, \varepsilon) = \bar{F} + (\Pi F + QF + Q^*F) + (PF + P^*F). \quad (6)$$

Выражения (5) и (6) подставляются в уравнение (1), которое разделяется на части: регулярную, погранслойные и угловые. Регулярная часть асимптотики строится в виде ряда по степеням ε :

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x, t).$$

Погранслойная часть асимптотики вводится для устранения невязок регулярной части с начальным и граничными условиями. Погранслойные функции Π , Q и Q^* ищутся в виде рядов

$$\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k(x, \tau), \quad Q(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k(\xi, t), \quad Q^*(\xi_*, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Q_k^*(\xi_*, t),$$

где

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$$

суть растянутые переменные.

С целью устранения невязок с начальным и граничными условиями вблизи угловых точек $(0, 0)$ и $(1, 0)$ прямоугольника Ω вводятся угловые пограничные функции $P(\xi, \tau, \varepsilon)$ и $P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon)$, нахождение которых доставляет основные трудности при решении поставленной задачи. Эти функции ищутся в виде рядов

$$P(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\xi, \tau), \quad P^*(\xi_*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k^*(\xi_*, \tau).$$

Задача для определения $P_0(\xi, \tau)$ ставится в первой четверти \mathbb{R}_+^2 плоскости растянутых переменных (ξ, τ) и имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_0}{\partial \tau} = F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) - F(\bar{u}_0 + \Pi_0) - F(\bar{u}_0 + Q_0), \quad (7)$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \quad (8)$$

$$P_0(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где для краткости используются обозначения

$$F(u) = F(u, 0, 0, 0), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0), \quad \Pi_k = \Pi_k(0, \tau), \quad Q_k = Q_k(\xi, 0), \quad P_k = P_k(\xi, \tau).$$

Для функций $P_k(\xi, \tau)$, $k \geq 1$, в области \mathbb{R}_+^2 получаются линейные задачи

$$a^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \tau} = F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) P_k + h_k, \quad (10)$$

$$P_k(0, \tau) = -\Pi_k(0, \tau), \quad P_k(\xi, 0) = -Q_k(\xi, 0), \quad (11)$$

$$P_k(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \rightarrow \infty, \quad (12)$$

где неоднородности $h_k = h_k(\xi, \tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида

$$|h_k(\xi, \tau)| \leq C \exp(-\kappa(\xi + \tau)), \quad (13)$$

если подобным оценкам удовлетворяют функции P_0, \dots, P_{k-1} . Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, ставятся аналогично.

В дальнейшем для определенности считается, что в каждой угловой точке граничное значение φ больше корня вырожденного уравнения \bar{u}_0 . (Случай $\varphi < \bar{u}_0$ сводится к предыдущему с помощью замены u на $-u$.)

Для доказательства существования решения задачи (7)–(9) используется метод верхних и нижних решений (см. [12]–[14]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области } D,$$

$$Z = h \quad \text{на границе } \partial D$$

имеет решение Z в границах

$$Z_- \leq Z \leq Z_+,$$

если в области D выполняются неравенства

$$L(Z_+) \leq 0, \quad L(Z_-) \geq 0, \quad Z_- \leq Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \leq h \leq Z_+.$$

При исследовании задачи (7)–(9) будет удобно пользоваться обозначением

$$L(Z) := a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0).$$

Тогда задача (7)–(9) примет вид

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области } \mathbb{R}_+^2, \tag{14}$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \tag{15}$$

$$P_0(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi + \tau \rightarrow \infty. \tag{16}$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предполагается, что в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где числа } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) < 0.$$

В этом случае функция $F(u)$ при $u > \bar{u}_0$ сначала выпукла вверх, в точке $u = 0$ имеет перегиб и далее становится выпуклой вниз. В работе [9] задача (1)–(3) рассмотрена при условии, когда граничное значение φ в угловых точках отделено от точки перегиба $u = 0$ условием

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0.$$

При таком условии для задачи (14)–(16) на роль барьераных подходят гладкие функции “простейшего” вида, пригодные сразу во всей рассматриваемой области. Было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–5 и в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где числа } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) < 0.$$

Если граничные значения $\varphi = \varphi(k)$ удовлетворяют условию

$$\bar{u}_0 < \varphi \leq \frac{\bar{u}_0}{2} < 0,$$

то для достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t, \varepsilon)$, для которого ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, t) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi, t) + P_k(\xi, t) + P_k^*(\xi, t) \right)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \rightarrow 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Далее считается, что

$$\frac{\bar{u}_0}{2} < \varphi < 0. \tag{17}$$

Ранее с использованием погранслойных функций, определяемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и необходимыми экспоненциальными оценками, были построены так называемые “простейшие” функции

$$\begin{aligned} Z_1(\xi, \tau) &\equiv 0, \quad Z_2(\xi, \tau) = C \exp(-k(\xi + \tau)), \quad Z_3(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}, \\ Z_4(\xi, \tau) &= -\frac{\Pi_0(0, \tau)Q_0(\xi, 0)}{\varphi - \bar{u}_0}. \end{aligned}$$

В отдельных случаях такие функции подходят на роль барьерных во всей области \mathbb{R}_+^2 . При условии (17) эти функции не подходят на роль барьерных для задачи (14)–(16) во всей области \mathbb{R}_+^2 . Область \mathbb{R}_+^2 приходится разбивать на части и в каждой из них строить так называемые кусочно-гладкие барьеры, а затем сглаживать их.

Определение. Для задачи

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области } D, \quad Z = h \quad \text{на границе } \partial D,$$

функции $Z_+(\xi, \tau)$ и $Z_-(\xi, \tau)$ являются кусочно-гладкими верхним и нижним решениями задачи, если

- 1) $Z_+(\xi, \tau)$ и $Z_-(\xi, \tau)$ непрерывны в замкнутой области \bar{D} ;
- 2) существует разбиение области D на конечное число подобластей, на внутренности каждой из которых выполняются неравенства

$$L(Z_+) \leq 0, \quad L(Z_-) \geq 0, \quad Z_- \leq Z_+;$$

- 3) на границе области D выполняются неравенства

$$Z_- \leq h \leq Z_+.$$

Лемма 1. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) существует положительное число ρ_0 такое, что в области

$$\Omega_0 = \{(\xi, \tau) | \xi \geq \rho_0, \tau \geq \rho_0\}$$

функция вида

$$Z_{0-} = -r \exp(-\kappa(\xi + \tau)),$$

где r и κ – некоторые положительные числа, является нижним барьером задачи (14)–(16).

Доказательство. Требуется доказать, что $L(Z_{0-}) \geq 0$. Пусть

$$s = \Pi_0(0, \tau), \quad t = Q_0(\xi, 0), \quad Z = Z_{0-}, \quad \lambda = \bar{u}_0 + s + t.$$

При таких обозначениях имеем

$$\begin{aligned} L(Z) &= a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\lambda + Z) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t) = \\ &= a^2 \kappa^2 Z + \kappa Z - [(\lambda + Z)^3 - \bar{u}_0^3] + [(\bar{u}_0 + s)^3 - \bar{u}_0^3] + [(\bar{u}_0 + t)^3 - \bar{u}_0^3] = \\ &= a^2 \kappa^2 Z + \kappa Z - \lambda^3 - 3\lambda^2 Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 + (\bar{u}_0 + s)^3 + (\bar{u}_0 + t)^3 - \bar{u}_0^3 = \\ &= [-\lambda^3 + (\bar{u}_0 + s)^3 + (\bar{u}_0 + t)^3 - \bar{u}_0^3] + (a^2 \kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2) Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 = \\ &= -3st(\bar{u}_0 + \lambda) + (a^2 \kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2) Z - 3\lambda Z^2 - Z^3. \end{aligned}$$

Так как s и t принадлежат промежутку $(0, \varphi - \bar{u}_0]$, то при условии (17) первое слагаемое в выражении $L(Z)$ положительно:

$$-3st(\bar{u}_0 + \lambda) > 0.$$

Остальная часть $L(Z)$ имеет вид

$$(a^2 \kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2) Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 = -Z [Z^2 + 3\lambda Z + (3\lambda^2 - a^2 \kappa^2 - \kappa)].$$

Выражение $L(Z)$ будет положительным при условии положительности выражения, стоящего в квадратных скобках:

$$Z^2 + 3\lambda Z + (3\lambda^2 - a^2 \kappa^2 - \kappa).$$

Значения $\lambda = \bar{u}_0 + s + t$ заполняют промежуток $(\bar{u}_0, 2\varphi - \bar{u}_0]$. Так как $\bar{u}_0 < 0$, а $2\varphi - \bar{u}_0 > 0$, то λ может принимать нулевое значение, при котором

$$3\lambda^2 - a^2\kappa^2 - \kappa < 0.$$

Чтобы избежать этого нужно воспользоваться монотонным убыванием и стремлением к нулю значений $s = \Pi_0(0, \tau)$ и $t = Q_0(\xi, 0)$ при τ и ξ , стремящихся к ∞ . Это позволяет утверждать, что для любого числа $\beta \in (\bar{u}_0, 0)$ существует положительное число ρ_0 такое, что

$$\bar{u}_0 + \Pi_0(0, \rho_0) + Q_0(\rho_0, 0) = \beta < 0, \quad (18)$$

и в области

$$\Omega_0 = \{(\xi, \tau) | \xi \geq \rho_0, \tau \geq \rho_0\}$$

выполняется неравенство

$$\lambda = \bar{u}_0 + s + t < \bar{u}_0 + \Pi_0(0, \rho_0) + Q_0(\rho_0, 0) = \beta < 0.$$

Тогда дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в квадратных скобках:

$$9\lambda^2 - 4(3\lambda^2 - a^2\kappa^2 - \kappa) = 4(a^2\kappa^2 + \kappa) - 3\lambda^2 < 4(a^2\kappa^2 + \kappa) - 3\beta^2 < 0,$$

если

$$0 < \kappa < \frac{\sqrt{1 + 3a^2\beta^2} - 1}{2a^2}. \quad (19)$$

При выполнении условий (17)–(19) значения $L(Z_{0-}) > 0$ и функция вида

$$Z_{0-} = -r \exp(-\kappa(\xi + \tau))$$

является нижним барьером задачи (14)–(16) в области Ω_0 . Лемма 1 доказана.

Замечание 1. Лемма 1 не вносит ограничений на величину коэффициента r у функции Z_{0-} .

После выделения из \mathbb{R}_+^2 подобласти Ω_0 оставшуюся часть области \mathbb{R}_+^2 разобьем на две подобласти:

$$\Omega_1 = \{(\xi, \tau) | \xi \geq \tau, 0 \leq \tau \leq \rho_0\} \quad \text{и} \quad \Omega_2 = \{(\xi, \tau) | 0 \leq \xi \leq \rho_0, \tau \geq \xi\}.$$

Лемма 2. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) нижним барьером задачи (14)–(16) в области Ω_1 является функция вида

$$Z_{1-}(\xi, \tau) = -h(\tau) \exp(-\kappa\xi),$$

где κ – достаточно малое положительное число, а функция $h(\tau)$ на промежутке $[0, \rho_0]$ обладает свойствами

$$h(\tau) \geq \Pi_0(0, \tau) > 0, \quad h'(\tau) > 0, \quad h''(\tau) < 0. \quad (20)$$

Доказательство. Требуется доказать, что $L(Z_{1-}) \geq 0$. Пусть

$$s = \Pi_0(0, \tau), \quad t = Q_0(\xi, 0), \quad Z = Z_{1-}, \quad \lambda = \bar{u}_0 + s + t.$$

При таких обозначениях имеем

$$\begin{aligned} L(Z) &= a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\lambda + Z) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t) = \\ &= a^2\kappa^2 Z + h'(\tau) \exp(-\kappa\xi) - 3st(\bar{u}_0 + \lambda) - 3\lambda^2 Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 = \\ &= -3st(\bar{u}_0 + \lambda) + \left[a^2\kappa^2 - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - 3\lambda^2 \right] Z - 3\lambda Z^2 - Z^3. \end{aligned}$$

Как и в лемме 1 значения

$$-3st(\bar{u}_0 + \lambda) > 0.$$

Остальная часть $L(Z)$ имеет вид

$$\left[a^2\kappa^2 - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - 3\lambda^2 \right] Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 = -Z \left[Z^2 + 3\lambda Z + \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3\lambda^2 - a^2\kappa^2 \right) \right].$$

Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в квадратных скобках

$$D = 9\lambda^2 - 4 \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3\lambda^2 - a^2\kappa^2 \right) = -3\lambda^2 - 4 \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - a^2\kappa^2 \right) < 0$$

при условии

$$\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - a^2\kappa^2 > 0,$$

что достижимо, если

$$a^2\kappa^2 < \min \frac{h'(\tau)}{h(\tau)}.$$

Так как функция $h'(\tau)/h(\tau)$ убывает на промежутке $[0, \rho_0]$, то

$$\min \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} = \frac{h'(\rho_0)}{h(\rho_0)},$$

и нужно иметь

$$a^2\kappa^2 < \frac{h'(\rho_0)}{h(\rho_0)}, \quad 0 < \kappa < \frac{1}{a} \sqrt{\frac{h'(\rho_0)}{h(\rho_0)}}.$$

С учетом (19) корректируем выбор числа κ :

$$0 < \kappa < \min \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{h'(\rho_0)}{h(\rho_0)}}, \frac{\sqrt{1 + 3a^2\beta^2} - 1}{2a^2} \right). \quad (21)$$

При условии (21) выполняется неравенство $L(Z_{1-}) \geq 0$. Лемма 2 доказана.

В области Ω_2 нижний барьер строится симметрично барьери из области Ω_1 , и справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) нижним барьером задачи (14)–(16) в области Ω_2 является функция

$$Z_{2-}(\xi, \tau) = Z_{1-}(\tau, \xi) = -h(\xi) \exp(-\kappa\tau),$$

где $Z_{1-}(\xi, \tau)$ – функция из леммы 2.

Лемма 3 завершает построение нижних барьеров для оценки решения задачи (14)–(16) во всех трех областях Ω_0 , Ω_1 и Ω_2 , на которые была разделена область \mathbb{R}_+^2 . Эти барьеры можно непрерывно сопоставлять друг с другом. Так функции $Z_{1-}(\xi, \tau)$ и $Z_{2-}(\xi, \tau)$ уже по построению непрерывно соединяются друг с другом на общей границе областей Ω_1 и Ω_2 , то есть на отрезке $\xi = \tau$, где $\tau \in [0, \rho_0]$. На общей границе областей Ω_0 и Ω_1 , которая представляет собой луч $\tau = \rho_0$, $\xi \in [\rho_0, \infty)$, непрерывную стыковку кусков $Z_{0-}(\xi, \tau)$ и $Z_{1-}(\xi, \tau)$ обеспечивает выбор параметра κ для функции $Z_{0-}(\xi, \tau)$, который остался свободным:

$$h(\rho_0) = r \exp(-\kappa\rho_0).$$

Это же условие обеспечивает непрерывную стыковку кусков $Z_{0-}(\xi, \tau)$ и $Z_{2-}(\xi, \tau)$ на общей границе областей Ω_0 и Ω_2 . Таким образом получается кусочно-гладкое нижнее решение задачи (14)–(16).

Далее методами работы [5] проводится процедура сглаживания кусочно-гладкого нижнего решения до гладкого нижнего решения, что приводит к справедливости следующего утверждения.

Теорема 2. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) задача (14)–(16) имеет нижнее решение $Z_-(\xi, \tau)$, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида

$$0 < -Z_-(\xi, \tau) \leq C \exp(-\kappa(\xi + \tau)), \quad (22)$$

где C и κ – некоторые положительные числа.

Теперь перейдем к построению верхнего решения задачи (14)–(16). На этом пути имеются дополнительные трудности, связанные с положительностью свободного члена в выражении $L(Z)$ через Z . Тем не менее, эти трудности удается преодолеть за счет другой техники.

Лемма 4. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) существует положительное число ρ_0 такое, что в области

$$\Omega_0 = \{(\xi, \tau) | \xi \geq \rho_0, \tau \geq \rho_0\}$$

функция вида

$$Z_{0+} = r \exp(-\kappa(\xi + \tau)),$$

где r и κ – некоторые положительные числа, является верхним барьером задачи (14)–(16).

Доказательство. Требуется доказать неравенство $L(Z_{0+}) \leq 0$. Вводим обозначения, аналогичные принятым ранее:

$$s = \Pi_0(0, \tau), \quad t = Q_0(\xi, 0), \quad Z = Z_{0+}, \quad \lambda = \bar{u}_0 + s + t.$$

При таких обозначениях имеем

$$\begin{aligned} L(Z) &= a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\lambda + Z) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t) = \\ &= -3st(\bar{u}_0 + \lambda) + (a^2 \kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2)Z - 3\lambda Z^2 - Z^3. \end{aligned}$$

В выражении для $L(Z)$ первое слагаемое оказывается положительным:

$$-3st(\bar{u}_0 + \lambda) > 0,$$

поэтому отрицательность $L(Z)$ нужно обеспечить за счет других слагаемых. Воспользуемся оценками

$$0 < s = \Pi_0(0, \tau) \leq (\varphi - \bar{u}_0) \exp(-\kappa_1 \tau),$$

$$0 < t = Q_0(\xi, 0) \leq (\varphi - \bar{u}_0) \exp(-\kappa_2 \xi),$$

где $\kappa_{1,2}$ – некоторые положительные числа. В выражении для Z_{0+} выбираем κ , подчиненное условию

$$0 < \kappa < \min(\kappa_1, \kappa_2). \quad (23)$$

Тогда при ξ и τ , стремящихся к бесконечности, знак $L(Z)$ определяется коэффициентом при Z , который равен

$$a^2 \kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2.$$

При ξ и τ , стремящихся к бесконечности, этот коэффициент

$$a^2 \kappa^2 + \kappa - 3\lambda^2 \rightarrow a^2 \kappa^2 + \kappa - 3\bar{u}_0^2.$$

Последнее выражение будет отрицательным:

$$a^2 \kappa^2 + \kappa - 3\bar{u}_0^2 < 0,$$

при следующем условии на выбор κ :

$$0 < \kappa < \frac{\sqrt{1 + 12\bar{u}_0^2} - 1}{2a^2}.$$

Корректируем это с (23) и получаем

$$0 < \kappa < \min\left(\kappa_1, \kappa_2, \frac{\sqrt{1 + 12\bar{u}_0^2} - 1}{2a^2}\right). \quad (24)$$

При ξ и τ , стремящихся к бесконечности, $L(Z)$ эквивалентно величине

$$L(Z) \sim (a^2 \kappa^2 + \kappa - 3\bar{u}_0^2)Z < 0,$$

поэтому существует положительное число ρ_0 такое, что в области

$$\Omega_0 = \{(\xi, \tau) | \xi \geq \rho_0, \tau \geq \rho_0\}$$

выполняется неравенство $L(Z_{0+}) \leq 0$, и, таким образом, функция вида

$$Z_{0+} = r \exp(-\kappa(\xi + \tau))$$

является верхним барьером задачи (14)–(16) в области Ω_0 . Лемма 4 доказана.

Как и ранее оставшуюся часть области \mathbb{R}_+^2 разбиваем на две подобласти

$$\Omega_1 = \{(\xi, \tau) | \xi \geq \tau, 0 \leq \tau \leq \rho_0\} \quad \text{и} \quad \Omega_2 = \{(\xi, \tau) | 0 \leq \xi \leq \rho_0, \tau \geq \xi\}.$$

Лемма 5. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) верхним барьером задачи (14)–(16) в области Ω_1 является функция вида

$$Z_{1+}(\xi, \tau) = h(\tau) \exp(-\kappa\xi),$$

где κ – достаточно малое положительное число, а функция $h(\tau)$ на промежутке $[0, \rho_0]$ обладает свойствами

$$h(\tau) > 0, \quad h'(\tau) > 0, \quad h''(\tau) < 0. \quad (25)$$

Доказательство. Требуется доказать, что $L(Z_{1+}) \leq 0$. Пусть

$$s = \Pi_0(0, \tau), \quad t = Q_0(\xi, 0), \quad Z = Z_{1+}, \quad \lambda = \bar{u}_0 + s + t.$$

При таких обозначениях имеем

$$\begin{aligned} L(Z) &= a^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z}{\partial \tau} - F(\lambda + Z) + F(\bar{u}_0 + s) + F(\bar{u}_0 + t) = \\ &= a^2 \kappa^2 Z - h'(\tau) \exp(-\kappa\xi) - 3st(\bar{u}_0 + \lambda) - 3\lambda^2 Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 = \\ &= \left(a^2 \kappa^2 - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) Z - 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} Z - 3\lambda^2 Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 = \\ &= \left(a^2 \kappa^2 - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} - 3\lambda^2 \right) Z - 3\lambda Z^2 - Z^3 = \\ &= -Z \left[- \left(a^2 \kappa^2 - \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} - 3\lambda^2 \right) + 3\lambda Z + Z^2 \right] = \\ &= -Z \left[Z^2 + 3\lambda Z + \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} + 3\lambda^2 - a^2 \kappa^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Обозначим выражение, стоящее в квадратных скобках, через $H(Z)$:

$$H(Z) = Z^2 + 3\lambda Z + q,$$

$$\text{где } q = \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} + 3\lambda^2 - a^2 \kappa^2.$$

Требуется доказать, что $H(Z) \geq 0$. Сначала добьемся положительности q . Имеем

$$q \geq \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \frac{\exp(\kappa\xi)}{h(\tau)} - a^2 \kappa^2 = \frac{1}{h(\tau)} [h'(\tau) + 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \exp(\kappa\xi)] - a^2 \kappa^2.$$

Чтобы удовлетворить неравенству

$$h'(\tau) + 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \exp(\kappa\xi) > 0,$$

воспользуемся оценками

$$0 < s = \Pi_0(0, \tau) \leq (\varphi - \bar{u}_0) \exp(-\kappa_1 \tau),$$

$$0 < t = Q_0(\xi, 0) \leq (\varphi - \bar{u}_0) \exp(-\kappa_2 \xi),$$

где $\kappa_{1,2}$ – некоторые положительные числа. Считая, что

$$0 < \kappa < \min(\kappa_1, \kappa_2), \quad (26)$$

имеем

$$0 < t \exp(\kappa \xi) \leq (\varphi - \bar{u}_0) \exp(-\kappa_2 \xi) \exp(\kappa \xi) = (\varphi - \bar{u}_0) \exp(-(\kappa_2 - \kappa) \xi) < \varphi - \bar{u}_0.$$

Величина

$$0 < -(\bar{u}_0 + \lambda) < -2\bar{u}_0.$$

Таким образом,

$$0 < -3st(\bar{u}_0 + \lambda) \exp(\kappa \xi) < -6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2,$$

или

$$3st(\bar{u}_0 + \lambda) \exp(\kappa \xi) > 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2,$$

поэтому функцию $h(\tau)$ подчиняем условию

$$h'(\tau) + 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \exp(\kappa \xi) > h'(\tau) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2 > 0.$$

Учитывая, что $h'(\tau)$ убывает на промежутке $[0, \rho_0]$, требуем, чтобы

$$h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2 > 0. \quad (27)$$

Теперь, чтобы q было положительным, нужно скорректировать выбор κ :

$$q \geq \frac{1}{h(\tau)} [h'(\tau) + 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \exp(\kappa \xi)] - a^2 \kappa^2 \geq \frac{1}{h(\rho_0)} [h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2] - a^2 \kappa^2 \geq \delta > 0$$

при условии

$$0 < a^2 \kappa^2 < \frac{1}{h(\rho_0)} [h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2] - \delta,$$

или

$$0 < \kappa < \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{h(\rho_0)} [h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2] - \delta},$$

где δ – какое-либо число из промежутка

$$0 < \delta < \frac{1}{h(\rho_0)} [h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2]. \quad (28)$$

Выбор κ корректируем с условием (26):

$$0 < \kappa < \min \left(\kappa_1, \kappa_2, \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{h(\rho_0)} [h'(\rho_0) + 6\bar{u}_0(\varphi - \bar{u}_0)^2] - \delta} \right).$$

При наложенных выше условиях дискриминант квадратного трехчлена $H(Z)$ равен

$$\begin{aligned} D &= 9\lambda^2 - 4q = 9\lambda^2 - 4 \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \frac{\exp(\kappa \xi)}{h(\tau)} + 3\lambda^2 - a^2 \kappa^2 \right) = \\ &= -3\lambda^2 - 4 \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} + 3st(\bar{u}_0 + \lambda) \frac{\exp(\kappa \xi)}{h(\tau)} - a^2 \kappa^2 \right) < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $H(Z) > 0$, а $L(Z) < 0$. Лемма 5 доказана.

В области Ω_2 верхний барьер строится симметрично барьери из области Ω_1 , и справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) верхним барьером задачи (14)–(16) в области Ω_2 является функция

$$Z_{2+}(\xi, \tau) = Z_{1+}(\tau, \xi) = h(\xi) \exp(-\kappa\tau),$$

где $Z_{1+}(\xi, \tau)$ – функция из леммы 5.

Аналогично теореме 2 получается следующее утверждение.

Теорема 3. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) задача (14)–(16) имеет верхнее решение $Z_+(\xi, \tau)$, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида

$$0 < Z_+(\xi, \tau) \leq C \exp(-\kappa(\xi + \tau)), \quad (29)$$

где C и κ – некоторые положительные числа.

Применение метода верхних и нижних решений и учет оценок (22) и (29) позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 4. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) задача (14)–(16) имеет решение $P_0(\xi, \tau)$, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида

$$|P_0(\xi, \tau)| \leq C \exp(-\kappa(\xi + \tau)), \quad (30)$$

где C и κ – некоторые положительные числа.

Последующие члены угловой части асимптотики $P_k(\xi, \tau)$, $k \geq 1$, определяются из линейных задач (10)–(12), рассматриваемых в области \mathbb{R}_+^2 :

$$a^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \tau} = F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) P_k + h_k,$$

$$P_k(0, \tau) = -\Pi_k(0, \tau), \quad P_k(\xi, 0) = -Q_k(\xi, 0),$$

$$P_k(\xi, \tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi + \tau \rightarrow \infty,$$

где неоднородности $h_k = h_k(\xi, \tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам вида

$$|h_k(\xi, \tau)| \leq C \exp(-\kappa(\xi + \tau)),$$

если подобным оценкам удовлетворяют функции P_0, \dots, P_{k-1} . Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

В силу оценок для функций Π_0, Q_0 и P_0 можно гарантировать существование положительного числа ϱ такого, что при $\xi + \tau \geq \varrho$ значения $\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0$ будут $\leq -\delta$, где δ – некоторое положительное число. При таких значениях переменных ξ, τ в силу свойств функции F коэффициент $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)$ будет положительным и ограниченным от нуля:

$$F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) \geq F'(-\delta) > 0.$$

Это обстоятельство позволяет использовать результаты работы [15] и доказать следующее утверждение.

Теорема 5. Если в точке $(0, 0)$ прямоугольника Ω функция $F(u) = F(u, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где число } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0) < 0,$$

то при условии (17) задачи (10)–(12) имеют решения $P_k(\xi, \tau)$, которые удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида (30).

Задачи для угловых погранфункций $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, ставятся и решаются аналогично. Асимптотический ряд (5) оказывается полностью построенным. Остается обосновать асимптотическую сходимость этого ряда к решению задачи (1)–(3).

Теорема 6. Пусть выполнены условия 1–5 и в угловых точках $(k, 0)$ прямоугольника Ω , где $k = 0$ или 1 , функция $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ имеет вид

$$F(u) = u^3 - \bar{u}_0^3, \quad \text{где числа } \bar{u}_0 = \bar{u}_0(k, 0) < 0.$$

Если граничные значения $\varphi = \varphi(k)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\bar{u}_0}{2} < \varphi < 0,$$

то для достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t, \varepsilon)$, для которого ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau) \right)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \rightarrow 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Доказательство теоремы основано на разрешимости задач для пограничных функций Π_k , Q_k , Q_k^* , P_k и P_k^* при $k \geq 1$ и повторяет доказательство соответствующей теоремы из работы [3]. При этом используется универсальный метод дифференциальных неравенств (см. [10]).

Замечание 2. Функция F в различных угловых точках не обязательно должна иметь один и тот же вид. Все результаты работ [3]–[9] сохраняются, если в каждой угловой точке функция F имеет один из рассмотренных в этих работах вид.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено описание углового пограничного слоя для задач с кубическими нелинейностями при условии, что граничные значения берутся вплоть до точки перегиба. Основной проблемой было доказательство разрешимости нелинейных краевых задач. В отличие от предыдущих работ это потребовало конструирования более сложных барьерных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения разностного уравнения с малыми шагами в прямоугольной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 12. № 3. 1972. С. 582–597.
2. Бутузов В.Ф., Несторов А.В. Об одном сингулярно возмущенном уравнении параболического типа // Вестн. Московского университета. Сер. 15: Вычисл. матем. и кибернетика. 1978. № 2. С. 49–56.
3. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 57. № 2. 2017. С. 255–274.
4. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 58. № 4. 2018. С. 575–585.
5. Денисов А.И., Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 59. № 1. 2019. С. 102–117.
6. Денисов А.И., Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 59. № 9. 2019. С. 1581–1590.
7. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 61. № 2. 2021. С. 256–267.
8. Денисов И.В. Угловой пограничный слой в краевых задачах с нелинейностями, имеющими стационарные точки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 61. № 11. 2021. С. 1894–1903.
9. Денисов А.И., Денисов И.В. Нелинейный метод угловых пограничных функций в задачах с кубическими нелинейностями // Чебышевский сб. Т. 24. Вып. 1 (88). Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2023.
10. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. ур-ния. Т. 31. № 4. 1995. С. 719–723.

11. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Вышш. школа, 1990.
12. *Amann H.* On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 21. № 2. P. 125–146.
13. *Sattinger D.H.* Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979–1000.
14. *Amann H.* Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. New York etc: Acad press, cop. 1978. XIII. P. 1–29.
15. *Денисов И.В.* Первая краевая задача для линейного параболического уравнения в пространстве \mathbb{R}_+^{n+1} // Дифференц. ур-ния. Т. 34. № 12. 1998. С. 1616–1623.

NONLINEAR METHOD OF ANGULAR BOUNDARY FUNCTIONS UNDER THE INFLUENCE OF THE INFLECTION POINT

A. I. Denisov^{a,*} and I. V. Denisov^a

^a*L. N. Tolstoy Tula State Pedagogical University, Tula, 300026 Russia*

**e-mail: den_tspu@mail.ru*

Received: 10 March 2024

Revised: 10 March 2024

Accepted: 26 September 2024

Abstract. In the rectangle $\Omega = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ the initial boundary value problem for the singularly perturbed parabolic equation

$$\varepsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

is considered. It is assumed that at the angular points $(k, 0)$ of the rectangle Ω , where $k = 0$ or 1 , the function $F(u) = F(u, k, 0, 0)$ takes the form

$$F(u) = u^3 - u_0^3, \quad \text{где } u_0 = u_0(k) < 0.$$

The nonlinear method of angular boundary functions is used to construct the asymptotics of the solution to the problem. Earlier, we considered the case when the boundary value of φ at the angular points is separated from the inflection point $u = 0$ by the condition

$$u_0(k) < \varphi(k) \leq \frac{u_0(k)}{2} < 0,$$

at which functions of the “simplest” form suitable in the entire domain in question fitted to the role of barrier functions. In this work, the case

$$\frac{u_0(k)}{2} < \varphi(k) < 0$$

is considered, where the domain has to be divided into parts, the barrier functions have to be constructed in each subdomain taking into account their continuous junction at the common boundaries of the subdomains, and then the piecewise continuous lower and upper solutions have to be smoothed. As a result, a complete asymptotic expansion of the solution when $\varepsilon \rightarrow 0$ is obtained and its uniformity in the closed rectangle is justified.

Keywords: boundary layer, asymptotic approximation, singularly perturbed equation

УДК 519.642

ТЕОРИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОСОБЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2025 г. Н. С. Габбасов^{1,*}

¹ 423810 Набережные Челны, пр-т Мира, 68/19, Набережночелнинский ин-т Казанского ун-та, Россия
*e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

Поступила в редакцию 22.07.2024 г.

Переработанный вариант 22.07.2024 г.

Принята к публикации 23.08.2024 г.

Исследовано линейное интегродифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложен и обоснован специальный обобщенный вариант метода коллокаций. Библ. 16.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, приближенное решение, прямой метод, теоретическое обоснование.

DOI: 10.31857/S0044466925010058, **EDN:** CDAYGX

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена приближенному решению линейного интегродифференциального уравнения (ИДУ)

$$(Ax)(t) \equiv x^{(q)}(t) \prod_{j=1}^l (t - t_j)^{m_j} + \sum_{j=0}^p \int_{-1}^1 K_j(t, s) x^{(j)}(s) ds = y(t), \quad (1.1)$$

в котором $t \in I \equiv [-1, 1]$, числа $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in N$, $j = \overline{1, l}$, и $q, p \in Z^+$ являются фиксированными; K_j , $j = \overline{0, p}$ и y – известные “гладкие” функции, а x – искомая функция. Исследование таких уравнений представляет несомненный интерес как с точки зрения теории (в частности, ИДУ (1.1) является обобщением ряда классов линейных интегральных уравнений типа Фредгольма), так и приложений. Очевидно, что задача об отыскании решения ИДУ (1.1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, важен вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность данной задачи. При решении этого вопроса вполне естественно учитывать то, что в случае $q = p = 0$ ИДУ (1.1) преобразуется в линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле эти уравнения являются “родственными”). Хорошо известно, что УТР широко применяются в различных областях, в частности, они встречаются в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1; 2, с. 121–129] и приведенную в них библиографию), в теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также в теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщенных функций типа D или V . Под D (соответственно V) понимается пространство обобщенных функций, построенных при помощи функционала “дельта-функция Дирака” (соответственно функционала “конечная часть интеграла по Адамару”). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114]. На основе упомянутой выше связи между ИДУ (1.1) и УТР соответствующие идеи и результаты для УТР можно успешно использовать для корректной постановки задачи решения уравнения (1.1), разработки и теоретического обоснования приближенных методов его решения в пространствах обобщенных функций.

ИДУ (1.1) при $l = 1, t_1 = 0, p = 0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нётера для такого уравнения в классах гладких и обобщенных функций типа D . В статье [8] разработана полная теория разрешимости общего ИДУ вида (1.1) при $p = 0$ в некотором пространстве типа D обобщенных функций. Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближенного решения в пространствах обобщенных функций с соответствующим теоретическим обоснованием.

Определенные результаты в этом направлении получены для ИДУ (1.1) при $p = 0$. Именно, в работах [8–11] предложены и обоснованы прямые проекционные методы его приближенного решения, основанные на применении стандартных и некоторых специальных полиномов, а также сплайнов первого и второго порядков.

В настоящей статье впервые построена полная теория разрешимости ИДУ (1.1) в некотором пространстве типа D обобщенных функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Более того, разработан полиномиальный прямой проекционный метод, специально приспособленный к приближенному решению ИДУ (1.1) в классе обобщенных функций, и дано его обоснование в смысле [12; гл. 1, §1–5]. Именно, доказана теорема существования и единственности решения соответствующего приближенного уравнения, установлены оценки погрешности этого решения и доказана сходимость последовательности приближенных решений к точному решению в пространстве обобщенных функций. Исследованы также вопросы устойчивости и обусловленности аппроксимирующих уравнений.

2. ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C \equiv C(I)$ – банахово пространство всех непрерывных на I функций с обычной max-нормой и $m \in N$. Обозначим через $C\{m; 0\} \equiv C_0^{(m)}(I)$ множество всех функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{(m)}(0)$ порядка m (см., например, [13]). Назовем его классом точечно-гладких функций (естественно считаем, что $C\{0; 0\} \equiv C$). Векторное пространство $C\{m; 0\}$ снабдим нормой

$$\|f\|_{\{m\}} \equiv \|Tf\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} |f^{(i)}(0)|, \quad (2.1)$$

где $T : C\{m; 0\} \rightarrow C$ – “характеристический” оператор класса $C\{m; 0\}$, определяемый следующим образом:

$$Tf \equiv (T^m f)(t) \equiv \left[f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(0) t^i / i! \right] t^{-m} \equiv F(t) \in C, \quad F(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} F(t). \quad (2.2)$$

Справедлива (см., например, [5, с. 12, 14])

Лемма 2.1. *i. Включение $f \in C\{m; 0\}$ эквивалентно выражению*

$$f(t) = t^m F(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i, \quad (2.3)$$

причем $Tf = F \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t = 0$, а $f^{(i)}(0) = \alpha_i i!$, $i = \overline{0, m-1}$.

ii. Пространство $C\{m; 0\}$ по норме (2.1) полно и нормально вложено в пространство C .

Далее, введем следующий класс “точечно-гладких” функций:

$$C\{m, q; 0\} \equiv \{f \in C\{m; 0\} : f^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, q-1}, \quad q \in Z^+, \quad q < m\}.$$

Следовательно, с учетом (2.1)–(2.3) (в них имеем $i = \overline{0, q-1}$) по норме (2.1) пространство $C\{m, q; 0\}$ полно и нормально вложено в C .

Обозначим через $C^{(q)} \equiv C^{(q)}(I)$ векторное пространство q раз непрерывно дифференцируемых на I функций. В силу формулы Тейлора с интегральным остатком ясно, что функция f принадлежит классу $C^{(q)}$ тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$f(t) = (JF)(t) + \sum_{j=0}^{q-1} b_j(t+1)^j, \quad (2.4)$$

где

$$JF \equiv (J_{q-1}F)(t) \equiv ((q-1)!)^{-1} \int_{-1}^t (t-s)^{q-1} F(s) ds, \quad (2.5)$$

причем $D^q f \equiv f^{(q)}(t) = F(t) \in C$, $f^{(j)}(-1) = b_j j!$, $j = \overline{0, q-1}$; при этом $J : C \rightarrow C^{(q)}$, $(JF)^{(j)} = J_{q-1-j}F$, $j = \overline{0, q-1}$, $D^q JF = F$.

В векторном пространстве $C^{(q)}$ определим специальную норму

$$\|f\|_{(q)} \equiv \|D^q f\|_C + \sum_{j=0}^{q-1} |f^{(j)}(-1)|, \quad f \in C^{(q)}. \quad (2.6)$$

Из соотношений (2.4), (2.6) и оценки интеграла (2.5) по max-норме легко следует

Лемма 2.2. *Пространство $C^{(q)}$ с нормой (2.6) полно и вложено в пространство C .*

Следствие 1. Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(q)}}$ в $C^{(q)}$ и (2.6) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d_0 \geq 1$ такая, что

$$\|f\|_{(q)} \leq \|f\|_{C^{(q)}} \leq d_0 \|f\|_{(q)}, \quad \|f\|_{C^{(q)}} \equiv \sum_{i=0}^q \|f^{(i)}\|_C, \quad f \in C^{(q)}.$$

Пусть $C_{-1}^{(q)} \equiv C_{-1}^{(q)}(I) \equiv \{f \in C^{(q)} : f^{(i)}(-1) = 0, \quad i = \overline{0, q-1}\}$ – банаово пространство гладких функций с нормой $\|f\|_{(q)} \equiv \|D^q f\|_C$.

В дальнейших исследованиях нам понадобится еще один класс гладких функций:

$$C_{-1}^{(\lambda), (q)} \equiv C_{-1}^{(\lambda), (q)}(I) \equiv C^{(\lambda)} \cap C_{-1}^{(q)}, \quad \lambda \equiv q + p.$$

В силу (2.4) очевидно, что включение $f \in C_{-1}^{(\lambda), (q)}$ равносильно представлению

$$f(t) = (J_{\lambda-1} f^{(\lambda)}) (t) + \sum_{k=q}^{\lambda-1} f^{(k)}(-1)(t+1)^k / k!. \quad (2.7)$$

Следовательно, на основании леммы 2.2 очевидно, что по норме

$$\|f\|_{(\lambda)} \equiv \|D^\lambda f\|_C + \sum_{k=q}^{\lambda-1} |f^{(k)}(-1)| \quad (2.8)$$

пространство $C_{-1}^{(\lambda), (q)}$ полно и вложено в C . Поэтому обычная норма в $C^{(\lambda)}$ и (2.8) эквивалентны:

$$\|f\|_{(\lambda)} \leq \|f\|_{C^{(\lambda)}} \leq d_1 \|f\|_{(\lambda)}, \quad f \in C_{-1}^{(\lambda), (q)}, \quad d_1 \geq 1. \quad (2.9)$$

Лемма 2.3. Для любой функции $f \in C_{-1}^{(\lambda), (q)}$ справедливо равенство

$$\|f^{(q)}\|_{(p)} = \|f\|_{(\lambda)}. \quad (2.10)$$

Доказательство. В силу (2.7) имеем

$$f^{(q)}(t) = (J_{\lambda-1-q} f^{(\lambda)}) (t) + \left[\sum_{k=q}^{\lambda-1} f^{(k)}(-1)(t+1)^k / k! \right]^{(q)} = (J_{p-1} f^{(\lambda)}) (t) + \sum_{j=0}^{p-1} f^{(q+j)}(-1)(t+1)^j / j!,$$

откуда в силу (2.4)–(2.6) и (2.8) находим

$$\|f^{(q)}\|_{(p)} = \|D^p f^{(q)}\|_C + \sum_{j=0}^{p-1} |f^{(q+j)}(-1)| \equiv \|f\|_{(\lambda)},$$

что и требовалось.

В дальнейшем при исследовании регулярного интегродифференциального оператора понадобится одно важное свойство “точечно-гладких” функций. В этой связи введем в рассмотрение следующий класс “гладких” функций:

$$C_0^{\{n\}, (r)} \equiv C_0^{\{n\}, (r)}(I) \equiv \{\varphi \in C\{n; 0\} : T^n \varphi \in C^{(r)}, \quad r = 0, 1, 2, \dots\},$$

где T^n – “характеристический” оператор класса $C\{n; 0\}$, определенный согласно правилу (2.2). Будем использовать семейство

$$Y_j \equiv C_0^{\{m-q-1+j\}, (j)}, \quad j = \overline{0, p}, \quad q < m,$$

где m, q и p – фиксированные параметры, фигурирующие в ИДУ (1.1) при $l = 1$.

Лемма 2.4. Для любой функции $\varphi \in Y_j$, $j = \overline{0, p}$ имеет место равенство

$$(\varphi^{(j)})^{(k)}(0) = \varphi^{(k+j)}(0), \quad j = \overline{0, p}, \quad k = \overline{0, m-q-1}. \quad (2.11)$$

Доказательство. При $j = 0$ свойство очевидно. В силу структуры (2.3) “точечно-гладкой” функции имеем

$$\varphi(t) = t^{m-q-1+j} \cdot \Phi_j(t) + \sum_{k=0}^{m-q-2+j} a_k t^k, \quad (2.12)$$

где

$$\Phi_j \equiv T^{m-q-1+j} \varphi \in C^{(j)}, \quad \varphi^{[k]}(0) = a_k k!, \quad k = \overline{0, m-q-2+j}, \quad j = \overline{1, p}.$$

Дифференцируя (2.12) последовательно j раз с применением обычной формулы Лейбница, легко получим следующее представление:

$$\varphi^{(j)}(t) = t^{m-q-1} (T^{m-q-1} \varphi^{(j)}) (t) + \sum_{k=0}^{m-q-2} \tau_{k,j} a_{k+j} t^k = t^{m-q-1} [\tau_{m-q-1,j} \Phi_j(t) + g_j(t)] + \sum_{k=0}^{m-q-2} \tau_{k,j} a_{k+j} t^k, \quad (2.13)$$

в котором g_j определенным образом выражается через Φ_j , причем $g_j(t) = o(1)$ при $t \rightarrow 0$, а $\tau_{k,j} \equiv \prod_{l=1}^j (k+l)$, $j = \overline{1, p}$, $\tau_{k,0} \equiv 1$.

Согласно (2.13), (2.3), (2.12) и определению тейлоровской производной (см., например, [5, с. 12]) находим производные соответствующих порядков:

$$(\varphi^{(j)})^{[k]}(0) = \tau_{k,j} a_{k+j} k! = a_{k+j} (k+j)!, \quad k = \overline{0, m-q-2}; \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} (\varphi^{(j)})^{[m-q-1]}(0) &\equiv (m-q-1)! \lim_{t \rightarrow 0} (T^{m-q-1} \varphi^{(j)})(t) = (m-q-1)! \tau_{m-q-1,j} \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_j(t) = \\ &= (m-q-1+j)! \lim_{t \rightarrow 0} \Phi_j(t) \equiv \varphi^{[m-q-1+j]}(0), \quad j = \overline{1, p}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

С другой стороны, в силу (2.12) и (2.3) имеем

$$\varphi^{[k+j]}(0) = a_{k+j} (k+j)!, \quad k = \overline{0, m-q-2}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (2.16)$$

Из (2.14)–(2.16) следует (2.11), что и требовалось.

Построим теперь основное в наших исследованиях пространство:

$$Y \equiv C^{(p)} \{m, q; 0\} \equiv \{y \in C \{m, q; 0\} : Ty \equiv T^m y \in C^{(p)}\}.$$

Зададим в нем норму

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_{(p)} + \sum_{i=q}^{m-1} |y^{[i]}(0)|, \quad y \in Y. \quad (2.17)$$

Лемма 2.5 (см. [14]). i. Включение $\varphi \in Y$ равносильно представлению

$$\varphi(t) = (UJ_{p-1}\Phi)(t) + t^m \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j (t+1)^j + \sum_{i=q}^{m-1} \beta_i t^i, \quad (2.18)$$

причем $D^p T \varphi = \Phi \in C$, $(T\varphi)^{(j)}(-1) = a_j j!$, $j = \overline{0, p-1}$, $\varphi^{[i]}(0) = \beta_i i!$, $i = \overline{q, m-1}$; $Uf \equiv t^m f(t)$, оператор J_{p-1} определен согласно (2.5).

ii. Пространство Y относительно нормы (2.17) полно и вложено в пространство $C \{m, q; 0\}$.

Критерий компактности множеств в пространстве Y устанавливает

Лемма 2.6 (см. [14]). Множество $M \subset Y$ относительно компактно в Y тогда и только тогда, когда: (i) M ограничено; (ii) семейство $D^p T(M)$ непрерывных на I функций равностепенно непрерывно.

Далее над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(\lambda), (q)} \{m; 0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-q-1} \gamma_i \delta^{[i]}(t), \quad (2.19)$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(\lambda), (q)}$, $\lambda \equiv q+p$, $\gamma_i \in R$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{[i]}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее “тейлоровские” производные, действующие на пространстве Y основных функций согласно следующему правилу:

$$(\delta^{[i]}, y) \equiv \int_{-1}^1 \delta^{[i]}(t) y(t) dt \equiv (-1)^i y^{[i]}(0), \quad i = \overline{0, m-q-1}. \quad (2.20)$$

Очевидно, что векторное пространство X является банаховым относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(\lambda)} + \sum_{i=0}^{m-q-1} |\gamma_i|. \quad (2.21)$$

В заключение этого раздела приведем нужное в дальнейшем свойство о “смешанных” производных дельта-функции.

Лемма 2.7. На пространстве Y_j основных функций справедливо равенство

$$(\delta^{\{i\}}(t))^{(j)} = \delta^{\{i+j\}}(t), \quad j = \overline{0, p}, \quad i = \overline{0, m-q-1}. \quad (2.22)$$

Доказательство. Заметим, что (см., например, [15, с. 419]) для любой функции $\varphi \in Y_j$ имеет место соотношение

$$\left((\delta^{\{i\}})^{(j)}, \varphi \right) \equiv (-1)^j (\delta^{\{i\}}, \varphi^{(j)}) \equiv (-1)^{j+i} (\varphi^{(j)})^{\{i\}}(0), \quad j = \overline{0, p}, \quad i = \overline{0, m-q-1}. \quad (2.23)$$

С другой стороны, в силу (2.20) имеем

$$(\delta^{\{i+j\}}, \varphi) \equiv (-1)^{i+j} \varphi^{\{i+j\}}(0), \quad j = \overline{0, p}, \quad i = \overline{0, m-q-1}. \quad (2.24)$$

Следовательно, из (2.23), (2.24) и (2.11) следует требуемое равенство (2.22).

3. ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ИССЛЕДУЕМЫХ ИДУ

Пусть задано ИДУ (1.1). Ради сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать $l = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t), \quad t \in I, \quad (3.1)$$

$$V \equiv UD^q, D^q f \equiv f^{(q)}(t), Ug \equiv t^m g(t), Kx \equiv \sum_{j=0}^p \int_{-1}^1 K_j(t, s) x^{(j)}(s) ds,$$

где $q, p \in Z^+, m \in N, q < m; y \in Y \equiv C^{(p)} \{m, q; 0\}$, K_j – известные ядра, обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} K_j(t, \cdot) &\in Y, \quad K_j(\cdot, s) \in Y_j, \quad \varphi_{jk}(s) \equiv (K_j)_s^{\{k\}}(0, s) \in C, \\ \psi_{ji}(t) &\equiv (K_j)_s^{\{i+j\}}(t, 0) \in Y, \quad j = \overline{0, p}, \quad k = \overline{q, m-1}, \quad i = \overline{0, m-q-1}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

а $x \in X$ – искомый элемент.

Теорема 1. В условиях (3.2) оператор $A : X \rightarrow Y$ фредгольмов.

Доказательство. Предварительно изучим уравнение

$$Vx \equiv t^m x^{(q)}(t) = y(t), \quad y \in Y. \quad (3.3)$$

Покажем, что оператор $V : X \rightarrow Y$ ограничен. В силу (2.19) и (3.3) имеем

$$(D^q x)(t) = (D^q z)(t) + \sum_{i=0}^{m-q-1} \gamma_i \delta^{\{i+q\}}(t) = (D^q z)(t) + \sum_{k=q}^{m-1} \gamma_{k-q} \delta^{\{k\}}(t). \quad (3.4)$$

Тогда, учитывая свойство

$$(t^m \cdot \delta^{\{k\}}(t), \varphi(t)) \equiv (\delta^{\{k\}}, t^m \varphi(t)) \equiv (-1)^k (t^m \cdot \varphi)^{\{k\}}(0) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad \varphi \in C, \quad (3.5)$$

получаем $Vx \equiv UD^q x = UD^q z$, откуда на основании соотношений (2.17), (2.18), (2.21) и (2.10) следует, что

$$\|Vx\|_Y = \|UD^q z\|_Y \equiv \|TUD^q z\|_{(p)} = \|D^q z\|_{(p)} = \|z\|_{(\lambda)} \leq \|x\|_X,$$

т.е. $\|V\| \equiv \|V\|_{X \rightarrow Y} \leq 1$.

Теперь в пространстве $X \equiv D_{-1}^{(\lambda), (q)} \{m; 0\}$ найдем решение уравнения (3.3) и индекс оператора V . Из равенств (3.4) и (3.5) вытекает, что в пространстве X общее решение однородного уравнения $Vx = 0$ имеет вид

$$\tilde{x}(t) \equiv \sum_{i=0}^{m-q-1} \gamma_i \delta^{(i)}(t), \quad \gamma_i \in R;$$

следовательно, $\alpha(V) \equiv \dim \ker V = m - q$. С другой стороны, неоднородное уравнение (3.3) разрешимо в X тогда и только тогда, когда выполнены дополнительные условия $(\delta^{(i)}(t), y) = 0$, $i = q, m - 1$. При их выполнении общее решение уравнения (3.3) представляется формулой

$$x^*(t) = (J_{q-1} Ty)(t) + \sum_{i=0}^{m-q-1} \gamma_i \delta^{(i)}(t), \quad \gamma_i \in R.$$

Это означает, что $\beta(V) \equiv \dim \text{co} \ker V = m - q$. Таким образом, $\text{ind} V \equiv \alpha(V) - \beta(V) = 0$, т.е. оператор $V : X \rightarrow Y$ фредгольмов.

Далее обсудим свойства интегродифференциального оператора K . В силу соотношений (3.1), (3.2), (2.19), (2.22) и (2.20) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{m-q-1} (-1)^{i+j} \gamma_i \psi_{ji}(t). \quad (3.6)$$

Отсюда с учетом условий (3.2) видим, что $Kx \in Y$, $x \in X$.

Прежде чем перейти к оценке образа (3.6) оператора K примем следующие обозначения:

$$d_2 \equiv \max_{j=0,p} \|D_t^p T_t K_j\|_C, \quad d_3 \equiv \max_{j=0,p} \sum_{l=0}^{p-1} \left\| (T_t K_j)_t^{(l)}(-1, s) \right\|_C, \quad d_4 \equiv \max_{j=0,p} \sum_{k=q}^{m-1} \|\varphi_{jk}\|_C, \quad d_5 \equiv \max_{i=0,m-q-1} \sum_{j=0}^p \|\psi_{ji}\|_Y.$$

Тогда, используя определение (2.17), оценку (2.9) и определение (2.21), последовательно находим, что

$$\begin{aligned} \|Kx\|_Y &\leq \|Kz\|_Y + \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{m-q-1} |\gamma_i| \|\psi_{ji}\|_Y \equiv \left\| \sum_j \int_{-1}^1 (D_t^p T_t K_j)(t, s) z^{(j)}(s) ds \right\|_C + \sum_{l=0}^{p-1} \left| \sum_j \int_{-1}^1 (T_t K_j)_t^{(l)}(-1, s) z^{(j)}(s) ds \right| + \\ &+ \sum_{k=q}^{m-1} \left| \sum_j \int_{-1}^1 \varphi_{jk}(s) z^{(j)}(s) ds \right| + \sum_j \sum_i |\gamma_i| \|\psi_{ji}\|_Y \leq 2d_2 d_1 \|z\|_{(\lambda)} + 2d_3 d_1 \|z\|_{(\lambda)} + 2d_4 d_1 \|z\|_{(\lambda)} + d_5 \sum_i |\gamma_i| \leq d_6 \|x\|_X, \\ d_6 &\equiv 2d_1 (d_2 + d_3 + d_4) + d_5. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор K действует из X в Y ограниченно, причем $\|K\| \equiv \|K\|_{X \rightarrow Y} \leq d_6$.

Далее, пусть $L \equiv \{x\} \subset X$ – произвольное ограниченное множество. Рассуждая аналогично случаю интегральных уравнений третьего рода (см. [5, с. 52, 53]), с использованием леммы 2.6 несложно показать, что множество $M \equiv K(L)$ относительно компактно в Y . Другими словами, оператор $K : X \rightarrow Y$ вполне непрерывен. Тогда утверждение теоремы 1 непосредственно следует из того, что возмущение нётерова оператора вполне непрерывным оператором сохраняет нётеровость и не изменяет его индекса.

4. НЕПРЕРЫВНАЯ ОБРАТИМОСТЬ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим ИДУ (3.1), в котором ядра K_j подчинены условиям (3.2), $y \in Y$, а $x \in X$ – искомая обобщенная функция вида (2.19). С учетом соотношений (2.19), (3.4)–(3.6) преобразуем уравнение (3.1) к виду

$$(Az)(t) = y(t) - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i f_i(t), \quad (4.1)$$

где $f_i(t) \equiv \sum_{j=0}^p (-1)^j \psi_{ji}(t)$, $c_i \equiv (-1)^i \gamma_i$, $i = 0, m - q - 1$. Наша задача заключается в нахождении функции $z \in C_{-1}^{(\lambda), (q)}$ и произвольных постоянных c_i .

Лемма 4.1. Пусть выполнены следующие требования:

$$K_j(t, \cdot) \in Y, \quad \varphi_{jk}(s) \equiv (K_j)_t^{[k]}(0, s) \in C, \quad y \in Y, \quad j = \overline{0, p}, \quad k = \overline{q, m-1}.$$

Тогда ИДУ (3.1) $\left(A : C_{-1}^{(\lambda), (q)} \rightarrow Y\right)$ эквивалентно в пространстве $C_{-1}^{(\lambda), (q)}$ ИДУ

$$Bx \equiv (D^q x)(t) + \sum_{j=0}^p \int_{-1}^1 (T_t K_j)(t, s) x^{(j)}(s) ds = (Ty)(t)$$

и соотношениям

$$\sum_{j=0}^p \int_{-1}^1 \varphi_{jk}(s) x^{(j)}(s) ds = y^{[k]}(0), \quad k = \overline{q, m-1}.$$

Доказательство. В силу выражения (2.3) очевидно, что для любой функции $g \in Y$ имеет место эквивалентность:

$$g = 0 \Leftrightarrow Tg = 0, \quad g^{[k]}(0) = 0, \quad k = \overline{q, m-1}. \quad (4.2)$$

Тогда, взяв в (4.2) $g \equiv Ax - y \in Y$, $x \in C_{-1}^{(\lambda), (q)}$, $y \in Y$, убеждаемся в справедливости утверждения леммы.

Из этой леммы следует, что уравнение (4.1) равносильно ИДУ

$$(Bz)(t) = (Ty)(t) - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i (T f_i)(t) \quad (4.3)$$

в пространстве $C_{-1}^{(\lambda), (q)}$ и соотношениям

$$y^{[k]}(0) - \sum_{j=0}^p \int_{-1}^1 \varphi_{jk}(s) z^{(j)}(s) ds - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i f_i^{[k]}(0) = 0, \quad k = \overline{q, m-1}. \quad (4.4)$$

Предварительно подробно изучим ИДУ вида (4.3) с оператором B :

$$(Bz)(t) \equiv z^{(q)}(t) + \sum_{j=0}^p \int_{-1}^1 \mu_j(t, s) z^{(j)}(s) ds = f(t), \quad (4.5)$$

в котором $\mu_j \equiv T_t K_j$, $j = \overline{0, p}$, $f \in C^{(p)}$. Будем использовать подстановку $z^{(q)} \equiv u(t) \in C^{(p)}$. В силу (2.4), (2.5) и определения класса $C_{-1}^{(q)}$ имеем

$$z = J_{q-1} u, \quad z^{(j)} = J_{q-1-j} u, \quad j = \overline{0, q-1}. \quad (4.6)$$

Займемся теперь исследованием оператора

$$Mz \equiv \sum_{j=0}^p \int_{-1}^1 \mu_j(t, s) z^{(j)}(s) ds.$$

Рассмотрим сначала случай $p < q$. Изменяя порядок интегрирования в двойном интеграле, находим, что

$$\begin{aligned} (Mz)(t) &= \sum_j ((q-1-j)!)^{-1} \int_{-1}^1 \mu_j(t, s) \left(\int_{-1}^s (s-\rho)^{q-1-j} u(\rho) d\rho \right) ds = \\ &= \sum_j ((q-1-j)!)^{-1} \int_{-1}^1 u(\rho) \left(\int_{\rho}^1 \mu_j(t, s) (s-\rho)^{q-1-j} ds \right) d\rho. \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае ИДУ (4.5) эквивалентно следующему уравнению Фредгольма второго рода в пространстве $C^{(p)}$:

$$Gu \equiv u(t) + \int_{-1}^1 G_p(t, \rho) u(\rho) d\rho = f(t), \quad (4.7)$$

где

$$G_p(t, \rho) \equiv \sum_{j=0}^p ((q-1-j)!)^{-1} \int_{\rho}^1 \mu_j(t, s)(s-\rho)^{q-1-j} ds. \quad (4.8)$$

При $p \geq q$ с учетом (4.8) имеем

$$\begin{aligned} (Mz)(t) &= \int_{-1}^1 G_{q-1}(t, \rho)u(\rho)d\rho + \sum_{j=q}^p \int_{-1}^1 \mu_j(t, s)u^{(j-q)}(s)ds = \\ &= \int_{-1}^1 G_{q-1} \cdot u(\rho)d\rho + \int_{-1}^1 \mu_q(t, \rho)u(\rho)d\rho + \sum_{k=1}^{p-q} \int_{-1}^1 \mu_{q+k}(t, \rho)u^{(k)}(\rho)d\rho. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Далее введем в рассмотрение ядра:

$$g_k(t, \rho) \equiv \begin{cases} G_{q-1}(t, \rho) + \mu_q(t, \rho) & \text{при } k = 0; \\ \mu_{q+k}(t, \rho), & \text{если } k = \overline{1, p-q}. \end{cases}$$

Тогда с учетом (4.9) ИДУ (4.5) принимает вид

$$Lu \equiv u(t) + \sum_{k=0}^{p-q} \int_{-1}^1 g_k(t, \rho)u^{(k)}(\rho)d\rho = f(t), \quad (4.10)$$

причем $g_k(t, \cdot) \in C^{(p)}$.

Итак, при $p < q$ подстановка $z^{(q)} \equiv u$ равносильным образом приводит ИДУ (4.3) к уравнению второго рода

$$(Gu)(t) = (Ty)(t) - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i (Tf_i)(t). \quad (4.11)$$

Пусть $v = -1$ не является собственным значением уравнения (4.11) (или ядра G_p) и R – разрешающий оператор этого уравнения. Тогда функция

$$u^*(t) \equiv (RTy)(t) - \sum_i c_i (RTf_i)(t)$$

является единственным гладким решением уравнения (4.11). Следовательно,

$$z^*(t) \equiv (J_{q-1}u^*)(t) = (J_{q-1}RTy)(t) - \sum_i c_i (J_{q-1}RTf_i)(t)$$

есть единственное гладкое решение ИДУ (4.3), которое будет решением и исходного уравнения (4.1), если в силу (4.4) постоянные $\{c_i\}$ удовлетворяют квадратной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{i=0}^{m-q-1} c_i (Qf_i)^{(k)}(0) = (Qy)^{(k)}(0), \quad k = \overline{q, m-1}, \quad (4.12)$$

где оператор $Q \equiv E - KJ_{q-1}RT$ отображает Y в Y , а E – единичный оператор в Y .

В случае $p \geq q$, с учетом (4.9) и (4.10), ИДУ (4.3) эквивалентно уравнению Фредгольма II рода

$$(Lu)(t) = (Ty)(t) - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i (Tf_i)(t) \quad (4.13)$$

с разрешающим оператором $\tilde{R} : C^{(p)} \rightarrow C^{(p)}$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

а) ядра K_j , $j = \overline{0, p}$, удовлетворяют требованиям (3.2), а функция $y \in Y$;

б) число $v = -1$ не является собственным значением уравнения (4.11) при $p < q$ (соответственно, уравнения (4.13) в случае $p \geq q$);

в) определитель СЛАУ (4.12) отличен от нуля (при $p \geq q$ роль оператора R играет \tilde{R}).

Тогда для любой правой части $y \in Y$ ИДУ (3.1) имеет единственное обобщенное решение $x^* \in X$, представляемое формулой

$$x^*(t) = (J_{q-1}STy)(t) - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i^* (J_{q-1}STf_i)(t) + \sum_{i=0}^{m-q-1} (-1)^i c_i^* \delta^{(i)}(t),$$

где $S = R$ при $p < q$, $S = \tilde{R}$ в случае $p \geq q$, а $\{c_i^*\}$ – единственное решение СЛАУ вида (4.12).

Следствие 2. В условиях теоремы 2 интегродифференциальный оператор $A : X \rightarrow Y$, определенный равенством (3.1), непрерывно обратим.

5. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ (ОМК)

Пусть задано ИДУ (3.1), в котором ядра K_j , $j = \overline{0, p}$, обладают свойствами (3.2), $y \in Y$, а $x \in X$ – искомый элемент. Его приближенное решение будем искать в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv z_n(t) + \sum_{i=0}^{m-q-1} c_{i+n+\lambda} \delta^{(i)}(t), \quad (5.1)$$

$$z_n(t) \equiv \sum_{i=q}^{n+\lambda-1} c_i t^i, \quad \lambda \equiv q + p, n = 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}$, $j = \overline{q, n+m+p-1}$, найдем, согласно ОМК, из квадратной СЛАУ $(n+m+p-q)$ -го порядка:

$$(D^p T \rho_n)(v_k) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (T \rho_n)^{(j)}(-1) = 0, \quad j = \overline{0, p-1}, \quad \rho_n^{(i)}(0) = 0, \quad i = \overline{q, m-1}, \quad (5.3)$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближенного решения, а $\{v_k\} \subset I$ – система узлов Чебышёва I (или II) рода.

Для вычислительного алгоритма (3.1), (5.1)–(5.3) справедлива

Теорема 3. Пусть однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2), а функции $h_j \equiv D_l^p T_i K_j$ ($no t$), $g_{ji} \equiv D^p T \Psi_{ji}$, $j = \overline{0, p}$, $i = \overline{0, m-q-1}$, и $D^p T y$ принадлежат классу Дими–Липшица. Тогда при всех $n \in N$, $n \geq n_0$, СЛАУ (5.3) обладает единственным решением $\{c_j^*\}$ и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (3.1) по норме пространства X со скоростью

$$\Delta x_n^* = \|x_n^* - x^*\| = O \left\{ \left[\sum_{j=0}^p \left(E_{n-1}^t(h_j) + \sum_{i=0}^{m-q-1} E_{n-1}(g_{ji}) \right) + E_{n-1}(D^p T y) \right] \ln n \right\}, \quad (5.4)$$

где $E_l(f)$ – наилучшее равномерное приближение функции $f \in C$ алгебраическими полиномами степени не выше l , а через $E_l'(\cdot)$ обозначен функционал $E(\cdot)$, примененный по переменной t .

Доказательство. Очевидно, что ИДУ (3.1) представляется в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y, \quad x \in X \equiv D_{-1}^{(\lambda), (q)} \{m; 0\}, \quad y \in Y \equiv C^{(p)} \{m, q; 0\}, \quad (5.5)$$

в котором оператор $A : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим. Систему (5.1)–(5.3) запишем также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства. Именно, через $X_n \subset X$ обозначим $(n+m+p-q)$ -мерное подпространство элементов вида (5.1), а за $Y_n \subset Y$ примем класс $\Pi_q^{n+m+p-1} \equiv \text{span} \{t^i\}_q^{n+m+p-1}$. Далее введем линейный оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m+p-q} : Y \rightarrow Y_n$ согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m+p-q}(y; t) \equiv (U J_{p-1} L_n D^p T y)(t) + \sum_{j=0}^{p-1} (T y)^{(j)}(-1) \frac{t^m (t+1)^j}{j!} + \sum_{i=q}^{m-1} y^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!}, \quad (5.6)$$

где $L_n : C \rightarrow \Pi_0^{n-1} \equiv \Pi_{n-1} \equiv \text{span} \{t^i\}_0^{n-1}$ представляет собой интерполяционный оператор Лагранжа по системе узлов $\{v_k\}_1^n$. Тогда система (5.1)–(5.3) эквивалентна следующему линейному уравнению:

$$A_n x_n \equiv Vx_n + \Gamma_n Kx_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \Gamma_n y \in Y_n. \quad (5.7)$$

В этом нетрудно убедиться, проведя соответствующие рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 3 [8].

Таким образом, для доказательства теоремы 3 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (5.7). В этих целях нам понадобится аппроксимативное свойство оператора Γ_n .

Лемма 5.1. Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \leq d_7 E_{n-1}(D^p T y) \ln n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.8)$$

(здесь и далее d_i ($i = \overline{7, 9}$) – некоторые константы, значения которых не зависят от числа n).

Справедливость данной леммы легко следует из представления (2.18), определений (5.6), (2.17) и оценки (см., например, [12, с. 107]).

$$\|f - L_n f\|_C \leq d_7 E_{n-1}(f) \ln n, \quad f \in C. \quad (5.9)$$

Обсудим теперь вопрос о “близости” операторов A и A_n на подпространстве X_n . Используя уравнения (3.1), (5.7) и оценку (5.8), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n Kx_n\|_Y \leq d_7 E_{n-1}(D^p T Kx_n) \ln n. \quad (5.10)$$

В силу (3.6) и (5.1) имеем

$$(Kx_n)(t) = (Kz_n)(t) + \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{m-q-1} (-1)^{i+j} c_{i+n+\lambda} \psi_{ji}(t).$$

Следовательно,

$$D^p T Kx_n = \sum_{j=0}^p \int_{-1}^1 h_j(t, s) z_n^{(j)}(s) ds + \sum_j \sum_i (-1)^{i+j} c_{i+n+\lambda} g_{ji}(t). \quad (5.11)$$

В целях полиномиального приближения функции $D^p T Kx_n \in C$ построим следующий элемент:

$$(P_{n-1} x_n)(t) \equiv \sum_j \int_{-1}^1 h_{n-1}^j(t, s) z_n^{(j)}(s) ds + \sum_j \sum_i (-1)^{i+j} c_{i+n+\lambda} g_{n-1}^{ji}(t), \quad (5.12)$$

где h_{n-1}^j и g_{n-1}^{ji} – полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для h_j (по t) и g_{ji} соответственно. Согласно структуре (5.12) ясно, что $P_{n-1} x_n \in \Pi_{n-1}$.

На основании выражений (5.11) и (5.12), оценки (2.9) и определения (2.21) последовательно выводим промежуточную оценку:

$$\begin{aligned} E_{n-1}(D^p T Kx_n) &\leq \|D^p T Kx_n - P_{n-1} x_n\|_C \equiv \\ &\equiv \max_{t \in I} \left| \sum_j \int_{-1}^1 (h_j - h_{n-1}^j)(t, s) z_n^{(j)}(s) ds + \sum_j \sum_i (-1)^{i+j} c_{i+n+\lambda} (g_{ji} - g_{n-1}^{ji})(t) \right| \leq \\ &\leq 2\|z_n\|_{C^{(0)}} \sum_j E_{n-1}^t(h_j) + \sum_j \sum_i |c_{i+n+\lambda}| E_{n-1}(g_{ji}) \leq 2d_1 \|z_n\|_{(0)} \sum_j E_{n-1}^t(h_j) + \|x_n\|_X \sum_j \sum_i E_{n-1}(g_{ji}) \leq \\ &\leq 2d_1 \|x_n\|_X \sum_j E_{n-1}^t(h_j) + 2d_1 \|x_n\|_X \sum_j \sum_i E_{n-1}(g_{ji}) = d_8 \left\{ \sum_j \left[E_{n-1}^t(h_j) + \sum_i E_{n-1}(g_{ji}) \right] \right\} \|x_n\|, \quad d_8 \equiv 2d_1. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Из неравенств (5.10) и (5.13) следует искомая оценка “близости” операторов A и A_n :

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq d_9 \left\{ \sum_j \left[E_{n-1}^t(h_j) + \sum_i E_{n-1}(g_{ji}) \right] \right\} \ln n. \quad (5.14)$$

Тогда на основании оценок (5.14) и (5.8) из теоремы 7 (см. [12; гл. 1, §4]) получаем утверждение теоремы 3 с оценкой погрешности (5.4).

Следствие 3. Если функции h_j (по t), g_{ji} и $D^p T y$ принадлежат классу $H_\alpha^r(S)$, то в условиях теоремы 3 верна оценка

$$\Delta x_n^* = O(n^{-r-\alpha} \ln n), \quad r+1 \in N, \alpha \in (0, 1],$$

где

$$H_\alpha^r(S) \equiv \left\{ f \in C^{(r)}(I) : \omega(f^{(r)}; \Delta) \leq S \Delta^\alpha, \quad S \equiv \text{const} > 0 \right\},$$

а $\omega(f; \Delta)$ – модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ , $0 < \Delta \leq 2$.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 1. Согласно определению нормы в пространстве $X \equiv D_{-1}^{(\lambda),(q)}\{m; 0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) приближенных решений к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщенных функций, т.е. слабая сходимость.

Замечание 2. При численном решении операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко вытекает из основной теоремы 3, а именно: если исходные данные h_j, g_{ji} и $D^p T y$ уравнения (3.1) принадлежат классу H_α^r ($0 < \alpha \leq 1$, $r = 0, 1, 2, \dots$), то в условиях теоремы 3 справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-r-\alpha} \ln n)$.

Замечание 3. При $q = 0$ исследуемое ИДУ (3.1) является ИДУ третьего рода с оператором $A : D^{(p)}\{m; 0\} \rightarrow C_0^{(m),(p)}$, а прямой проекционный метод (5.1)–(5.3) – специальным для ИДУ третьего рода вариантом ОМК. Следовательно, теорема 3 содержит в себе известные результаты [16] по обоснованию специального варианта ОМК при приближенном решении уравнений третьего рода в классе обобщенных функций.

Замечание 4. Так как в условиях теоремы 3 аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида $\|A_n^{-1}\| = O(1)$, $A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n$, $n \geq n_1$, то, очевидно (см. [12; гл. 1, §5]), что предложенный в настоящей работе прямой метод для ИДУ (3.1) устойчив относительно малых возмущений исходных данных. Это позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперед заданной степенью точности. Более того, если ИДУ (3.1) хорошо обусловлено, то хорошо обусловленной является также СЛАУ (5.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bart G.R., Warnock R.L. Linear integral equations of the third-kind // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. Кейз К.М., Цвайфель П.Ф. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
3. Бжихатлов Х.Г. Об одной краевой задаче со смещением // Дифференц. ур-ния. 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
4. Расламбеков С.Н. Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. 1983. № 10. С. 51–56.
5. Габбасов Н.С. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. 176 с.
6. Замалиев Р.Р. О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Казань: КФУ, 2012. 114 с.
7. Абдурахман. Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Ростов-на-Дону, 2003. 142 с.
8. Габбасов Н.С. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 7. С. 889–899.
9. Габбасов Н.С. Коллокационные методы для одного класса особых интегродифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2022. Т. 58. № 9. С. 1234–1241.
10. Габбасов Н.С. К приближенному решению одного класса особых интегро-дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 263–272.
11. Габбасов Н.С. Специальный вариант метода коллокации для одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2023. Т. 59. № 4. С. 512–519.
12. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. 232 с.
13. Пресдорф З. Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Матем. исследования. 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
14. Габбасов Н.С. Теория разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций // Дифференц. ур-ния. 1999. Т. 35. № 9. С. 1216–1226.
15. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1071 с.

16. Габбасов Н.С. Прямые методы решения интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 7. С. 904–916.

SOLVABILITY THEORY OF SPECIAL INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE CLASS OF GENERALIZED FUNCTIONS

N. S. Gabbasov^{a,*}

^a*Naberezhnye Chelny Institute of Kazan University, Naberezhnye Chelny, 423810 Russia*

*e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

Received: 22 July 2024

Revised: 22 July 2024

Accepted: 23 August 2024

Abstract. A linear integrodifferential equation with a special differential operator in the principal part is studied. For its approximate solution in the space of generalized functions, a special generalized version of the collocation method is proposed and justified.

Keywords: integrodifferential equation, approximate solution, direct method, theoretical justification

УДК 531.39

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГОМ СЛОЕ, НАХОДЯЩИМСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2025 г. Н. Б. Расулова^{1,*}, М. Б. Расулов^{1,**}

¹AZ1141 Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9, ИММ НАН, Азербайджан

*e-mail: rasulova@gmail.com

**e-mail: mubarizrasulov1950@gmail.com

Поступила в редакцию 02.08.2024 г.

Переработанный вариант 02.08.2024 г.

Принята к публикации 20.09.2024 г.

В статье исследуется интересное явление, обнаруженное во время землетрясений, происходящих в одной местности южной части Азербайджана. С учетом редких особенностей этой части коры Земли, происходящее событие было смоделировано в виде математической задачи динамической теории упругости, которая раскрыла причину исследуемого явления. Библ. 3. Фиг. 3.

Ключевые слова: землетрясение, упругий слой, жидкость, уравнение Ламе.

DOI: 10.31857/S0044466925010065, **EDN:** CCZKEN

1. ВВЕДЕНИЕ

При землетрясениях, как обычно, наблюдаются 2 толчка, следующие друг за другом. Первый из них соответствует типу продольных волн, появляющихся в виде колебательных движений с возрастающей амплитудой в плоскости, параллельной поверхности земли. За ним следует второй, одинарно-мгновенный толчок, по-видимому, соответствующий поверхностным волнам Рэлея, в котором движение направлено вверх, т.е. перпендикулярно поверхности земли.

Нами обнаружено, что при землетрясениях в городе Ленкорань Азербайджанской Республики первого типа волн в виде колебательных движений почти не наблюдается, даже при землетрясениях с высокими магнитудами, одно из которых – пятибалльное – произошло совсем недавно в этой местности.

Пытаясь найти причину, мы обратились к факту особенности структуры земной коры этой местности. А отличается она тем, что здесь очень много колодцев, и уровень подземных грунтовых вод довольно близок к поверхности. Этот уровень колеблется от 3 до 5 метров от поверхности земли.

Учитывая эти особенности и то обстоятельство, что Ленкорань находится между Каспийским морем и Талышскими горами, и, обычно, эпицентры толчков находятся на морском дне, была поставлена задача о нестационарной динамике упругого полубесконечного слоя, нижняя часть которого граничит со сжимаемой идеальной жидкостью (фиг. 1). Движение жидкости считается потенциальным, т.е. безвихревым. Ударному воздействию подвергается некая или вся часть торца слоя.

Для решения этой задачи были использованы некоторые результаты работы [1], посвященной исследованию динамики прямоугольных призм, с позиции точной трехмерной теории эластодинамики. В частности, при выполнении некоторых упрощенных краевых условий, исследуемая трехмерная задача становится двумерной, т.е. получается решение для слоя. Здесь будем использовать именно эти готовые решения для полубесконечного упругого слоя, подверженного действию продольного удара по торцевой области этого же слоя. Но в настоящей задаче, существование граничащих между собой разных типов сред, конечно, намного усложняет процесс решения; получается задача с пятью неизвестными.

Предложен новый метод определения оригиналов от функций-преобразований, которые в настоящей работе имеют очень сложный вид; они представлены через детерминанты пятого ранга. В некотором смысле этот метод является обобщением аналогичного метода, который, с этой же целью, впервые был предложен в [1], а для осесимметричных случаев – в [2].

Получены точные решения, которые справедливы в начальном коротком времени процесса, но дают довольно широкую возможность видения целого процесса и для последующих времен. Результаты с высокой точностью подтверждают верность определения причин отсутствия первого типа толчков на поверхности земной коры при землетрясениях.



Фиг. 1.

2. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Учитывая расположенность города Ленкорань Азербайджанской Республики, рассматриваемая задача моделируется следующим образом.

Упругий полубесконечный слой, толщиной $2a$, находится на поверхности идеальной сжимаемой жидкой области бесконечной глубины. (см. фиг. 1). На границе жидкой области $z = 0$ принято существование непроницаемой стенки. Предполагается, что удар наносится по торцевой области слоя, и движение жидкости считается потенциальным. При этих условиях, поставленная задача может быть сформулирована следующей начально-краевой задачей для данной конструкции, состоящей из двух разных сред.

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(u, w), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u &= w = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \sigma_0 f(t), \quad u = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{xz} = 0 \quad \text{при } x = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать, что $f(t) = H(t)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда.

На границе жидкой области и слоя имеют место следующие условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\rho_* \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{при } x = -2a, \\ \sigma_{xz} &= 0 \quad \text{при } x = -2a, \\ \dot{u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (5)$$

и уравнение, описывающее движение жидкой области, следующее:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{a_*^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Здесь $\mathbf{U} = \mathbf{U}(u, w)$ — вектор перемещения упругого слоя, λ и μ коэффициенты Ламе, a_* — скорость распространения звуковых волн в жидкой среде, движение которой описывается потенциальной функцией — φ , ρ , ρ_* — соответственно, плотности слоя и жидкости, t — время.

Для решения этой системы будет применен аналогичный метод, который разработан и использован в [1]. Благодаря этому методу, система уравнений Ламе, сводится к простейшей системе неоднородных уравнений Гельмгольца, в правой части которых присутствуют краевые функции ударных нагрузок. Этот метод предусматривает применение двукратных интегральных преобразований, наряду с методом замены отыскиваемых

функций, что приводит к вышеупомянутому прекрасному результату. Но этот факт еще не избавляет нас от той сложности, которая связана с переходом от преобразований к оригиналам. И для преодоления этих трудностей, там же предложен наиболее универсальный способ для нахождения аналогичных оригиналов двукратных интегральных преобразований.

Итак, используя готовые уравнения этой работы для двумерного движения, после несложных выкладок в отношении уравнения движения жидкой части этой конструкции можно получить следующую алгебраическую систему линейных уравнений для определения пяти неизвестных постоянных, фигурирующих в составе новых потенциальных функций:

$$\begin{Bmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ A_{01} \\ A_{02} \\ g_0 \end{Bmatrix} \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega q^2 \\ 0 \\ \Omega q^2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{где } \Omega = -\frac{f(p) \sigma_0}{(\lambda + 2\mu) v_1^2 q}. \quad (6)$$

Здесь $\{D\} = \{a_{ik}\} e^{2av_1} e^{2av_2}$, $\{D\}$ — матрица 5-го ранга

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2qv_1, \\ a_{21} &= \left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right) v_1^2 - q^2, \\ a_{31} &= 2qv_1 e^{-2av_1}, \\ a_{41} &= \left[\left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right) v_1^2 - q^2\right] e^{-2av_1}, \\ a_{51} &= p v_1 e^{-2av_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= -2qv_1 e^{-2av_1}, \\ a_{22} &= \left[\left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right) v_1^2 - q^2\right] e^{-2av_1}, \\ a_{32} &= -2qv_1, \\ a_{42} &= \left(\left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right) v_1^2 - q^2\right), \\ a_{52} &= p v_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= -(q^2 + v_2^2) v_2, \\ a_{23} &= \frac{2\mu}{\lambda} q v_2^2, \\ a_{33} &= (q^2 + v_2^2) v_2 \times e^{-2av_2}, \\ a_{43} &= \frac{2\mu}{\lambda} q v_2^2 e^{-2av_2}, \\ a_{53} &= p q v_2 e^{-2av_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{14} &= (q^2 + v_2^2) v_2 e^{-2av_2}, \\ a_{24} &= -\frac{2\mu}{\lambda} q v_2^2 e^{-2av_2}, \\ a_{34} &= (q^2 + v_2^2) v_2, \\ a_{44} &= -\frac{2\mu}{\lambda} q v_2^2, \\ a_{54} &= p q v_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{15} &= 0, \\ a_{25} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{35} &= 0, \\ a_{45} &= -\rho_* \frac{p}{\lambda} e^{-2av_*}, \\ a_{55} &= v_* e^{-2av_*}. \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$v_k = \sqrt{\left(\frac{p^2}{c_k^2} + q^2\right)}, \quad k = 1, 2, \quad \text{и} \quad v_* = \sqrt{\left(\frac{p^2}{c_*^2} + q^2\right)}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

являются скоростями распространения продольных и поперечных волн в материале слоя.

Видоизменим $\{D\}$ следующим образом:

$$\{D\} = e^{-2av_*} \{D_0\}.$$

Тогда в новой матрице $\{D_0\}$ будут фигурировать только минусовые степени e^{-2av_k} ($k = 1, 2$).

Преобразование продольной скорости на свободной поверхности слоя при $x = 0$, согласно [1], и при вы-бранный координатной системе (фиг.1) выражается следующей формулой:

$$\tilde{W} = -\frac{\sigma_0}{(\lambda + 2\mu) v_1^2} + C_{01}q + C_{02}q - v_2^2 A_{01} - v_2^2 A_{02}. \quad (7)$$

Таким образом, в переменных параметрах преобразований решение определено полностью. Но оно выражено через детерминанты 5-го ранга, и, поэтому, нахождение оригиналов обычными способами почти невозможно. В таких случаях уместно применить метод, основанный в [1]. Принцип, на котором базируется данный метод, становится более актуальным, когда мы имеем дело с очень сложными функциями-преобразованиями.

Прежде всего, согласно вышеупомянутому методу, чтобы определить поведение преобразований в бесконечности, когда $p \rightarrow \infty$, необходимо их разложить в сходящиеся ряды по функциям $1/v_1^n$. Именно в этом случае, каждый член этого ряда окажется функцией-преобразованием для оригиналов и по Лапласу, и по Фурье.

Сначала возьмем основной детерминант $\{D_0\}$ и видоизменим его следующим образом: поставим 0 в тех местах, где фигурирует выражение e^{-2av_k} ($k = 1, 2$) так как все слагаемые с участием этих членов, образующихся при раскрытии этого детерминанта, в сумме быстрее приближаются к нулю, чем любая степень v_1^{-n} .

В таком случае выражение для $\{D_0\}$ заметно упрощается — у него остается только восемь членов из общей суммы. Из этих 8-и членов сохраним тот член, который в бесконечности $p \rightarrow \infty$ имеет наибольшую степень:

$$|D_0| \approx -\Omega q^2 a_{21} a_{13} a_{34} \cdot (a_{55} a_{42} - a_{45} a_{52}).$$

Тем же способом определим главные члены и других детерминантов $|D_n| \cdot e^{-2av_*}$ ($n = 1, 2, 3, 4$), образующихся из системы (6), согласно правилу Крамера для определения постоянных $C_{01}, C_{02}, A_{01}, A_{02}$:

$$\begin{aligned} |D_1| &\approx -\Omega q^2 \cdot a_{13} \cdot a_{34} \cdot (a_{55} a_{42} - a_{45} a_{52}) \cdot e^{2av_1} \cdot e^{2av_2}, \\ |D_2| &\approx -\Omega q^2 \cdot a_{13} \cdot a_{34} \cdot a_{55} \cdot e^{2av_2}, \\ |D_3| &\approx -\Omega q^2 \cdot a_{11} \cdot a_{34} \cdot (a_{55} a_{42} - a_{45} a_{52}) \cdot e^{2av_1} \cdot e^{2av_2}, \\ |D_4| &\approx -\Omega q^2 \cdot a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{55} \cdot e^{2av_1}. \end{aligned}$$

Для коротких промежутков времени, в течение которых действует ударная нагрузка, поведение отношений $\frac{D_k}{D_0}$, $k = 1, 2, 3, 4$, в бесконечности, конечно, будет определяться, в основном, из отношений этих же членов наивысшей степени. Тогда получим

$$C_{01} = \frac{\Omega q^2}{a_{21}}, \quad C_{02} = \frac{\Omega q^2 \cdot a_{55} \cdot e^{-2av_1}}{(a_{55} \cdot a_{42} - a_{45} \cdot a_{52})}, \quad A_{01} = \frac{\Omega q^2 \cdot a_{11}}{a_{21} \cdot a_{13}}, \quad A_{02} = -\frac{\Omega q^2 \cdot a_{32} \cdot a_{55} \cdot e^{-2av_2}}{a_{34} \cdot (a_{55} \cdot a_{42} - a_{45} \cdot a_{52})}. \quad (8)$$

Поставив значения этих постоянных в формулы (7), получим выражение искомого решения в параметрах преобразований. Используя существующий аналитический метод [3], легко можно определить двукратные оригиналы этих преобразований.

Отдельно определим оригиналы первого, второго и четвертого члена в сумме правой части (7):

$$1) -\frac{\sigma_0}{(\lambda + 2\mu) \cdot v_1^2} \leftrightarrow -\frac{\sigma_0 \cdot c_1}{(\lambda + 2\mu)} H\left(t - \frac{z}{c_1}\right); \quad (9)$$

$$2) C_{01}q = \frac{\Omega q^3}{a_{21}} = -\frac{\sigma_0 q^2}{(\lambda + 2\mu)v_1^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right)v_1^2 - q^2} = -\frac{\sigma_0 \cdot c_1^2}{(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{H\left(t - \frac{z}{\sqrt{2}c_2}\right)}{\sqrt{2}c_2} - \frac{H\left(t - \frac{z}{c_1}\right)}{c_1} \right], \quad (10)$$

$$3) -v_2^2 A_{01} = -v_2^2 \cdot \frac{\Omega q^2 \cdot a_{11}}{a_{21} \cdot a_{13}} = \frac{\sigma_0 v_2^2}{(\lambda + 2\mu)v_1^2} \cdot \frac{2q^2 v_1}{\left[\left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right)v_1^2 - q^2\right] \cdot [(q^2 + v_2^2)v_2]} \leftrightarrow \frac{\sigma_0 \cdot (c_1^2 - 2c_2^2)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{c_1}{c_2} \frac{H\left(t - \frac{z}{\sqrt{2}c_2}\right)}{\sqrt{2}c_2}. \quad (11)$$

Заметим, что в последней формуле использовано очевидное приближение

$$\frac{v_2}{v_1} \approx \frac{c_1}{c_2} \quad \text{при } p \rightarrow \infty.$$

Как видно из этих формул, сумма их тождественно равна нулю для соотношения $c_1 = 2c_2$, которое справедливо для значения коэффициента Пуассона $v = \frac{1}{3}$, и что для большинства материалов эта величина имеет как раз это значение.

Это необыкновенно интересный результат, подтверждающий высокую точность определения причины исследуемого явления, так как основной тон в формировании продольных движений на поверхности слоя задают именно эти компоненты. Остальные два компонента в (7) представляют дифракционные волны, пришедшие с низшей стороны, контактирующей с жидкостью. Они незначительны, и не в силах изменить волновую картину, сложившуюся от выше построенных решений. Тем не менее, внизу приводим готовые решения и графики распределений для последующих значений времени, продольных скоростей на верхней границе слоя, соответствующие каждой волне отдельно.

Сперва рассмотрим продольные дифракционные волны, отразившиеся с низшей стороны слоя. Из формул (7), (8) и из выражений компонентов основного детерминанта (*) можно легко определить математическое выражение этой волны. Оно следующее:

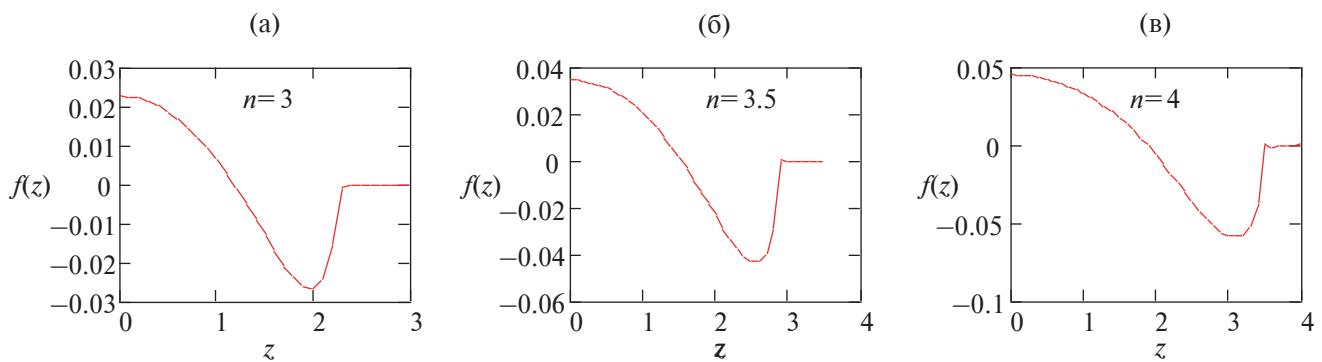
$$\hat{W}_{\text{прод.}} = C_{02}q = \frac{\Omega q^3 \cdot a_{55} \cdot e^{-2av_1}}{(a_{55} \cdot a_{42} - a_{45} \cdot a_{52})} = \frac{\sigma_0 \cdot c_1}{(\lambda + 2\mu)} \frac{c_1 \cdot (c_1^2 - 2c_2^2)q^2 e^{-2av_1}}{v_1^2 \cdot \left(p^2 \left(1 + \frac{\rho_*}{\rho} \cdot \frac{a_*}{c_1}\right) + 2 \cdot c_2^2 q^2\right)}. \quad (12)$$

Пусть $\frac{\rho_*}{\rho} \cdot \frac{a_*}{c_1} = \alpha$, тогда обратное преобразование по Лапласу формулы (12), может представляться в следующем виде:

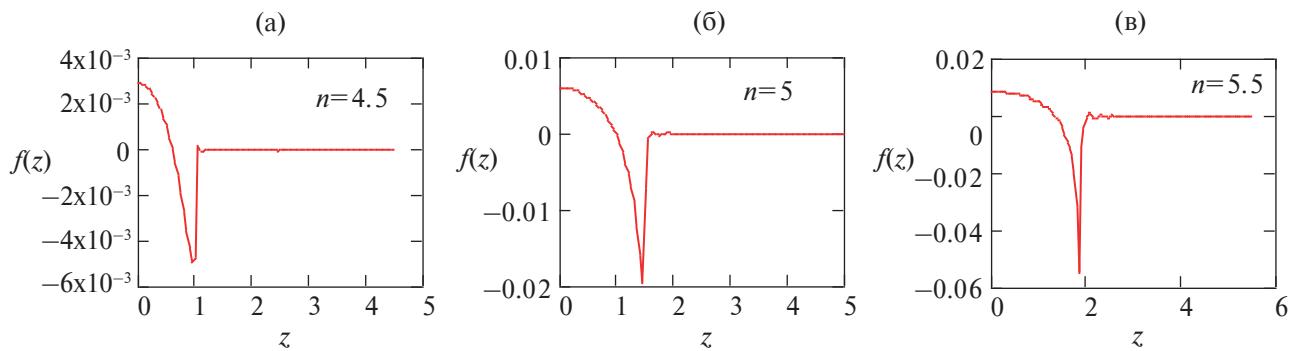
$$\hat{W}_{\text{прод.}} = \frac{0.5}{(1 + \alpha)} \int_2^t \left(\int_2^{\tau_1} \left(J_0(q(\tau_1 - \tau)) \right) \left(J_0(q\sqrt{\tau^2 - 4}) \right) d\tau \right) q \sin \left(0.5\sqrt{2\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}q(t - \tau_1) \right) d\tau_1.$$

Отметим лишь, что для получения этой формулы были использованы теоремы Эфрос, теоремы о свертках и таблицы, приведенные в [3]. Теперь, совершив обратное преобразование по Фурье-косинус, можно привести графики продольной скорости на верхней поверхности слоя.

Расчет произведен для $v = \frac{1}{3}$ и для следующих значений времени $t = \frac{a}{c_1}n$, и для безразмерной продольной скорости $\hat{W}_{\text{прод.}} = \frac{\hat{W}_{\text{прод.}}}{\frac{\sigma_0 \cdot c_1}{(\lambda + 2\mu)}}$.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Первая дифракционная волна пересечет эту поверхность при $n = 2$.

Теперь вычислим соответствующий безразмерный компонент дифракционной поперечной волны, которая пересечет верхний слой в моменте $n = 4$. Тогда получим

$$\dot{W}_{\text{попер.}} = -v_2^2 A_{02} = v_2^2 \frac{\Omega q^2 a_{32} a_{55} e^{-2av_2}}{a_{34}(a_{55}a_{42} - a_{45} \cdot a_{52})} = \frac{\sigma_0 c_1}{(\lambda + 2\mu)} \frac{(c_1^2 - 2c_2^2)^2 q^2 e^{-2av_2}}{c_2(p^2 + 2c_2^2) \left(p^2 \left(1 + \frac{\rho_*}{\rho} \cdot \frac{a_*}{c_1} \right) + 2c_2^2 q^2 \right)},$$

$$\dot{\tilde{W}}_{\text{попер.}} = -\frac{1}{2\alpha(1+\alpha)} \int_4^t \left(\cos\left(\frac{q}{2}(\tau-4)\right) - \cos\left(\frac{q}{2\sqrt{1+\alpha}}(\tau-4)\right) \right) \cdot J_0\left(\frac{q}{2}\sqrt{t^2-\tau^2}\right) d\tau.$$

Как видно из этих графиков, их значения достаточно малы; они меньше, чем сотовая часть значения каждой волны (9)–(11), которая образуется на верхней границе слоя. Естественно, они не могут вызвать ощущимых колебаний. Следует отметить еще один интересный факт: в этих составляющих, движение вдоль направления удара быстро меняет знак в обратный, как это показывают графики.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученный результат позволяет сформулировать следующие интересное заключение: верхний слой объектов, находящихся на поверхности жидкости, почти не испытывает продольной нагрузки удара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rassoulova N.B.* On dynamics of bar of rectangular cross section // Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics. 2001. V. 68 № 4. P. 662–666.
2. *Rassoulova N.B., Mirzoyeva G.R.* A method for solving dynamic problems for cylindrical domains // Trans. of NAS of Azerbaijan, Issue Mechanics. 2015. V. 35 № 7. P. 68–75.
3. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционные исчисления. М.: Физматгиз, 1961.

STUDYING DYNAMIC PROCESSES IN AN ELASTIC LAYER ON THE SURFACE OF A COMPRESSIBLE FLUID

N. B. Rasulova^{a,*} and M. B. Rasulov^{a,**}

^a*Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences, Baku, AZ1141 Azerbaijan*

*e-mail: rasulova@gmail.com

**e-mail: mubarizrasulov1950@gmail.com

Received: 02 August 2024

Revised: 02 August 2024

Accepted: 20 September 2024

Abstract. An interesting phenomenon discovered during earthquakes occurring in one area of the southern part of Azerbaijan is studied. Taking into account the rare features of this part of the Earth's crust, the occurring event was modeled in the form of a mathematical problem of the dynamic theory of elasticity, which revealed the cause of the phenomenon involved.

Keywords: earthquake, elastic layer, fluid, Lame equation

УДК 517.987.1

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА–КАЦА ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

© 2025 г. Ю.Н. Орлов^{1,*}, В.Ж. Сакбаев^{2,**}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

² 119991 Москва, ул. Губкина, 8, МИ им. В.А. Стеклова РАН, Россия

*e-mail: ov3159@yandex.ru

**e-mail: fumi2003@mail.ru

Поступила в редакцию 22.08.2024 г.

Переработанный вариант 29.09.2024 г.

Принята к публикации 30.09.2024 г.

Построено и исследовано биективное отображение пространства операторнозначных функций в множество комплекснозначных конечных аддитивных цилиндрических мер на пространстве траекторий. Установлены условия при которых задача Коши для уравнения первого порядка с переменным оператором генерирует двухпараметрическое эволюционное семейство операторов. Получено представление решения задачи Коши с переменным возмущенным генератором с помощью континуального интеграла от определяемого возмущением функционала на пространстве траекторий по цилиндрической псевдомере, определяемой невозмущенным двухпараметрическим эволюционным семейством операторов. Библ. 13.

Ключевые слова: эволюционное семейство операторов, однопараметрическая полугруппа, конечно-аддитивная мера, марковский процесс, теорема Чернова, формула Фейнмана–Каца.

DOI: 10.31857/S0044466925010077, EDN: CCYPJK

1. ВВЕДЕНИЕ

Решения эволюционных линейных дифференциальных уравнений с независящими от времени коэффициентами представляются C_0 -полугруппами линейных операторов, а в случае переменных коэффициентов – эволюционными двухпараметрическими семействами операторов [1, 2]. В работах [3–5] разрабатываются методы представления однопараметрических эволюционных полугрупп математическими ожиданиями функционалов от случайных процессов, а в работах [6–8] полугруппы представляются функциональными интегралами по пространству траекторий процессов. Методы континуального интегрирования в [9] и методы итераций Фейнмана–Чернова в [10] применяются к построению аппроксимаций решений эволюционных уравнений и анализу сходимости таких аппроксимаций.

Конструкция континуального интеграла, описывающего возмущенную полугруппу, была рассмотрена в работе [11] для случая, когда эволюционное уравнение имеет независящие от времени коэффициенты и эволюционные семейства операторов являются однопараметрическими полугруппами. Там же получена формула Фейнмана–Каца, позволяющая выразить возмущенную полугруппу с помощью континуального интеграла от зависящего от возмущения функционала на пространстве траекторий по цилиндрической псевдомере, определяемой невозмущенной полугруппой. Цилиндрическая псевдомера отличается от цилиндрической меры, заданной на классе всех борелевских цилиндров, областью определения, порожденной классом цилиндров с базой из некоторой (возможно, меньшей, чем борелевская) алгебры подмножеств координатного пространства. Иногда для краткости такие псевдомеры будем называть *мерами*.

В рамках изучаемого в настоящей статье метода обобщенный случайный процесс со значениями в некотором измеримом пространстве (E, \mathcal{A}) отождествляется с марковской цилиндрической псевдомерой, заданной на алгебре цилиндрических множеств \mathcal{A}_{Cyl} в пространстве отображений временного промежутка $T = \mathbb{R}_+$ процесса в измеримое пространство $(E, \mathcal{A}(\mathcal{R}))$ его значений (см. [11]). Построено биективное отображение V множества марковских комплекснозначных конечно-аддитивных мер, заданных на цилиндрической алгебре \mathcal{A}_{Cyl} ,

¹⁾Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ. Разделы 2, 3, 4 работы выполнены Ю.Н. Орловым, а разделы 5 и 6 – В.Ж. Сакбаевым. Исследование В.Ж. Сакбаева выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект 24-11-00039 в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН).

на множество двухпараметрических эволюционных семейств линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $L_2(E)$ функций, квадратично интегрируемых по мере Лебега на пространстве значений случайного процесса E . Марковское свойство цилиндрической меры (точное определение см. ниже) состоит в том, что значение меры на всей совокупности цилиндрических множеств (а значит, и на алгебре \mathcal{A}_{Cyl}) определяется сужением меры на совокупность цилиндрических множеств с двухвременными цилиндрическими условиями.

В настоящей работе получено обобщение конструкции континуального интеграла Фейнмана на случай эволюционных уравнений с переменными операторными коэффициентами, порождающими двухпараметрические эволюционные семейства операторов (см. [1, 2]). Метод построения формул Фейнмана–Каца для решения уравнения Шредингера с переменным генератором впервые предложен, насколько нам известно, в [12]. Условия применимости построенного обобщения расширяют возможности аппроксимации формулами Фейнмана–Каца решений эволюционных уравнений с переменными генераторами. Получена формула Фейнмана–Каца, выражающая возмущенное двухпараметрическое эволюционное семейство операторов с помощью континуального интеграла от зависящего от нестационарного возмущения функционала на пространстве траекторий по цилиндрической мере, являющейся образом действия биекции V^{-1} на невозмущенное эволюционное семейство операторов.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей работе будет построено обобщение представления однопараметрических полугрупп с помощью цилиндрических мер на случай двухпараметрических эволюционных семейств операторов, разрешающих дифференциальные уравнения с зависящими от времени коэффициентами. Для реализации этой цели нам потребуется ввести определения, описывающие операторнозначные функции, меры на пространстве траекторий и свойства этих объектов. Также будет кратко изложена теория, описывающая связь однопараметрических семейств операторов с цилиндрическими мерами на пространстве траекторий.

Пусть $E = \mathbb{R}^d$ при некотором $d \in \mathbb{N}$ – конечномерное евклидово пространство, снабженное мерой Лебега; $H = L_2(E)$ – гильбертово пространство функций на E , квадратично интегрируемых по мере Лебега; и пусть $B(H)$ – банахово пространство ограниченных линейных операторов, действующих в H .

Пусть \mathcal{R} есть σ -кольцо ограниченных борелевских множеств пространства E и \mathcal{A}_R – порожденная этим кольцом σ -алгебра. Пусть $M(\mathbb{R}_+, E)$ – линейное отображение временной полуоси \mathbb{R}_+ в пространство E , называемое пространством траекторий, и пусть \mathcal{A}_{Cyl} – алгебра цилиндрических множеств в пространстве траекторий, т.е. алгебра, порожденная полулгеброй Cyl (см. [8]) цилиндрических множеств вида

$$C_B^t = C_{B_1, \dots, B_n}^{t_1, \dots, t_n} = \{x \in M(\mathbb{R}_+, E) : x(t_j) \in B_j, \quad j = 1, \dots, n\}, \quad (1)$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}_R, \quad 0 \leq t_1 < \dots < t_n < +\infty.$$

Множество $t = \{t_1, \dots, t_n\}$ называется набором временных индексов цилиндрического множества (1), а множество $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ – базой цилиндрического множества.

Через $\mathcal{A}_m(H)$ обозначим абелеву алгебру операторов умножения на функцию, принадлежащую банахову пространству $L_\infty(E)$ измеримых ограниченных функций $E \rightarrow \mathbb{C}$. Символом $M(\mathbb{R}_+, B(H))$ обозначим линейное пространство отображений полуоси \mathbb{R}_+ в пространство $B(H)$ и положим

$$\mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) = \{\mathbf{F} \in M(\mathbb{R}_+, B(H)) : \mathbf{F}(0) \in \mathcal{A}_m(H)\}.$$

Обозначим через $a(\mathcal{A}_{Cyl})$ линейное пространство комплекснозначных аддитивных функций множества (конечно-аддитивных мер), заданных на алгебре \mathcal{A}_{Cyl} .

Определим отображение

$$\Lambda : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \rightarrow a(\mathcal{A}_{Cyl}), \quad \Lambda(\mathbf{F}) = \mu^\mathbf{F}, \quad \text{Im } \Lambda = a_\Lambda(\mathcal{A}_{Cyl}),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$\mu^\mathbf{F}(C_B^t) = (\chi_{B_n}, \mathbf{F}(t_n - t_{n-1}) \mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{F}(t_1 - t_0) \chi_{B_0}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad B_i \in \mathcal{R}, \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (2)$$

Так как $\mathbf{F}(0) \in \mathcal{A}_m$, то $\mathbf{F}(0)(\bullet) = f(x)(\bullet)$, где $f \in L_\infty(E)$. Поэтому для $n = 0$ и для произвольного $t_0 \geq 0$ положим:

$$\mu^\mathbf{F}(C_B^{t_0}) = \begin{cases} (\chi_B, \mathbf{F}(0)\chi_B) = \int_B f(x) d\lambda(x), & B \in \mathcal{R}, \\ M_0 - \int_{E \setminus B} f(x) d\lambda(x), & B \in \mathcal{A}(\mathcal{R}), \quad B \notin \mathcal{R}, \end{cases} \quad (3)$$

где $M_0 \in \mathbb{C}$ – некоторая фиксированная константа и $\mu^F(\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, E)) = M_0$ (см. [13]).

Пусть $C_B^t \in Cyl$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ – максимальный номер среди тех, которые соответствуют множествам в базе $B = \{B_1, \dots, B_n\}$, не лежащим в кольце \mathcal{R} . Тогда из условия аддитивности функции μ^F на алгебре $a(\mathcal{A}_{Cyl})$ следует равество

$$\begin{aligned} & \mu^F(C_{B_0, \dots, B_{m-1}, B_m, B_{m+1}, \dots, B_n}^{t_0, \dots, t_{m-1}, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}) = \\ & = \mu^F(C_{B_0, \dots, B_{m-1}, B_{m+1}, \dots, B_n}^{t_0, \dots, t_{m-1}, t_m}) - \mu^F(C_{B_0, \dots, B_{m-1}, E \setminus B_m, B_{m+1}, \dots, B_n}^{t_0, \dots, t_{m-1}, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}). \end{aligned} \quad (4)$$

Условие (4) позволяет продолжить функцию множества μ^F , заданную равенствами (2)–(3), на всю алгебру $a(\mathcal{A}_{Cyl})$.

Теорема 1 (см. [8]). Для каждого отображения $F \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$ существует единственная мера $\Lambda(F) \in a(\mathcal{A}_{Cyl})$, удовлетворяющая условиям (2), (3).

Отображение

$$\Lambda : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \rightarrow a(\mathcal{A}_{Cyl})$$

инъективно.

Определение 1 (см. [8]). Мера $\mu \in a(\mathcal{A}_{Cyl})$ называется стационарной, если $\mu(C_{B_0, \dots, B_n}^{t_0+s, \dots, t_n+s}) = \mu(C_{B_0, \dots, B_n}^{t_0, \dots, t_n}) \quad \forall s \geq 0$, $\forall C_{B_0, \dots, B_n}^{t_0, \dots, t_n} \in Cyl$.

Каждая цилиндрическая мера μ задает семейство функций

$$\{\beta_{\mu; B_1, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_n}, \quad B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{A}_R, \quad 0 \leq t_0 < \dots < t_n < +\infty\},$$

сопоставляющих каждой упорядоченной паре $\chi_{B_0}, \chi_{B_n}, B_0, B_n \in \mathcal{R}$ комплексное число с помощью равенства:

$$\beta_{\mu; B_1, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_n}(\chi_{B_0}, \chi_{B_n}) = \mu(C_B^t), \quad C_B^t \in Cyl. \quad (5)$$

Определение 2 (см. [13]). Цилиндрическая мера $\mu \in a(\mathcal{A}_{Cyl})$ называется непрерывной по базе, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t_0 \leq \dots \leq t_n \in \mathbb{R}_+, \quad \exists M \in (0, +\infty) : \quad \forall B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{R}),$$

$$\sup_{u, v \in S(\mathcal{R}): \|u\|_H = \|v\|_H} |\beta_{\mu; B_1, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_n}(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H. \quad (6)$$

Пусть $a^J(\mathcal{A}_{Cyl})$ – линейное подпространство пространства мер $a(\mathcal{A}_{Cyl})$, удовлетворяющих условию J , где $J \in \{S, Bc\}; a^{S, Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}) = a^S(\mathcal{A}_{Cyl}) \cap a^{Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$.

Лемма 1. Если $\mu \in a^{Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$, то функция (5) допускает единственное продолжение до ограниченной полуторалинейной формы на пространстве H :

$$(g, U_{\mu; B_1, \dots, B_{n-1}}^{t_0, \dots, t_n} f) = \beta_{\mu; B_1, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_n}(f, g), \quad f, g \in H.$$

Доказательство. Функция (5) продолжается до полуторалинейной формы на линейной оболочке индикаторных функций кольца \mathcal{R} в силу требованияния полуторалинейности. Полученная полуторалинейная форма является непрерывной относительно нормы $\|\cdot\|_{L_2(E)}$ в силу непрерывности по базе (6) меры μ . Так как $\text{span}(\chi_B, B \in \mathcal{R})$ – плотное в пространстве H линейное многообразие, то непрерывная на нем полуторалинейная форма однозначно продолжается по непрерывности до непрерывной полуторалинейной формы на пространстве H .

Теорема 2 (см. [8]). На линейном пространстве $a^{S, Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$ существует линейное отображение $\mathbf{V} : a^{S, Bc}(\mathcal{A}_{Cyl}) \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$, определяемое условиями

$$\forall t > 0 (\chi_{B_1}, (\mathbf{V}(\mu))(t)\chi_{B_0})_H = \mu(A_{B_0, B_1}^{0, t}), \quad \forall B_0, B_1 \in \mathcal{R}; \quad (7)$$

$$(\chi_{B_0}, (\mathbf{V}(\mu))(0)\chi_{B_0})_H = \mu(A_{B_0}^0) \quad \forall B_0 \in \mathcal{R}. \quad (8)$$

В линейном пространстве $a^{S, Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$ выделим класс мер, сужение на который линейного отображения \mathbf{V} инъективно.

Определение 3 (см. [8]). Мера $\mu \in a^{Bc}(\mathcal{A}_{Cyl})$ называется марковской, если

$$U_{\mu; B_{m+1}, \dots, B_{n-1}}^{t_m, \dots, t_{n-1}, t_n} P_{B_m} U_{\mu; B_1, \dots, B_{m-1}}^{t_0, \dots, t_{m-1}, t_m} = U_{\mu; B_1, \dots, B_{n-1}}^{t_0, \dots, t_n} \quad (9)$$

$$\forall t_0, \dots, t_n : 0 \leq t_0 < \dots < t_m < \dots < t_n; \quad \forall B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{R}.$$

Определение 4 (см. [8]). Марковская мера $\mu \in a^{Bc,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$ называется *строго марковской*, если

$$\mathbf{U}_{\mu; B_{m+1}, \dots, B_{n-1}}^{t_m, \dots, t_{n-1}, t_n} \mathbf{P}_{B_m} \mathbf{U}_{\mu; B_1, \dots, B_{m-1}}^{t_0, \dots, t_{m-1}, t_m} = \mathbf{U}_{\mu; B_1, \dots, B_{n-1}}^{t_0, \dots, t_n} \quad (10)$$

$$\forall t_0, \dots, t_n : 0 \leq t_0 < \dots < t_m < \dots < t_n; \quad \forall B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{A}_R.$$

Символом $a^{J,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$ обозначим множество мер, удовлетворяющих условию J и условию (9). Заметим, что если $\mu \in a^{Bc,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$, то мера μ на полуалгебре множеств Cyl может быть восстановлена по своему сужению на класс множеств $Cyl_2 = \{C_{B_0, B}^{0,t}, t \geq 0, B_0, B \in \mathcal{R}\}$.

Теорема 3 (см. [8]). *Образ $a_{\Lambda}(\mathcal{A}_{Cyl})$ отображения Λ совпадает с множеством $a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl})$.*

Отображение

$$\mathbf{V} : a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl}) \rightarrow \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H))$$

определенное условиями (7), (8), является обратным к биективному отображению

$$\Lambda : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+, B(H)) \rightarrow a^{Bc,S,M}(\mathcal{A}_{Cyl}).$$

3. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ И ЗАДАЧА КОШИ С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Определение 5 (см. [1, 2]). Двухпараметрическое семейство $\mathbf{U}(t, s)$, $0 \leq s \leq t < +\infty$, ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H называется эволюционным, если выполнены следующие условия:

- 1) $\mathbf{U}(t, t) = \mathbf{I}$ при всех $t \geq 0$,
- 2) отображение $\mathbf{U} : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow B(H)$ непрерывно в сильной операторной топологии на множестве $\mathbb{R}_+^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t\}$,
- 3) выполняется эволюционное свойство $\mathbf{U}(t, \tau)\mathbf{U}(\tau, s) = \mathbf{U}(t, s) \forall s, \tau, t : 0 \leq s \leq \tau \leq t < \infty$.

Нас будут интересовать эволюционные семейства, удовлетворяющие следующим предположениям.

Предположение 0. Предположим, что существует плотное в пространстве H линейное многообразие D такое, что существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} (\mathbf{U}(t+h, s) - \mathbf{U}(t, s)) u \right) = \mathbf{A}(t, s) u \quad (11)$$

для каждого $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ и каждого $u \in D$.

Согласно свойству 3) эволюционного семейства $\mathbf{U}(t+h, s) - \mathbf{U}(t, s) = (\mathbf{U}(t+h, t) - \mathbf{I})\mathbf{U}(t, s)$, поэтому условие (11) эквивалентно существованию производной

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} (\mathbf{U}(t+h, t) - \mathbf{I})\mathbf{U}(t, s) u \right) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t, s) u, \quad t \geq s \geq 0.$$

В частности, $\frac{d}{dt} \mathbf{U}(t, s) u|_{s=t} = \mathbf{A}(t)u \forall u \in D$ при всех $t \geq 0$ и $\mathbf{A}(t, s) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t, s)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$.

Сформулируем предположения 1–5 об операторнозначной функции $\mathbf{A}(s)$, $s \geq 0$, достаточные (как будет показано в теореме 4) для того, чтобы семейство переменных генераторов $\mathbf{A}(s)$, $s \geq 0$, однозначно определяло эволюционное семейство, удовлетворяющее условиям 1–3) и предположению 0.

Предположение 1. Предположим, что существует плотное в пространстве H линейное многообразие D такое, что при каждом $t \geq 0$ линейный оператор $\mathbf{A}(t)u$, $u \in D$ имеет самосопряженное замыкание.

Предположение 2. Предположим, что замыкание оператора $\mathbf{A}(0)$ имеет обратный $(\mathbf{A}(0))^{-1} : H \rightarrow D$.

Из предположений 1, 2 следует, что при всех $t > 0$ оператор $\mathbf{A}(t)(\mathbf{A}(0))^{-1}$ всюду определен, замкнут и, следовательно, ограничен [1]. Замкнутость оператора $\mathbf{A}(0)$ позволяет наделить подпространство D нормой графика оператора $\mathbf{A}(0)$, превращающей линейное многообразие D в банаово пространство.

Предположение 3. Пусть общая существенная область определения D генераторов $\mathbf{A}(s)$, $s \in [0, +\infty)$, инвариантна относительно полугруппы $e^{\mathbf{A}(s)t}$, $t \geq 0$, при каждом $s \in [0, +\infty)$. Пусть семейство генераторов $\mathbf{A}(s)$, $s \in [0, +\infty)$, равномерно полуограничено сверху.

Предположение 4. Существует число $B \geq 0$ такое, что для любого $u \in D$

$$e^{-B|t-s|} \|\mathbf{A}(s)u\|_H \leq \|\mathbf{A}(t)u\|_H \leq e^{B|t-s|} \|\mathbf{A}(s)u\|_H \quad \forall t, s \geq 0.$$

Заметим, что из предположений 2, 4 следует, что при каждом $t \geq 0$ оператор $\mathbf{A}(t)$ ограниченный обратный. На линейном пространстве D введем семейство эквивалентных в силу предположения 4 норм $\|u\|_{D_t} = \|\mathbf{A}_t u\|_H$, $u \in D$, $t \geq 0$, и положим $\|u\|_{D_0} \equiv \|u\|_D$.

Предположение 5. Пусть оператор-функция $\mathbf{A} : [0, +\infty) \times D \rightarrow H$ является равномерно непрерывной в смысле выполнения следующего условия (сильно равномерно непрерывна по Гёльдеру на множестве D):

$$\exists L, a > 0 : \forall u \in D \quad \forall t, s > 0, \quad \|(\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(s))u\|_H \leq L|t - s|^a \|u\|_{D_s}. \quad (12)$$

Примером удовлетворяющей предположениям 1–5 оператор-функции может служить оператор-функция со значениями в множестве действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ эллиптических дифференциальных операторов второго порядка в дивергентной форме с гладко зависящими от временного параметра и пространственных координат коэффициентами, квадратичные формы которых определены на пространстве Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$ и равномерно ограничены снизу и сверху квадратичной формой скалярного произведения пространства \mathbb{R}^d .

Лемма 2. Пусть выполнены предположения 1–4. Тогда существует число $M > 0$ такое, что при любых $t \geq 0$, $s \geq 0$, $\sigma > 0$ и любом $u \in D$ выполнены неравенства

$$\|e^{\mathbf{A}(s)t}u\|_{D_s} \leq e^{Mt}\|u\|_{D_s}; \quad \|e^{\mathbf{A}(s)t}u\|_{D_\sigma} \leq e^{M(t+|s-\sigma|)}\|u\|_{D_\sigma}. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $s \geq 0$. Так как $u \in D$, то в силу предположения 1 $u \in D(\mathbf{A}(s))$. Из равномерной полуограниченности сверху самосопряженных операторов $\mathbf{A}(s)$, $s \geq 0$, следует существование такой не зависящей от s постоянной $m > 0$, что $\|e^{t\mathbf{A}(s)}u\|_H \leq e^{mt}\|u\|_H$ и $\|e^{t\mathbf{A}(s)}u\|_{D(\mathbf{A}(s))} \leq e^{mt}\|u\|_{D(\mathbf{A}(s))}$ и первая оценка доказана ($D(\mathbf{A}(s))$ – гильбертово пространство, представляющее собой пополнение линейного пространства D по норме $\|\cdot\|_{D(s)}$ графика самосопряженного замыкания оператора $\mathbf{A}(s)$). Из предположений 1–4 следует, что при каждом $\sigma \geq 0$ $e^{t\mathbf{A}(\sigma)}u \in D \subset D(\mathbf{A}(\sigma))$ и при этом

$$\|e^{t\mathbf{A}(s)}u\|_{D(\mathbf{A}(\sigma))} \leq e^{B|s-\sigma|}\|e^{t\mathbf{A}(s)}u\|_{D(\mathbf{A}(s))} \leq e^{B|s-\sigma|+mt}\|u\|_{D(\mathbf{A}(s))} \leq e^{2B|s-\sigma|+mt}\|u\|_{D(\mathbf{A}(\sigma))}.$$

Значит, оценка (13) выполняется с постоянной $M = m + 2B$.

В частности, из леммы 2 следует, что $\|e^{t\mathbf{A}(s)t}u\|_D \leq e^{M(t+s)}\|u\|_D$ для любого $u \in D$ и любых $s, t \geq 0$.

Определение 6. Обобщенным решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{A}(t)u(t), \quad t \in (t_0, +\infty), \quad (14)$$

$$u(t_0 + 0) = u_0, \quad (15)$$

где $0 \leq t_0 < +\infty$, с удовлетворяющими предположению 1 переменными генераторами и с начальным условием $u_0 \in H$ будем называть такую функцию $u(t, t_0, u_0) \in C([t_0, +\infty), H)$, что при каждом $v \in D$ справедливо равенство

$$(u(t, t_0, u_0) - u_0, v) = \int_{t_0}^t (u(s, t_0, u_0), \mathbf{A}(s)v) ds, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (16)$$

Лемма 3. Пусть выполнены предположения 1–5. Если обобщенное решение задачи Коши существует, то оно единствено.

Доказательство. Предположим, что у задачи Коши существуют два различных обобщенных решения $u(\cdot, t_0, u_0)$, $\hat{u}(\cdot, t_0, u_0)$. Тогда их разность $w(\cdot)$ принадлежит пространству $C([t_0, +\infty), H)$ и в силу (16) удовлетворяет равенству

$$(w(t), v) = \int_{t_0}^t (w(s), \mathbf{A}(s)v) ds, \quad t \in [t_0, +\infty),$$

при произвольном $v \in D$. Фиксируем произвольное $v \in D$. Тогда для неотрицательной функции $z_v(t) = |(w(t), v)|$, $t \in [t_0, +\infty)$, справедливо условие $z_v(t_0) = 0$ и при любом $T > 0$ выполнено неравенство $z_v(t) \leq \int_{t_0}^t A z_v(s) ds$, где $A = \sup_{t \in [t_0, T]} \|\mathbf{A}(t)v\| < +\infty$ в силу предположения 4. Поэтому $z_v(t) = 0$, $t \in [t_0, T]$, в силу леммы Гронуолла.

Итак, $(w(t), v) = 0 \quad \forall t \in [t_0, +\infty), \quad v \in D$.

Поскольку в силу условий предположения 1 линейное многообразие D оно плотно в пространстве H , то $w(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия предположений 1–5. Тогда для любого $t_0 \geq 0$ и для любого $u_0 \in H$ задача Коши (14), (15) имеет единственное обобщенное решение

$$u(t, t_0, u_0) = \mathbf{U}_\mathbf{A}(t, t_0)u_0, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (17)$$

При этом двухпараметрическое семейство операторов $\mathbf{U}_A(t, s)$, $t \geq s \geq 0$, в (17) может быть определено из условия

$$\forall u \in H, \forall T > t_0 \quad \lim_{|\sigma([s,t])| \rightarrow 0} \sup_{t_0 \leq s \leq t \leq T} \|\mathbf{U}_A(t, s)u - e^{\mathbf{A}(\xi_{n-1})(\xi_n - \xi_{n-1})} \circ \dots \circ e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_1 - \xi_0)}u\|_H = 0, \quad (18)$$

где ξ_0, \dots, ξ_n — точки разбиения $\sigma([s, t])$ отрезка $[s, t]$ и $|\sigma([s, t])| = \max\{|\xi_1 - \xi_0|, \dots, |\xi_n - \xi_{n-1}|\}$ — мелкость этого разбиения.

Доказательство. Пусть $u \in D$, тогда $e^{s\mathbf{A}(t)}u \in D$ для всех $t \geq 0$, $s \geq 0$.

Пусть $0 \leq t_0 \leq s < \xi < t \leq T < +\infty$, тогда

$$\|e^{\mathbf{A}(\xi)(t-\xi)}e^{\mathbf{A}(s)(\xi-s)}u - e^{\mathbf{A}(s)(t-s)}u\|_H = \|(e^{\mathbf{A}(\xi)(t-\xi)} - e^{\mathbf{A}(s)(t-\xi)})e^{\mathbf{A}(s)(\xi-s)}u\|.$$

Пусть $u, v \in D$, и $0 \leq t_0 \leq s < \tau < t \leq T < +\infty$. Если $f(t) = e^{\mathbf{A}(s)(t-t_0)}v$, $g(t) = e^{\mathbf{A}(\tau)(t-t_0)}u$ при всех $t \in [t_0, T]$, то

$$\frac{d}{dt}(g(t) - f(t)) = \mathbf{A}(\tau)g(t) - \mathbf{A}(s)f(t) = (\mathbf{A}(\tau) - \mathbf{A}(s))g(t) + \mathbf{A}(s)(g(t) - f(t)), \quad t \in [t_0, T].$$

Следовательно, при всех $t \in [t_0, T]$ имеем

$$g(t) - f(t) = e^{\mathbf{A}(s)(t-t_0)}(u - v) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(s)(t-\xi)}(\mathbf{A}(\tau) - \mathbf{A}(s))e^{\mathbf{A}(\tau)(\xi-t_0)}ud\xi.$$

Поэтому, согласно (12) и (13), для всех $t \in [t_0, T]$ имеем

$$\begin{aligned} \|g(t) - f(t)\|_H &\leq e^{M(t-t_0)}\|u - v\|_H + L|\tau - s|^a \int_{t_0}^t e^{M(t-\xi)}\|e^{\mathbf{A}(\tau)(\xi-t_0)}u\|_{D_s}d\xi \leq \\ &\leq e^{M(t-t_0)}\|u - v\|_H + Le^{2M(t-t_0)}|t - t_0|^{1+a}\|u\|_{D_{t_0}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть $\tau = \{\xi_0, \dots, \xi_N\}$ — разбиение отрезка $[t_0, T]$, т.е. $t_0 = \xi_0 < \dots < \xi_N = T$. Пусть $u, v \in D$. Определим соответствующее разбиению τ семейство операторов $\mathbf{U}_A^\tau(t_0, t)$, $t \in [t_0, T]$, по следующему правилу. Определив по числу $t \geq t_0$ величину $\xi_k = \max\{\xi_j \in \{\xi_0, \dots, \xi_N\} : \xi_j \leq t\}$, а по числу $s \in [t_0, t]$ величину $\xi_i = \max\{\xi_j \in \{\xi_0, \dots, \xi_N\} : \xi_j \leq s\}$ положим

$$\mathbf{U}_A^\tau(t, s)u \equiv \phi_\tau(s, t, u) = \begin{cases} e^{\mathbf{A}(\xi_k)(t-\xi_k)}e^{\mathbf{A}(\xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k-1})} \dots e^{\mathbf{A}(\xi_i)(\xi_{i+1} - s)}u, & \xi_i < \xi_k, \\ e^{\mathbf{A}(\xi_i)(t-s)}u, & \xi_i = \xi_k. \end{cases}$$

В частности, для любого $t \in [t_0, T]$ имеем

$$\mathbf{U}_A^\tau(t, t_0)u \equiv \phi_\tau(t_0, t, u) = \begin{cases} e^{\mathbf{A}(\xi_k)(t-\xi_k)}e^{\mathbf{A}(\xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k-1})} \dots e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_1 - \xi_0)}u, & \xi_0 < \xi_k, \\ e^{\mathbf{A}(\xi_0)(t-s)}u, & \xi_k = \xi_0. \end{cases} \quad (20)$$

В силу предположений 1, 3 и леммы 2 при каждом разбиении τ отрезка $[t_0, T]$ двухпараметрическое семейство операторов $\mathbf{U}_A^\tau(t, s)$, $0 \leq s < t < +\infty$, допускает оценку по норме

$$\|\mathbf{U}_A^\tau(t, s)u\|_H \leq e^{M(t-s)}\|u\|_H \quad \forall u \in H. \quad (21)$$

Оценим разность $e^{\mathbf{A}(t_0)(T-t_0)}u - \mathbf{U}_\tau(T, t_0)v$. Положим $w_k = e^{\mathbf{A}(\xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k-1})}w_{k-1}$, $k = 1, \dots, N$, и $w_0 = v$. Тогда

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}(t_0)(T-t_0)}u - \mathbf{U}_\tau(T, t_0)v &= e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N - \xi_0)}(u - v) + [e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N - \xi_2)}e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_2 - \xi_1)} - e^{\mathbf{A}(\xi_{N-1})(\xi_N - \xi_{N-1})} \circ \dots \circ e^{\mathbf{A}(\xi_1)(\xi_2 - \xi_1)}]w_1 = \\ &= e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N - \xi_0)}(u - v) + e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N - \xi_2)}(e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_2 - \xi_1)} - e^{\mathbf{A}(\xi_1)(\xi_2 - \xi_1)})w_1 + \\ &+ (e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N - \xi_3)}e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_3 - \xi_2)} - e^{\mathbf{A}(\xi_{N-1})(\xi_N - \xi_{N-1})} \circ \dots \circ e^{\mathbf{A}(\xi_2)(\xi_3 - \xi_2)})w_2 = \dots = \\ &= e^{\mathbf{A}(t_0)(T-t_0)}(u - v) + \sum_{k=1}^{N-1} e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_N - \xi_{k+1})}[e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_{k+1} - \xi_k)} - e^{\mathbf{A}(\xi_k)(\xi_{k+1} - \xi_k)}]w_k. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (19), (12) и (13), справедливо неравенство

$$\|e^{\mathbf{A}(t_0)(T-t_0)}u - \mathbf{U}_\mathbf{A}^\tau(T, t_0)v\|_H \leq e^{M(T-t_0)}\|u - v\|_H + \sum_{k=1}^{N-1} e^{2M(T-\xi_{k+1})} L |\xi_k - \xi_0|^a \|w_k\|_{D_{t_0}} |\xi_{k+1} - \xi_k|.$$

Поскольку в силу (13) $\|w_k\|_{D_{t_0}} \leq e^{M(T-t_0)}\|v\|_{D_{t_0}}$ при $k = 1, \dots, N$ и так как $|\xi_k - \xi_0|^a \leq |T - t_0|^a$ при всех $k = 1, \dots, N$, то

$$\|e^{\mathbf{A}(t_0)(T-t_0)}u - \mathbf{U}_\mathbf{A}^\tau(T, t_0)v\|_H \leq e^{2M(T-t_0)}[\|u - v\|_H + L(T - t_0)^{a+1}\|v\|_{D_{t_0}}]. \quad (22)$$

Пусть $\tau' = \{s_1, \dots, s_{N'}\}$ – продолжение разбиения τ отрезка $[t_0, T]$. Для расширения τ' разбиения τ однозначно определен упорядоченный по возрастанию набор натуральных чисел $\{j_i, i = 1, \dots, N\}$ такой, что $\xi_i = s_{j_i}$, $i = 1, \dots, N$.

Пусть $\phi_\tau(t_0, t, u_0)$, $\phi_{\tau'}(t_0, t, u_0)$, $t \in [t_0, T]$, – вектор-функции, определенные по разбиениям τ , τ' соответственно и по начальному условию u_0 с помощью равенства (20). Тогда согласно (22) справедлива следующая оценка:

$$\|\mathbf{U}_\mathbf{A}^{\tau'}(\xi_1, t_0)u_0 - \mathbf{U}_\mathbf{A}^\tau(\xi_1, t_0)u_0\|_H \leq Le^{2M(\xi_1-t_0)}(\xi_1 - t_0)^{a+1}\|u_0\|_{D_{t_0}}.$$

Следовательно, согласно (22),

$$\begin{aligned} \|\phi_{\tau'}(t_0, \xi_2, u_0) - \phi_\tau(t_0, \xi_2, u_0)\|_H &= \|\mathbf{U}_\mathbf{A}^{\tau'}(\xi_2, \xi_1, \phi_{\tau'}(t_0, \xi_1, u_0)) - e^{\mathbf{A}(\xi_1)(\xi_2-\xi_1)}\phi_\tau(t_0, \xi_1, u_0)\|_H \leq \\ &\leq e^{2M(\xi_2-\xi_1)}[\|\phi_{\tau'}(t_0, \xi_1, u_0) - \phi_\tau(t_0, \xi_1, u_0)\|_H + L(\xi_2 - \xi_1)^{1+a}\|\phi_{\tau'}(t_0, t_1, u_0)\|_{D_{\xi_1}}] \leq \\ &\leq e^{2M(\xi_2-\xi_1)}[Le^{M(\xi_1-\xi_0)}(\xi_1 - \xi_0)^{a+1}\|u_0\|_{D_{\xi_0}} + L(\xi_2 - \xi_1)^{1+a}e^{M_1(\xi_1-\xi_0)}\|u_0\|_{D_{\xi_0}}] = \\ &= Le^{2M(\xi_2-\xi_0)}[(\xi_1 - \xi_0)^{a+1} + (\xi_2 - \xi_1)^{1+a}]\|u_0\|_{D_{\xi_0}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогично, в силу (22), и используя (13), получим

$$\begin{aligned} \|\phi_{\tau'}(t_0, \xi_3, u_0) - \phi_\tau(t_0, \xi_3, u_0)\|_H &= \|\mathbf{U}_\mathbf{A}^{\tau'}(\xi_3, \xi_2, \phi_{\tau'}(t_0, \xi_2, u_0)) - e^{\mathbf{A}(\xi_2)(\xi_3-\xi_2)}\phi_\tau(t_0, \xi_2, u_0)\|_H \leq \\ &\leq e^{2M(\xi_3-\xi_2)}[\|\phi_{\tau'}(t_0, \xi_2, u_0) - \phi_\tau(t_0, \xi_2, u_0)\|_H + L(\xi_3 - \xi_2)^{1+a}\|\phi_{\tau'}(t_0, \xi_2, u_0)\|_{D_{\xi_2}}]. \end{aligned}$$

С учетом оценки (23) это дает

$$\begin{aligned} \|\phi_{\tau'}(t_0, \xi_3, u_0) - \phi_\tau(t_0, \xi_3, u_0)\|_H &\leq e^{2M(\xi_3-\xi_2)}[Le^{2M(\xi_2-\xi_0)}[(\xi_1 - \xi_0)^{a+1} + (\xi_2 - \xi_1)^{1+a}]\|u_0\|_{D_{\xi_0}} + \\ &+ L(\xi_3 - \xi_2)^{1+a}\|\phi_{\tau'}(t_0, \xi_2, u_0)\|_{D_{\xi_2}}] \leq Le^{2M(\xi_3-\xi_0)}[(\xi_1 - \xi_0)^{a+1} + (\xi_2 - \xi_1)^{1+a} + (\xi_3 - \xi_2)^{1+a}]\|u_0\|_{D_{\xi_0}}. \end{aligned}$$

Применяя метод индукции, получаем, что для любых $s \in [t_0, T]$ справедлива оценка

$$\|\phi_{\tau'}(t_0, s, u_0) - \phi_\tau(t_0, s, u_0)\|_H \leq Le^{2M(T-t_0)}(\sum_{k=1}^N (\xi_k - \xi_{k+1})^{1+a})\|u_0\|_{D_{t_0}}.$$

Значит, если мелкость $|\tau|$ разбиения τ достаточно мала, то для всякого продолжения τ' разбиения τ справедлива оценка

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \|\phi_{\tau'}(t_0, t, u_0) - \phi_\tau(t_0, t, u_0)\|_H \leq Le^{2M(T-t_0)}(T - t_0)|\tau|^a\|u_0\|_{D_{t_0}} \leq Le^{2MT}(T - t_0)|\tau|^a\|u_0\|_D.$$

Таким образом, при стремлении к нулю мелкости разбиения промежутка $[t_0, T]$ соответствующая последовательность интегральных композиций (20) сходится в сильной операторной топологии равномерно по $(t_0, t) \in [0, T] \times [0, T] \cap \mathbb{R}_\leq^2$ к пределу $\mathbf{U}(t, t_0)u_0$, $(t_0, t) \in [0, T] \times [0, T] \cap \mathbb{R}_\leq^2$, не зависящему от выбора последовательности разбиений. При этом $\|\mathbf{U}(t, t_0)\|_{B(H)} \leq e^{M(t-t_0)}$ $\forall t \geq t_0$ в силу (21).

При фиксированном разбиении $\tau = \{\xi_0, \dots, \xi_N\}$ отрезка $[t_0, T]$ оператор-функция $\mathbf{U}_\mathbf{A}^\tau(t_0, t)$, $t \in [t_0, T]$, определенная как композиция полугрупп (20), удовлетворяет интегральному равенству

$$\mathbf{U}_\mathbf{A}^\tau(t_0, t)u_0 = u_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}_\tau(s)\mathbf{U}_\mathbf{A}^\tau(t_0, s)u_0 ds, \quad t \in [t_0, T],$$

где

$$\mathbf{A}_\tau(s) = \sum_{k=1}^N \chi_{[\xi_{k-1}, \xi_k)}(s)\mathbf{A}(\xi_{k-1}), \quad s \in [t_0, T]. \quad (24)$$

При этом в силу предположения 3 на любом промежутке $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ разбиения τ имеет место оценка

$$\|\mathbf{U}_A^\tau(t_0, t_{k+1})u_0\|_{D_{\xi_k}} \leq e^{m(\xi_{k+1} - \xi_k)} \|\mathbf{U}_A^\tau(t_0, t_k)u_0\|_{D_{\xi_k}}$$

и, согласно предположению 4 имеем

$$\|\mathbf{U}_A^\tau(t_0, t_{k+1})u_0\|_{D_{\xi_{k+1}}} \leq e^{B(\xi_{k+1} - \xi_k)} \|\mathbf{U}_A^\tau(t_0, t_{k+1})u_0\|_{D_{\xi_k}}.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{U}_A^\tau(t, t_0)u\|_{D_{t_0}} \leq e^{M(t-t_0)} \|u\|_{D_{t_0}}, \forall u \in D, \forall \tau([t_0, T]), \forall t \in [t_0, T]. \quad (25)$$

Из установленной выше сходимости интегральных композиций операторных семейств с кусочно-постоянными генераторами следует, что существует не зависящий от выбора римановой последовательности разбиений предел $\mathbf{U}(\cdot, t_0)u_0$. Докажем, что если $u_0 \in D$, то предел $\mathbf{U}(\cdot, t_0)u_0$ является решением задачи Коши (14), (15).

При любом разбиении τ кусочно-полугрупповая операторнозначная функция (20) по построению является двухпараметрическим эволюционным семейством операторов. В силу равномерности сходимости \mathbf{U}_A^τ при $|\tau| \rightarrow 0$ в сильной операторной топологии предельная функция \mathbf{U} непрерывна в сильной операторной топологии на множестве \mathbb{R}_{\leq}^2 и удовлетворяет эволюционным условиям 1) и 3) определения 5.

Пусть $u_0 \in D$ и пусть τ – разбиение отрезка $[t_0, T]$ точками $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N$. Тогда по определению оператор-функции $\mathbf{U}_A^\tau(t_0, t)$, $t \in [t_0, T]$, справедливо равенство

$$\phi_\tau(t_0, t, u_0) = u_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{A}_\tau(s)\phi_\tau(t_0, s, u_0)ds, \quad t \in [t_0, T],$$

где \mathbf{A}_τ – ступенчатая генератор-функция (24). Значит, для каждого $v \in D$ справедливо равенство

$$(\phi_\tau(t_0, t, u_0) - u_0, v) = \int_{t_0}^t (\phi_\tau(t_0, s, u_0), \mathbf{A}_\tau(s)v)ds, \quad t \in [t_0, T]. \quad (26)$$

Заметим, что

$$\lim_{|\tau| \rightarrow 0} \sup_{s \in [t_0, T]} \|\mathbf{A}_\tau(s)v - \mathbf{A}(s)v\|_H = 0$$

в силу предположения 5 о липшицевости функции \mathbf{A} . Поэтому переходя к пределу при $|\tau| \rightarrow 0$ в равенстве (26) получаем, что функция $\mathbf{U}(t, s)u_0$ является обобщенным решением задачи Коши на промежутке $[t_0, T]$. При этом поскольку для каждого разбиения τ операторнозначная функция \mathbf{U}^τ удовлетворяет оценке роста (25), то той же оценке удовлетворяет и предельное двухпараметрическое семейство \mathbf{U} .

Пусть теперь $u_0 \in H$. Тогда если последовательность $\{u_{0k}\} : \mathbb{N} \rightarrow D$ удовлетворяет условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{0k} - u_0\|_H = 0$, то последовательность $\{\mathbf{U}(t_0, \cdot)u_{0k}\}$ сходится равномерно на $[t_0, T]$ к функции $\mathbf{U}(t_0, \cdot)u_0$ поскольку $\sup_{t \in [t_0, T]} \|\mathbf{U}(t_0, t)\|_{B(H)} \leq e^{M(T-t_0)}$. При этом предельная функция удовлетворяет интегральному равенству (16) и, следовательно, является обобщенным решением задачи Коши, единственность которого доказана в лемме 3. Таким образом, $\mathbf{U}(t, s) = \mathbf{U}_A(t, s)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_{\leq}^2$.

4. ВОЗМУЩЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СЕМЕЙСТВ

Рассмотрим задачу Коши для возмущенного уравнения

$$\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{A}(t)u(t) + f(t), \quad t \in (t_0, T), \quad (27)$$

с начальным условием (15). Решением задачи Коши называется функция $u(t, t_0, u_0) \in C([t_0, T], H)$, которая при каждом $v \in D$ удовлетворяет равенству

$$(u(t, t_0, u_0) - u_0, v) = \int_{t_0}^t (u(s, t_0, u_0), \mathbf{A}(s)v)ds + \int_{t_0}^t (f(s), v)ds, \quad t \in [0, T]. \quad (28)$$

Пусть $L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$ – банахово пространство измеримых по Боннеру отображений полуоси \mathbb{R}_+ в гильбертово пространство $H = L_2(E)$, наделенное нормой $L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$, т.е. пополнение по норме $L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$ пространства измеримых ступенчатых отображений $\mathbb{R}_+ \rightarrow H$.

Лемма 4. Пусть выполнены условия предположений 1–5. Пусть $f \in L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $u_0 \in H$. Тогда для всех $t \geq t_0$ задача Коши для возмущенного уравнения (27) с начальным условием (15) существует, единственно и задается формулой Дюамеля

$$u(t) = \mathbf{U}_A(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{U}_A(t, s)f(s)ds. \quad (29)$$

Доказательство. Подставив (29) в (28) поменяем порядок интегрирования в

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s (\mathbf{U}_A(s, \xi)f(\xi), \mathbf{A}(s)v)d\xi ds$$

и, учитывая, что

$$\int_{\xi}^t (\mathbf{U}_A(s, \xi)f(\xi), \mathbf{A}(s)v)ds = \mathbf{U}_A(t, \xi)f(\xi) - f(\xi) \forall \xi \in [t_0, t],$$

получим, что функция (29) удовлетворяет условию (28).

Исследуем возмущения уравнений для эволюционных семейств добавлением нестационарного возмущения однопараметрическим семейством $\mathbf{V}(t)$, $t \geq 0$, ограниченных линейных операторов умножения на измеримую функцию $V(t)$, $t \geq 0$.

Лемма 5. Пусть выполнены условия предположений 1–5. Пусть вещественнозначная функция $V \in C^1(\mathbb{R}_+, L_\infty(E))$ такова, что $\|V(t)\|_{L_\infty(E)} < (\|\mathbf{A}(t)\|_{B(H)})^{-1}$ при всех $t \geq 0$ и оператор $\mathbf{V}(s)$ умножения на функцию $V(s)$ удовлетворяет условию $\mathbf{V}(s)D \subset D$ при всех $s \geq 0$. Тогда семейство операторов $\mathbf{A}(s) + \mathbf{V}(s)$, $s \geq 0$, удовлетворяет условиям предположений 1–5 и порождает эволюционное семейство операторов $\mathbf{U}_{A+V}(t, s)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$. При этом для эволюционного семейства \mathbf{U}_{A+V} имеет место кусочно-полугрупповая аппроксимация (18).

Для доказательства леммы 5 достаточно лишь проверить, что семейство операторов $\mathbf{A}(s) + \mathbf{V}(s)$, $s \geq 0$, удовлетворяет условиям предположений 1–5 с тем же плотным в H линейным подпространством D , что и для семейства операторов $\mathbf{A}(s) + \mathbf{V}(s)$, $s \geq 0$.

Рассмотрим задачу Коши для возмущенного уравнения

$$\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{A}(t)u(t) + \mathbf{V}(t)u(t), \quad t \in (t_0, T), \quad (30)$$

с начальным условием (15).

Лемма 6. Пусть двухпараметрическое эволюционное семейство операторов $\mathbf{U}_A(t, s)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$ порождается задачей Коши (14), (15) с семейством операторов $\mathbf{A}(s)$, $s \geq 0$, удовлетворяющим условиям предположений 1–5. Пусть $V \in L_\infty(\mathbb{R}_+, L_\infty(E))$ и $\mathbf{V}(s)$, $s \geq 0$, – семейство операторов умножения на функцию $V(s) \in L_\infty(E)$, $s \geq 0$. Тогда задача Коши (30), (15) порождает двухпараметрическое эволюционное семейство операторов $\mathbf{U}_{A+V}(t, s)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$.

Доказательство. Решение задачи (30), (15) будем искать в виде (29), где f – неизвестная функция из пространства $L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$.

Функция (29) является решением задачи Коши (30) тогда и только тогда, когда

$$f(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{U}_A(t, t_0)u_0 + \mathbf{V}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{U}_A(t, s)f(s)ds, \quad t \in [t_0, T]. \quad (31)$$

Заметим, что если $f \in L_\infty(\mathbb{R}_+, H)$, то тогда $\int_{t_0}^t \mathbf{U}_A(t, s)f(s)ds \in C([t_0, T], H)$ и

$$\left\| \int_{t_0}^t \mathbf{U}_A(\cdot, s)f(s)ds \right\|_{C([t_0, T], H)} \leq (T - t_0)e^{M(T-t_0)} \|f\|_{L_\infty([t_0, T], H)}.$$

Значит, функция $\mathbf{V}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{U}_A(t, s)f(s)ds$, $t \in [t_0, T]$, принадлежит пространству $L_\infty([t_0, T], H)$ и

$$\|\mathbf{V}(\cdot) \int_{t_0}^t \mathbf{U}_A(\cdot, s)f(s)ds\|_{L_\infty([t_0, T], H)} \leq (T - t_0)e^{M(T-t_0)}\|\mathbf{V}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+, L_\infty(E))}\|f\|_{L_\infty([t_0, T], H)}.$$

В силу условия $V \in L_\infty(\mathbb{R}_+, L_\infty(E))$ и оценки $\|\mathbf{U}(t, t_0)\|_{B(H)} \leq e^{M(t-t_0)}$ существует такое $\delta > 0$, не зависящее от u_0 и от t_0 , что норма оператора

$$\mathbf{K}_\delta : f(t) \rightarrow \mathbf{V}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{U}_A(t, s)f(s)ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \delta],$$

в пространстве $L_\infty([t_0, t_0 + \delta], H)$ меньше единицы. Поэтому уравнение (31) имеет единственное решение

$$f(t) = (\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{K}_\delta^j)(\mathbf{V}(t)\mathbf{U}_A(t, t_0)u_0), \quad t \in [t_0, t_0 + \delta], \quad (32)$$

на отрезке $[t_0, t_0 + \delta]$ из пространства $L_\infty([t_0, t_0 + \delta], H)$. Значит, задача Коши (30), (15) имеет единственное решение, задаваемое равенством (29) с функцией (32).

В точке $t_0 + \delta$ может быть снова поставлена задача Коши для уравнения (30) с начальным условием $u(t_0 + \delta)$, имеющая единственное решение на отрезке $[t_0 + \delta, t_0 + 2\delta]$, и так далее. Следовательно, задача Коши (30), (15) имеет единственное решение и задает двухпараметрическое эволюционное семейство операторов $\mathbf{U}_{A+\mathbf{V}}(t, s)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$.

5. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СЕМЕЙСТВА И ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ МЕРЫ

Отображение Λ , определенное в разделе 2, может быть расширено на множество $\mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+^2, B(H))$ двухпараметрических функций $\mathbf{U}(t, s)$, $0 \leq s \leq t < +\infty$, со значениями в пространстве $B(H)$ и удовлетворяющих условию $\mathbf{U}(t, t) \in \mathcal{A}_m(H)$, $t \geq 0$. Построим биекцию между пространством $\mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+^2, B(H))$ и множеством $a(\mathcal{A}_{Cyl}^{Bc, M})$ марковских непрерывных по базе конечно-аддитивных комплекснозначных мер, заданных на измеримом пространстве $(\mathcal{M}_+(E), \mathcal{A}_{Cyl})$ траекторий в пространстве E :

$$\Lambda : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+^2, B(H))_{\mathcal{A}_m} \rightarrow a(\mathcal{A}_{Cyl}), \quad \Lambda[\mathbf{U}] = \mu_{\mathbf{U}}, \quad \text{Im } \Lambda = a^{Bc, M}(\mathcal{A}_{Cyl}).$$

Как и в формуле (2), всякому двухпараметрическому эволюционному семейству $\mathbf{U}(t, s)$, $0 \leq s \leq t < +\infty$, отображение Λ сопоставляет цилиндрическую меру $\mu_{\mathbf{U}}$ такую, что для любого цилиндрического множества C_B^t , обладающего базой, содержащей только множества из кольца \mathcal{R} , выполняется равенство

$$\mu_{\mathbf{U}}(C_B^t) = (\chi_{B_n}, \mathbf{U}(t_n, t_{n-1}) \mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}(t_1, t_0) \chi_{B_0}), \quad (33)$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad B_i \in \mathcal{R}, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Для $n = 0$ и произвольного $t_0 \geq 0$, принимая во внимание, что $\mathbf{U}(t_0, t_0) \in \mathcal{A}_m$ имеет вид $\mathbf{U}(t_0, t_0)(\bullet) = f_{t_0}(x)(\bullet)$, где $f_{t_0} \in \mathbb{L}_\infty(E, \mathcal{R}, \lambda, \mathbb{C})$, положим

$$\mu_{\mathbf{U}}(C_B^{t_0}) = \begin{cases} (\chi_B, \mathbf{U}(t_0, t_0)\chi_B) = \int_B f_{t_0}(x) d\lambda(x), & B \in \mathcal{R}, \\ M_0 - \int_{E \setminus B} f_{t_0}(x) d\lambda(x), & B \in \mathcal{A}(\mathcal{R}), B \notin \mathcal{R}, \end{cases} \quad (34)$$

где константа $M_0 = \mu_{\mathbf{U}}(\mathcal{M}(E))$, как и ранее в разд. 2, может быть выбрана произвольно.

Также, как и в работе [8], доказывается, что условия (33) и (34) однозначно определяют цилиндрическую меру $\mu_{\mathbf{U}}$ на алгебре \mathcal{A}_{Cyl} , а отображение $\Lambda : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+^2, B(H)) \rightarrow a(\mathcal{A}_{Cyl})$ инъективно. Также устанавливается, что для любого $\mathbf{U} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+^2, B(H))$ мера $\mu_{\mathbf{U}}$ непрерывна по базе и является марковской.

Как доказано в [11], отображение Λ обратимо и обратное отображение \mathbf{V} всякой марковской непрерывной по базе цилиндрической мере $\mu \in a(\mathcal{A}_{Cyl}^{Bc, M})$ сопоставляет двухпараметрическое эволюционное семейство \mathbf{U}_μ посредством равенств

$$\forall t_1 > t_0 \geq 0 (\chi_{B_1}, (\mathbf{V}(\mu))(t_1, t_0)\chi_{B_0})_H = \mu(C_{B_0, B_1}^{t_0, t_1}) \quad \forall B_0, B_1 \in \mathcal{R}; \quad (35)$$

$$\forall t_0 \geq 0 \ (\chi_{B_0}, (\mathbf{V}(\mu))(t_0)\chi_{B_0})_H = \mu(C_{B_0}^{t_0}) \quad \forall B_0 \in \mathcal{R}.$$

Теорема 5. Двухпараметрическое семейство $\mathbf{U}_\mu(t_0, t)$, $0 \leq t_0 \leq t < +\infty$, операторов удовлетворяет эволюционному свойству 3) определения 1

$$\mathbf{U}_\mu(t_2, t_1)\mathbf{U}_\mu(t_1, t_0) = \mathbf{U}_\mu(t_2, t_0) \quad \forall t_2 \geq t_1 \geq t_0 \geq 0$$

тогда и только тогда, когда соответствующая цилиндрическая мера $\mu \in a(\mathcal{A}_{Cyl}^{Bc, M})$ удовлетворяет условию сильной марковости.

Доказательство. Докажем, что если мера $\mu \in a(\mathcal{A}_{Cyl}^{Bc, M})$ является строго марковской, то для оператор-функции $\mathbf{U}_\mu \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}_+^2, B(H))$ выполняется эволюционное свойство 3). Согласно равенству (35) для любых $t_2 \geq t_0 \geq 0$ и любых $B_2, B_0 \in \mathcal{R}$ имеем $(\mathbf{U}_\mu(t_2, t_0)\chi_{B_2}, \chi_{B_0}) = \mu(C_{B_0, B_2}^{t_0, t_2})$. Поскольку $C_{B_0, B_2}^{t_0, t_2} = C_{B_0, E, B_2}^{t_0, t_1, t_2}$ при всех $t_1 \in [t_0, t_2]$, то

$$(\mathbf{U}_\mu(t_2, t_0)\chi_{B_2}, \chi_{B_0}) = \mu(C_{B_0, E, B_2}^{t_0, t_1, t_2}) \quad \forall t_1 \in [t_0, t_2].$$

Поскольку мера μ является строго марковской, то $\mathbf{U}_\mu^{t_1, t_2}\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_\mu^{t_0, t_1} = \mathbf{U}_{\mu; B_1}^{t_0, t_1, t_2}$ при любом $B_1 \in \mathcal{A}_R$. Следовательно, для любых $B_0, B_2 \in \mathcal{R}$ справедлива цепочка равенств

$$(\mathbf{U}_\mu(t_1, t_0)\mathbf{U}_\mu(t_2, t_1)\chi_{B_2}, \chi_{B_0}) = (\mathbf{U}_{\mu; E}^{t_0, t_1, t_2}\chi_{B_2}, \chi_{B_0}) = \mu(C_{B_0, E, B_2}^{t_0, t_1, t_2}) = (\mathbf{U}_\mu(t_2, t_0)\chi_{B_2}, \chi_{B_0}),$$

откуда следует выполнение эволюционного условия 3).

Докажем, что если $\mu \in a(\mathcal{A}_{Cyl}^{Bc, M})$ и функция $\mathbf{U}_\mu = \mathbf{V}(\mu)$ удовлетворяет условию 3), то мера μ является строго марковской. Так как мера μ марковская, то выполняется условие (9). Следовательно, если при некотором $n \in \mathbb{N}$ множества B_1, \dots, B_{n-1} лежат в кольце \mathcal{R} , то для любых $t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_0 \geq 0$ выполняется равенство

$$\mathbf{U}_{\mu; B_1, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n} = \mathbf{U}_{\mu}^{t_{n-1}, t_n}\mathbf{P}_{B_{n-1}}\mathbf{U}_{\mu}^{t_{n-2}, t_{n-1}}\mathbf{P}_{B_{n-2}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_1, t_2}\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_{\mu}^{t_0, t_1}.$$

Следовательно, равенство (10) выполнено при условии, что все множества B_1, \dots, B_{n-1} лежат в кольце \mathcal{R} .

Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ все множества B_1, \dots, B_{n-1} лежат в кольце \mathcal{R} , за исключением одного из них, имеющего номер $j \in 1, \dots, n-1$. Тогда для этого номера $j \in 1, \dots, n$ выполняется, что $B_j \in \mathcal{A}_R$ и $B_j \notin \mathcal{R}$. Поэтому $B_j^\perp = E \setminus B_j \in \mathcal{R}$ и $\mathbf{P}_{B_j} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{B_j^\perp}$. Следовательно,

$$\mathbf{U}_{\mu; B_1, \dots, B_j^\perp, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_{n-1}, t_n} = \mathbf{U}_{\mu}^{t_{n-1}, t_n}\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_{j+1}, t_j}\mathbf{P}_{B_j^\perp}\mathbf{U}_{\mu}^{t_{j-1}, t_{j-1}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_1, t_2}\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_{\mu}^{t_0, t_1}.$$

$$\mathbf{U}_{\mu; B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{n-1}, t_n} = \mathbf{U}_{\mu}^{t_{n-1}, t_n}\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_{j+1}, t_{j+2}}\mathbf{P}_{B_{j+1}}\mathbf{U}_{\mu}^{t_{j-1}, t_{j+1}}\mathbf{P}_{B_{j-1}}\mathbf{U}_{\mu}^{t_{j-2}, t_{j-1}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_1, t_2}\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_{\mu}^{t_0, t_1}.$$

Поскольку функция \mathbf{U}_μ удовлетворяет условию эволюционности 3), верно равенство

$$\mathbf{U}_{\mu}^{t_{j-1}, t_{j+1}} = \mathbf{U}_{\mu}^{t_j, t_{j+1}}\mathbf{U}_{\mu}^{t_{j-1}, t_j} = \mathbf{U}_{\mu}^{t_j, t_{j+1}}(\mathbf{P}_{B_j} + \mathbf{P}_{B_j^\perp})\mathbf{U}_{\mu}^{t_{j-1}, t_j}. \quad (36)$$

Значит, для любых $B, B_n \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{U}_{\mu; B_1, \dots, B_j, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, t_j, \dots, t_{n-1}, t_n}\chi_{B_n}, B_0) = \mu(C_{B_0, \dots, B_j, \dots, B_n}^{t_0, \dots, t_j, \dots, t_n}) = \mu(C_{B_0, \dots, E \setminus B_j^\perp, \dots, B_n}^{t_0, \dots, t_j, \dots, t_n}) = \\ & = \mu(C_{B_0, \dots, E, \dots, B_n}^{t_0, \dots, t_j, \dots, t_n}) - \mu(C_{B_0, \dots, B_j, \dots, B_n}^{t_0, \dots, t_j, \dots, t_n}) = (\mathbf{U}_{\mu; B_1, \dots, B_{j-1}, B_{j+1}, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{n-1}, t_n}\chi_{B_n}, B_0) - (\mathbf{U}_{\mu; B_1, \dots, B_{j-1}^\perp, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{n-1}, t_n}\chi_{B_n}, B_0) = \\ & = (\mathbf{U}_{\mu}^{t_{n-1}, t_n}\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_{j+1}, t_{j+2}}\mathbf{P}_{B_{j+1}}\mathbf{U}_{\mu}^{t_{j-1}, t_{j+1}}\mathbf{P}_{B_{j-1}}\mathbf{U}_{\mu}^{t_{j-2}, t_{j-1}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_1, t_2}\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_{\mu}^{t_0, t_1}\chi_{B_n}, B_0) - \\ & - (\mathbf{U}_{\mu}^{t_{n-1}, t_n}\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_{j+1}, t_j}\mathbf{P}_{B_j^\perp}\mathbf{U}_{\mu}^{t_{j-1}, t_{j-1}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_1, t_2}\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_{\mu}^{t_0, t_1}\chi_{B_n}, B_0) \end{aligned}$$

С учетом равенства (36) получаем, что

$$(\mathbf{U}_{\mu; B_1, \dots, B_j, \dots, B_{n-1}}^{t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, t_j, \dots, t_{n-1}, t_n}\chi_{B_n}, B_0) = (\mathbf{U}_{\mu}^{t_{n-1}, t_n}\mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_{j+1}, t_j}\mathbf{P}_{B_j}\mathbf{U}_{\mu}^{t_{j-1}, t_{j-1}} \dots \mathbf{U}_{\mu}^{t_1, t_2}\mathbf{P}_{B_1}\mathbf{U}_{\mu}^{t_0, t_1}\chi_{B_n}, B_0),$$

что в силу произвольности $B_0, B_n \in \mathcal{R}$ означает, что равенство (10) выполнено при условии, что все множества B_1, \dots, B_{n-1} за исключением, быть может, одного лежат в кольце \mathcal{R} . С помощью математической индукции несложно установить, что равенство (10) выполняется при произвольных $B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{A}_R$.

Двухпараметрическое эволюционное семейство $\mathbf{U}_\mu(t, t_0)$, $0 \leq t_0 \leq t < +\infty$, задает операторнозначную функцию $\mathbf{F}^\mu(t) = \mathbf{U}_\mu(t, 0)$, $t \geq 0$, тогда и только тогда, когда соответствующая цилиндрическая мера $\mu \in a(\mathcal{A}_{Cyl}^{Bc, M})$ удовлетворяет условию стационарности. Операторнозначная функция \mathbf{F}^μ является однопараметрической полугруппой операторов тогда и только тогда, когда мера $\mu \in a(\mathcal{A}_{Cyl}^{Bc, M, S})$ является строго марковской.

6. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СЕМЕЙСТВА И КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Корректная разрешимость задачи Коши (14), (15) установлена при условиях предположений 1–5 на семейство переменных генераторов. Корректная разрешимость возмущенной задачи установлена при различных предположениях о возмущениях источника $f(\cdot)$ и потенциала $\mathbf{V}(\cdot)$. В соответствии с теоремой 5 двухпараметрические эволюционные семейства, порожденные невозмущенной задачей Коши (14), (15), определяют нестационарную строго марковскую непрерывную по базе цилиндрическую меру на пространстве траекторий со значениями в евклидовом пространстве. Для того чтобы получить представление двухпараметрического эволюционного семейства, порожденного возмущенной задачей Коши (30), (15), с помощью континуального интеграла от зависящего от возмущения функционала на траекториях по цилиндрической мере, определяемой невозмущенным эволюционным семейством, нам потребуется наложить достаточно ограничительные предположения относительно оператор-функции, представляющей возмущение, а именно, условия, сформулированные в лемме 5.

Лемма 7. Пусть \mathbf{A} – самосопряженный оператор в пространстве H , полуограниченный сверху. Тогда для любого $t > 0$ существует самосопряженный оператор Θ_t такой, что $0 \leq \Theta_t \leq \mathbf{I}$, $[\Theta_t, \mathbf{A}] = 0$ и

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + t\mathbf{A}e^{t\Theta_t\mathbf{A}}. \quad (37)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{E}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, – ортогональное разложение единичного оператора, задающее спектральное разложение самосопряженного оператора \mathbf{A} . Тогда для каждого вектора $u \in H$ определена монотонно возрастающая от нуля до числа $\|u\|^2$ функция $E_u(\lambda) = (\mathbf{E}(\lambda)u, u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. При этом $D(\mathbf{A}) = \{u \in H : \int_{\mathbb{R}} (1 + \lambda^2) dE_u(\lambda) < +\infty\}$, где интегрирование ведется в смысле Стильбесса, $(\mathbf{A}u, u) = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_u(\lambda)$,

$$(e^{t\mathbf{A}}u, u) = \int_{\mathbb{R}} e^{t\lambda} dE_u(\lambda)$$

для всех $u \in D(\mathbf{A})$. Согласно теореме Лагранжа для каждого $t > 0$ существует непрерывная положительная и не превосходящая единицу функция $\theta_t(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, такая, что $e^{t\lambda} - 1 = t\lambda e^{\theta_t(\lambda)t\lambda}$. Следовательно, при каждом $t > 0$ определен ограниченный неотрицательный самосопряженный оператор $\Theta_t = \int \theta_t(\lambda) d\mathbf{E}(\lambda)$, не превосходящий единичного оператора, коммутирующий с оператором \mathbf{A} и удовлетворяющий равенству (37).

Лемма 8. Пусть \mathbf{A} – ограниченный сверху оператором $M\mathbf{I}$, $M > 0$, самосопряженный оператор в пространстве H и пусть $u \in D(\mathbf{A})$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $C_\epsilon > 0$ такое, что

$$\|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I})\mathbf{A}u\|_H \leq \epsilon + |t|C_\epsilon\|\mathbf{A}u\|_H \quad \forall t \in (-1, 1).$$

Доказательство. Из условия $u \in D(\mathbf{A})$ следует, что для каждого $\epsilon > 0$ существует число $r_\epsilon > 0$ такое, что $\int_{|\lambda|>r_\epsilon} \lambda^2 dE_u(\lambda) < \frac{\epsilon^2}{4} e^{-2M}$. Тогда для каждого $t \in (-1, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} \|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I})\mathbf{A}u\|_H^2 &= \int_{\mathbb{R}} (e^{t\lambda} - 1)^2 \lambda^2 dE_u(\lambda) \leq \int_{|\lambda|>r_\epsilon} 4e^{2M}\lambda^2 dE_u(\lambda) + \int_{|\lambda|\leq r_\epsilon} (e^{t\lambda} - 1)^2 \lambda^2 dE_u(\lambda) \leq \\ &\leq \epsilon^2 + \int_{-r_\epsilon}^{r_\epsilon} (e^{tr_\epsilon} - 1)^2 \lambda^2 dE_u(\lambda) \leq \epsilon^2 + t^2 r_\epsilon^2 e^{2r_\epsilon} \|\mathbf{A}u\|_H^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы при $C_\epsilon = r_\epsilon e^{r_\epsilon}$.

Из лемм 6, 7 получаем следствие

Следствие 1. Пусть \mathbf{A} – ограниченный сверху оператором $M\mathbf{I}$, $M > 0$, самосопряженный оператор в пространстве H и пусть $u \in D(\mathbf{A})$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $C_\epsilon > 0$ такое, что

$$\|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I} - t\mathbf{A})u\|_H \leq \epsilon|t| + t^2 C_\epsilon \|\mathbf{A}u\|_H \quad \forall t \in (-1, 1).$$

Доказательство. Согласно лемме 7 для любого $t > 0$ существует самосопряженный оператор Θ_t такой, что $0 \leq \Theta_t \leq \mathbf{I}$, $[\Theta_t, \mathbf{A}] = 0$ и выполняется равенство (37). Следовательно, для каждого $t \in (-1, 1)$ имеем

$$\|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I} - t\mathbf{A})u\|_H = \|(e^{t\Theta_t\mathbf{A}} - \mathbf{I})t\mathbf{A}u\|_H \leq \|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I})t\mathbf{A}u\|_H.$$

Из леммы 8 получаем утверждение следствия.

Лемма 9. Пусть K – компактное в банаховом пространстве D подмножество семейства векторов $\{\mathbf{A}(s)u, s \in [t_0, T]\}$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $C_{K,\epsilon} > 0$ такое, что

$$\|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I} - t\mathbf{A})u\|_H \leq \epsilon|t| + t^2 C_{K,\epsilon} \|\mathbf{A}u\|_H \quad \forall u \in K, \forall t \in (-1, 1).$$

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует конечная ϵ -сеть $\{v_1, \dots, v_m\}$ множества K в пространстве D . Для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ в силу следствия 1 существует $C_{i,\epsilon} > 0$ такое, что

$$\|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I} - t\mathbf{A})v_i\|_H \leq \epsilon|t| + t^2 C_{i,\epsilon} \|\mathbf{A}v_i\|_H \quad \forall t \in (-1, 1).$$

Пусть теперь $u \in K$ и $i_u \in \{1, \dots, m\}$: $\|u - v_{i_u}\|_D \leq \epsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I} - t\mathbf{A})(v_{i_u} - u)\|_H &\leq \|e^{t\mathbf{A}} - \mathbf{I}\|_H (v_{i_u} - u) + \|t\mathbf{A}\|_H (v_{i_u} - u) \leq (e^{M(T-t_0)} + 1) \|v_{i_u} - u\|_H + t \sup_{s \in [t_0, T]} \|\mathbf{A}(s)(v_{i_u} - u)\|_H = \\ &= (e^{M(T-t_0)} + 1) \|v_{i_u} - u\|_H + te^{BT} \|v_{i_u} - u\|_D \leq \frac{1}{n} \epsilon e^B (1 + e^{M(T-t_0)}). \end{aligned}$$

Рассмотрим множество отображений отрезка $[t_0, T]$ в пространство D

$$\{\{\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}^\tau(t, t_0)u, t_0 \leq t \leq T\}, \tau\} \quad (38)$$

при всевозможных разбиениях $\tau = \{\xi_0, \dots, \xi_N\}$ отрезка $[t_0, T]$.

Лемма 10. Пусть выполнены предположения 1–5. Пусть функция $\mathbf{V}(s)$, $s \geq 0$, удовлетворяет условиям леммы 5. Пусть $u \in D$. Тогда множество

$$M = \{\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t, t_0)u, t_0 \leq t \leq T, \tau\}$$

компактно в пространстве D .

Доказательство. Так как операторнозначная функция $\mathbf{A} + \mathbf{V}$ в силу леммы 5 удовлетворяет условиям предположений 1–5, то для нее справедливо утверждение леммы 2 с некоторой константой $M_V > 0$. Следовательно, для любого разбиения τ отрезка $[t_0, T]$ векторнозначная функция $\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t, t_0)u$ удовлетворяет оценке (25) с константой M_V вместо M . Значит, в силу эквивалентности норм D и D_{t_0} , множество (38) является равномерно ограниченным по норме $\|\cdot\|_D$. Кроме того, оно является равностепенно непрерывным. Ибо всякая функция из семейства непрерывна на отрезке $[t_0, T]$ и на каждом промежутке разбиения функция представляет собой орбиту полугруппы с генератором из семейства $\{\mathbf{A}(s), s \in [t_0, T]\}$, и потому допускает оценку ($< e^{M_V T}$). Поэтому для всякого разбиения τ и любых $t_1, t_2 \in [t_0, T]$, $t_2 > t_1$ справедлива оценка

$$\|(\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t_2, t_0) - \mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t_1, t_0))u\|_D = \|(\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t_2, t_1) - \mathbf{I})\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t_1, t_0)u\|_D.$$

Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует число $C_\epsilon > 0$ такое, что

$$\|(\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t_2, t_0) - \mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t_1, t_0))u\|_D \leq \epsilon + C_\epsilon(t_2 - t_1) \|\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t_1, t_0)u\|_D \leq \epsilon + C_\epsilon(t_2 - t_1) e^{M_V T} \|u\|_D.$$

Следовательно, по теореме Асколи–Арцела, семейство отображений (38) компактно в пространстве $C([t_0, T], D)$, и потому множество значений отображений из семейства (38) компактно в пространстве D .

Лемма 11. Пусть выполнены условия предположений 1–5. Пусть функция $\mathbf{V}(s)$, $s \geq 0$, удовлетворяет условиям леммы 5. Пусть $0 \leq t_0 \leq T < +\infty$. Тогда существует такое $a = a(t_0, T) > 0$, что для любого $u \in D$ и для любого $\epsilon > 0$ существует число $A_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения $\tau = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N\}$ отрезка $[t_0, T]$ с мелкостью $|\tau| < 1$ имеем

$$\|(\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t, t_0) - \mathbf{U}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}^\tau(t, t_0))u\|_H \leq a\epsilon + A_\epsilon|\tau| \quad \forall t \in [t_0, T],$$

где при всех $t \in [t_0, T]$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}^\tau(t, t_0) = e^{(t-\xi_{k(t)})\mathbf{A}(\xi_{k(t)})} e^{(t-\xi_{k(t)})\mathbf{V}(\xi_{k(t)})} e^{(\xi_{k(t)} - \xi_{k(t)-1})\mathbf{A}(\xi_{k(t)-1})} e^{(\xi_{k(t)} - \xi_{k(t)-1})\mathbf{V}(\xi_{k(t)-1})} \dots e^{(\xi_1 - \xi_0)\mathbf{A}(\xi_0)} e^{(\xi_1 - \xi_0)\mathbf{V}(\xi_0)},$$

$k(t) = \max\{j \in \{1, \dots, N\} : \xi_j < t\}$.

Доказательство. Пусть $u \in D$. Для произвольного $t \in [t_0, T]$ имеем

$$\|(\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t, t_0) - \mathbf{U}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}^\tau(t, t_0))u\|_H = \left\| \sum_{j=0}^{k(t)} \mathbf{U}_{\mathbf{A},\mathbf{V}}^\tau(t, \xi_{j+1}) [e^{(\xi_{j+1} - \xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)} e^{(\xi_{j+1} - \xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1} - \xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j) + \mathbf{V}(\xi_j))}] \mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}^\tau(\xi_j, t_0)u \right\|_H \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} \|\mathbf{U}_{\mathbf{A}, \mathbf{V}}^\tau(\xi_N, \xi_{j+1}) [e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)} e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}] \mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}^\tau(\xi_j, t_0) u\|_H. \quad (39)$$

Следовательно,

$$\|(\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t, t_0) - \mathbf{U}_{\mathbf{A}, \mathbf{V}}^\tau(t, t_0)) u\|_H \leq \sum_{j=0}^{N-1} e^{M_V(T-\xi_{j+1})} \| [e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)} e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}] \mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}^\tau(\xi_j, t_0) u\|_H.$$

В силу условий на операторнозначные функции $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{V}(\cdot)$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t, t_0) u\|_{D(\mathbf{A}(t))} \leq e^{M_V(t-t_0)} \|u\|_{D(\mathbf{A}(t))} \leq e^{(M_V+B)(t-t_0)} \|u\|_D \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Выберем некоторое $\epsilon > 0$. Тогда в силу компактности множества (38) в пространстве D существует конечный набор точек $\sigma = \{u_1, \dots, u_M\} \subset D$ такой, что для любого $j \in \{0, \dots, N-1\}$ найдется $i_j \in \{1, \dots, M\}$ такое, что $\|\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}^\tau(\xi_j, t_0) u - u_{i_j}\|_D < \epsilon$.

В силу лемм 9 и 10, а также с учетом предположения 4 для выбранного $\epsilon > 0$ найдется $C_\epsilon > 0$ такое, что при каждом $j \in \{0, \dots, N-1\}$ справедливы неравенства

$$\|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)} e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}] u_{i_j}\|_H \leq$$

$$\leq (\epsilon + C_\epsilon |\tau|) |\xi_{j+1} - \xi_j| \|(\mathbf{A}(\xi_j) + \mathbf{V}(\xi_j)) u_{i_j}\|_H \leq (\epsilon + C_\epsilon |\tau|) |t_{j+1} - t_j| e^{M_V \xi_j} \|u_{i_j}\|_D.$$

Значит, при каждом $j \in \{1, \dots, N-1\}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)} e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}] \mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}^\tau(\xi_j, t_0) u\|_H \leq \\ &\leq \|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)} e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}] (\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}^\tau(\xi_j, t_0) u - u_{i_j})\|_H + \\ &\quad + \|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)} e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}] u_{i_j}\|_H. \end{aligned} \quad (40)$$

В силу леммы 7 получим

$$\begin{aligned} &\|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)} e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}] (\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(\xi_j, t_0) u - u_{i_j})\|_H \leq \\ &\leq (\xi_{j+1} - \xi_j) (\|e^{\Theta_1(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))(\xi_{j+1}-\xi_j)} (\mathbf{A}(\xi_j) + \mathbf{V}(\xi_j)) (\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(\xi_j, t_0) u - u_{i_j})\|_H + \\ &\quad + \|e^{\Theta_2 \mathbf{A}(\xi_j)(\xi_{j+1}-\xi_j)} \mathbf{A}(\xi_j) (\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(\xi_j, t_0) u - u_{i_j})\|_H + \|e^{\Theta_3 \mathbf{V}(\xi_j)(\xi_{j+1}-\xi_j)} \mathbf{V}(\xi_j) (\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(\xi_j, t_0) u - u_{i_j})\|_H) \leq b e^{M_V \xi_j} \epsilon \end{aligned}$$

при некотором $b = b(M_V, V, T, u) > 0$. Следовательно, из (40) следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует $B_\epsilon > 0$ такое, что при всех $j \in \{0, \dots, N-1\}$ получим

$$\|[e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{A}(\xi_j)} e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)\mathbf{V}(\xi_j)} - e^{(\xi_{j+1}-\xi_j)(\mathbf{A}(\xi_j)+\mathbf{V}(\xi_j))}] \mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}^\tau(\xi_j, t_0) u\|_H \leq (b\epsilon + B_\epsilon |\tau|) (\xi_{j+1} - \xi_j) \|u\|_D.$$

Поэтому, в силу (39) имеем

$$\|(\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}^\tau(t, t_0) - \mathbf{U}_{\mathbf{A}, \mathbf{V}}^\tau(t, t_0)) u\|_H \leq \sum_{j=0}^{N-1} (b\epsilon + B_\epsilon |\tau|) |\xi_{j+1} - \xi_j| \|u\|_D \leq (b\epsilon + B_\epsilon |\tau|) |T - t_0| \|u\|_D$$

и, значит, справедливо утверждение леммы 11.

Лемма 11 позволяет получить аппроксимацию возмущенного эволюционного семейства посредством итераций невозмущенного с эволюционным семейством, порожденным возмущением. В случае независящих от времени генераторов и возмущений этот результат совпадает с формулой Троттера. Именно для приближения такими итерациями возмущенного эволюционного семейства нам потребуются наиболее жесткие ограничения на возмущения, сформулированные в лемме 5.

Теорема 6 (обобщенная формула Троттера). *Пусть выполнены условия предположений 1–5. Пусть функция $\mathbf{V}(s)$, $s \geq 0$, удовлетворяет условиям леммы 5. Тогда для любого $t_0 \geq 0$, любого $T \in (t_0, +\infty]$ и для любого $u_0 \in H$ имеем*

$$\lim_{|\sigma([s,t])| \rightarrow 0} \sup_{t_0 \leq s \leq t \leq T} \|\mathbf{U}_{\mathbf{A}+\mathbf{V}}(t, s) u_0 - e^{\mathbf{A}(\xi_{n-1})(\xi_n-\xi_{n-1})} e^{\mathbf{V}(\xi_{n-1})(\xi_n-\xi_{n-1})} \circ \dots \circ e^{\mathbf{A}(\xi_0)(\xi_1-\xi_0)} e^{\mathbf{V}(\xi_0)(\xi_1-\xi_0)} u_0\|_H = 0, \quad (41)$$

где ξ_0, \dots, ξ_n – точки разбиения $\sigma([s, t])$ отрезка $[s, t]$ и $|\sigma([s, t])| = \max\{|\xi_1 - \xi_0|, \dots, |\xi_n - \xi_{n-1}|\}$ – мелкость этого разбиения.

Доказательство. Пусть $u \in D$, тогда $e^{\tau A(t)}u, e^{\tau V(t)}u \in D$ для всех $t \geq 0$, $\tau > 0$ и множество M_u компактно в D в силу леммы 10. Выберем некоторое $\epsilon > 0$. Фиксируем некоторое $T > 0$.

В силу теоремы 4 двухпараметрическое эволюционное семейство $U_{A+V}(t, s)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_\leq^2$, определено и для любого $T > 0$ выполнено

$$\lim_{|\tau|([0, T]) \rightarrow 0} \left(\sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \| (U_{A+V}(t, s) - U_{A+V}^\tau(t, s))u \|_H \right) = 0,$$

где $U_{A+V}^\tau(t, s)$ – кусочно-полугрупповое двухпараметрическое эволюционное семейство, определенное по операторнозначной функции $A + V$ для каждого разбиения $\tau = \tau([0, T])$ по формуле (20). Поэтому существует такое $\delta > 0$, что при всех $\tau : |\tau| < \delta$ выполняется оценка

$$\sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \| (U_{A+V}(t, s) - U_{A+V}^\tau(t, s))u \|_H < \frac{\epsilon}{4}.$$

Поскольку $u \in D$, то в силу леммы 11 существует постоянная $A_\epsilon > 0$, такая, что для любых $(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T$ выполняется неравенство

$$\| (U_{A+V}^\tau(t, s) - U_{A,V}(t, s))u \|_H \leq \frac{\epsilon}{4} + A_\epsilon |\tau|.$$

Следовательно, найдется такое $\sigma \in (0, \delta)$, что для всех разбиений $\tau : |\tau| < \sigma$ выполняется неравенство

$$\sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \| (U_{A,V}(t, s) - U_{A+V}^\tau(t, s))u \|_H < \frac{3\epsilon}{4}. \quad (42)$$

Пусть теперь $u \in H$. Тогда найдется такое $u_0 \in D$, что $\|u - u_0\|_H \leq \frac{\epsilon}{8}e^{-T(M+B)}$, поэтому

$$\sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \| (U_{A,V}(t, s)(u - u_0)) \|_H < \frac{\epsilon}{8}; \quad \| U_{A+V}^\tau(t, s)(u - u_0) \|_H < \frac{\epsilon}{8}.$$

Фиксирував такое u_0 получим, что найдется такое $\sigma \in (0, \delta)$, что для всех разбиений $\tau : |\tau| < \sigma$ выполняется неравенство (42). Следовательно, найдется такое $\sigma > 0$, что для любого разбиения $\tau : |\tau| < \sigma$ справедливо неравенство

$$\sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \| (U_{A,V}(t, s) - U_{A+V}^\tau(t, s))u \|_H < \epsilon.$$

Выразим значение меры $\mu^{U_{A+V}}$ на произвольном цилиндрическом множестве из Cyl с базой из принадлежащих кольцу \mathcal{R} множеств, через значение меры μ^{U_A} на множествах алгебры \mathcal{A}_{Cyl} . Положим $\mu^{U_A \circ G} = \Lambda(U_A \circ G)$, где $(U_A \circ G)(t, s) = U_A(t, s)G(t, s)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_\leq^2$ и

$$G(t, s) = e^{\int_s^t V(\xi) d\xi}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}_\leq^2.$$

Фиксируем произвольное цилиндрическое множество $C_B^t \in Cyl$ с базой, состоящей из множеств, принадлежащих кольцу \mathcal{R} . Тогда согласно (33) имеем

$$\Lambda[U_A](C_B^t) = \mu^{U_A}(C_B^t) = (\chi_{B_n}, U_A(t_n, t_{n-1})P_{B_{n-1}} \dots P_{B_1} U_A(t_1, t_0)\chi_{B_0}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (43)$$

$$\mu^{U_A \circ G}(C_B^t) = (\chi_{B_n}, U_A(t_n, t_{n-1})G(t_n, t_{n-1})P_{B_{n-1}} \dots P_{B_1} U_A(t_1, t_0)G(t_1, t_0)\chi_{B_0}), \quad (44)$$

$$B_i \in \mathcal{R}, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$. Фиксируем некоторое $T > 0$ и рассмотрим $(t, s) \in \mathbb{R}_\leq^2$ такие, что $0 \leq s \leq t \leq T$. Рассмотрим цилиндрические множества C_B^t с $t \in [0, T]$.

Пусть $S_\infty(E)$ – пространство простых измеримых относительно сигма-алгебры \mathcal{A}_R комплекснозначных функций на пространстве E , наделенное sup-нормой. Пусть $\mathbb{L}_\infty(E)$ – пополнение пространства $S_\infty(E)$, являющееся подпространством банахова пространства $L_\infty(E)$. Символом $\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$ обозначим пространство, являющееся пополнением по sup-норме пространства $S_\infty(\mathbb{R}_+, S_\infty(E))$ простых измеримых отображений полуоси \mathbb{R}_+ в банахово пространство $\mathbb{L}_\infty(E)$ (см. [8]).

Поэтому из условия $V \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$ следует, что существуют последовательность $\{\tau_i\}$ разбиений отрезка $[0, T]$ набором точек $\{s_0^l, s_1^l, \dots, s_{K_l}^l\}$ на конечную совокупность дизъюнктных промежутков $\{\Delta_1^l, \dots, \Delta_{K_l}^l\}$, последовательность $\{\pi_l\}$ разбиений пространства E на конечную совокупность дизъюнктных подмножеств $\{B_1^l, \dots, B_{M_l}^l\}$

из σ -алгебры \mathcal{A}_R и последовательность наборов комплексных чисел $\alpha_l = \{\alpha_{k,m}^l, k \in 1, \dots, K_l, m \in 1, \dots, M_l\}, l \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} (\| \|V_l(t) - V(t)\|_{L_\infty(E)} \|_{L_\infty([0,T])}) = 0, \quad (45)$$

где $\{V_l\} : \mathbb{N} \rightarrow S_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{S}_\infty(E))$ – последовательность простых функций вида

$$V_l(s, x) = \sum_{k=1}^{K_l} \sum_{m=1}^{M_l} \alpha_{k,m}^l \chi_{\Delta_k^l}(t) \chi_{B_m^l}(x), \quad x \in E.$$

Следовательно, $\| \|V_l(t) - V(t)\|_{B(H)} \|_{L_\infty([0,T])} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, и потому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{t,s \in [0,T]} \| \mathbf{G}(t, s) - \mathbf{G}_l(t, s) \|_{B(H)} = 0 \quad (46)$$

при каждом $T > 0$, где $\mathbf{G}_l(t, s) = \exp\left(\int_s^t \mathbf{V}_l(\xi) d\xi\right)$, $(t, s) \in \mathbb{R}_+^2$ при каждом $l \in \mathbb{N}$.

Тогда согласно (44) для произвольного фиксированного множества $C_B^t \in Cyl$ при $t \in [0, T]$ имеет место следующая поточечная сходимость цилиндрических мер:

$$\Lambda[\mathbf{U}_A \circ \mathbf{G}](C_B^t) = \lim_{l \rightarrow \infty} (\Lambda[\mathbf{U}_A \circ \mathbf{G}_l](C_B^t)). \quad (47)$$

При каждом $l \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} \Lambda[\mathbf{U}_A \circ \mathbf{G}_l](C_B^t) &= (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_A(t_n, t_{n-1}) \mathbf{G}_l(t_n, t_{n-1}) \mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}_A(t_1, t_0) \mathbf{G}_l(t_1, t_0) \chi_{B_0}) = \\ &= (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_A(t_n, t_{n-1}) \exp\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{V}_l(\xi) d\xi\right) \mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}_A(t_1, t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{V}_l(\xi) d\xi\right) \chi_{B_0}). \end{aligned} \quad (48)$$

Для фиксированного множества C_B^t на отрезке выбран фиксированный набор точек $t = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [0, T]$. При каждом $l \in \mathbb{N}$ функция $V_l \in S_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{S}_\infty(E))$ из удовлетворяющей условию (45) последовательности $\{V_l\}$ имеет вид

$$V_l(s, x) = \sum_{k=1}^{K_l} \sum_{m=1}^{M_l} \alpha_{k,m}^l \chi_{\Delta_k^l}(t) \chi_{B_m^l}(x), \quad x \in E, \quad (49)$$

где $\{\Delta_1^l, \dots, \Delta_{K_l}^l\}$ – разбиение отрезка $[0, T]$ на промежутки набором точками $\{s_0^l, s_1^l, \dots, s_{K_l}^l\}$. Причем при каждом $l \in \mathbb{N}$ можно, при необходимости, дополнительно разбить промежутки $\Delta_1^l, \dots, \Delta_{K_l}^l$ таким образом, что $\{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset \{s_0^l, s_1^l, \dots, s_{K_l}^l\}$. За счет этого для каждого $k \in \{1, \dots, K_l\}$ определено единственное $j(k) \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $\text{int}(\Delta_k^l) \subset [t_{j(k)-1}, t_{j(k)}]$. Для каждого промежутка $[t_{j-1}, t_j]$ из соответствующего фиксированному набору временных индексов t разбиения $\{[t_0, t_1], \dots, [t_{n-1}, t_n]\}$ промежутка $[t_0, t_n] \subset [0, T]$ положим

$$\mathbb{K}_j^l = \{k \in \{1, \dots, K_l\} : \Delta_k^l \subset [t_{j-1}, t_j]\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда для каждого интеграла в показателях экспонент в формуле (48) при всех $j \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} V_l(\xi, x) d\xi = \sum_{k \in \mathbb{K}_j^l} V_l|_{\Delta_k^l}(x) |\Delta_k^l| = \sum_{k \in \mathbb{K}_j^l} \sum_{m=1}^{M_l} \alpha_{k,m}^l \chi_{B_m^l}(x) |\Delta_k^l|, \quad x \in E,$$

значит,

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{V}_l(\xi) d\xi = \sum_{k \in \mathbb{K}_j^l} \sum_{m=1}^{M_l} \alpha_{k,m}^l \mathbf{P}_{B_m^l} |\Delta_k^l|,$$

где \mathbf{P}_B – ортогональный проектор в пространстве H , действующий как оператор умножения на индикаторную функцию измеримого множества $B \in \mathcal{A}_R$. Поэтому с учетом, что $\mathbf{P}_{B_k^l} \mathbf{P}_{B_m^l} = \mathbf{P}_{B_k^l \cap B_m^l} = \mathbf{P}_{B_m^l} \delta_{k,m}$, при всех $j \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\exp\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{V}(\xi) d\xi\right) = \exp\left(\sum_{k \in \mathbb{K}_j^l} \sum_{m=1}^{M_l} |\Delta_k^l| \alpha_{k,m}^l \mathbf{P}_{B_m^l}\right) = \sum_{m=1}^{M_l} \exp\left(\sum_{k \in \mathbb{K}_j^l} |\Delta_k^l| \alpha_{k,m}^l\right) \mathbf{P}_{B_m^l}.$$

Поэтому из (48) получаем

$$\begin{aligned}
 & \Lambda[\mathbf{U}_A \circ \mathbf{G}_l](C_B^t) = (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_A(t_n, t_{n-1}) \mathbf{G}_l(t_n, t_{n-1}) \mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}_A(t_1, t_0) \mathbf{G}_l(t_1, t_0) \chi_{B_0}) = \\
 & = (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_A(t_n, t_{n-1}) \left[\sum_{m_n=1}^{M_l} \exp \left(\sum_{k \in \mathbb{K}_n^l} |\Delta_k^l| \alpha_{k,m_n}^l \right) \mathbf{P}_{B_{m_n}^l} \right] \mathbf{P}_{B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_1} \mathbf{U}_A(t_1, t_0) \left[\sum_{m_1=1}^{M_l} \exp \left(\sum_{k \in \mathbb{K}_1^l} |\Delta_k^l| \alpha_{k,m_1}^l \right) \mathbf{P}_{B_{m_1}^l} \right] \chi_{B_0}) = \\
 & = \sum_{m_n=1}^{M^l} \dots \sum_{m_1=1}^{M^l} \prod_{j=1}^n \exp \left(\sum_{k \in \mathbb{K}_j^l} |\Delta_k^l| \alpha_{k,m_j}^l \right) (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_A(t_n, t_{n-1}) \mathbf{P}_{B_{m_n}^l \cap B_{n-1}} \dots \mathbf{P}_{B_{m_2}^l \cap B_1} \mathbf{U}_A(t_1, t_0) \mathbf{P}_{B_{m_1}^l \cap B_0} \chi_{B_0}) = \\
 & = \sum_{m_n=1}^{M^l} \dots \sum_{m_1=1}^{M^l} \exp \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathbb{K}_j^l} |\Delta_k^l| \alpha_{k,m_j}^l \right) \mu^{\mathbf{U}_A} \left(C_{B_0 \cap B_{j_0}^l, \dots, B_{n-1} \cap B_{j_{n-1}}^l, B_n}^{t_0, \dots, t_{n-1}, t_n} \right). \tag{50}
 \end{aligned}$$

Теорема 7. Пусть $\mathbf{U}_A : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow B(H)$ – двухпараметрическое эволюционное семейство, удовлетворяющее условиям предположений 1–5 и $T \in (0, +\infty)$. Пусть $V \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{L}_\infty(E))$, $\|V(t)\|_{L_\infty(E)} < \|(\mathbf{A}(t))^{-1}\|_{B(H)}^{-1}$ при всех $t \geq 0$ и $\mathbf{V}(s)D \subset D$ при всех $s \geq 0$. Тогда для любых $u, v \in H$ имеет место следующая формула Фейнмана–Каца:

$$(\mathbf{U}_{A+\mathbf{V}}(T, 0)u, v) = \int_{\mathcal{M}([0, T], E)} \exp \left(\int_0^T V(s, \gamma(s)) ds \right) u(\gamma(0)) \bar{v}(\gamma(T)) d\Lambda(\mathbf{U}_A)(\gamma), \tag{51}$$

где правая часть (51) является символом, обозначающим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{l \rightarrow \infty} \left[\int_{\mathcal{M}([0, T], E)} \exp \left(\sum_{j=1}^n \int_{\frac{j-1}{n}T}^{\frac{j}{n}T} V_l(s, \gamma(s)) ds \right) u(\gamma(0)) \bar{v}(\gamma(T)) d\Lambda(\mathbf{U}_A)(\gamma) \right] \right). \tag{52}$$

Доказательство. Рассмотрим значения $(\chi_{B_n}, \mathbf{U}_{A+\mathbf{V}}(T, 0)\chi_{B_0})$ для произвольных $B_0, B \in \mathcal{R}$ – этого будет достаточно, поскольку пространство $S(\mathcal{R})$ всюду плотно в пространстве H .

Рассмотрим функцию

$$\mathbf{F}(t, s) = \mathbf{U}_A(t, s) \exp \left(\int_s^t \mathbf{V}(\xi) d\xi \right) = \mathbf{U}_A(t, s) \mathbf{G}_V(t, s), \quad (t, s) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Согласно теореме 6, если $\{\tau_n\}$ – риманова последовательность разбиений отрезка $[0, T]$ точками $\xi_j^n = \frac{T}{n}j$, $j = 0, 1, \dots, n$, то при любом $B_0 \in \mathcal{R}$ имеет место равенство (41), т.е.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{U}_{A+\mathbf{V}}(t, 0)\chi_{B_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{F}(t, \xi_{K_n(t)}^n) \mathbf{F}(\xi_{K_n(t)}^n, \xi_{K_n(t)-1}^n) \dots \mathbf{F}(\xi_1^n, \xi_0^n) \chi_{B_0} = \tag{53} \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{U}_A(t, \xi_{K_n(t)}^n) \mathbf{G}_V(t, \xi_{K_n(t)}^n) \mathbf{U}_A(\xi_{K_n(t)}^n, \xi_{K_n(t)-1}^n) \mathbf{G}_V(\xi_{K_n(t)}^n, \xi_{K_n(t)-1}^n) \dots \mathbf{U}_A(\xi_1^n, \xi_0^n) \mathbf{G}_V(\xi_1^n, \xi_0^n) \chi_{B_0},
 \end{aligned}$$

где $K_n(t) = \max\{j \in \{0, 1, \dots, n\} : \xi_j^n < t\}$. Следовательно, если $\{V_l\}$ – последовательность простых, т.е. имеющих вид (49), функций аппроксимирующих функцию V в смысле условия (45), то в силу (47), при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{U}_A(t, \xi_{K_n(t)}^n) \mathbf{G}_V(t, \xi_{K_n(t)}^n) \mathbf{U}_A(\xi_{K_n(t)}^n, \xi_{K_n(t)-1}^n) \mathbf{G}_V(\xi_{K_n(t)}^n, \xi_{K_n(t)-1}^n) \dots \mathbf{U}_A(\xi_1^n, \xi_0^n) \mathbf{G}_V(\xi_1^n, \xi_0^n) \chi_{B_0} = \\
 & = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{U}_A(t, \xi_{K_n(t)}^n) \mathbf{G}_{V_1}(t, \xi_{K_n(t)}^n) \mathbf{U}_A(\xi_{K_n(t)}^n, \xi_{K_n(t)-1}^n) \mathbf{G}_{V_1}(\xi_{K_n(t)}^n, \xi_{K_n(t)-1}^n) \dots \mathbf{U}_A(\xi_1^n, \xi_0^n) \mathbf{G}_{V_1}(\xi_1^n, \xi_0^n) \chi_{B_0}.
 \end{aligned}$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ положим $B_n = B \in \mathcal{R}$. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ из (53) с помощью (50) получаем

$$\begin{aligned}
 & (\chi_B, \mathbf{U}_{A+\mathbf{V}}(t, 0)\chi_{B_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{l \rightarrow \infty} (\chi_{B_n}, \mathbf{U}_A(t, \xi_{K_n(t)}^n) \mathbf{G}_{V_1}(t, \xi_{K_n(t)}^n) \dots \mathbf{U}_A(\xi_1^n, \xi_0^n) \mathbf{G}_{V_1}(\xi_1^n, \xi_0^n) \chi_{B_0}) \right] = \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{m_n=1}^{M^l} \dots \sum_{m_1=1}^{M^l} \exp \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathbb{K}_j^l} |\Delta_k^l| \alpha_{k,m_j}^l \right) \mu^{\mathbf{U}_A} \left(C_{B_0 \cap B_{j_0}^l, \dots, B_{n-1} \cap B_{j_{n-1}}^l, B_n}^{t_0, \dots, t_{n-1}, t_n} \right) \right]. \tag{54}
 \end{aligned}$$

Поскольку при каждом $l \in \mathbb{N}$ функция V_l имеет вид (49), то при любых $n, l \in \mathbb{N}$ функция

$$\Phi(\gamma) = \chi_{B_n}(\gamma(T))\chi_{B_0}(\gamma(0)) \exp \left(\sum_{j=1}^n \int_{\frac{j-1}{n}T}^{\frac{j}{n}T} V_l(s, \gamma(s)) ds \right), \quad \gamma \in \mathcal{M}([0, T], E),$$

стоящее под знаком предела в (52) при $u = \chi_{B_0}$, $v = \chi_{B_n}$, может принимать лишь конечное множество значений на пространстве $\mathcal{M}([0, T], E)$ и является ступенчатой функцией, измеримой относительно алгебры \mathcal{A}_{Cyl} . Следовательно, функция $\Phi : \mathcal{M}([0, T], E) \rightarrow \mathbb{C}$ интегрируема по мере $\Lambda(\mathbf{U}_A)$ и справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}([0, t], E)} \exp \left(\sum_{j=1}^n \int_{\frac{j-1}{n}t}^{\frac{j}{n}t} V_l(s, \gamma(s)) ds \right) \chi_{B_0}(\gamma(0))\chi_{B_n}(\gamma(t)) d\Lambda(\mathbf{U}_A)(\gamma) = \\ & = \sum_{m_n=1}^{M^l} \cdots \sum_{m_1=1}^{M^l} \exp \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \mathbb{K}_j^l} |\Delta_k^l| \alpha_{k,m_j}^l \right) \mu^{\mathbf{U}_A} \left(C_{B_0 \cap B_{j_0}^{l_0}, \dots, B_{n-1} \cap B_{j_{n-1}}^{l_{n-1}}, B_n}^{t_0, \dots, t_{n-1}, t_n} \right), \end{aligned}$$

что совпадает с выражением (54).

Таким образом, получены аппроксимации двухпараметрического эволюционного семейства \mathbf{U}_{A+V} интегралами от линейных комбинаций индикаторных функций по мере $\Lambda(\mathbf{U}_A)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
3. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в случайных динамических системах. М.: Наука, 1979.
4. Ибрагимов И.А., Смородина Н.В., Фаддеев М.М. Об аппроксимации локального по времени винеровского процесса функционалами от случайных блужданий // Теория вероятн. и ее примен. 2021. Т. 66. № 1. С. 73–93.
5. Платонова М.В. Аналог формулы Фейнмана–Каца для оператора высокого порядка // Теория вероятн. и ее примен. 2022. Т. 67. № 1. С. 81–99.
6. Смолянов О.Г., Шавгулиззе Е.Т. Континуальные интегралы. М.: Изд. УРСС, 2015.
7. Маслов В.П., Чуботарев А.М. Определение континуального интеграла Фейнмана в P -представлении // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 37–38.
8. Orlov Yu.N., Sakbaev V.Z., Shmidt E.V. Compositions of Random Processes in a Hilbert Space and Its Limit Distribution // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. № 4. P. 1432–1447.
9. Егоров А.Д., Жидков Е.П., Лобанов Ю.Ю. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М.: Физматлит, 2006.
10. Кальметьев Р.Ш. Аппроксимация решений многомерного уравнения Колмогорова с помощью итераций Фейнмана–Чернова // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2023. 021, 15 с.
11. Orlov Yu.N., Sakbaev V.Z., Shmidt E.V. Feynman–Kac Formulas for Difference–Differential Equations of Retarded Type // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. V. 45. № 6. P. 2582–2591.
12. Plyashechnik A.S. Feynman formula for Schrodinger-type equations with time- and space-dependent coefficients // Russian J. of Math. Phys. 2012. V. 19. № 3. P. 340–359.
13. Sakbaev V.Z., Tsos N.V. Analogue of Chernoff Theorem for Cylindrical Pseudomeasures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. № 12. P. 2369–2382.

FEYNMAN–KAC FORMULAS FOR SOLUTIONS OF NONSTATIONARY PERTURBED EVOLUTION EQUATIONS

Yu. N. Orlov^{a,*} and V. Zh. Sakbaev^{a,**}

^a*M. V. Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 125047 Russia*

*e-mail: ov3159f@yandex.ru

**e-mail: fumi2003@mail.ru

Received: 22 August 2024

Revised: 29 September 2024

Accepted: 30 September 2024

Abstract. A bijective mapping of the space of operator-valued functions into the set of complex-valued finite additive cylindrical measures on the space of trajectories is constructed and studied. The conditions under which the Cauchy problem for the first order equation with a variable operator generates a two-parameter evolutionary family of operators are found. A representation of the solution to the Cauchy problem with a variable perturbed generator by means of a continuum integral of the perturbation-defined functional on the trajectory space over a cylindrical pseudomeasure specified by an unperturbed two-parameter evolutionary family of operators is obtained.

Keywords: evolutionary family of operators, one-parameter semigroup, finite-additive measure, Markov process, Chernoff theorem, Feynman-Kac formula

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРХНЕМАНТИЙНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗОНЕ СУБДУКЦИИ

© 2025 г. А.Н. Четырбоцкий^{1,*}

¹690022 Владивосток, пр-т 100 лет Владивостоку, 159, Дальневосточный геологический институт ДВО РАН, Россия
*e-mail: Chetyrbotsky@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.08.2024 г.

Переработанный вариант 29.08.2024 г.

Принята к публикации 20.09.2024 г.

Разработана модель верхнемантийной конвекции в зоне погружения холодной литосферной плиты (субдукции) в верхнюю толщу Земли. Обсуждаются вопросы построения начальных распределений переменных модели. Приводятся вычислительные схемы решения модельных уравнений. Расчет динамики мантийной конвекции и перестройки ее структуры выполнены в переменных завихренность-функция тока, а расчет динамики погружения плиты — на основании метода сглаженных частиц (SPH). Выполнена серия вычислительных экспериментов. Библ. 27. Фиг. 1.

Ключевые слова: мантийная конвекция, уравнения Стокса, тепломассоперенос, метод фиктивных областей, метод сглаженных частиц (SPH).

DOI: 10.31857/S0044466925010085, **EDN:** CCTVGF

ВВЕДЕНИЕ

Вместе с вращением Земли и влиянием на нее внешних факторов мантийная конвекция является ведущей составляющей термогравитационного механизма динамики геосфер, что подчеркивает ее значимость при рассмотрении вопросов строения и динамических свойств оболочек Земли. Самостоятельный интерес представляет изучение динамики границ геосфер, в особенности в зоне непосредственного контактного взаимодействия двух различных механизмов переноса тепла: конвективного в сравнительно маловязкой астеносфере и кондуктивного — в твердой литосфере.

В геодинамике принимается определение субдукции как “процесс погружения океанической литосферной плиты/слэба в мантию под континент или островную дугу” [1], где основными движущими механизмами динамики Земли выступают: заключенный в ней запас тепловой энергии [2], различие плотностей между холодной субдуцирующей плитой и окружающей мантией. Согласно положениям тектоники литосферных плит слэбом именуется выделяемый по данным сейсмотомографии фрагмент океанической литосферной плиты мощностью 80–100 км, погружающийся (субдуцируемый) в мантию при субдукции [3]. Зона субдукции хорошо прослеживается на сейсмотомографических профилях вплоть до границы верхней и нижней мантии (670 км) [4].

Математический аппарат для построения современных моделей динамики мантии основан на положениях механики сплошной среды, которые следуют квазигидродинамическим уравнениям в стоксовском приближении, уравнениям тепломассопереноса и, в большинстве случаев, принятием приближения Буссинеска (ОБ). Записи уравнений моделей разделяются способом представления погружающейся (субдуцированной) плиты как самостоятельного геодинамического объекта, постановкой граничных условий и принятием начальных распределений переменных.

Известен ряд способов представлений слэба. Так, в [5, 6] образом слэба выступает тонкая упругая пластина отрицательной плавучести. Такой подход допустим только для начальных слоев верхней мантии, где выполняются положения Кирхгофа о сохранении нормалей к срединной поверхности деформируемой плиты и сохранении ее толщины [7]. Тем не менее, результат сейсмического зондирования указывает на снижение толщины плиты [4] и нарушении остальных положений Кирхгофа.

При моделировании под слэбом обычно принимается холодный поток особой квазижидкости, динамика которой следует тем же уравнениям, что и модель мантийной конвекции [8–11]. Кроме того, не рассматривается этап его начального погружения в мантию.

Целью этой работы является изучение перестройки структуры мантийной конвекции, которая вызвана субдукцией. В работе слэб представляет самостоятельный модельный объект, динамика которого определяется

уравнениями Стокса. Учитываются потери слэбом его легких фракций и просочившихся сюда объемов морской воды. Расчет динамики мантийной конвекции и перестройка ее структуры выполнена в переменных завихренность-функция тока, а расчет динамики слэба- на основании метода сглаженных частиц (SPH).

1. МОДЕЛЬ ВЕРХНЕМАНТИЙНОЙ КОНВЕКЦИИ

Мантийная конвекция сочетает конкуренцию между диффузией тепла (теплопроводностью), сопротивлению движению (вязкостью) и выталкивающими силами (способностью к тепловому расширению) [12]. Модельным приближением верхней мантии выступает несжимаемая ньютоновская квазижидкость. Задача рассматривается в двумерной постановке в декартовой системе координат. Вследствие высокой вязкости мантии конвективные течения определяются уравнениями Стокса, безразмерная запись которых в терминах завихренность – функция тока принимает вид [13, 14]

$$\Delta \mu \xi - 2 [\mu_{xx} \psi_{yy} - 2\mu_{xy} \psi_{xy} + \mu_{yy} \psi_{xx}] - Ra \rho_x = 0, \quad (1)$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - \xi = 0, \quad (2)$$

$$T_t + (\psi_y T)_x - (\psi_x T)_y = \Delta T, \quad (3)$$

$$\rho_t + (\psi_y \rho)_x - (\psi_x \rho)_y = \chi_\rho \Delta \rho, \quad (4)$$

где безразмерные переменные принимают такой смысл: x, y – оси декартовой системы координат ($x = y = 0$ левый угол), ось y направлена вниз; t – безразмерное время; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный оператор Лапласа; $\mu(T, y)$, $\xi(x, y, t)$, $\psi(x, y, t)$, $\rho(x, y, t)$ – динамическая вязкость мантии, завихренность и функция тока мантийных течений, плотность мантии; $U(x, y, t) \equiv \psi_y$, $V(x, y, t) \equiv -\psi_x$, $T(x, y, t)$ – латеральная и вертикальная скорости мантийных течений, распределение температуры в мантии; Ra – численный параметр; χ_ρ – коэффициент диффузии плотности горных пород; нижние индексы переменных указывают на соответствующие одноименные частные производные.

Если для представления ρ_x используется приближение Буссинеска, то

$$Ra = g \bar{\rho} \beta_T (T_{\max} - T_{\min}) H^2 / \bar{\mu} \bar{U};$$

$\beta_T = 3.75 \cdot 10^{-5}$ [1/°C] – коэффициент линейного расширения вещества верхней мантии. Образование уравнений выполнялось стандартным образом (штрихом отмечены безразмерные переменные):

$$(x, y) = H \cdot (x, y)', \quad \mu = \bar{\mu} \cdot \mu', \quad T = (T_{\max} - T_{\min})^{-1} T', \quad t = H \chi^{-1} t',$$

$$\rho = \bar{\rho} \cdot \rho, \quad \chi = \lambda / \bar{\rho} C_P, \quad \bar{U} = H^{-1} \chi, \quad (U, V) = \bar{U} \cdot (U, V)',$$

где $\bar{\mu}$ – масштабный множитель вязкости, а \bar{U} – характерная скорость мантийных течений; $H = 6.7 \cdot 10^5$ м – глубина верхней мантии, $x_{\max} = 6.7 \cdot 10^6$ м – латеральная протяженность области вычислений; T_{\min}, T_{\max} – предельные значения мантийных температур; χ – температуропроводность мантии, λ – теплопроводность, а C_P – удельная изобарическая теплоемкость; $g = 9.8 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ – ускорение свободного падения. Далее в уравнениях модели штрихи опускаются. При этих значениях параметров $Ra = 5.745 \cdot 10^5$.

Характерные значения параметров среды модели принимают значения:

$$H = 6.7 \cdot 10^5 \text{ м}, \quad \bar{\mu} = 10^{23} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \chi = 2.88 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1},$$

$$\chi_\rho = 2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \bar{\rho} = 3.64 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}, \quad \bar{U} = 10^{-13} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Расчетная область представляет двумерную прямоугольную область декартовой системы координат. Принимается один и тот же характер граничных условий для температуры и плотности: отсутствие потоков тепла и вещества мантии на боковых границах области; ненулевые потоки на горизонтальных границах

$$T_x(0, y, t) = T_x(x_{\max}, y, t) = 0, \quad T_y(x, 0, t) = q_M, \quad T_y(x, 1, t) = q_C, \quad (5)$$

$$\rho_x(0, y, t) = \rho_x(x_{\max}, y, t) = 0, \quad \rho_y(x, 0, t) = Q_M, \quad \rho_y(x, 1, t) = Q_C,$$

где q_M, q_C, Q_M, Q_C – потоки тепла и вещества на верхней и нижней границах мантии. Для скоростей заданы условия прилипания на боковых границах

$$\psi(0, y, t) = \psi(x_{\max}, y, t) = 0, \quad \psi_n(0, y, t) = \psi_n(x_{\max}, y, t) = 0, \quad (6)$$

где ψ_n — производная по нормали к границам области. На участке верхней мантии, где океаническая плита движется к месту своего погружения и на всей нижней подошве мантии принимается условие проскальзывания

$$\psi(x, 0, t) = \psi(x, 1, t) = 0, \quad \partial^2 \psi(x \subseteq X, y = 0, t) / \partial n^2 = 0, \quad (7)$$

где X — участок верхней границы до участка погружения субдукции слэба.

Для решения эллиптических уравнений (1) и (2) используется метод установления, сущность которого состоит в применении псевдонестационарной трансформации уравнений в их параболические приближения [15]. Для чего вводится фиктивная времененная производная, которая выполняет роль параметра контроля квазинестационарных итераций.

2. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СЛЭБА

Анализ профилей сейсмомагнитографии [4] показывает существенное превышение протяженности слэба над его толщиной, что допускает представления его модельного образа посредством гибкого тонкого стержня и допустимость принятия независимости между латеральной и вертикальной скоростями субдукции. Принимается также гидростатичность состояния слэба. Погружение слэба происходит при условии $\rho^* - \rho > 0$, когда плотность слэба ρ^* превышает плотность мантии. Тогда модель субдукции можно определить такими безразмерными уравнениями:

$$(\eta u_x)_x - Ra_S y \rho_x^* = 0, \quad (8)$$

$$(\eta v_y)_y + Ra_S g(\rho^* - \rho) = 0, \quad (9)$$

$$T_t^* + (u T^*)_x + (v T^*)_y = k \cdot \Delta T^*, \quad (10)$$

$$\rho^* = \rho_0^* [1 - \beta_T (T_{\max}^* - T_{\min}^*) \cdot T^* - f(t, y)], \quad (11)$$

где $\eta(T, y)$ — вязкость слэба (порядка $10^{21} - 10^{23}$ Н · с · м⁻² [16]); $u(x, t), v(y, t), T^*(x, y, t), \rho^*(x, y, t)$ — его латеральная и вертикальная скорости погружения, температура и плотность слэба; y — безразмерная вертикальная координата; $\bar{u} = 1.6 \cdot 10^{-9}$ м · с⁻¹ — характерная скорость субдукции; k — коэффициент температуропроводности слэба; $Ra_S = g \bar{\rho} \frac{H^2}{\eta \bar{u}}$ — плотностное число Рэлея для слэба; $\rho_0^* = 4.6 \cdot 10^3$ кг · м⁻³ — масштаб изменения плотности слэба; для численного моделирования принимались следующие характерные значения параметров: $\bar{\eta} = 10^{25}$ Па · с, $k = 4.608 \cdot 10^{-3}$ м² · с⁻¹, $Ra_S = 2.392 \cdot 10^3$; $f(t, y)$ — безразмерная концентрация его легкого вещества, которая вследствие всплытия легких составляющих вещества слэба характеризует прирост его плотности.

При записи (8)–(11) принимается приближение вещества слэба смесью тяжелой и легкой компонент, динамика последних обусловлена следующим. Морская вода просачивается в океаническую литосферу через трещины и поры, где вступает в реакцию с минералами в земной коре и мантии с образованием водных минералов (таких как серпентин), которые накапливают воду в своих кристаллических структурах [17]. Объемы этой воды и флюиды слэба входят в состав его легких компонент. Поэтому различные трансформации таких минералов (в частности, формирование за счет выжимания воды из более плотных упаковок) можно интерпретировать как частичный фазовый переход вещества слэба. В дальнейшем локализация этого процесса уже в самой мантии приводит к аккумуляции таких флюидов, что в последующем может вызвать сейсмичность и плавление внутри субдуцируемой плиты, а далее и в вышележащем мантийном клине.

Глубинное повышение давления и прирост температуры среды приводят к всплытию легких компонент слэба и, как результату, росту концентрации его тяжелой составляющей и последующему росту плотности слэба. Механизм этого процесса видится в следующем. На верхних слоях мантии, где вещество слэба перенасыщено объемами просочившейся сюда морской воды (и, соответственно, легких компонент слэба), происходит массовое всплытие и формирование избыточных объемов высокотемпературных и насыщенных газами компонент последующего магматического очага. До момента, когда плотность слэба оказывается близкой плотности мантии, его погружение снижается и может совсем прекратиться. Происходит так называемая стагнация, максимальная зафиксированная глубина которой не превышает 700 км [4]. Области стагнации отчетливо прослеживаются также по гипоцентрам глубоких землетрясений. Далее по мере роста концентрации тяжелой компоненты происходит прорыв зоны стагнации и последующее затем погружение отдельных его частей вплоть до ядра земли [18].

Простая запись такого механизма здесь представлена в виде

$$f(t, y) = a_f(t) \cdot y \cdot \exp[-b_f(t) \cdot y], \quad (12)$$

где $a_f(t)$, $b_f(t)$ — некоторые неотрицательные функции. Максимальное значение этой функции

$$\max_y f(t, y) = y_f(t) \cdot \exp(-1)$$

достигается при $y_f(t) = a_f(t)/b_f(t)$, которое здесь допускает интерпретацию как глубины наибольшего оттока легких компонент слэба.

Для решения уравнений (8)–(10) требуется вычисление частных производных в достаточно тонкой криволинейной области (ее ширина 80–100 км) размещения слэба, что обусловливает применение адекватных бессеточных методов. В этой ситуации уместным видится применение бессеточного лагранжевого метода сглаженных частиц (SPH) [19]. Сущность метода состоит в интегральной интерполяции функций, которые представлены конечным множеством дискретных частиц. В рамках SPH интерполяционные соотношения для вычисления некоторой функции $\Phi(\mathbf{r})$, ее градиента и лапласиана для p -й частицы с текущей координатой \mathbf{r}_p определяются выражениями

$$\Phi(\mathbf{r}_p) = \sum_q^{Q(p)} \frac{m_q}{\rho_q} \Phi_q W(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|, h), \quad (13)$$

$$\nabla \Phi(\mathbf{r}_p) = \sum_p^{Q(p)} \frac{m_q}{\rho_q} \Phi_q \nabla W(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|, h), \quad (14)$$

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}_p) = \sum_q^{Q(p)} \frac{m_q}{\rho_q} (\Phi_p - \Phi_q) \left[\frac{1}{x_{pq}} \frac{dW_{pq}}{dx_q} + \frac{1}{y_{pq}} \frac{dW_{pq}}{dq} \right], \quad (15)$$

где p, q – порядковые номера частиц, $p, q = 1 \div N(t)$; $N(t)$ – текущее суммарное количество частиц метода; $Q(p)$ – совокупность частиц, которые оказываются соседними к p -й частице (методические вопросы построения этого набора рассмотрены в [20]); $x_{pq} = x_p - x_q$, $y_{pq} = y_p - y_q$ и $W_{pq} = W(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q|, h)$ – функция ядра, на основании которой аналитически рассчитываются производные в квадратных скобках; h – радиус сглаживания. Представление лапласиана $\Delta \Phi(\mathbf{r}_p)$ следует работе [21].

Для момента $t + 1$ координаты частиц определяются выражениями

$$x_p(t+1) = x_p(t) + dt \cdot u_p(t) \quad \text{и} \quad y_p(t+1) = y_p(t) + dt \cdot v_p(t), \quad (16)$$

где dt – временной шаг модели; $u_p(t)$, $v_p(t)$ – латеральная и вертикальная скорости частиц, которые при заданных начальных и граничных условиях определяются методом SPH из уравнений (10) и (11).

3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Вычислительная схема строилась на неравномерной по x и равномерной по y расчетных сетках

$$\omega_x = \{x_i = x_{i-1} + (h_x)_i, \quad i = 1 \div N_x, \quad x_0 = 0, \quad x_{N_x} = X_{\max}/H\},$$

$$\omega_y = \{y_j = y_{j-1} + h_y, \quad j = 1 \div N_y, \quad y_0 = 0, \quad y_{N_y} = 1\},$$

где $(h_x)_i$, h_y – длины соответствующих шагов сетки ($h_y = \text{const}$) сетки; N_x, N_y – число узлов вдоль каждого направления; вдоль направления x сетка стягивается в области ее центральной части; в расчетах принимается постоянный шаг Δt по времени. Параметры вычислительного процесса определяются значениями: при таких численных значениях параметров вычислений: $N_x = 100$, $N_y = 50$, $\Delta t = 10^{-4}$, $\Delta t = 10^{-6}$, $\Delta x = 9.67 \cdot 10^{-2}$, $\Delta y = 5.76 \cdot 10^{-2}$.

Здесь является параметром итераций решения уравнений (1), (2), (8) и (9) методом установления. Временной промежуток H/\bar{u} составляет $9.1324 \cdot 10^7$ лет (\bar{u} – характерный масштаб скорости погружения слэба). Число временных слоев $N_t = 2000$ и временной шаг $\Delta t = 4.132 \cdot 10^4$ лет.

Сеточные операторы $L_x, L_{xx}, L_{xy}, L_y, L_{yy}$ определяются выражениями

$$(L_x f)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{(h_x)_{i+1} - (h_x)_i}, \quad (L_{xx} f)_{i,j} = \frac{1}{\bar{h}_i} \left[\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{(h_x)_{i+1}} - \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{(h_x)_i} \right],$$

$$(L_{xy} f)_{i,j} = \frac{1}{2h_y} \frac{f_{i-1,j-1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j+1}}{(h_x)_i + (h_x)_{i+1}},$$

$$(L_y f)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h_y}, \quad (L_{yy} f)_{i,j} = \frac{f_{i,j-1} - 2f_{i,j} + f_{i,j+1}}{h_y^2},$$

где $i = 2 \div N_x - 1$, $j = 1 \div N_y$ и $\bar{h}_i = [(h_x)_i + (h_x)_{i+1}] / 2$; $i = 1$ и $i = N_x$, отвечают определению граничных условий.

Выражение для безразмерной вязкости верхней мантии и слэба здесь следует соотношению

$$\mu = \exp(-a_T T + b_Y y),$$

где $a_T = -0.2$ и $b_Y = 1.33$, см. [10].

Поскольку критерий устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви $(U/\Delta x^2 + V/\Delta y^2)dt$ решения уравнений системы здесь существенно меньше 1, то для решения уравнений (1)–(2) и (8)–(9) используются явные разностные схемы.

Разностная схема для уравнений мантийной конвекции принимает вид

$$\xi_{ij}^{s+1,n} = \xi_{ij}^{s,n} + \Delta\tau [(L_{xx} + L_{yy})(\mu\xi^{s,n})_{ij} - 2R_{ij}^{s,n} - RaL_x(\rho^{s,n})_{ij}], \quad (1')$$

$$R_{ij}^{s,n} = (L_{xx}\mu L_{yy}\psi^{s,n})_{ij} - 2(L_{xy}\mu L_{xy}\psi^{s,n})_{ij} + (L_{yy}\mu L_{xx}\psi^{s,n})_{ij},$$

$$\psi_{ij}^{s+1,n} = \psi_{ij}^{s,n} + \Delta\tau [-\xi_{ij}^{s,n} + (L_{xx} + L_{yy})\psi_{ij}^{s,n}], \quad (2')$$

$$T_{ij}^{n+1} = T_{ij}^n + \Delta_1 t [-L_x(UT)_{ij}^n - L_y(VT)_{ij}^n + (L_{xx} + L_{yy})T_{ij}^n], \quad (3')$$

$$\rho_{ij}^{n+1} = \rho_{ij}^n + \Delta_1 t [-L_x(U\rho)_{ij}^n - L_y(V\rho)_{ij}^n + \chi_\rho(L_{xx} + L_{yy})\rho_{ij}^n], \quad (4')$$

$$U_{ij}^{s+1,n} = L_y\psi_{ij}^{s,n}, \quad V_{ij}^{s+1,n} = -L_x\psi_{ij}^{s,n},$$

где верхний индекс n указывает текущее время t_n расчета; индекс s является параметром итерационного поиска решений уравнений методом установления; введение в расчеты временного шага $\Delta_1 t = 10^{-4} \Delta t$ вызвано проблемой синхронизации мантийной конвекции и субдукции (различием масштабов времени мантийной конвекции H/\bar{U} и субдукции H/\bar{u}).

Границные и начальные условия (5)–(7) записываются подобным образом.

В качестве функции ядра для расчета динамики субдукции использовался сплайн 3-й степени [19]

$$W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|, h) = \begin{cases} \frac{15}{\pi h^6} (h - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|)^3, & 0 < |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q| < h; \\ 0, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q| > h. \end{cases}$$

Вычислительные схемы строились на основании выражений (13)–(15)

$$\begin{aligned} u_p^{s+1,n} &= u_p^{s,n} + dt \left[\sum_q^{\mathcal{Q}(p)} \frac{m_q}{(\rho_q^*)^{s,n}} \eta_{pq} \left(\frac{u_p - u_q}{x_{pq}} \frac{dW_{pq}}{dx_q} \right)^{s,n} - Ra_S^{(D)} y_q (\rho_q^*)_x^{s,n} \right], \\ v_p^{s+1,n} &= v_p^{s,n} + dt \left[\sum_q^{\mathcal{Q}(p)} \frac{m_q}{(\rho_q^*)^{s,n}} \eta_{pq} \left(\frac{u_p - u_q}{y_{pq}} \frac{dW_{pq}}{dy_q} \right)^{s,n} - Ra_S^{(D)} ((\rho_q^*)^{s,n} - \rho_{ij}) \right], \\ T_p^{s+1,n} &= T_p^{s,n} + dt \left\{ \sum_q^{\mathcal{Q}(p)} \frac{m_q}{(\rho_q^*)^{s,n}} \lambda_{pq} \left[(T_p - T_q) \left(\frac{1}{x_{ba}} \frac{dW_{ba}}{dx_a} + \frac{1}{y_{ba}} \frac{dW_{ba}}{dy_a} \right) \right]^{s,n} \right\}, \\ (\rho_p^*)^{s+1,n} &= \rho_0^* \left\{ 1 - \beta_T (T_{\max}^* - T_{\min}^*) \sum_q^{\mathcal{Q}(p)} \left[\frac{m_q}{\rho_q^*} T_q^* W(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q, h) \right]^{s,n} - f(t, y_q) \right\}, \end{aligned}$$

где s — параметр итерационного поиска решений уравнений методом установления; $\eta_{pq} = \eta_p + \eta_q$ и $\lambda_{pq} = \lambda_p + \lambda_q$, λ_p — температуропроводность слэба; параметры функции $f(t, y_q)$ из (12) определяются значениями: $b_f = y_2^{-1}$ и $a_f = 0.2 \exp(1) \cdot b_f$; $\mathcal{Q}(p)$ — совокупность частиц, которые оказываются соседними к частице с номером p .

Алгоритм расчета $\mathcal{Q}(p)$ выполняется следующим образом. На каждой итерации поиска решения уравнений частицы размещаются в ячейки вычислительной схемы и далее, если частица с номером p попала в (i, j) ячейку, для нее вычисляется среднее расстояния между ее координатами и координатами частиц из ячеек (i, j) , $(i \pm 1, j \pm 1)$. К соседним частицам причисляются те из них, которые оказываются на расстоянии от рассматриваемой меньше этого среднего.

Вычислительный алгоритм состоит в следующем. Сначала в области вычислений устанавливается режим мантийной конвекции, для чего при заданных начальных и граничных условиях (5) на регулярной сетке находятся решения уравнений (1)–(4). Функция тока на границе мантия–слэб равна нулю, а значение завихренности на границах следует (6). Решение (8)–(11) выполняется по такой схеме. Для участка поступления слэба в мантию (ячейка $(x_A, 1)$ вычислительной схемы) формируется выборка частиц с фиксированным набором характеристик (скорость, температура, плотность). Чтобы избежать скопления частиц на этом участке, следующее формирование такой выборки происходит в момент, когда этот участок свободен от частиц предыдущей

выборки. Далее динамика частиц следует уравнениям (8)–(16). Воздействие мантийных течений на динамику субдукции здесь учитывается следующим образом. В пограничных для слэба ячейках среды размещаются выборки частиц с одним и тем же набором среднего для ячейки значением динамических переменных. Координаты частиц определяются случайным образом.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

При решении задач моделирования геодинамики встает проблема формирования начальных распределений переменных моделей, которая вызвана трудностями проведения натурных наблюдений. Проведение многообразных численных экспериментов с перебором вариантов значений переменных во многих случаях не дают полной картины рассматриваемых явлений. Да и указание точных значений переменных мало что дают. Более того, выборка начальных распределений уже сама изначально должна быть гетерогенной. Здесь численные значения атрибутов частиц определяются случайным образом на основании соответствующих диапазонов переменных модели (8)–(11): скорость $5 \div 8$ см/год; температура $(1000 \div 1500)$ °C; плотность $(3500 \div 3600)$ кг/м³; концентрация тяжелой компоненты рассчитывалась по формуле (11) подстановкой в ее левую часть значения плотности. Эти диапазоны были сформированы на основании литературных источников [1, 16, 24–27].

Для проведения вычислительных экспериментов такие начальные распределения для температуры и плотности определялись соотношениям

$$T(x, y, 1) = \frac{T^{(L)}(x, y)}{T_{\max} - T_{\min}} + \xi \cdot 10^{-2} \sin(\pi y) \cos(\pi x),$$

$$\rho(x, y, 1) = \frac{\rho^{(L)}(x, y)}{\bar{\rho}} + \xi \cdot 10^{-2} \sin(\pi y) \cos(\pi x),$$

где $T^{(L)}(x, y)$ и $\rho^{(L)}(x, y)$ формировались на базе литературных источников [22, 23]; ξ — равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина, полученная датчиком случайных чисел.

Результаты моделирования мантийной конвекции в зоне субдукции после 1000 и 1500 временных шагов представлены на фиг. 1, где крупные точки характеризуют координаты участков слэба (для наглядности здесь и далее масштаб функции тока увеличен в 10^4 раз). Для понимания особенностей распределений они представлены в непосредственной окрестности слэба.

Анализ показывает плавный характер течений, интенсивность которых растет с течением времени: скорость в центре конвективной ячейки для случая фиг. 1б почти в два раза выше случая фиг. 1а. Согласно условиям задачи, на границе области выполняется условие прилипания и равенство нулю функции тока. Поскольку граница между мантией и слэбом является непротекаемой, то на ней функция тока также обращается в нуль, что и приводит к плавному обтеканию профилей слэба.

Дальнейшее сопоставление случаев показывает уплотнение распределений значений функции тока и фрагментацию слэба, которая вызвана неравномерным распределением плотности вдоль его длины (она возрастает вследствие всплытия легкой компоненты и утяжелением с ростом глубины) и воздействием на слэб мантийных течений.

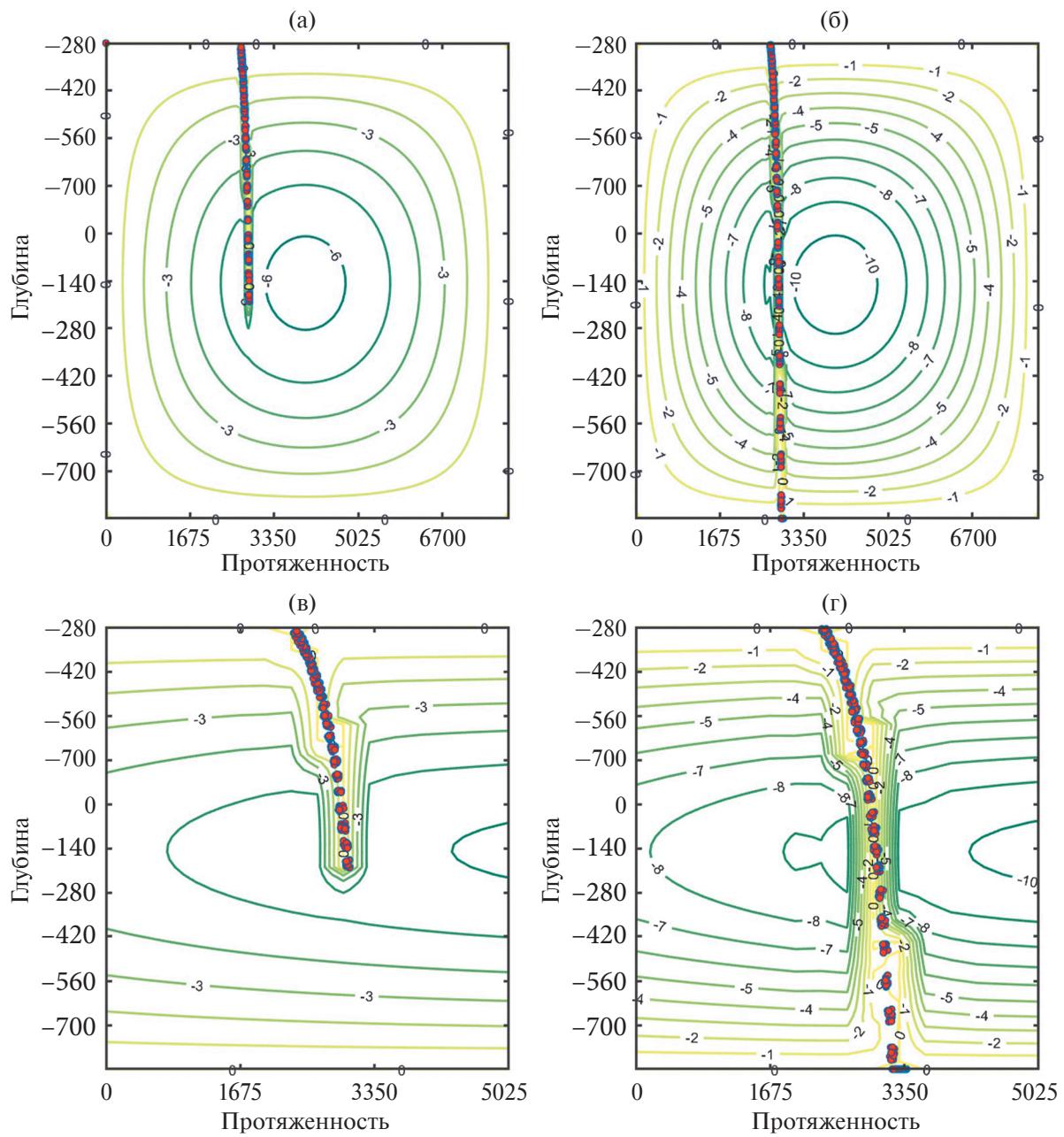
Погружение плиты в мантию (субдукция) вызывает разбиение исходной конвективной ячейки на ее две составляющие. В этой ситуации слэб реально выступает вертикальной “перегородкой”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается комплексная модель, составляющими которой выступает модель мантийной конвекции (уравнения завихренности, функции тока и уравнения тепломассопереноса) и пространственно-временная модель динамики слэба (уравнения скоростей, уравнения тепломассопереноса, для решения поставленной задачи выполнена адаптация метода SPH). Предлагается модель отделения из состава слэба его легких компонент, что приводит к росту плотности слэба и допускает интерпретацию как частичного фазового перехода его вещества.

Воздействие мантийных течений на динамику субдукции здесь учитывается дополнением модельного образа слэба наборами неразличимыми между собой частиц из примыкающих с ним в текущий момент ячеек мантии.

Воздействие на слэб мантийных течений и неравномерность распределения вдоль него плотности обуславливает его частичную фрагментацию



Фиг. 1. Распределения функции тока при t_{1000} (а), (в) и t_{1500} (б), (г).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А. Глубинная геодинамика. Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал “Гео”, 2001. 408 с.
2. Хайн В.Е. Об основных принципах построения подлинно глобальной модели динамики земли // Геология и геофизика. 2010. Т. 51. № 6. С. 753–760.
3. Кулаков И.Ю., Добрецов Н.Л., Бушенкова Н.А., Яковлев А.В. Форма слэбов в зонах субдукции под Курило-Камчатской и Алеутской дугами по данным региональной томографии // Геология и геофизика. 2011. Т. 52. № 6. С. 830–851.

4. *Fukao Y., Obayashi M., Nakakuki M.* Deep Slab Project Group. Stagnant Slab: A Review // Annual Review of Earth and Planetary Sciences. 2009. Vol. 37. P. 19–46.
5. *Тёркот Д., Шуберт Дж.* Геодинамика: Геологические приложения физики сплошных сред. Ч. 1. М.: Мир, 1985. 376 с.
6. *Гаврилов А.С., Харитонов С.В.* О субдукции амурской микроплиты и конвективном механизме выноса диссипативного тепла и углеводородов из мантийного клина в Охотское море к востоку от острова Сахалин // Вестник АН РБ. 2022. Т. 42. № 1. С. 5–12.
7. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Мир, 1966. 635 с.
8. *Cristensen U.* Convection with pressure- and temperature-depend non Newtonian rheology // Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1984. Vol. 77. № 2. P. 343–384.
9. *Gerya T.V., Yuen D.A.* Characteristics-based marker-in-cell method with conservative finite-differences schemes for modeling geological flows with strongly variable transport properties // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 2003. Vol. 140. P. 293–318.
10. *Трубицын В.П., Трубицын А.П.* Численная модель образования совокупности плит и их прохождение через границу 660 км // Физ. Земли. 2014. № 6. С. 138–147.
11. *Лобковский Л.И., Рамазанов М.М.* Исследование конвекции в верхней мантии, термомеханически связанный с зоной субдукции, и ее геодинамические приложения для Арктики и северо-восточной Азии // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 3. С. 139–150.
12. *Torrance, K. E., Turcotte, D. L.* Thermal convection with large viscosity variations // J. Fluid. Mech. 1971. Vol. 47. P. 113–125.
13. *Роуч П. Дж.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 618 с.
14. *Honda S., Yuen D.A.* Model for Convective Cooling of Mantle with Phase Changes: Effects of Aspect Ratios and Initial Conditions // J. Phys. Earth. 1994. Vol. 42. P. 165–186.
15. *Флемчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 553 с.
16. *Кирдяшкин А.А., Кирдяшкин А.Г.* Распределение температуры в субдуцирующей плите и в верхней мантии на континентальном крыле зоны субдукции // Геосферные исследования. 2023. № 1. С. 6–19.
17. *Frost D.* The Stability of Hydrous Mantle Phases // Reviews in Mineralogy & Geochemistry. 2006. Vol. 62. P. 243–271.
18. *Agrusta R., Goes S., van Humen J.* Subducting-slab transition zona interaction: Stagnant, penetration and mode switch // Earth and Planetary Science Letters. 2017. Vol. 464. P. 10–23.
19. *Monaghan J.J.* Smoothed particle hydrodynamics // Rep. Prog. Phys. 2005. Vol. 68. P. 1703–1759.
20. *Афанасьев К.Е., Макарчук Р.С., Попов А.Ю.* Алгоритм поиска ближайших соседей в методе сглаженных частиц и его параллельная реализация // Вычисл. технологии. 2005. Т. 13. № S5. С. 9–13.
21. *Brookshaw, L.* A Method of Calculating Radiative Heat diffusion in Particle Simulations // Proc. of the Astronomical Society of Australia. 1985. Vol. 6. P. 207–210.
22. *Dziewonski A.M., Andersen D.L.* Preliminary reference earth model // Phys. Earth Planet Inter. 1981. Vol. 25. P. 277–356.
23. *Сорохтин О.Г., Ушаков С.А.* Развитие Земли. Из-во МГУ, 2002. 506 с.
24. *Кирдяшкин А.А., Кирдяшкин А.Г., Добрецов Н.Л.* Влияние субдукции на структуру тепловых гравитационных течений в астеносфере под континентом // Геология и геофизика. 2000. Т. 41. № 2. С. 207–219.
25. *Кирдяшкин А.А., Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г.* Экспериментальное моделирование влияния субдукции на пространственную структуру конвективных течений в астеносфере под континентом // Докл. АН. 2002. Т. 384. № 5. С. 682–686.

26. Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А. Геодинамическая и тепловая модель зоны субдукции // Физ. мезомехан. 2009. Vol. 12. № 1. С. 5–16.
27. Royden L.H., Husson L. Subduction with Variations in Slab Buoyancy: Models and Application to the Banda and Apennine Systems // Subduction zone geodynamics. Berlin: Springer-Verlag, 2009. P. 35–46. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-87974-9>

MODELING UPPER MANTLE CONVECTION IN THE SUBDUCTION ZONE

A. N. Chetyrbotskii^{a,*}

^a*Far East Geological Institute of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, 690022 Russia*

**e-mail: Chetyrbotsky@yandex.ru*

Received: 18 August 2024

Revised: 29 August 2024

Accepted: 20 September 2024

Abstract. A model of upper mantle convection in the subduction zone of a cold lithospheric plate (subduction) into the Earth's upper strata is developed. The issues of constructing the initial distributions of model variables are discussed. Computational schemes for solving the model equations are given. Calculation of dynamics of mantle convection and reorganization of its structure are performed in the vorticity-current function variables, and dynamics of the plate subduction is calculated on the basis of the smoothed-particle hydrodynamics method (SPH). A series of computational experiments are performed.

Keywords: mantle convection, Stokes equations, heat and mass transfer, fictitious domain method, smoothed-particle hydrodynamics (SPH)

УДК 532.51

SPATIAL OPTIMAL DISTURBANCES OF THREE-DIMENSIONAL AERODYNAMIC BOUNDARY LAYERS¹⁾

© 2025 г. А. В. Boiko¹, К. В. Demyanko¹, S. A. Kusnetsova^{1,2}, Yu. M. Nechepurenko^{1,*}, G.V. Zasko¹

¹119333 Moscow, Gubkin str., 8, Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, 141701 Russia

*e-mail: yumnech@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.08.2024 г.

Переработанный вариант 16.08.2024 г.

Принята к публикации 26.09.2024 г.

In the present paper, we propose a numerical method for modeling the downstream propagation of optimal disturbances in compressible boundary layers over three-dimensional aerodynamic configurations. At each integration step, the method projects the numerical solution of governing equations onto an invariant subspace of physically relevant eigenmodes; and the numerical integration is performed along the lines of disturbance propagation. The propagation of optimal disturbances is studied in a wide range of parameters for two configurations: a boundary layer over a swept wing of finite span, and a boundary layer over a prolate spheroid. It is found that the dependence of the disturbance energy amplification on the spanwise wavenumber has two local maxima. It is discussed how to combine the developed method with the modern approaches, which are designed to predict the onset of laminar-turbulent transition using the e^N -method.

Ключевые слова: compressible boundary layers, spatial optimal disturbances, bypass transition, boundary layer over a swept wing, boundary layer over a prolate spheroid, e^N -method.

DOI: 10.31857/S0044466925010093, EDN: CCNNQV

1. INTRODUCTION

One of the possible scenarios of the laminar-turbulent transition is the so-called bypass scenario, which is accompanied by the development of quasi-stationary disturbances dominated by the streamwise velocity component. Such disturbances are called streaks or streaky structures. Usually, the bypass scenario takes place at a high degree of the freestream turbulence.

The streaks develop from streamwise vortices due to the lift-up effect [1]–[3]. The lift-up effect is one of the main physical mechanisms responsible for a disturbance energy growth at finite time (or space) intervals [4]. Mathematically, this phenomenon is caused by the non-orthogonality of eigenmodes of the linearized system governing the small-amplitude disturbance propagation [5]. For some specific disturbances, the transient energy growth might be of significant magnitude. The disturbance achieving maximum energy amplification at finite time intervals is called an optimal disturbance [6]–[9]. In particular, the optimal disturbances allow estimating various disturbance characteristics within the bypass scenario [10].

Spatial, both stationary and traveling, optimal disturbances of incompressible laminar boundary layers were first computed for the Blasius boundary layer [10, 11]. In these studies, it is taken into account that the main flow is non-parallel, i.e. the boundary layer thickness increases downstream. The spatial optimal disturbances are found for the Poiseuille flow in a circular pipe [12] and a plane channel [13], and for the boundary layer over a weakly concave surface [14]. In addition, optimal disturbances are studied for viscous incompressible jets [15, 16]. For compressible boundary layers, the spatial optimal disturbances were first computed in the work [17], with the local-parallel approximation being applied. For all these main flows with the disturbance parameters ensuring that any individual eigenmode decays downstream, it is shown that the maximum energy amplification is achieved by stationary vortices either periodic in spanwise direction or periodic in azimuthal direction (for the circular-pipe flow). The downstream propagation of optimal disturbances is studied both for the incompressible Falkner–Skan–Cooke boundary layer [18] and the compressible boundary layer with local self-similarity [19]. In these studies, non-parallel boundary layers are considered as well, and a variant of PSE method is used for describing the downstream propagation of disturbances. At parameter values ensuring the main boundary-layer linear instability, it is shown that the energy growth of optimal disturbances might exceed the growth predicted for modal instabilities by several orders of magnitude. In addition, the maximum energy amplification is achieved by traveling disturbances.

¹⁾ The work is supported by Russian Science Foundation (Grant No. 22–11–00025).

In the most studies mentioned above, the downstream propagation of small-amplitude disturbances is governed by equations, where the streamwise viscous dissipation terms as well as the streamwise pressure gradient are regarded as negligible. The equations thus obtained are parabolic, and the streamwise initial-value problem is well-posed for them. There is another approach, which does not require neglecting these terms in original equations. Namely, for modeling the downstream propagation of disturbances, one can project the numerical solution onto a subspace of physically relevant eigenmodes. This idea [17] is developed [20–22] by the authors, who use the abbreviation OWNS (One-Way spatial integration of the Navier–Stokes equations) for this class of numerical methods. In the present paper, we use an original implementation of this approach, where the spectral projector [23] is computed at each integration step to exclude the contribution of non-physical modes. The non-physical modes are defined as those propagating upstream and growing downstream at large rates [24]. This method was tested for the downstream propagation of both Tollmien–Schlichting waves and Goertler vortices in the non-parallel boundary layer over a slightly concave plate [24, 25].

In all the above-mentioned studies, the non-modal stability analysis is performed for canonical main flows, which depend either on one or two spatial coordinates. The present paper aims at the development of an approach for the non-modal stability analysis of compressible boundary layers over three-dimensional aerodynamic configurations. This approach can be served as a basis for predicting the onset of the bypass laminar-turbulent transition in engineering applications. In addition, the paper discusses how to integrate this approach into a modern technology of the transition prediction by the e^N -method with the example of such a technology proposed in the work [26]. By the developed approach, we compute the spatial optimal disturbances for two three-dimensional aerodynamic configurations: a boundary layer over a swept wing of finite span, and a boundary layer over a prolate spheroid. Such a computation is done for the first time.

Over the last ten years, the authors of the present paper have been developing LOTRAN [26, 27], a software package designed for computing the position of the laminar-turbulent transition for three-dimensional aerodynamic boundary layers over flow-exposed bodies of small curvature. LOTRAN is widely used both for fundamental scientific research and for engineering purposes [26, 28–31]. The coupling structure of LOTRAN is presented in Fig. 1.

LOTRAN is designed to work together with any CFD-code that computes a laminar-turbulent flow over a given flow-exposed body, using some turbulence model (e.g., $k-\omega$ SST [32]) and a given intermittency distribution. To compute the transition position, an iterative process starts. At each iteration, the laminar-turbulent flow is computed by CFD-code, with zero intermittency being set for the assumed laminar domain (and slightly downstream) and unit intermittency being set elsewhere. The obtained laminar-turbulent flow data, such as velocity components, pressure, temperature, and intermittency, are taken as an input for the *Main Flow* module; this module interpolates the data from the CFD-code

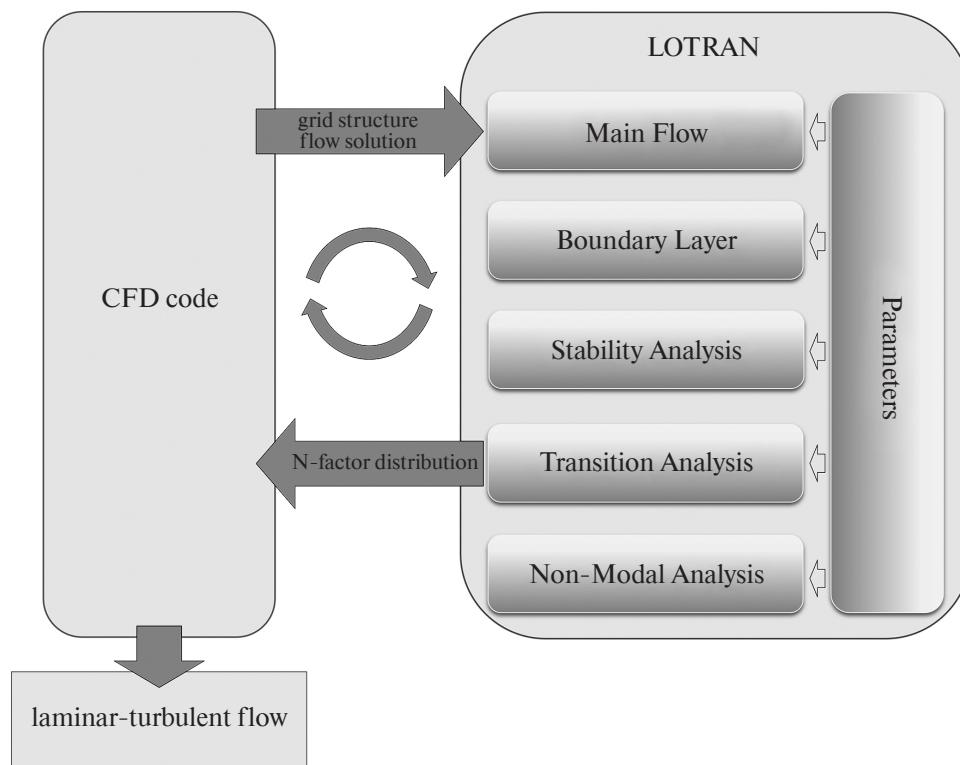


Fig. 1. The coupling structure of LOTRAN, the software package used.

grid to a tetrahedral grid. Next, the *Boundary Layer* module constructs 2D-slices along disturbance propagation lines in the domain of interest on the body surface. The procedure for constructing the slices is described in detail in the work [26]. Then, this module introduces curvilinear orthogonal coordinates along the slices, constructing a computational grid within these coordinates and interpolating the flow data to that grid from the previous tetrahedral grid. Then, for each slice, the *Stability Analysis* module computes the neutral stability curves as well as the growth rates of the most unstable local modes being harmonic in time and spanwise coordinate. The downstream propagation of small-amplitude disturbances is governed by the viscous compressible heat-and-mass-transfer equations linearized with respect to the main flow [27]. These equations are briefly described in Section 2 of the present paper. Then, along each slice, the *Transition Analysis* module finds the transition onset by the e^N -method and evaluates the transition length. These results are given to the CFD-code to set a new intermittency distribution, and hence compute a new laminar-turbulent flow. Such an iterative process stops when the transition position converges with an acceptable accuracy.

Section 3 describes a numerical method for computing the spatial optimal disturbances of three-dimensional boundary layers. A new module, *Non-Modal Analysis*, implements this method within LOTRAN. The optimal disturbances are computed along the same slices as for the modal analysis. To this end, we numerically solve streamwise initial-value problems for the same small-amplitude disturbance propagation equations as within the modal analysis, while the original method [24, 25] is used for the numerical integration. As a result of the numerical integration with different initial values, we find the matrix of fundamental solutions. This matrix allows computing the spatial optimal disturbances, using the discrete analogue of the total energy density functional [17, 33].

Each slice consists of a few surface normals with the main flow data. These normals are called main normals. The distance between the adjacent main normals approximately equals the streamwise size of grid cells, which are used for the main-flow computation. However, such a distance is usually not small enough to be chosen as the streamwise integration step for modeling the downstream propagation of disturbances. Therefore, we introduce additional uniform grids between the main normals assuming that the main flow does not change between the adjacent main normals. The matrix of fundamental solutions between any two main normals is obtained by the multiplication of those between the adjacent main normals. This allows us to naturally parallelize the algorithm as well as to reduce the computational cost of parametric computations. Specifically, if all matrices of fundamental solutions between the adjacent main normals are found, then the optimal disturbances might be found efficiently for given pair of generation and observation points.

Section 4 shows the results of numerical experiments with the proposed numerical method and the two above-mentioned configurations. In the range of spanwise wavenumbers favorable for the development of crossflow vortices, it is shown that the energy amplification has an additional local maximum with the spanwise wavenumber being small. This phenomenon was previously observed in the laboratory experiments [34] for a swept wing, but was not confirmed numerically. For a prolate spheroid, this effect has not previously been found either experimentally or numerically. Section 5 summarizes the results of the present paper.

Throughout the present paper, $\|\cdot\|_2$ denotes the 2-norm for vectors and matrices, I denotes the identity matrix whose order is clear from the context, and ' $*$ ' denotes the symbol of conjugate transposition.

2. GOVERNING EQUATIONS

In the Cartesian coordinates (x_1, x_2, x_3) , let us consider the non-dimensional governing equations of viscous compressible media, which represent the conservation law of momentum, energy and mass, and the ideal gas law. Written with the tensor summation convention, these equations are as follows

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= -(\gamma - 1)\rho T \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\gamma}{Pr Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \gamma(\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \Pi, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} &= 0, \\ p &= \rho T, \end{aligned} \quad (2.1)$$

where

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Pi = \sigma_{ij} e_{ij}.$$

Here u_j are the velocity components, ρ is the density, p is the static pressure, T is the temperature, μ and λ are the first and second viscosity coefficients, κ is the thermal conductivity, and γ is the adiabatic index. The Prandtl number, Mach

number and Reynolds number are defined as

$$\text{Pr} = \frac{c_p \mu_{\text{ref}}}{\kappa_{\text{ref}}}, \quad M = \frac{U_{\text{ref}}}{\sqrt{\gamma R T_{\text{ref}}}}, \quad \text{Re} = \frac{U_{\text{ref}} L_{\text{ref}} \rho_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}}, \quad (2.2)$$

where the specific gas constant is denoted by R , and the specific heat at constant pressure by c_p . Here the subscript ref refers to dimensional scales, with L_{ref} and U_{ref} denoting referential length and velocity scales. We assume that both the dynamic viscosity $\mu = \mu(T)$ and the heat conductivity $\kappa = \kappa(T)$ in (2.1) depend only on temperature, with these dependencies being given explicitly [27, 35]. For the second viscosity coefficient, the Stokes hypothesis $\lambda = -2\mu/3$ is assumed.

Suppose the system (2.1) has a stationary solution with the velocity components \bar{u}_i , temperature \bar{T} , density $\bar{\rho}$, pressure \bar{p} , and the coefficients $\bar{\mu} = \mu(\bar{T})$, $\bar{\lambda} = \lambda(\bar{T})$ and $\bar{\kappa} = \kappa(\bar{T})$. In the sequel, such a stationary solution is called the main flow. The propagation of small-amplitude disturbances against the main flow is governed by the following linearized equations [27]

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \rho' \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}, \\ \bar{\rho} \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \rho' \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} &= \\ = -(\gamma - 1) \left(\bar{\rho} \left(\bar{T} \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} + T' \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \rho' \bar{T} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\gamma}{\text{PrRe}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\kappa} \frac{\partial T'}{\partial x_j} + \bar{\kappa}_T T' \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \gamma(\gamma - 1) \frac{M^2}{\text{Re}} \Pi', \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} u'_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho' \bar{u}_j}{\partial x_j} &= 0, \\ p' &= \bar{\rho} T' + \rho' \bar{T}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

where

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= 2\bar{\mu} e'_{ij} + 2\bar{\mu}_T T' \bar{e}_{ij} + (\bar{\lambda} e'_{kk} + \bar{\lambda}_T T' \bar{e}_{kk}) \delta_{ij}, \\ e'_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right), \\ \Pi' &= \bar{\sigma}_{ij} e'_{ij} + 2\bar{\mu} e'_{ij} \bar{e}_{ij} + 2\bar{\mu}_T T' \bar{e}_{ij} \bar{e}_{ij} + (\bar{\lambda} e'_{kk} \bar{e}_{ij} + \bar{\lambda}_T T' \bar{e}_{kk} \bar{e}_{ij}) \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Here the disturbance velocities are denoted by u'_i , the disturbance temperature by T' , the disturbance density by ρ' , the disturbance pressure by p' , and $\bar{f}_T = df/dT(\bar{T})$.

Within LOTRAN, the modal stability analysis is performed for laminar boundary layers over surfaces of small curvature. The disturbance propagation is studied along the boundary-layer slices (see Introduction), where the following curvilinear orthogonal coordinates are used: y is the distance to the surface along the normal, x is the arc length from the beginning of the slice to the base of this normal along the slice, and z is the spanwise coordinate. The main flow is assumed to be computed by a CFD-code. As for the referential dimensional scales in (2.2), we use those of the freestream. The dimensionless numbers (2.2) thus defined are denoted by Pr_∞ , M_∞ and Re_∞ .

We assume that the main flow does not depend on z along the slice, and hence only disturbances of the form

$$\text{Real}\{\phi e^{i(\beta z - \omega t)}\}, \quad (2.4)$$

are considered, where ω is the angular frequency, β is the spanwise wavenumber, and t is the time. Here ϕ is the complex-valued vector of disturbance amplitudes that consists of the streamwise, normal and spanwise velocities, the pressure, and the temperature; and these amplitudes depend only on x and y . We also assume that the surface curvature is small, and the normal velocity of the main flow is negligible. In addition, we apply the local-parallel approximation, i.e. the main-flow components depend on x , but their derivatives on x are regarded as negligible.

Based on (2.3) but under the above-mentioned assumptions, one can derive [27] the equations governing the propagation of disturbance amplitudes of the form (2.4). In the present paper, we use these equations, with the disturbance amplitudes satisfying zero boundary conditions at $y = 0$ and $y = \infty$.

Optimal disturbances are computed along the boundary-layer slices, assuming that the disturbances are of the form (2.4). The downstream propagation of the optimal disturbances is governed by the same equations [27] as for the modal stability analysis.

3. NON-MODAL ANALYSIS

The governing equations, which are discussed in Section 2, are approximated in the normal direction y by a collocation method. Then, the disturbance amplitudes become vector functions depending only on x ; and we keep the same notation

for the disturbance amplitudes both before and after the spatial approximation. After the approximation, the disturbance amplitudes satisfy the system of ordinary differential equations [27]

$$A \frac{d^2\phi}{dx^2} + B \frac{d\phi}{dx} + (i\omega C - D) \phi = 0. \quad (3.1)$$

Here A , B , C and D are square x -dependent matrices of order $5n_y$, where n_y is the number of the interior grid nodes in the normal direction. It is worth noting that A is a diagonal matrix whose last n_y diagonal entries are zero, and C is a nearly-diagonal matrix. Let us introduce four additional variables that represent the derivatives with respect to x of the disturbance velocity components and temperature. Then, equation (3.1) might be rewritten as the system of first-order ordinary differential equations

$$M(x) \frac{d\mathbf{q}}{dx} = \mathbf{q}, \quad (3.2)$$

where $M(x)$ is an x -dependent matrix of order $9n_y$, and $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x)$ is a $9n_y$ -component vector function.

Optimal disturbances largely depend on a functional, which is used for the optimization [36]. In the studies [17, 19, 33] of optimal disturbances of compressible boundary layers, the functional

$$\mathcal{E} = \int_0^{+\infty} \bar{\rho} (|u|^2 + |v|^2 + |w|^2) + \frac{\bar{T}}{\gamma M_\infty^2 \bar{\rho}} |\rho|^2 + \frac{\bar{\rho}}{\gamma(\gamma-1) M_\infty^2 \bar{T}} |T|^2 dy \quad (3.3)$$

of total disturbance energy density is used, where u is the streamwise velocity amplitude, v is the normal velocity amplitude, w is the spanwise velocity amplitude, ρ is the density amplitude, and T is the temperature amplitude. Note that both the main-flow density $\bar{\rho}$ and the main-flow temperature \bar{T} depend both on y and x , in general. Within LOTRAN, the disturbance pressure p appears in the governing equations instead of the disturbance density ρ . Using the relation

$$p = \bar{\rho}T + \bar{T}\rho \quad (3.4)$$

that comes from the ideal gas law, the discrete analogue of (3.3) might be rewritten as $\mathbf{q}^* E \mathbf{q}$, where $E = E(x)$ is an x -dependent Hermitian matrix of rank $5n_y$.

3.1. Downstream integration

Each slice consists of a few main normals with the main flow data. We introduce additional uniform grids between the main normals with the same number of interior grid nodes n_x ; and it is assumed that the main flow does not change between the adjacent main normals. The streamwise coordinates of the main normal bases are denoted by $x_1 < x_2 < \dots$, the subgrid step by $h_j = (x_{j+1} - x_j)/(n_x + 1)$, and the subgrid nodes by $x_{j,k} = x_j + (k - 1)h_j$.

Consider the streamwise initial-value problem for the system (3.2) with the initial node x_j , the final node x_{j+1} , and the initial condition $\mathbf{q}(x_j) = \mathbf{q}_j$. At x_j , we compute the system matrix $M_j = M(x_j)$ and use it at each integration step. The initial-value problem allows for non-physical solutions growing downstream at large rates and propagating upstream [17]. To exclude such solutions, we use standard numerical schemes combined with the spectral projection such as that for viscous incompressible flows [24, 25]. We project the numerical solution onto an invariant subspace of M_j corresponding to the physically relevant subset Λ_j of its spectrum.

The subset Λ_j consists of all eigenvalues λ satisfying the inequality $\text{Real}(1/\lambda) \leq 0.8 |\beta|$, where β is the spanwise wavenumber [26]. This estimation is based on considering the asymptotic behavior of the branches of continuous spectrum of the problem [17]. It can be shown analytically that for the part of continuous spectrum in the right half-plane (corresponding to the upstream traveling disturbances) $\text{Imag}(1/\lambda) \geq |\beta|$. The coefficient 0.8 is introduced just to be on the safe side to guarantee that no upstream traveling mode is present in Λ_j . Note that in the cases under consideration linear instability occurs only at quite large values of $|\beta|$. Meanwhile, as our tests showed, the leading discrete mode always has $\text{Real}(1/\lambda) \leq 0.8 |\beta|$. Outside of the linear instability region the inequality can be changed to $\text{Real}(1/\lambda) \leq 0$. Numerical experiments show that the physically relevant eigenvalues thus defined are well separated from the non-physical ones [24].

The spectral projectors at each j are computed using the Schur decomposition [37] of M_j . The spectral projector thus computed appears as $P_j = X_j Y_j$ [23], where X_j is a rectangular matrix whose columns form the orthonormal basis in the invariant subspace of M_j corresponding to the subset Λ_j , and Y_j is a rectangular matrix ensuring the following identities

$$X_j Y_j M_j = X_j S_j Y_j = M_j X_j Y_j, \quad Y_j X_j = I$$

being valid, where $S_j = X_j^* M_j X_j$ is the restriction of M_j to the invariant subspace.

At the first integration step we use the implicit Euler method modified as follows

$$\tilde{\mathbf{q}}_{j,1} = \mathbf{Y}_j \mathbf{q}_j, \quad S_j \frac{\tilde{\mathbf{q}}_{j,2} - \tilde{\mathbf{q}}_{j,1}}{h_j} = \tilde{\mathbf{q}}_{j,2},$$

where \mathbf{q}_j is the solution at the j -th main normal. At other integration steps, we use the BDF-2 scheme modified as follows

$$S_j \frac{3\tilde{\mathbf{q}}_{j,k} - 4\tilde{\mathbf{q}}_{j,k-1} + \tilde{\mathbf{q}}_{j,k-2}}{2h_j} = \tilde{\mathbf{q}}_{j,k}.$$

After the last step done, we put $\mathbf{q}_{j+1} = P_{j+1} X_j \tilde{\mathbf{q}}_{j,n_x+2}$.

To compute the matrix of fundamental solutions Φ_j between normals j and $j+1$, we take the columns of the identity matrix as the initial condition $\tilde{\mathbf{q}}_{j,1}$. Then, the columns of Φ_j are the vectors $\tilde{\mathbf{q}}_{j,n_x+2}$, with the matrix Φ_j satisfying the equality $\mathbf{q}_{j+1} = P_{j+1} X_j \Phi_j Y_j \mathbf{q}_j$ for any initial condition \mathbf{q}_j . Thus, one can represent the numerical solution of the streamwise initial-value problem between the j_g -th and j_o -th main normals as

$$\mathbf{q}_{j_o} = P_{j_o} X_{j_o-1} \Phi_{j_o-1} Y_{j_o-1} \dots X_{j_g} \Phi_{j_g} Y_{j_g} \mathbf{q}_{j_g} = X_{j_o} F_{j_g, j_o} Y_{j_g} \mathbf{q}_{j_g},$$

where

$$F_{j_g, j_o} = Y_{j_o} X_{j_o-1} \Phi_{j_o-1} \dots Y_{j_g+1} X_{j_g} \Phi_{j_g}.$$

3.2. Computation of optimal disturbances

We say that the optimal disturbance is a disturbance being generated at $x = x_{j_g}$ and achieving the maximum energy amplification at $x = x_{j_o}$. In the sequel, x_{j_g} is called the generation point, and x_{j_o} is called the observation point. In addition, we suppose that the optimal disturbance belongs to an invariant subspace of physically relevant eigenmodes of a given dimension m . This invariant subspace is constructed in two steps. First, we select the subset Λ_{j_g} of the spectrum of M_{j_g} , as described above. Next, among the eigenvalues of Λ_{j_g} , we select m ones having the largest values of Real ($1/\lambda$) and use the obtained set instead of Λ_{j_g} , keeping the same notation. Since the rank of the matrix $E(x)$ is equal to $5n_y$, then m should not exceed $5n_y$. For numerical experiments, we choose $m = 2n_y$, since for a fixed number of grid nodes n_y , the maximum disturbance energy amplification converges with further increase in m .

The optimal disturbance is computed by solving the problem that consist in maximizing the energy amplification of disturbances from the subspace associated with Λ_{j_g} :

$$\max_{\mathbf{q}_{j_g} = P_{j_g} \mathbf{q}_{j_g} \neq 0} \frac{\mathbf{q}_{j_g}^* E_{j_o} \mathbf{q}_{j_o}}{\mathbf{q}_{j_g}^* E_{j_g} \mathbf{q}_{j_g}}, \quad (3.5)$$

where $E_j = E(x_j)$.

By L_j denote the lower triangular matrix that forms the factorization $E_j = L_j^* L_j$. Let $L_j X_j = Q_j R_j$ be the QR-decomposition [37] with the unitary rectangular matrix Q_j and the upper triangular matrix R_j . Let $\tilde{\mathbf{q}}_j = Y_j \mathbf{q}_j$ and $\mathbf{u}_j = R_j \tilde{\mathbf{q}}_j$. Then

$$\frac{\mathbf{q}_{j_g}^* E_{j_o} \mathbf{q}_{j_o}}{\mathbf{q}_{j_g}^* E_{j_g} \mathbf{q}_{j_g}} = \frac{\|L_{j_o} \mathbf{q}_{j_o}\|_2^2}{\|L_{j_g} \mathbf{q}_{j_g}\|_2^2} = \frac{\|L_{j_o} X_{j_o} \tilde{\mathbf{q}}_{j_o}\|_2^2}{\|L_{j_g} X_{j_g} \tilde{\mathbf{q}}_{j_g}\|_2^2} = \frac{\|R_{j_o} F_{j_g, j_o} R_{j_g}^{-1} \mathbf{u}_{j_g}\|_2^2}{\|\mathbf{u}_{j_g}\|_2^2}.$$

Therefore, the solution of the problem (3.5) is reduced to computing the largest singular value of the matrix $R_{j_o} F_{j_g, j_o} R_{j_g}^{-1}$ and the corresponding normalized right singular vector $\mathbf{u}_{j_g}^{\text{opt}}$. The optimal disturbance in physical variables is then computed by the formula $\mathbf{q}_{j_g}^{\text{opt}} = X_{j_g} R_{j_g}^{-1} \mathbf{u}_{j_g}^{\text{opt}}$, and its downstream propagation is governed by the formula $\mathbf{q}_j^{\text{opt}} = X_j F_{j_g, j} Y_j \mathbf{q}_{j_g}^{\text{opt}}$ for $j \geq j_g$. At the same time, the value

$$\mathcal{E}_j(x_{j_g}, x_{j_o}) = (\mathbf{q}_j^{\text{opt}})^* E_j \mathbf{q}_j^{\text{opt}} = \|\mathbf{u}_j^{\text{opt}}\|_2^2$$

is the total energy density of the optimal disturbance at a point $x = x_j$. For the point x_{j_o} , the maximum N -factor among disturbances generated at x_{j_g} is thus equal to

$$N_{\max}(x_{j_g}, x_{j_o}) = \frac{1}{2} \ln \mathcal{E}_j(x_{j_g}, x_{j_o}).$$

4. RESULTS

This section discusses results of the computation of optimal disturbances for two configurations illustrated in Fig. 2 in the global Cartesian coordinates (X, Y, Z):

A) the windward surface of swept wing at an angle of attack of -5° . The wing has the modified NACA 67 1-215 laminarized airfoil with a chord length (normal to the leading edge) of 0.7 m, and 45° sweep angle. The freestream parameters are as follows: the velocity $U_\infty = 27$ m/s, the density $\rho_\infty = 1.18$ kg/m³, and the kinematic viscosity $\nu_\infty = 1.57 \times 10^{-5}$ m²/s. Such parameter values correspond to the Reynolds number $Re_\infty = 1.72 \times 10^6$ and the Mach number $M_\infty = 0.08$. This configuration corresponds to experiments [38, 39] on the laminar-turbulent transition in boundary layers over the swept wing SW-45 at various angles of attack. Data on the considered laminar boundary layer are computed [26, 40, 41] by ANSYS Fluent in a digital analogue of the test section of the T-324 wind tunnel of ITAM SB RAS.

B) prolate spheroid at an angle of attack of $+10^\circ$. The spheroid has a length of 2.4 m, and an aspect ratio of 6 : 1 : 1. The freestream parameters are as follows: the velocity $U_\infty = 45$ m/s, the density $\rho_\infty = 1.23$ kg/m³, and the kinematic viscosity $\nu_\infty = 1.50 \times 10^{-5}$ m²/s. Such parameter values correspond to the Reynolds number $Re_\infty = 7.20 \times 10^6$ and the Mach number $M_\infty = 0.13$. This configuration corresponds to experiments [42, 43] on the laminar-turbulent transition in boundary layers over bodies of revolution. Data on the considered laminar boundary layer are computed [26] using ANSYS Fluent.

The boundary layer stability is analyzed along the slices shown in Fig. 2. Profiles of the streamwise and spanwise velocity components of the main flow near the surface along these slices are shown in the local orthogonal coordinates in Fig. 3. The zero of the streamwise local coordinate x coincides with the beginning of the slice. The spanwise velocity is large enough (up to 7% of the streamwise velocity) for the development of vortices of the crossflow instability [44]. In the present paper, the stability of the boundary layers is studied at zero angular frequency and the values of the spanwise wavenumber typical to the development of stationary crossflow vortices. In all numerical experiments, we fix the disturbance generation point $x_{j_g} = 0$ as the beginning of the slice, with the observation point $x_{j_o} > 0$ being varied.

In the (x_{j_o}, β) -plane, Fig. 4 shows the level lines of the maximum N -factors, $N_{\max}(0, x_{j_o})$, of the optimal disturbances for both configurations, as well as the points at which a growth of stationary crossflow vortices is observed. It is seen that for both configurations, the regions of modal and non-modal instability have a significant overlap. At the same time, at relatively small values of β and sufficiently large values of x_{j_o} , only the non-modal instability is observed, although it is characterized by relatively small maximum N -factors. This is further illustrated in Fig. 5, which shows the dependence of the maximum N -factors on $-\beta$ for a fixed x_{j_o} . It is seen that, in addition to the global maximum in the spanwise wavenumber, the dependence has a local maximum associated with the optimal disturbance that has a small spanwise

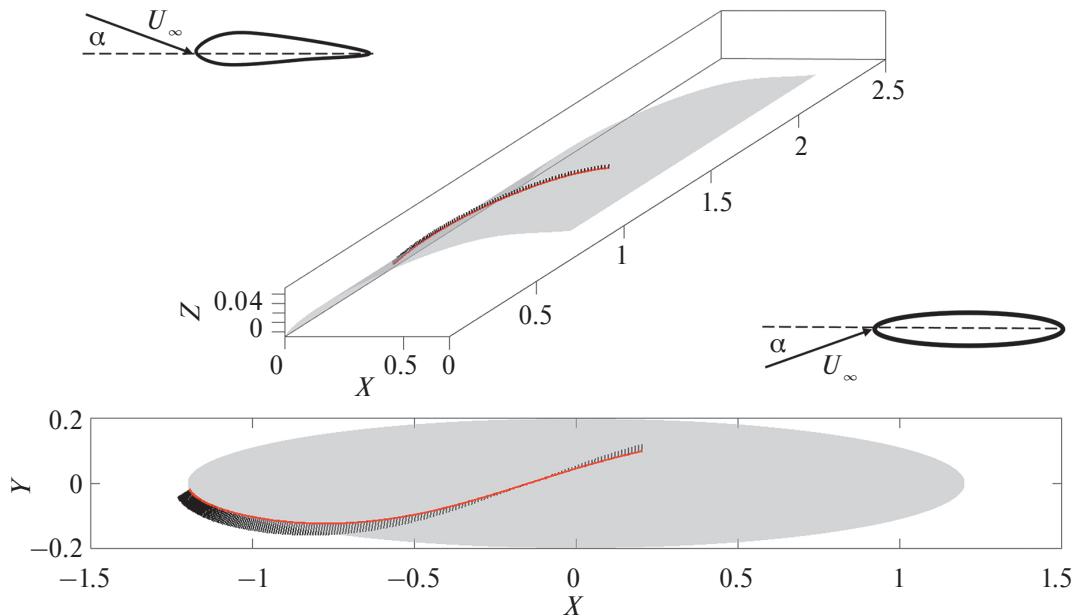


Fig. 2. The windward surface of the swept wing (top), the side surface of the prolate spheroid (bottom), and the slices along which the boundary layer stability is studied. The slices are formed by external normals (black) to the flow-exposed surface (gray) along the line of disturbance propagation, with the projection of that line onto the surface being shown in red.

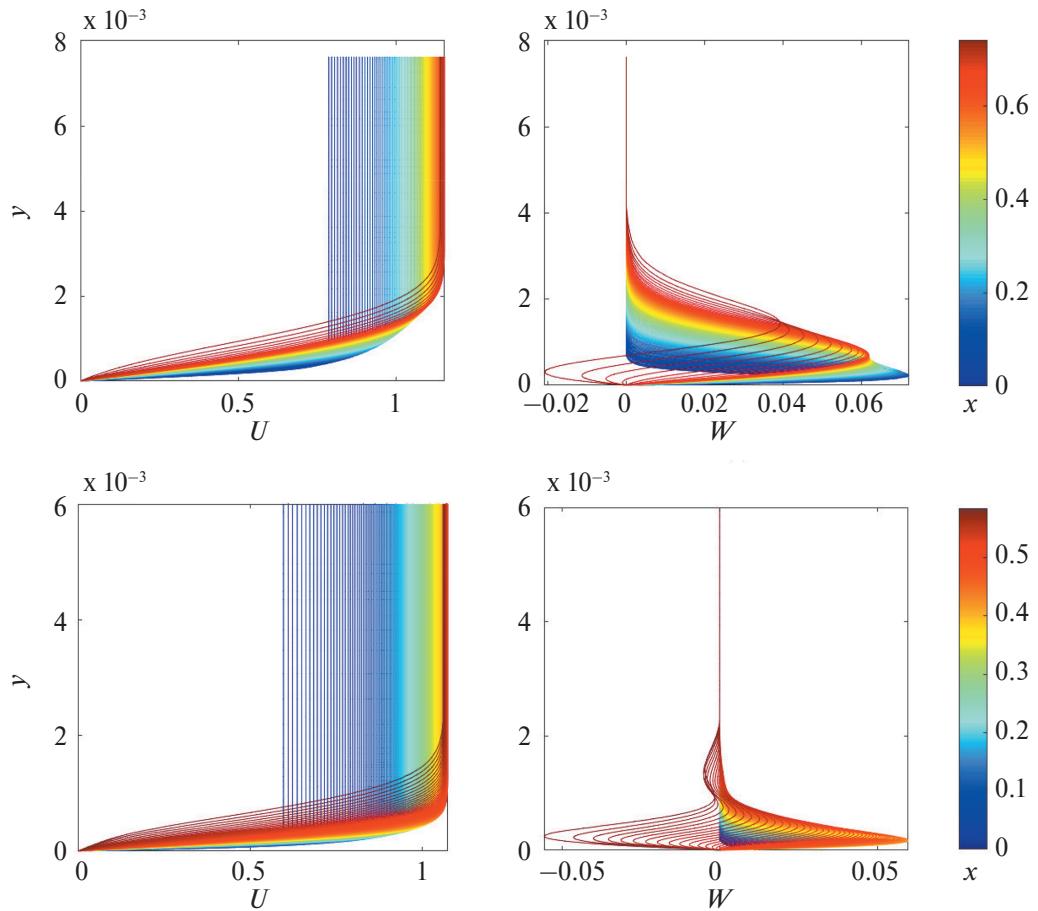


Fig. 3. Streamwise (first column) and spanwise (second column) velocity of the main flow near the surface along the slice on the swept wing (top) and the prolate spheroid (bottom). Line colors correspond to values of the streamwise coordinate x .

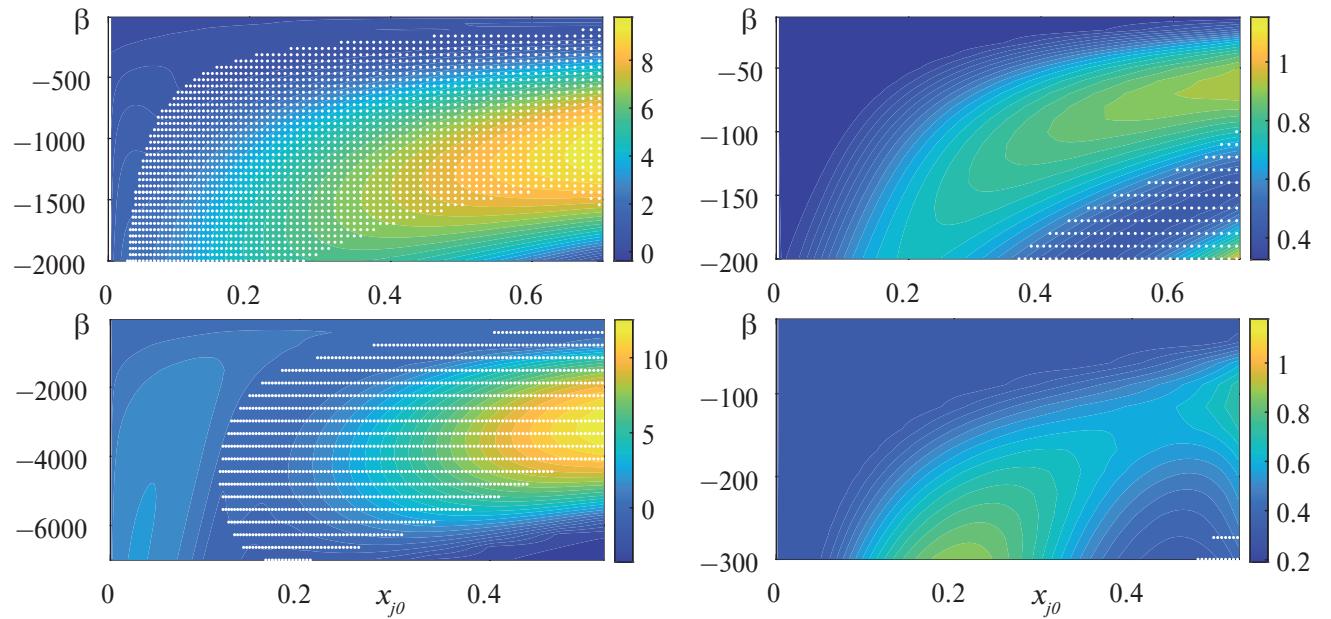


Fig. 4. Level lines of the maximum N -factors, $N_{\max}(0, x_{j_0})$, of the optimal disturbances in the boundary layer along the slice on the swept wing (top) and the prolate spheroid (bottom) in the (x_{j_0}, β) -plane. The white points denote the values x_{j_0} and β at which the stationary crossflow vortices grow. The right column shows the results at small β .

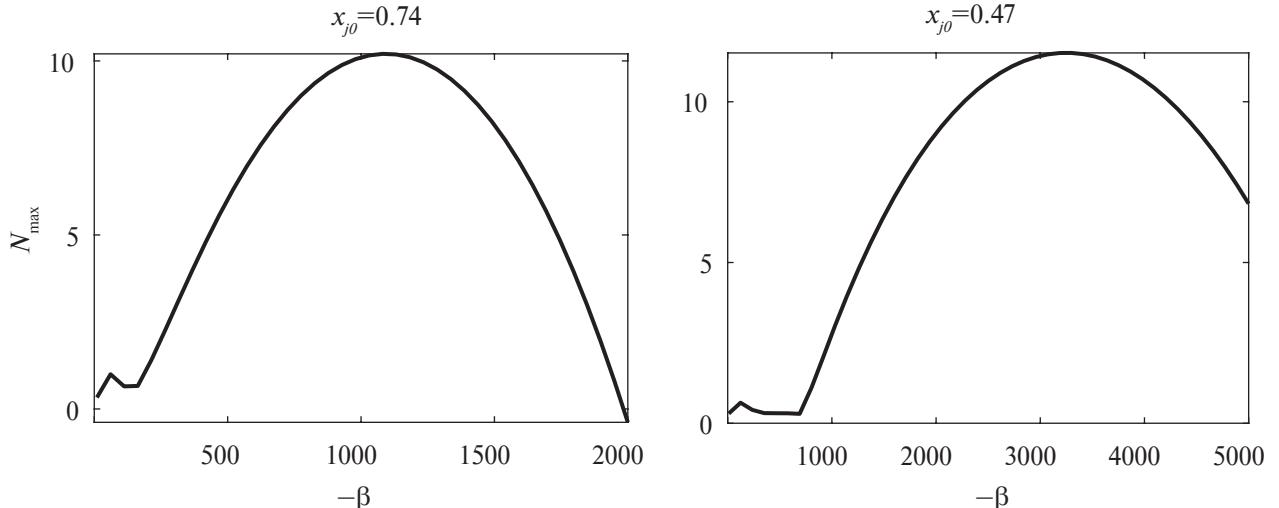


Fig. 5. Dependence of the maximum N -factors, $N_{\max}(0, x_{j_0})$, of the optimal disturbances on $-\beta$ for a fixed observation point, x_{j_0} , in the boundary layer along the slice on the swept wing (left) and the prolate spheroid (right).

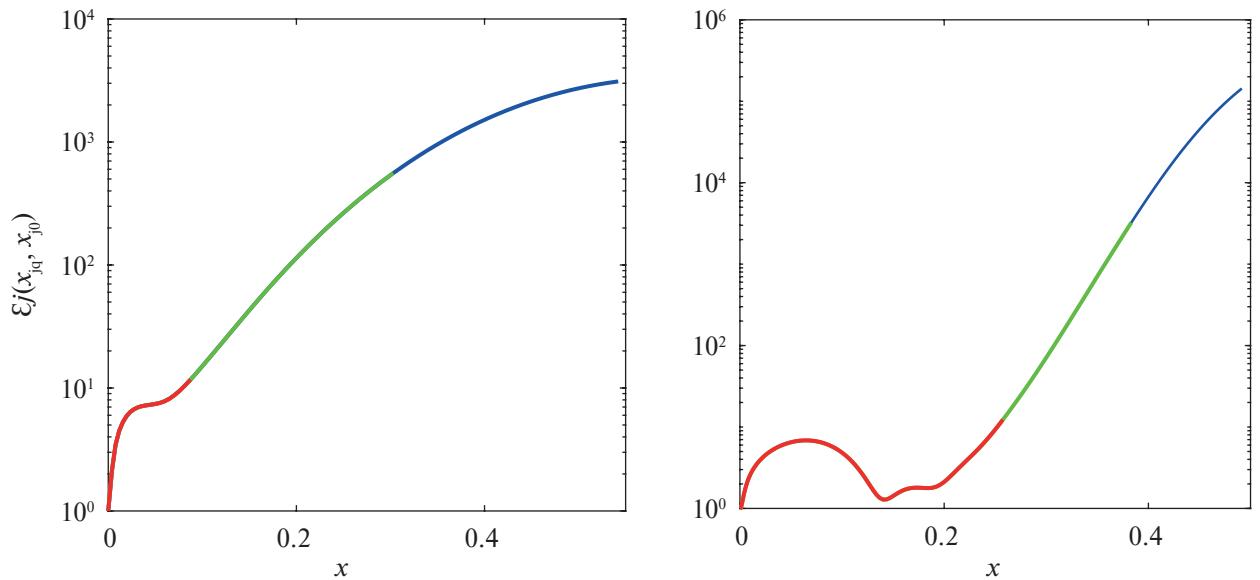


Fig. 6. Dependence on x of the total energy density amplification, $\mathcal{E}_j(x_{j_q}, x_{j_0})$, of the optimal disturbances corresponding to various observation points: $x_{j_0} = 0.09$ (red), $x_{j_0} = 0.30$ (green), and $x_{j_0} = 0.54$ (blue) for the swept wing (left) at $\beta = -1500$; and $x_{j_0} = 0.26$ (red), $x_{j_0} = 0.38$ (green), $x_{j_0} = 0.49$ (blue) for the prolate spheroid (right) at $\beta = -3000$.

wavenumber and does not contain modes growing downstream. For the boundary layer over the swept wing, the obtained result is in qualitative agreement with the experimental observation [34], while for that over the prolate spheroid this effect is discovered for the first time. Note that this effect suggests the possibility of bypass transition for the considered configurations.

Fig. 6 shows the dependence of the total energy density amplification of optimal disturbances on x computed for various observation points. Fig. 7 shows the absolute values of the disturbance velocity components. It is seen that at spanwise wavenumbers specific to the development of stationary crossflow vortices, the optimal disturbance weakly depends on the observation point. In addition, as it is seen from Fig. 8, the shape of the developed optimal disturbance is close to that of the leading local mode.

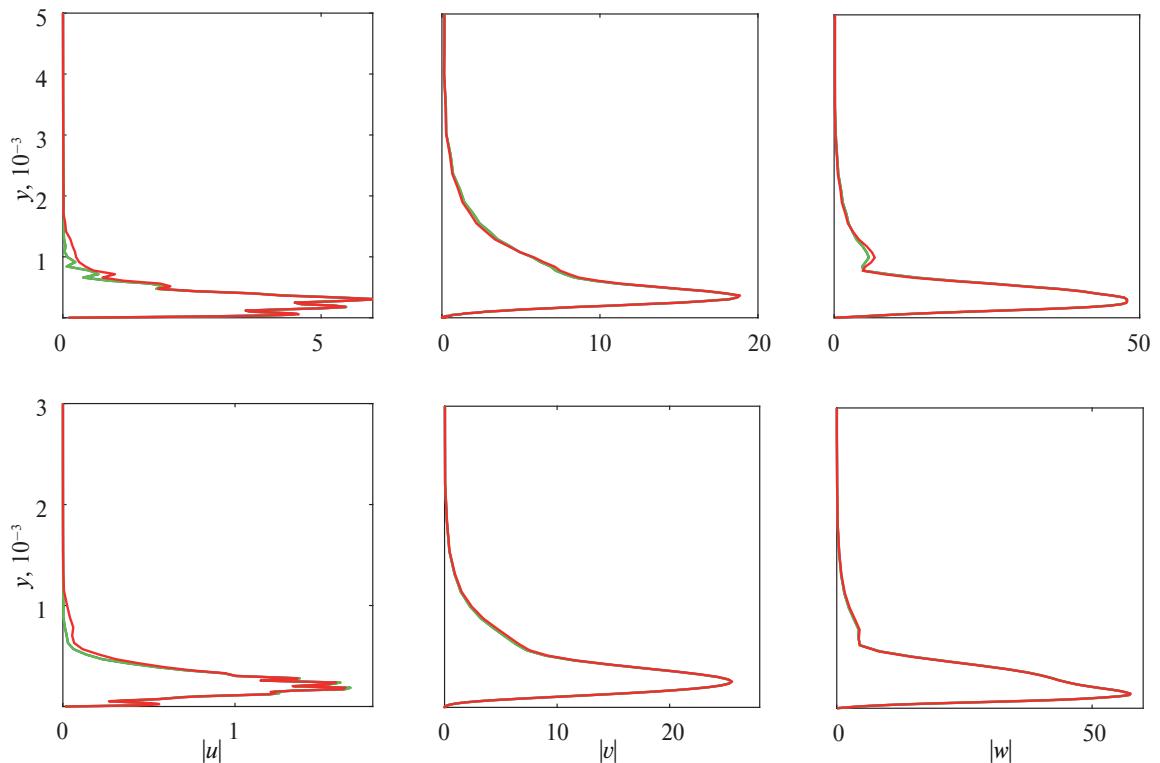


Fig. 7. The absolute values of the velocity components of optimal disturbances corresponding to various observation points: $x_{j_o} = 0.09$ (red), $x_{j_o} = 0.30$ (green), and $x_{j_o} = 0.54$ (blue) for the swept wing (top) at $\beta = -1500$; and $x_{j_o} = 0.26$ (red), $x_{j_o} = 0.38$ (green), $x_{j_o} = 0.49$ (blue) for the prolate spheroid (bottom) at $\beta = -3000$.

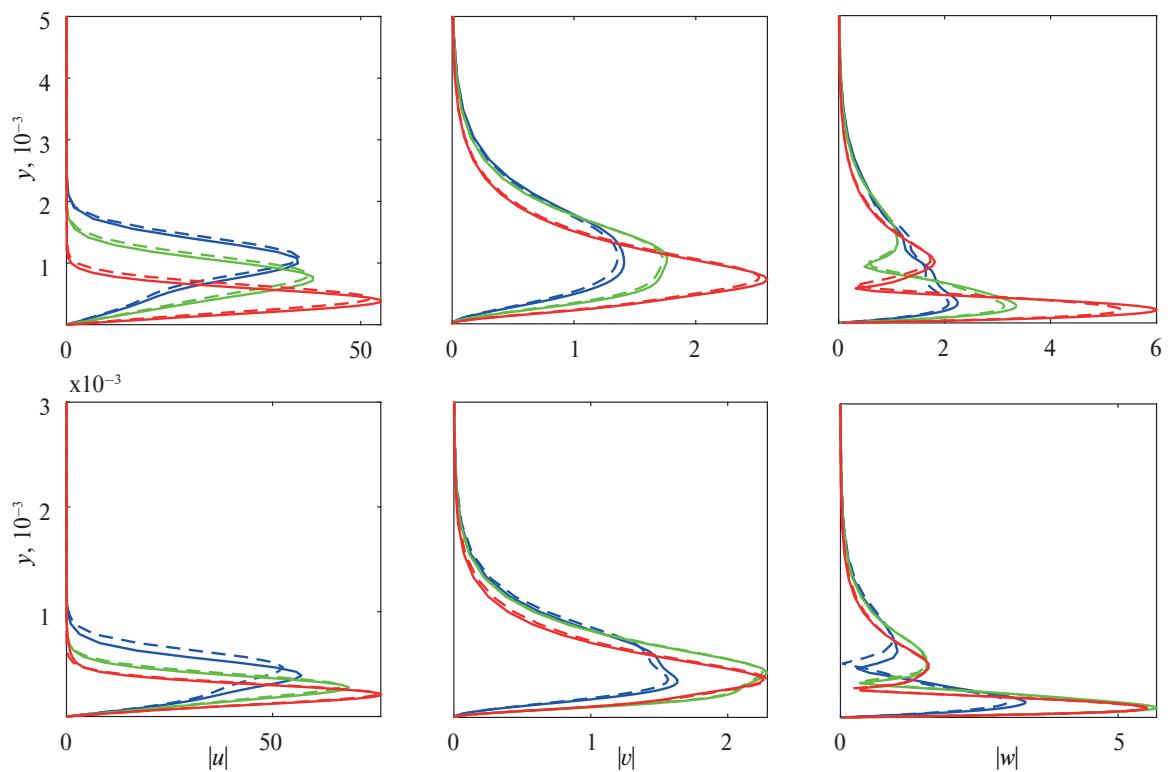


Fig. 8. The absolute values of the velocity components of the developed optimal disturbance (solid) and the leading local mode (dashed) corresponding to various observation points: $x_{j_o} = 0.09$ (red), $x_{j_o} = 0.30$ (green), and $x_{j_o} = 0.54$ (blue) for the swept wing (top) at $\beta = -1500$; and $x_{j_o} = 0.26$ (red), $x_{j_o} = 0.38$ (green), and $x_{j_o} = 0.49$ (blue) for the prolate spheroid (bottom) at $\beta = -3000$.

5. CONCLUSION

Using an original numerical method, we compute for the first time the downstream propagation of optimal disturbances for two three-dimensional aerodynamic configurations: a boundary layer over a finite-span swept wing, and a boundary layer over a prolate spheroid. The basis of this method is the projection of the solution to an initial-value problem, which governs the propagation of the disturbances, onto an invariant subspace of physically significant eigenmodes at each step of numerical integration along the selected lines of disturbance propagation.

In this work, the stability of the boundary layers was studied at zero angular frequency. It is shown that there are two maxima of the disturbance energy amplification in spanwise wavenumbers. One of them corresponds to the development of stationary vortices of the crossflow instability, and the other one, at lower values of the spanwise wavenumber, corresponds to the non-modal instability, previously observed in experiments on a swept wing.

Additionally, the presented examples show that the proposed method can serve as a basis for an engineering approach to the non-modal spatial stability analysis of various boundary layers. In particular, the proposed method is prospective for predicting the bypass laminar-turbulent transition within the framework of existing engineering approaches based on the modal stability analysis by the e^N -method.

REFERENCES

1. *Landahl M.T.* Wave breakdown and turbulence // SIAM J. Appl. Math. 1975. V. 28. № 4. P. 735–756.
2. *Ellingsen T., Palm E.* Stability of linear flow // Phys. Fluids. 1975. V. 18. № 4. P. 487–488.
3. *Landahl M.T.* A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows // J. Fluid. Mech. 1980. V. 98. № 2. P. 243–251.
4. *Brandt L.* The lift-up effect: the linear mechanism behind transition and turbulence in shear flows // Eur. J. Mech. B/Fluid. 2014. V. 47. P. 80–96.
5. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and Transition in Shear Flows. Springer, 2001. 558 pp.
6. *Farrell B.F.* The initial growth of disturbances in a baroclinic flow // J. Atmos. Sci. 1982. V. 39. P. 1663–1686.
7. *Farrell B.F.* Optimal excitation of neutral Rossby waves // J. Atmos. Sci. 1988. V. 45. № 2. P. 163–172.
8. *Farrell B.F.* Optimal excitation of baroclinic waves // J. Atmos. Sci. 1989. V. 46. № 9. P. 1193–1206.
9. *Farrell B.F.* Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow // Phys. Fluid. 1988. V. 31. № 8. P. 2093–2102.
10. *Andersson P.A., Berggren M., Henningson D.S.* Optimal disturbances and bypass transition in boundary layers // Phys. Fluid. 1999. V. 11. № 1. P. 134–150.
11. *Luchini P.* Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations // J. Fluid. Mech. 2000. V. 404. P. 289–309.
12. *Reshotko E., Tumin A.* Spatial theory of optimal disturbances in a circular pipe flow // Phys. Fluid. 2001. V. 13. P. 991–996.
13. *Biau D., Bottaro A.* Transient growth and minimal defects: Two possible initial paths of transition to turbulence in plane shear flows // Phys. Fluid. 2004. V. 16. № 10. P. 3515–3529.
14. *Boiko A.V., Ivanov A.V., Kachanov Yu.S., Mischenko D.A., Nechepurenko Yu.M.* Excitation of unsteady Gortler vortices by localized surface nonuniformities // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2017. V. 31. № 1. P. 67–88.
15. *Boronin S.A., Healey J.J., Sazhin S.S.* Non-modal stability of round viscous jets // J. Fluid Mech. 2013. V. 716. P. 96–119.
16. *Ivanov O.O., Ashurov D.A., Gareev L.R., Vedeneev V.V.* Non-modal perturbation growth in a laminar jet: An experimental study // J. Fluid Mech. 2023. V. 963. A8.
17. *Tumin A., Reshotko E.* Spatial theory of optimal disturbances in boundary layers // Phys. Fluids. 2001. V. 13. P. 2097–2104.

18. Tempelmann D., Hanifi A., Henningson D.S. Spatial optimal growth in three-dimensional boundary layers // J. Fluid Mech. 2010. V. 646. P. 5–37.
19. Tempelmann D., Hanifi A., Henningson D.S. Spatial optimal growth in three-dimensional compressible boundary layers // J. Fluid Mech. 2012. V. 704. P. 251–279.
20. Towne A., Colonius T. One-way spatial integration of hyperbolic equations // J. Comp. Phys. 2015. V. 300. P. 844–861.
21. Rigas G., Colonius T., Beyar M. Stability of wall-bounded flows using one-way spatial integration of Navier-Stokes equations // 55-th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Grapevine, Texas. AIAA Paper. 2017. № 2017–1881.
22. Zhu M., Towne A. Recursive one-way Navier-Stokes equations with PSE-like cost // J. Comp. Phys. 2023. V. 473. P. 111744.
23. Godunov S.K. Modern Aspects of Linear Algebra. American Mathematical Society, Providence, USA, 1998.
24. Zasko G.V., Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M. Simulating the propagation of boundary-layer disturbances by solving boundary-value and initial-value problems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2024. V. 39. № 1.
25. Boiko A.V., Demyanko K.V., Zasko G.V., Nechepurenko Yu.M. On parabolization of equations governing small disturbances in 2D boundary layers // Thermophys. Aeromechanics. 2024. V. 31 (accepted).
26. Boiko A.I., Demyanko K.V., Kirillovskiy S.V., Nechepurenko Yu.M., Poplavskaya T.V. Modeling of transonic transitional three dimensional flows for aerodynamic applications // AIAA J. 2021. V. 59. P. 1–13.
27. Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M. On computing the location of laminar-turbulent transition in compressible boundary layers // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32. P. 1–12.
28. Boiko A.V., Demyanko K.V., Inozemtsev A.V., Kirillovskiy S.V., Nechepurenko Yu.M., Paduchev A.P., Poplavskaya T.V. Determination of the Laminar–Turbulent Transition Location in Numerical Simulations of Subsonic and Transonic Flows Past a Flat Plate // Thermophys. Aeromechanics. 2019. V. 26. № 5. P. 629–637.
29. Kirillovskiy S.V., Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M., Poplavskaya T.V., Sidorenko A.A. On integrating the LOTRAN 3.0 package into the ANSYS fluent CFD software // AIP Conf. Proc. 2019. V. 2125. Art. 030098.
30. Poplavskaya T.V., Boiko A.V., Demyanko K.V., Kirillovskiy S.V., Nechepurenko Yu.M. Numerical simulation of the transition to turbulence in subsonic and transonic flows // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1359. Art. 012068.
31. Kirillovskiy S.V., Boiko A.V., Demyanko K.V., Ivanov A.V., Nechepurenko Yu.M., Poplavskaya T.V. Numerical simulation of the laminar-turbulent transition on a swept wing in a subsonic flow // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1359. Art. 012070.
32. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994. V. 32. P. 1598–1605.
33. Hanifi A., Schmid P.J., Henningson D.S. Transient growth in compressible boundary layer flow // Phys. Fluid. 1996. V. 8. P. 826–837.
34. Boiko A.V. Swept-Wing Boundary Layer Receptivity to a Steady Free-Stream Vortex Disturbance // Fluid Dynamics. 2002. V. 37. P. 37–45.
35. Mack L.M. Boundary-layer Linear Stability theory // In AGARD Report No. 709: Special course on stability and transition of laminar flow. 1984. P. 3–81.
36. Schmid P.J. Nonmodal stability theory // Ann. Rev. Fluid Mech. 2007. V. 39. P. 129–162.
37. Golub G.H., van Loan C.F. Matrix Computations (4-th ed.). London: John Hopkins University Press. 2013. 784 p.
38. Ivanov A.V., Mischenko D.A., Boiko A.V. Method of the description of the laminar-turbulent transition position on a swept wing in the flow with an enhanced level of free-stream turbulence // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2020. V. 61. P. 250–255.
39. Boiko A.V., Ivanov A.V., Borodulin V.I., Mischenko D.A. Quantification technique of transition to turbulence in boundary layers using infrared thermography // Int. J. Heat Mass Transf. 2022. V. 183. P. 122065.

40. Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M., Zasko G.V. On the use of probability-based methods for estimating the aerodynamic boundary-layer thickness // Fluid. 2021. V. 6. № 8. P. 267.
41. Kirilovskiy S.V., Boiko A.V., Demyanko K.V., Nechepurenko Yu.M., Poplavskaya T.V. Simulation of the laminar-turbulent transition in the boundary layer of the swept wing in the subsonic flow at angles of attack // AIP Conf. Proc. 2020. V. 2288. P. 1–6.
42. Kreplin H.P., Vollmers H., Meier H.U. Measurements of the wall shear stress on an inclined prolate spheroid // Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 1982. V. 6. P. 248–252.
43. Meier H.U. Experimental investigation of the boundary layer transition and separation on a body of revolution // Z. Flugwiss. Weltraumforsch. 1980. V. 4. P. 65–71.
44. Boiko A.V. Receptivity of boundary layers to free stream axial vortices. DLR: Gottingen, Germany, 2000. IB 223–2000 A10. 60 p.

SPATIAL OPTIMAL DISTURBANCES OF THREE-DIMENSIONAL AERODYNAMIC BOUNDARY LAYERS

A. V. Boiko^a, K. V. Demyanko^a, S. A. Kusnetsova^a, Yu. M. Nechepurenko^{a,*}, and G.V. Zasko^a

^a*G. I. Marchuk Institute of Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia*
**e-mail: yumnech@yandex.ru*

Received: 16.08.2024

Revised: 16.08.2024

Accepted: 26.09.2024

Abstract. In this work, a numerical method for modeling the downstream propagation of optimal disturbances in compressible boundary layers over three-dimensional aerodynamic is proposed. At each integration step, the method projects the numerical solution of governing equations onto an invariant subspace of physically relevant eigenmodes, and the numerical integration is performed along the lines of disturbance propagation. The propagation of optimal disturbances is studied in a wide range of parameters for two configurations, viz a boundary layer over a swept wing of finite span and a boundary layer over a prolate spheroid. The dependence of the disturbance energy amplification on the spanwise wavenumber is found to have two local maximums. It is discussed how to combine the developed method with the modern approaches, which are designed to predict the onset of laminar–turbulent transition using the e^N -method.

Keywords: compressible boundary layers, spatial optimal disturbances, bypass transition, boundary layer over a swept wing, boundary layer over a prolate spheroid, e^N -method

УДК 519.635

ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ СКВОЗЬ ПРИСТЕНОЧНЫЙ СТАЦИОНАРНЫЙ ЗЕРНИСТЫЙ СЛОЙ В ФОРМЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СТУПЕНИ¹⁾

© 2025 г. О.Б. Гуськов^{1,*}

¹ 1125040 Москва, Ленинградский пр-т, 7/1, Институт прикладной механики РАН, Россия
*e-mail: ogskv@mail.ru

Поступила в редакцию 12.12.2023 г.

Переработанный вариант 25.09.2024 г.

Принята к публикации 28.09.2024 г.

Рассматривается задача о течении идеальной жидкости вдоль плоской поверхности при наличии на ней неподвижного зернистого слоя в форме полубесконечной ступеньки конечной толщины, состоящей из бесконечного числа одинаковых сферических гранул, статистически равномерно распределенных в слое. Задача решается на основе использования ранее разработанного метода самосогласованного поля, позволяющего изучать эффекты гидродинамического взаимодействия большого числа сферических частиц в потоках идеальной жидкости, в том числе при наличии внешних границ, и получать усредненные динамические характеристики таких потоков. В первом приближении по объемной доле гранул в слое получена аналитическая функция, описывающая усредненное поле скоростей жидкости как внутри, так и вне этого слоя. Библ. 26. Фиг. 6.

Ключевые слова: гидродинамическое взаимодействие, неподвижный зернистый слой, идеальная жидкость, потенциальное течение, метод самосогласованного поля.

DOI: 10.31857/S0044466925010102, EDN: CCKYNX

ВВЕДЕНИЕ

Одной из ключевых задач описания динамики дисперсных сред с повышенной концентрацией дисперсной фазы является учет эффектов коллективного гидродинамического взаимодействия большого количества дисперсных частиц во внешнем потоке несущей сплошной среды. Теоретическое исследование этой проблемы представляет собой чрезвычайно сложную задачу, поскольку, по сути, она представляет собой разновидность известной фундаментальной проблемы «многих тел», которая до сих пор не имеет точного решения ни в одной области науки. В связи с этим решение подобных задач долгое время базировалось на построении различных приближенных феноменологических моделей, первой из которых была так называемая модель единичной ячейки [1, 2]. На ее основе были получены первые приближенные результаты по динамике дисперсных сред [3]. В дальнейшем многие из этих результатов были уточнены на основе физически более строгих теоретических моделей, непосредственно учитывающих гидродинамическое взаимодействие дисперсных частиц [4–7]. Позднее был разработан ряд других подходов к решению задач динамики дисперсных сред [8, 9]. Однако в рамках таких подходов одной из основных проблем является также правильный учет межфазного взаимодействия.

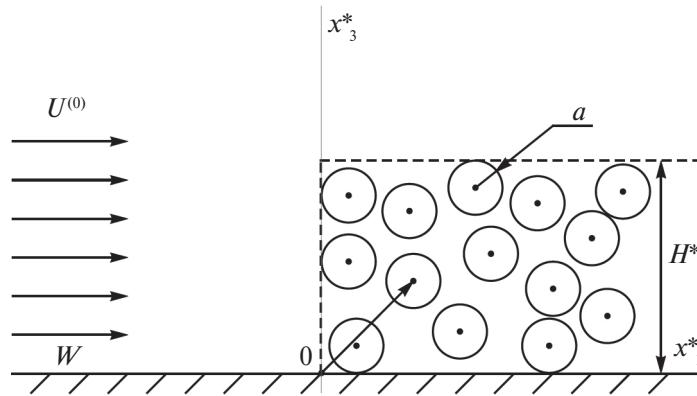
В последнее время широкое распространение получили методы исследования динамики дисперсных сред, основанные на различных феноменологических моделях межфазного взаимодействия с последующим численным интегрированием осредненных уравнений движения фаз [10–15]. Такие методы, очевидно, имеют ряд преимуществ по сравнению с чисто теоретическими подходами. К ним относится возможность исследования задач со сложной геометрией течения и в широком диапазоне значений определяющих гидродинамических критериев (в том числе числа Рейнольдса). Однако они имеют и ряд недостатков. Математически априори довольно сложно определить степень достоверности результатов численных расчетов, что часто приводит к необходимости проведения параллельных экспериментальных исследований. В принятых феноменологических моделях часто используются эмпирические коэффициенты, что также снижает степень математической строгости модели, а соответственно и степень достоверности полученных результатов. При этом любой расчет производится для дискретного набора значений определяющих параметров. Поэтому выявление зависимостей физических характеристик дисперсных потоков от всего комплекса определяющих параметров является чрезвычайно трудоемкой задачей. В этом плане аналитические результаты теоретических методов более информативны.

¹⁾ Работа выполнена в рамках Государственного задания, номер гос. регистрации темы: АААА–А19–119012290136–7.

Ниже рассматривается модель зернистого слоя, образованного бесконечным числом сферических гранул, расположенных в слое в виде полубесконечной ступеньки конечной толщины на плоской поверхности. В свое время был разработан метод самосогласованного поля [16, 17] для получения аналитических решений задач о совместном движении любого конечного числа сфер в идеальной жидкости [18–22], в том числе при наличии плоской границы. Как было показано [20, 21], этот метод применим также к задачам совместного движения сфер при наличии жестких связей между ними. В рамках принятой модели зернистого слоя это позволяет на основе использования данного метода решить задачу о течении идеальной жидкости вдоль плоской поверхности при наличии любого конечного числа N сферических гранул. Последующее применение процедуры усреднения [6, 7] по различным возможным положениям гранул в слое позволяет получить усредненное поле скоростей жидкости как внутри, так и вне зернистого слоя в явном аналитическом виде.

1. КОНЕЧНАЯ СИСТЕМА НЕПОДВИЖНЫХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ

Рассмотрим систему из N сферических гранул радиуса a , погруженных в идеальную несжимаемую жидкость вблизи плоской бесконечной поверхности. Будем считать, что гранулы каким-то образом жестко связаны друг с другом и с заданной поверхностью и, следовательно, не могут перемещаться относительно поверхности. Пронумеруем все сферы от 1 до N и обозначим безразмерные координаты центров сферических гранул в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ как $x_\gamma^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$, $\gamma = 1, 2, 3$). Рассмотрим задачу, когда в некоторый момент времени первоначально покоящаяся на бесконечности жидкость импульсно приводится в состояние движения с заданной постоянной скоростью $U_\gamma^{(0)}$, направленной вдоль плоской поверхности W (см. фиг. 1).



Фиг. 1. Схема течения жидкости вдоль плоской поверхности W с находящимся на ней зернистым слоем толщиной H^* в декартовой системе координат. Ось Ox_2 перпендикулярна плоскости рисунка. Надстрочный индекс * используется для обозначения соответствующих размерных величин.

Классическая постановка этой задачи в предположении потенциальности течения жидкости, как известно, состоит в решении уравнения Лапласа для потенциала скорости φ и выполнении граничных условий скольжения на границе W и на поверхности всех гранул.

В рамках разработанного ранее метода самосогласованного поля [16–22] краевые задачи динамики N сфер в потенциальных потоках идеальной жидкости сводятся к формальному решению системы уравнений для тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$, входящих в полученное точное решение таких задач. Для сформулированной выше задачи при наличии плоской границы это решение для безразмерного потенциала скорости φ имеет вид [16, 17]:

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{2n+1}}{n+1} C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} \frac{X_{\gamma_1}^{(i)} \dots X_{\gamma_n}^{(i)}}{R_i^{2n+1}} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{2n+1}}{n+1} T_{\beta_1 \gamma_1} \dots T_{\beta_n \gamma_n} C_{\beta_1 \dots \beta_n}^{(i)} \frac{\tilde{X}_{\gamma_1}^{(i)} \dots \tilde{X}_{\gamma_n}^{(i)}}{\tilde{R}_i^{2n+1}}, \quad (1.1)$$

где

$$\varphi_0 = e_\gamma x_\gamma = x_1, \quad X_\gamma^{(i)} = x_\gamma - x_\gamma^{(i)}, \quad \tilde{X}_\gamma^{(i)} = x_\gamma - T_{\beta \gamma} x_\beta^{(i)}, \quad R_i = \sqrt{X_\gamma^{(i)} X_\gamma^{(i)}}, \quad \tilde{R}_i = \sqrt{\tilde{X}_\gamma^{(i)} \tilde{X}_\gamma^{(i)}},$$

$$T_{\beta \gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha = a/L, \quad e_\gamma = \{1, 0, 0\},$$

а тензорные коэффициенты $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ удовлетворяют бесконечной ($1 \leq n < \infty$) системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} = & \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_n}} \left\{ e_{\beta} X_{\beta}^{(i)} + \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \alpha^{2n+1}}{k+1} C_{\beta_1 \dots \beta_k}^{(j)} \frac{X_{\beta_1}^{(j)} \dots X_{\beta_k}^{(j)}}{R_j^{2k+1}} + \right. \\ & \left. + \sum_{j \neq i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \alpha^{2n+1}}{k+1} T_{\delta_1 \beta_1} \dots T_{\delta_k \beta_k} C_{\delta_1 \dots \delta_k}^{(j)} \frac{\tilde{X}_{\beta_1}^{(j)} \dots \tilde{X}_{\beta_k}^{(j)}}{\tilde{R}_j^{2k+1}} \right\} \Big|_{R_i=0}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь и далее принятые тензорные обозначения переменных с условием суммирования по повторяющимся нижним координатным индексам, принимающим значения от 1 до 3. Это условие не распространяется только на переменные R_i и \tilde{R}_i . Верхние индексы относятся к частицам, и чтобы отличать их от показателя степени, они заключены в круглые скобки. Соотношения (1.1) и (1.2) записаны в безразмерном виде. В качестве масштабов соответствующих величин приняты скорость потока $U^{(0)}$, заданная на бесконечности, и характерное расстояние между центрами соседних гранул L .

Следует подчеркнуть, что решение (1.1) удовлетворяет граничным условиям скольжения на поверхности W и всех гранул при условии, что тензорные коэффициенты $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям (1.2).

Таким образом, задача определения потенциала скорости (1.1) сводится к нахождению коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ на основе системы уравнений (1.2). Для приближенного решения этой системы примем предположение о малости параметра α ($\alpha \ll 1$). Заметим, что это не очень строгое ограничение, поскольку параметр α всегда удовлетворяет условию $\alpha \leq 1/2$ для всех гранулированных сред, состоящих из сферических частиц. При условии $\alpha \ll 1$ все неизвестные функции можно искать в виде рядов по степеням этого параметра:

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)(k)}, \quad \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varphi^{(k)}. \quad (1.3)$$

Подставляя разложения (1.3) в систему (1.2) и приравнивая члены с одинаковыми степенями малого параметра, получим систему рекуррентных соотношений:

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{(i)(k)} = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{n}{n+1} C_{\beta_1 \dots \beta_n}^{(i)(k-2n-1)} D_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)}, \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} C_{\gamma}^{(i)(0)} &= e_{\gamma}; \quad C_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{(i)(0)} = 0, \quad m > 1, \quad D_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = (1 - \delta_{ji}) Q_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} + T_{\delta_1 \beta_1} \dots T_{\delta_n \beta_n} G_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \delta_1 \dots \delta_n}^{(j,i)}, \\ Q_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} &= \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_m}} \left(\frac{X_{\beta_1}^{(j)} \dots X_{\beta_n}^{(j)}}{R_j^{2n+1}} \right) \Big|_{R_i=0}, \quad G_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_m}} \left(\frac{\tilde{X}_{\beta_1}^{(j)} \dots \tilde{X}_{\beta_n}^{(j)}}{\tilde{R}_j^{2n+1}} \right) \Big|_{R_i=0}, \end{aligned}$$

δ_{ji} – символ Кронекера, а квадратные скобки над знаком суммы обозначают целую часть числа.

Полученные рекуррентные соотношения (1.4) позволяют определить все тензорные коэффициенты $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ в аналитическом виде в любом заданном приближении по малому параметру α . В настоящей статье они определены с точностью до $O(\alpha^8)$. Подстановка полученных таким образом тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ в выражение для потенциала скорости (1.1) с учетом соотношений (1.3) в конечном итоге приводит к следующему выражению для продольной U_1 и поперечной U_3 безразмерных составляющих скорости жидкости:

$$\begin{aligned} U_1 = & 1 + \frac{\alpha^3}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{R_i^3} + \frac{1}{\tilde{R}_i^3} - 3X_1^{(i)2} \left(\frac{1}{R_i^5} + \frac{1}{\tilde{R}_i^5} \right) \right) + \frac{\alpha^6}{32} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\left(x_3^{(i)}\right)^3} \left(\frac{1}{R_i^3} + \frac{1}{\tilde{R}_i^3} - 3X_1^{(i)2} \left(\frac{1}{R_i^5} + \frac{1}{\tilde{R}_i^5} \right) \right) - \\ & - \frac{\alpha^8}{16} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\left(x_3^{(i)}\right)^4} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^5} - \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^5} - 5X_1^{(i)2} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^7} - \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^7} \right) \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$U_3 = -\frac{3\alpha^3}{2} \sum_{i=1}^N X_1^{(i)} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^5} + \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^5} \right) - \frac{3\alpha^6}{32} \sum_{i=1}^N \frac{X_1^{(i)}}{\left(x_3^{(i)}\right)^3} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^5} + \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^5} \right) - \frac{\alpha^8}{16} \sum_{i=1}^N \frac{X_1^{(i)}}{\left(x_3^{(i)}\right)^4} \left(\frac{1}{R_i^5} - \frac{1}{\tilde{R}_i^5} - 5 \left(\frac{X_3^{(i)2}}{R_i^7} + \frac{\tilde{X}_3^{(i)2}}{\tilde{R}_i^7} \right) \right).$$

Следует отметить, что при решении системы уравнений (1.4) в данной работе учитываются члены, описывающие только парные взаимодействия частиц. Члены, описывающие взаимодействия более высокого порядка, здесь опущены, поскольку они несущественны при последующем вычислении осредненных характеристик

в рамках данной работы. Если необходимо получить более точные выражения для тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{(i)(k)}$, соответственно, для скорости жидкости (1.5), включая слагаемые, описывающие многочастичные взаимодействия, достаточно просто учесть соответствующие члены при расчетах по формулам (1.4).

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТОКА

Формулы (1.5) позволяет с высокой точностью определить скорость жидкости при наличии любого конечного числа N сферических гранул для различных конфигураций их взаимного расположения в пространстве. Однако для систем, состоящих из очень большого числа частиц, реализация такой процедуры расчета становится затруднительной и вряд ли имеет смысл. В этом случае удобнее перейти к усредненному описанию динамики таких структур на основе известной процедуры усреднения [6, 7] для различных возможных конфигураций частиц в пространстве. В рамках такой процедуры суммирование известных функций в соотношении (1.5) фактически заменяется интегрированием по переменной $x_\gamma^{(i)}$, при условии, что частицы не пересекаются друг с другом, с заданной поверхностью W и с точкой, в которой рассчитывается средняя скорость.

Примем модель зернистого слоя как совокупность бесконечного числа одинаковых сферических гранул радиуса α , центры которых статистически равномерно распределены над плоской поверхностью W в слое, имеющим вид полубесконечной ступени конечной толщины $x_1^{(i)} \geq \alpha \cap \alpha \leq x_3^{(i)} \leq (H - \alpha)$. В этом случае все гранулы расположены в пограничном слое толщиной $H = H^*/L$ и не пересекаются с заданной поверхностью W и плоскостями $x_3 = H$ и $x_1 = 0$ (см. фиг. 1). В рамках принятых допущений весовой функцией в процедуре усреднения будет численная концентрация гранул в приграничном слое, которая является постоянной величиной в объеме усреднения. Это упрощает расчеты и позволяет получить результаты в аналитическом виде. Если при расчете средних значений ограничиться первым приближением по объемной доле ф гранул в слое, то в выражении для скорости жидкости вида (1.5) необходимо учитывать только те члены, которые описывают парные взаимодействия частиц. Взаимодействия более высокого порядка дают вклад только в коэффициенты при более высоких степенях параметра ϕ . Поэтому в формулах (1.5) они заранее опущены.

Применение процедуры усреднения по ансамблю [6, 7] к первому выражению в правой части равенства (1.5) в рамках сделанных выше предположений приводит к следующим выражениям для безразмерных компонент средней скорости жидкости:

$$U_x(x, z) = U_1 = 1 + k_x(x, z)\phi, \quad U_z(x, z) = U_3 = 1 + k_z(x, z)\phi. \quad (2.1)$$

Вне зернистого слоя функции $k_x(x, z)$ и $k_z(x, z)$ имеют вид

$$k_x(x, z) = q_x(x, z), \quad k_z(x, z) = q_z(x, z), \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} q_x(x, z) &= \frac{3}{4\pi} \left(\arctan \left(\frac{h-z-1}{x-1} \right) + \arctan \left(\frac{h+z-1}{x-1} \right) + \arctan \left(\frac{z-1}{x-1} \right) - \arctan \left(\frac{z+1}{x-1} \right) \right), \\ q_z(x, z) &= \frac{3}{4\pi} \ln \left(\frac{((x-1)^2 + (z-1)^2)((x-1)^2 + (h+z-1)^2)}{((x-1)^2 + (z+1)^2)((x-1)^2 + (h-z-1)^2)} \right). \end{aligned}$$

Внутри зернистого слоя функции $k_x(x, z)$ и $k_z(x, z)$ имеют вид:

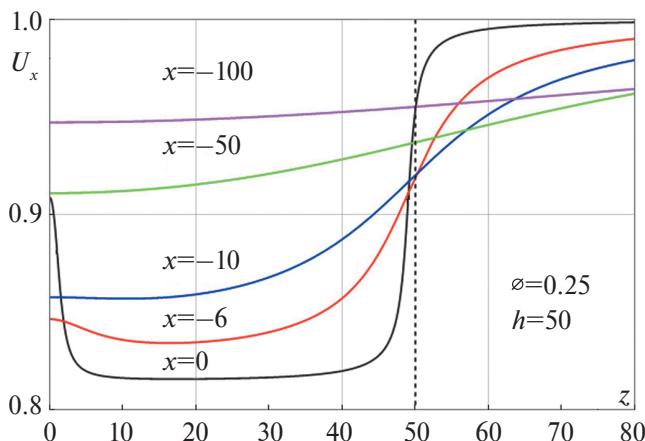
$$\begin{aligned} k_x(x, z) &= q_x(x, z) + \begin{cases} k_1(z), & x \geq 2 \cap 0 \leq z < 2, \\ k_2(z), & x \geq 2 \cap 2 \leq z < h-2, \\ k_3(z), & x \geq 2 \cap h-2 \leq z < h, \end{cases} \\ k_z(x, z) &= q_z(x, z), \\ k_1(z) &= -\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{8z^3} + \frac{z^2(3-z)}{2} - \frac{1+2z-2z^2+12z^3+6z^4}{8z^3\sqrt{1+4z}} \right), \quad k_2(z) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{8z^3} \right), \\ k_3(z) &= \frac{1}{8}(h-z-1)((h-z-1)^2-3) - \frac{1}{32z^3} \left(1 + \frac{1+2z(h-1)(1+6z^2)-2z^2((h-1)^2-3z^2)}{\sqrt{1+4z(h-1)}} \right), \\ x &= x_1/\alpha = x_1^*/\alpha, \quad z = x_3/\alpha = x_3^*/\alpha, \quad h = H/\alpha = H^*/\alpha, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где x_1^* , x_3^* и H^* – размерные значения соответствующих величин. Итак, процедура усреднения автоматически приводит к тому, что радиус гранул является характерным линейным масштабом рассматриваемой задачи.

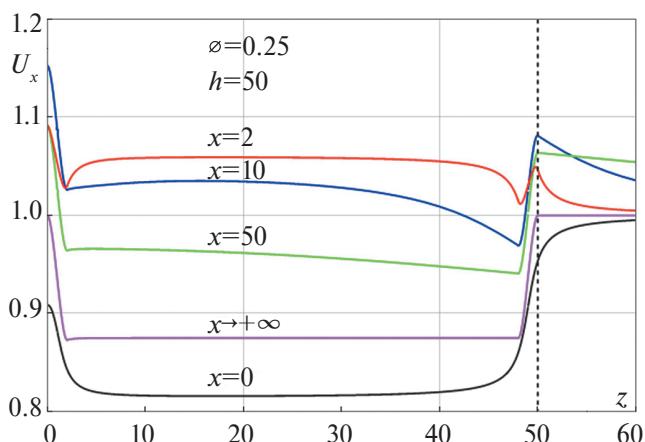
Усреднение второго и третьего слагаемых в правой части (1.5) приводит к громоздким выражениям. При этом их суммарный вклад в конечный результат для среднего профиля скорости жидкости, как показывает сравнение всех полученных функций, не превышает 1%. В связи с этим выражения для этих функций в конечном результате (2.1)–(2.3) опущены. Следует также отметить, что в настоящей работе выражения для компонент скорости жидкости $U_x(x, z)$ и $U_z(x, z)$ получены для всей области течения, за исключением области $0 < x < 2 \cap 0 < z < h$.

Для иллюстрации полученного результата (2.1)–(2.3) на фиг. 2 и 3 показана зависимость осредненной продольной скорости жидкости $U_x(x, z)$ от координаты z в различных сечениях потока при заданных значениях объемной доли гранул ϕ и толщины слоя h .

Как и ожидалось, полученный профиль скорости жидкости удовлетворяет граничному условию $\lim_{z \rightarrow \infty} U_x(x, z) = 1$ в любом сечении потока, т.е. при любом заданном значении координаты x . Как видно из представленных результатов, резкое изменение профиля скорости жидкости происходит вблизи поперечной границы уступа в области $0 \leq x \leq 2$, т.е. на расстоянии порядка диаметра гранулы. При этом профиль осредненной продольной скорости жидкости U_x внутри слоя обретает характерную неоднородную структуру вблизи стенки и вблизи верхней свободной границы слоя. В любом сечении слоя максимум скорости достигается на границах слоя, а затем внутри слоя на расстоянии порядка нескольких размеров зерен от его границ величина скорости обретает примерно одинаковое значение. Эффект «проскальзывания» жидкости вблизи стенки был



Фиг. 2. Графики зависимости осредненной по ансамблю скорости жидкости $U_x = U_1$ от координаты $z = x_3/a$ в различных сечениях потока перед поперечной границей уступа ($x \leq 0$) при заданном значении объемной доли гранул $\phi = 0.25$ и толщины слоя $h = H^*/a = 50$. Надстрочный индекс * используется для обозначения соответствующих размерных величин. Пунктирная линия обозначает верхнюю границу зернистого слоя.



Фиг. 3. Графики зависимости осредненной по ансамблю скорости жидкости $U_x = U_1$ от координаты $z = x_3/a$ в различных сечениях потока за поперечной границей уступа ($x \geq 0$) при заданном значении объемной доли гранул $\phi = 0.25$ и толщины слоя $h = H^*/a = 50$. Надстрочный индекс * используется для обозначения соответствующих размерных величин. Пунктирная линия обозначает верхнюю границу зернистого слоя.

теоретически исследован в работе [22], в которой была рассмотрена похожая задача – о течении идеальной жидкости вдоль стенки при наличии стационарного зернистого слоя конечной толщины, расположенного перпендикулярно стенке. В упомянутой работе было показано, что этот эффект является прямым следствием коллективного гидродинамического взаимодействия частиц слоя, и он имеет место при условии статистически равномерного распределения частиц в слое, т.е. даже при отсутствии разреженности слоя вблизи стенки. Как следует из результатов настоящей работы, этот эффект имеет место (см. фиг. 3) также вблизи внешней свободной границы слоя, и он также является прямым следствием коллективного гидродинамического взаимодействия частиц.

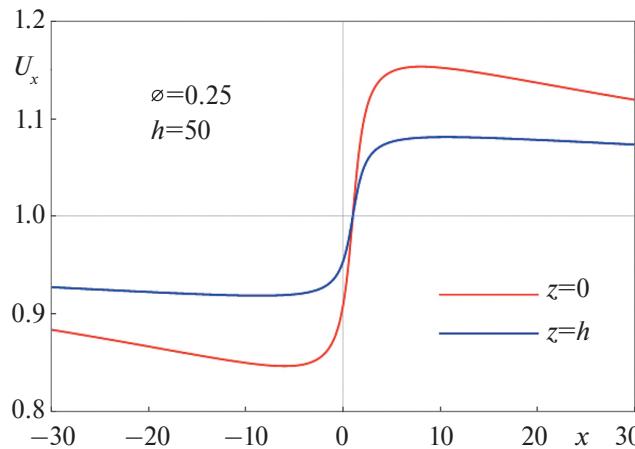
В частном случае при $x \rightarrow +\infty$, т.е. вниз по потоку вдали от поперечной границы уступа, результат для профиля скорости жидкости (2.1)–(2.3) совпадает с полученным ранее [23]. В этой области ($x \rightarrow +\infty$) течение имеет следующую характерную особенность – возмущение заданного внешнего течения, обусловленное наличием гранул, образующих зернистый слой, не выходит за пределы этого слоя. При этом на границах слоя при $z = 0$ и $z = h$ скорость жидкости достигает значения, равного заданной скорости внешнего потока, с нулевыми производными. А внутри слоя на расстоянии порядка диаметра гранулы от его границ скорость жидкости имеет примерно постоянное значение $U_x \approx 1 - \phi/2$, не зависящее от толщины слоя.

Зависимости скорости жидкости $U_x(x, z)$ от продольной координаты x на стенке ($z = 0$) и на уровне верхней границы зернистого слоя ($z = h$) представлены на фиг. 4. Как видно, функции имеют минимум перед поперечной границей уступа и максимум после него. В частности, минимальное и максимальное значения скорости жидкости на стенке ($z = 0$) достигаются в точках $x_{\min} = 1 - \sqrt{h-1}$ и $x_{\max} = 1 + \sqrt{h-1}$ соответственно. Зависимость x_{\min} и x_{\max} от параметров задачи при условии $z \neq 0$ имеет более сложный вид.

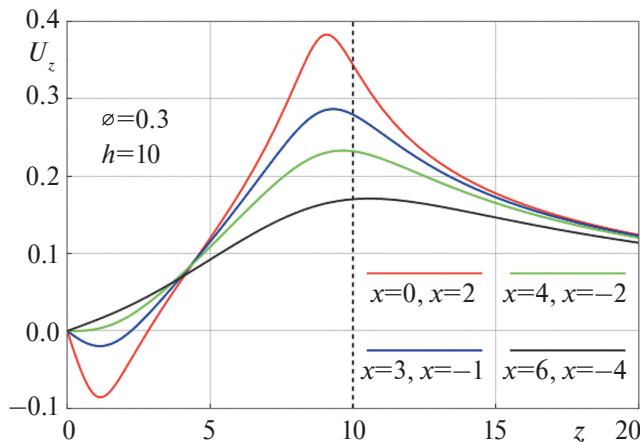
Зависимости усредненной поперечной скорости жидкости $U_z(x, z)$ от координаты z в различных сечениях потока при заданных значениях объемной доли гранул ϕ и толщины слоя h представлены на фиг. 5.

Как и ожидалось, поперечная скорость жидкости $U_z(x, z)$ на стенке ($z = 0$) равна нулю при любом значении переменной x . Максимальные положительные значения поперечной скорости наблюдаются вблизи точки пересечения продольной и поперечной границ зернистого слоя. Отрицательные значения поперечной скорости наблюдаются на небольшой области в районе точки пересечения стенки и поперечной границы зернистого слоя. Линейный размер этой области имеет порядок нескольких диаметров гранул. Как и ожидалось, поперечная скорость жидкости удовлетворяет граничному условию $\lim_{z \rightarrow \infty} U_z(x, z) = 0$.

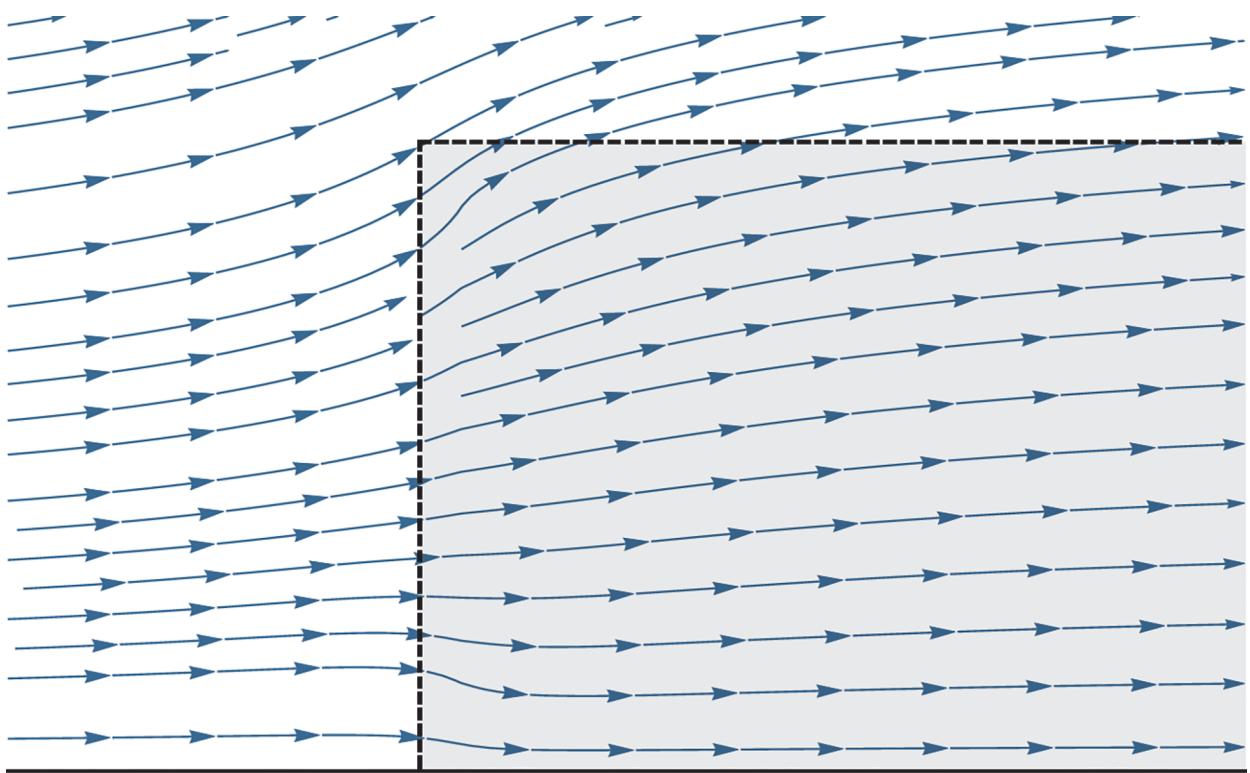
Полученная характерная картина течения жидкости в области вблизи поперечной границы слоя представлена на фиг. 6.



Фиг. 4. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости жидкости $U_x = U_1$ от продольной координаты $x = x_1/a$ для двух значений координаты $z = x_3/a$ ($z = 0$ и $z = h$) при заданном значении объемной доли гранул $\phi = 0.25$ и толщины слоя $h = H^*/a = 50$. Надстрочный индекс * используется для обозначения соответствующих размерных величин.



Фиг. 5. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости жидкости $U_z = U_3$ от координаты $z = x_3/a$ в различных поперечных сечениях потока при заданном значении объемной доли гранул $\phi = 0.3$ и толщины слоя $h = H^*/a = 10$. Надстрочный индекс * используется для обозначения соответствующих размерных величин. Пунктирная линия обозначает верхнюю границу зернистого слоя.



Фиг. 6. Характерная итоговая картина течения жидкости в области вблизи поперечной границы слоя. Пунктирная линия обозначает границу гранулированного слоя.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе теоретически исследована задача о течении жидкости через пристеночный неподвижный зернистый слой в виде полубесконечной ступеньки. Задача решена с учетом эффектов коллективного гидродинамического взаимодействия гранул в заданном внешнем потоке. Получено аналитическое решение для усредненного профиля скорости жидкости как снаружи, так и внутри зернистого слоя с учетом влияния внешней плоской границы. Задача решалась в рамках модели идеальной (невязкой) жидкости для несущей сплошной среды в первом приближении по объемной доле гранул в слое при условии их статистически равномерного распределения в пространстве внутри слоя.

Следует также отметить, что в рамках предложенного метода решения нет необходимости использовать какие-либо дополнительные предположения, в том числе феноменологические. Как известно, используемая в данной работе модель идеальной (невязкой) жидкости для сплошной несущей среды приближенно описывает течение жидкостей и газов при высоких числах Рейнольдса. Кроме того, результат (2.1)–(2.3) получен в первом приближении по объемной доле гранул ϕ в слое, т.е. для малых значений этого параметра. Однако реальная точность и пределы применимости результата (2.1)–(2.3) по числу Рейнольдса и объемной доле гранул в слое могут быть установлены только экспериментально. Следует отметить, что в записи решения (1.5) приведены только те функции, которые при усреднении дают вклад в коэффициент перед первой степенью объемной доли гранул ϕ в слое в формулах (2.1)–(2.3). Для получения решения вида (2.1)–(2.3) с точностью до более высоких степеней объемной доли ϕ просто необходимо при решении системы (1.4) учесть все функциональные члены, описывающие взаимодействия частиц соответствующего порядка, а затем применить к ним процедуру усреднения [6, 7].

Это возможно в рамках разработанного метода [16, 17], что может стать предметом дальнейших исследований.

В работе для поставленной гидродинамической задачи в рамках модели идеальной жидкости получено аналитическое решение одного из классических уравнений, относящегося не только к гидродинамике, но и к ряду других областей физики. Полученное в работе аналитическое решение гидродинамической задачи может быть непосредственно использовано, например, для теоретического исследования процессов переноса в дисперсной среде с учетом коллективного взаимодействия дисперсных частиц, поскольку решение таких задач также основано на решении уравнения Лапласа. Возможность такого подхода обосновал Фельдерхоф (см. [5]) в 1991 г. В рамках этого подхода Бошенятов [24–26] получил коэффициенты переноса (теплопроводность, электропроводность) для дисперсных сред (в том числе, сложно-структурированных) с учетом эффектов коллективного взаимодействия частиц. В этих работах непосредственно использовались результаты решения соответствующих гидродинамических задач в рамках модели идеальной жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cunningham E. On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium // Proc. Roy. Soc. (London). 1910. Ser. A. V. 83. P. 357–365. <https://doi.org/10.1098/rspa.1910.0024>
2. Zuber N. On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime // Chem. Eng. Sci. 1964. V. 19. Issue 11. P. 897–917. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(64\)85067-3](https://doi.org/10.1016/0009-2509(64)85067-3)
3. Ханнель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир. 1976.
4. Wijngaarden L., Jeffrey D.J. Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid // J. Fluid Mech. 1976. V. 77. Issue 1. P. 27–44. <https://doi.org/10.1017/S0022112076001110>
5. Felderhof B.U. Virtual mass and drag in two-phase flow // J. Fluid Mech. 1991. V. 225. P. 177–196. <https://doi.org/10.1017/S002211209100201X>
6. Batchelor G.K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // J. Fluid Mech. 1972. V. 52. Issue 2. P. 245–268. <https://doi.org/10.1017/S0022112072001399>
7. Beenakker C.W.J., Mazur P. Is sedimentation container-shape dependent? // Phys. Fluids. 1985. V. 28. Issue 11. P. 3203–3206. <https://doi.org/10.1063/1.865367>
8. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука. 1987.
9. Osipov A. N. Lagrangian modelling of dust admixture in gas flows // Astrophysics and Space Science. 2000. V. 274. P. 377–386. <https://doi.org/10.1023/A:1026557603451>
10. Ge W., Wang L., Xu J., Chen F., Zhou G., Lu L., Chang Q., Li J. Discrete simulation of granular and particle-fluid flows: from fundamental study to engineering application // Reviews in Chemical Engineering. 2017. V. 33. No. 6. P. 551–623. <https://doi.org/10.1515/revce-2015-0079>
11. Bettega R., Correa R.G., Freire J.T. Velocity profile in fixed beds: A study on the representativeness of the experimental measurement of downstream flow characteristics // Drying Technology. 2007. V. 25. Issue 7–8. P. 1175–1183. <https://doi.org/10.1080/07373930701438519>

12. *Chauchat J., Medale M.* A three-dimensional numerical model for incompressible two-phase flow of a granular bed submitted to a laminar shearing flow // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2010. V. 199. Issue 9–12. P. 439–449. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.07.007>
13. *Freund H., Zeiser T., Huber F., Klemm E., Brenner G., Durst F., Emig G.* Numerical simulations of single-phase reacting flows in randomly packed fixed-bed reactors and experimental validation // *Chem. Eng. Sci.* 2003. V. 58. Issue 3–6. P. 903–910. [https://doi.org/10.1016/S0009-2509\(02\)00622-X](https://doi.org/10.1016/S0009-2509(02)00622-X)
14. *Ouriemi M., Aussilous P., Guazzelli E.* Sediment dynamics. Part 1. Bed-load transport by laminar shearing flows // *J. Fluid Mech.* 2009. V. 636. P. 295–319. <https://doi.org/10.1017/S0022112009007915>
15. *Михайленко К.И., Кулешов В.С.* Математическое моделирование скоростной неравномерности потока газа за пористой преградой // Вычисл. технологии. 2015. Т. 20. № 6. С. 46–58.
16. *Струминский В.В., Гуськов О.Б., Корольков Г.А.* Гидродинамическое взаимодействие частиц в потенциальных потоках идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 4. С. 820–824.
17. *Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В.* Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // Докл. АН. 2011. Т. 438. № 5. С. 626–628.
18. *Гуськов О.Б.* О присоединенной массе тела, движущегося в суспензии сферических частиц // Докл. АН. 2012. Т. 442. № 1. С. 50–53.
19. *Гуськов О.Б.* Присоединенная масса сферы в суспензии сферических частиц // *ПММ*. 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 134–139.
20. *Гуськов О.Б.* О движении кластера сферических частиц в идеальной жидкости // *ПММ*. 2014. Т. 78. Вып. 2. С. 186–193.
21. *Гуськов О.Б.* О присоединенной массе шероховатой сферы // *ПММ*. 2017. Т. 81. Вып. 4. С. 471–482.
22. *Гуськов О.Б.* Течение идеальной жидкости сквозь стационарный зернистый слой при наличии плоской стенки // Докл. АН. 2020. Т. 491. № 1. С. 37–43.
23. *Гуськов О.Б.* Течение идеальной жидкости в пристенном стационарном зернистом слое конечной толщины. // Сб. трудов 9-й Всерос. научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского “Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред”. 19–21 ноября 2019 г. Москва. С. 74–81. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41914494>
24. *Бошенятов Б.В.* К теории электро- и теплопроводности пузырьковых газожидкостных сред // Докл. АН. 2014. Т. 459. № 6. С. 693–695.
25. *Бошенятов Б.В.* К расчету эффективных коэффициентов переноса в монодисперсных суспензиях сферических частиц // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. Вып. 3. С. 67–73.
26. *Бошенятов Б.В.* Роль взаимодействия частиц в кластерной модели теплопроводности наножидкости // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. Вып. 3. С. 17–24.

AN IDEAL-FLUID FLOW THROUGH A NEAR-WALL FIXED GRANULAR LAYER IN THE FORM OF SEMI-INFINITE STEP

O.B. Gus'kov^{a,*}

^a*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, 1125040 Russia*

*e-mail: ogskv@mail.ru

Received: 12 December 2023

Revised: 25 September 2024

Accepted: 28 September 2024

Abstract. The problem on the flow of an ideal fluid along a flat surface in the presence of a fixed granular layer on it in the form of a semi-infinite step of finite thickness consisting of an infinite number of identical spherical granules statistically uniformly distributed in the layer is considered. The problem is solved based on using the previously developed method of the self-consistent field, which allows studying the effects of hydrodynamic interaction of a large number of spherical particles in flows of an ideal fluid, including in the presence of external boundaries, and obtaining the averaged dynamic characteristics of such flows. In the first approximation in the volume fraction of granules in a layer, an analytical function is obtained that describes the averaged velocity field of the fluid both inside and outside this layer.

Keywords: hydrodynamic interaction, fixed granular layer, ideal fluid, potential flow, self-consistent field method

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.8

СТАБИЛЬНЫЕ МАТЧИНГИ, ФУНКЦИИ ВЫБОРА И ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ

© 2025 г. А.В. Карзанов^{1,*}

¹117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия

*e-mail: akarzanov7@gmail.com

Поступила в редакцию 29.08.2024 г.

Переработанный вариант 29.08.2024 г.

Принята к публикации 26.09.2024 г.

В работе рассматривается модель стабильных реберных подмножеств (“матчингов”) в двудольном графе $G = (V, E)$, в котором предпочтения для вершин одной доли (“фирм”) задаются при помощи функций выбора со стандартными свойствами консистентности, заменяемости и кардинальной монотонности, а предпочтения для вершин другой доли (“работников”) – при помощи линейных порядков. Для такой модели дается комбинаторное описание структуры ротаций и предлагается алгоритм построения посета ротаций с оценкой временной сложности $O(|E|^2)$ (включая обращения к оракулам, связанных с функциями выбора). Как следствие, можно получить “компактное” аффинное представление стабильных матчингов и эффективно решать смежные задачи. Библ. 21.

Ключевые слова: двудольный граф, функция выбора, линейные предпочтения, стабильный матчинг, аффинная представимость, последовательный выбор.

DOI: 10.31857/S0044466925010114, **EDN:** CCGHNA

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования в области стабильных контрактов на двусторонних рынках начались с классической работы Гейла и Шепли [1] о стабильных марьяжах. В этой модели и ее естественных обобщениях типа “один-много” (one-to-many) и “много-много” (many-to-many) рассматривается двудольный граф $G = (V, E)$, вершины которого интерпретируются как “агенты” рынка, а ребра – как возможные “контракты” между парами агентов. Предпочтения агента $v \in V$ на множестве доступных ему контрактов (инцидентных ребер) E_v задаются строгим линейным порядком, число выбираемых контрактов ограничено заданной квотой $q(v)$. Допустимое по квотам множество контрактов $X \subseteq E$ считается *стабильным*, если никакой контракт из дополнения $E - X$ не является более предпочтительным для обеих сторон по сравнению с некоторыми из тех, что они выбрали.

С тех пор задачи о стабильности на двудольных графах с линейными предпочтениями в вершинах заслужили широкую популярность; обзоры результатов по этой теме представлены, например, в работах [2, 3]. Здесь из значительных установленных свойств можно выделить следующие: стабильное множество контрактов существует при любых квотах; совокупность стабильных множеств образует дистрибутивную решетку при естественном сравнении; оптимальные стабильные множества для каждой из сторон рынка могут быть построены эффективным алгоритмом. (Мы называем алгоритм *эффективным*, если число операций, или *время*, которое он затрачивает, ограничено сверху полиномом от $|V|, |E|$.)

Для определенности в разбиении множества вершин V на две доли (независимые множества, хроматические классы) будем обозначать эти доли как W и F , называя элементы в них *работниками* (workers) и *фирмами* (firms), соответственно. (В классической модели с единичными квотами, рассматриваемой в [1], вершины разных долей интерпретируются как лица “мужского” и “женского” пола.) Любое подмножество ребер $X \subseteq E$ будем для краткости именовать *матчингом* (отходя от стандартного определения последнего в литературе) и будем называть стабильное множество ребер *стабильным матчингом*. Подчеркнем, что в этой работе мы рассматриваем матчинги только в двудольных графах.

Существенно более богатый класс моделей стабильности на двудольных графах возникает при переходе от линейных предпочтений агентов к предпочтениям, определяемым функциями выбора. Для каждой вершины $v \in V$ функция выбора (Φ В) – это оператор C_v на 2^{E_v} , выбирающий в каждом подмножестве ребер $Z \subseteq E_v$ “приемлемую” (более предпочтительную) часть $C_v(Z) \subseteq Z$. Как правило, на функцию выбора C_v накладываются аксиомы *консистентности* и *заменяемости*, что позволяет выстроить теорию стабильных матчингов, обобщающую

базовые результаты для моделей с линейными предпочтениями. (Отметим, что указанная пара аксиом эквивалентна свойству *независимости от пути*, восходящему к Плотту [7].) Первоначальное развитие этой теории осуществлялось в 1980е годы, главным образом в работах Келсо и Крауфорда [4], Рота [5] и Блэра [6]. В частности, в них показывалось, что множество стабильных матчингов непусто и образует решетку.

К важному последующему вкладу следует отнести работы Алкана [8, 9] начала 2000х годов; в них показано, что при добавлении третьей аксиомы *квотируемости*, или более слабой аксиомы *кардинальной монотонности*, решетка стабильных матчингов становится дистрибутивной. Это ввиду известной теоремы Биркгофа [10] влечет представимость стабильных матчингов в виде идеалов некоторого посета.

Ранее представление такого рода было продемонстрировано в простейшем случае — для стабильных марьяжей — Ирвингом и Лейтером в работе [11]. В ней было показано, что: (а) соответствующий посет образован т.н. *ротациями* — циклами, связывающими “соседние” стабильные матчинги; (б) число ротаций не превосходит $|E|$; и (в) посет ротаций (дающий “компактное представление” множества стабильных марьяжей) может быть построен эффективно. (В то же время, в [11] установлено, что задача определения числа стабильных матчингов графа является труднорешаемой, $\#P$ -трудной.) В последующей работе [12] было объяснено, что с помощью посета ротаций можно эффективно решать задачу минимизации линейной функции на множестве стабильных марьяжей; здесь привлекается метод Пикара [13], дающий сведение к классической задаче о минимальном разрезе.

В недавней работе [14] Фаэнза и Цанг провели углубленное исследование ротаций, их посетов и приложений для общих моделей Алкана в [8, 9]. Они рассматривали стабильные матчинги, порождаемые функциями выбора, в двух ситуациях: 1) ФВ для всех вершин *плоттвы* (т.е. подчиняются аксиомам консистентности и заменяемости) плюс кардинально монотонные; 2) ФВ для всех вершин плоттвы, и кроме того, для вершин одной доли, скажем, F , выполняется аксиома кардинальной монотонности, а для вершин другой доли W — аксиома квотируемости. В первом случае мы будем применять термин “общая булева модель” (ОБМ), а во втором случае — “специальная булева модель” (СБМ). Здесь термин “булевость” отражает то, что мы имеем дело с подмножествами в E или, эквивалентно, с 0, 1 функциями на E , в отличие от моделей, где допускаются стабильные функции с более общими значениями (скажем, вещественными или целочисленными).

В качестве основных результатов в [14], касающихся ОБМ, получены следующие: уточнена структура ротаций (которые не обязательно являются простыми циклами графа); показано, что множество ротаций \mathcal{R} имеет размер $O(|F||W|)$; установлена биекция $X \xrightarrow{\omega} I$ между решеткой $(S, >)$ стабильных матчингов X и решеткой (I, \subset) идеалов I посета ротаций; показано, что отображение ω^{-1} дает целочисленную аффинную представимость стабильных матчингов через идеалы посета. Последнее означает наличие целочисленной $E \times \mathcal{R}$ матрицы A , для которой выполняется $x = Au + x^0$, где x и u — характеристические векторы (в пространствах \mathbb{R}^E и $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$, соответственно) стабильного матчинга и идеала, связанных отношением ω , а x^0 — характеристический вектор W -оптимального стабильного матчинга. Более того, замечено, что матрица A имеет полный столбцовый ранг, откуда следует, что многогранник стабильных матчингов аффинно конгруэнтен порядковому многограннику (order polytope) Стэнли [15].

Эти результаты усиливаются для СБМ. А именно, в [14] показывается, что в этом случае посет ротаций и матрица A аффинного представления могут быть построены эффективно. Здесь предполагается, что функции выбора заданы посредством *оракулов*, причем при обращении к оракулу для C_v ($v \in V$) с произвольным множеством $Z \subseteq E_v$ он выдает значение $C_v(Z)$ за “оракульное время”, полиномиальное от $|Z|$. Более того, такое время условно измеряется константой $O(1)$ (как обычно принято в подобных задачах, где оценивается только число обращений к оракулам, игнорируя сложность их выполнения). При этих предположениях время построения посета и матрицы оценивается в [14] как $O(|F|^3|W|^3)$. Аналогично моделям с линейными предпочтениями, это дает возможность для СБМ эффективно решать задачи линейной оптимизации на множестве стабильных матчингов.

В настоящей работе рассматривается облегченный вариант СБМ. Как и в полной версии, предпочтения в долях графа G задаются различно. А именно, каждая вершина v доли F снабжена функцией выбора C_v на 2^{E_v} , удовлетворяющей аксиомам плоттвости и кардинальной монотонности (подобно ОБМ и СБМ). Как и прежде, все эти ФВ задаются оракулами. В свою очередь, для каждой вершины v доли W имеется квота $q(v)$ и предпочтения на множестве E_v заданы линейным порядком. Мы условно именуем модель стабильности при таких условиях *комбинированной булевой моделью* (сокращенно, КБМ).

Следует отметить, что модель такого рода с единичными квотами вершин в W возникает в результате редукции задачи с т.н. *последовательным выбором* (sequential choice) в вершинах одной доли, описанной в работе [16].

Основная цель нашей работы состоит в разработке для КБМ относительно прозрачных методов построения ротаций и их посета, а также доказательства биекции между решетками стабильных матчингов и идеалов посета.

При этом наши алгоритмы имеют невысокую временную сложность; в частности, посет ротаций строится за время $O(|E|^2)$ (для сравнения аналогичная задача для СБМ решается в [14] за время $O(|F|^3|W|^3) \approx O(|E|^3)$).

Работа организована следующим образом.

Раздел 2 содержит базовые определения и постановки, касающиеся КБМ. В разд. 3 излагаются утверждения и средства, приводящие к определению ротаций. В разд. 4 объясняется конструкция посета ротаций и доказывается теорема об изоморфизме решеток стабильных матчингов и идеалов посета. Раздел 5 в основном посвящен алгоритмическим аспектам. Здесь показывается, что посет ротаций может быть построен за время $O(|E|^2)$, а начальный стабильный матчинг (оптимальный для W) – за время $O(|V||E|)$. Основываясь на конструкции посета ротаций, в разд. 6 мы демонстрируем аффинную представимость решетки стабильных матчингов и даем описание структурных элементов многогранника стабильных матчингов. Следует заметить, что в разд. 3–6 мы для упрощения изложения рассматриваем случай единичных квот для вершин доли W . В разд. 7 дается обобщение на случай произвольных квот при линейных предпочтениях в доле W (что не вызывает больших усилий). В заключительном разд. 8, следуя [16], дается описание вышеупомянутой модели с последовательными функциями выбора и ее редукция к КБМ. Затем мы указываем следствия для этой модели из полученных результатов для КБМ.

2. НАЧАЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКИ

В рассматриваемой модели нам даны: конечный двудольный граф $G = (V, E)$ с разбиением множества вершин V на два независимых подмножества (доли) F и W , называемых множествами *фирм* и *работников*, соответственно. Без ограничения общности, можно считать, что граф G не имеет кратных ребер (см. замечание 1 в конце раздела); также можно считать, что G связан. В частности, $|V| - 1 \leq |E| \leq \binom{|V|}{2}$. Ребро в G , соединяющее вершины $w \in W$ и $f \in F$, может обозначаться wf .

Для вершины $v \in V$ обозначим через E_v множество ее инцидентных ребер. На этом множестве задаются предпочтения вершины (“агента”) v . Предпочтения в долях F и W имеют существенные различия.

- (**линейные предпочтения**) Для вершин $w \in W$ предпочтения заданы при помощи *линейного порядка* $>_w$ на E_w . Если для $e, e' \in E_w$ выполняется $e >_w e'$, мы говорим, что ребро e предпочтительнее для w , чем e' . Это аналогично предпочтениям в классической задаче о стабильных марьяжах Гейла и Шепли [1].

- (**функции выбора**) Для $f \in F$ предпочтения на E_f заданы при помощи функции выбора (**ФВ**) $C = C_f : 2^{E_f} \rightarrow 2^{E_f}$. Она удовлетворяет некоторым стандартным условиям (аксиомам). Всегда предполагается, что это сжимающий оператор, т.е. для любого $Z \subseteq E_f$ выполняется $C(Z) \subseteq Z$. Две аксиомы, касающиеся пар $Z, Z' \subseteq E_f$, выглядят так:

$$(A1) \text{ если } Z \supseteq Z' \supseteq C(Z), \text{ то } C(Z') = C(Z);$$

$$(A2) \text{ если } Z \supseteq Z', \text{ то } C(Z) \cap Z' \subseteq C(Z').$$

Из (A1), в частности, следует, что для любого $Z \subseteq E_f$ справедливо $C(C(Z)) = C(Z)$. В литературе свойство (A1) называют *консистентностью*, а свойство (A2) – *заменяемостью*, или *персистентностью* (последний термин встречается, например, в [17]). Как показано в [18], выполнение (A1) и (A2) эквивалентно свойству *независимости от пути*, или *плоттоворости* (восходящее к работе [7]); в нашем случае это выглядит так:

$$\text{для любых } Z, Z' \subseteq E_f \text{ справедливо } C(Z \cup Z') = C(C(Z) \cup Z'). \quad (2.1)$$

Еще одна аксиома известна под названием *кардиальности монотонности*:

$$(A3) \text{ если } Z \supseteq Z', \text{ то } |C(Z)| \geq |C(Z')|.$$

Важный частный случай (A3) – условие *квотируемости*; оно накладывается, когда задано число (квота) $q(f) \in \mathbb{Z}_{>0}$, и выглядит так:

$$(A4) \text{ для любого } Z \subseteq E_f \text{ справедливо } |C(Z)| = \min\{|Z|, q(f)\}.$$

Легко проверить, что указанные аксиомы выполняются для вершин $w \in W$; в этом случае задается квота $q(w) \in \mathbb{Z}_{>0}$, и оператор C_w действует в соответствии с порядком $>_w$, а именно: в множестве $Z \subseteq E_w$ выбираются $\min\{q(w), |Z|\}$ старших элементов.

В нашем изложении, вплоть до разд. 7, мы для простоты будем как правило рассматривать КБМ с единичными квотами для всех $w \in W$, в то же время функции $C_f, f \in F$, будут произвольными при условиях (A1)–(A3).

• (**стабильность**) Для удобства изложения всякое подмножество ребер $X \subseteq E$ будем называть *матчингом*. Для $v \in V$ ограничение $X \subseteq E$ на подмножество E_v будем обозначать через X_v ; иными словами, $X_v = X \cap E_v$. Подмножество $Z \subseteq E_v$ назовем *приемлемым*, если $C_v(Z) = Z$; совокупность таких подмножеств обозначим \mathcal{A}_v . Это понятие распространяется на подмножества во всем E ; а именно, скажем, что $X \subseteq E$ приемлемое, если таковыми являются все его ограничения X_v , $v \in V$. Совокупность приемлемых множеств (матчингов) в E обозначается \mathcal{A} .

Для всякого $v \in V$ функция выбора C_v позволяет сравнивать приемлемые множества в E_v . А именно, для различных $Z, Z' \in \mathcal{A}_v$ скажем, что Z предпочтительнее Z' , и обозначим это как $Z >_v Z'$, если

$$C_v(Z \cup Z') = Z.$$

Легко видеть, что отношение $>_w$ транзитивное.

Исходя из сравнения приемлемых подмножеств в множествах E_v , можно сравнивать приемлемые матчнги во всем E . А именно, выбирая одну из долей в G , скажем, F , для различных $X, Y \in \mathcal{A}$ будем писать $X >_F Y$ и говорить, что X предпочтительнее Y относительно “фирм”, если для всех $f \in F$ выполняется $X_f \geq_f Y_f$. Порядок $>_W$ в \mathcal{A} относительно “работников” определяется аналогично.

Определение 1. Для $v \in V$ и $Z \in \mathcal{A}_v$, скажем, что ребро $e \in E_v - Z$ интересное относительно Z , если $e \in C_v(Z \cup \{e\})$. Это понятие распространяется на приемлемые матчнги в E . А именно, при матчнге $X \in \mathcal{A}$ ребро $e = wf \in E - X$ называется *интересным* для вершины (“агента”) $v \in \{w, f\}$, если $e \in C_v(X_v \cup \{e\})$. Если ребро $e = wf \in E - X$ интересное для обеих вершин w и f , то говорят, что e *блокирует* X . Матчнг $X \in \mathcal{A}$ называется *стабильным*, если он не блокируется никаким ребром в $E - X$. Множество стабильных матчнгов для рассматриваемых $G = (F \sqcup W, E)$, $>_w$, $q(w)$ ($w \in W$), C_f ($f \in F$) обозначим через $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G, >, q, C)$.

Заметим, что для $v \in V$, $Z \in \mathcal{A}_v$, $e \in E_v - Z$ и $Z' := C_v(Z \cup \{e\})$:

- (i) ребро e интересное относительно Z тогда и только тогда, когда Z' равно либо
(а) $Z \cup \{e\}$, либо (б) $(Z - \{e'\}) \cup \{e\}$ для некоторого $e' \in Z$;
 - (ii) если e интересное относительно Z , то $Z' >_v Z$, и наоборот.
- (2.2)

Здесь (i) следует из соотношений $C_v(Z) = Z$ и $Z' \subseteq Z \cup \{e\}$ и неравенства $|C_v(Z \cup \{e\})| \geq |C_v(Z)|$ (в силу кардинальной монотонности (A3)). Свойство (ii) следует из $C_v(Z' \cup Z) = C_v(Z \cup \{e\}) = Z' \neq Z$.

• Для $v \in V$ множество \mathcal{A}_v , снабженное отношением предпочтения $>_v$, обращается в решетку; в ней, в соответствии с изложенным в [9], для $Z, Z' \in \mathcal{A}_v$ точная верхняя грань $Z \vee Z'$ выражается как $C_v(Z \cup Z')$ (в то время как точная нижняя грань $Z \wedge Z'$ выражается с использованием понятия замыкания; мы это здесь не приводим).

“Прямое произведение” решеток $(\mathcal{A}_f, >_f)$ для $f \in F$ дает решетку $(\mathcal{A}, >_F)$ (в ней для $X, X' \in \mathcal{A}$ операции $X \vee_F X'$ (join) и $X \wedge_F X'$ (meet) относительно доли F определяются естественным образом через ограничения $X_f \vee X'_f$ и $X_f \wedge X'_f$). Аналогично определяется решетка $(\mathcal{A}, >_W)$ относительно доли W .

• Теперь мы можем сформулировать важные для дальнейшего свойства множества стабильных матчнгов \mathcal{S} ; они непосредственно вытекают из соответствующих общих результатов в работе [9] (см. в ней Теорему 10). А именно,

- (а) \mathcal{S} непусто, и $(\mathcal{S}, >_F)$ является *дистрибутивной* решеткой;
 - (б) (свойство *полярности*): порядки $>_F$ и $>_W$ противоположны, а именно: для $X, Y \in \mathcal{S}$, если $X >_F Y$, то $Y >_W X$, и наоборот;
 - (в) (свойство *инвариантности размеров*): для любой фиксированной вершины $v \in V$ число $|X_v|$ одинаково при всех $X \in \mathcal{S}$.
- (2.3)

Мы будем обозначать минимальный и максимальный элементы в решетке $(\mathcal{S}, >_F)$ как X^{\min} и X^{\max} , соответственно (тогда первый — наилучший, а второй — наихудший для доли W , в силу свойства полярности (2.3)(б)).

Отметим, что в случае выполнения квот (что, в частности, верно для доли W) свойство (в) в (2.3) имеет важное усиление (ср. [17, Corollary 3]):

для вершины $v \in V$, если $\Phi B C_v$ подчиняется аксиоме квотируемости (A4) с квотой $q(v)$, и если для некоторого (или, что эквивалентно, любого) стабильного матчнга X выполняется $|X_v| < q(v)$, то множество X_v одинаково при всех $X \in \mathcal{S}$.(2.4)

Замечание 1. Иногда в литературе о стабильных матчингах на графах (не обязательно двудольных) допускается наличие кратных ребер, т.е. рассматриваемый граф G может быть “мультиграфом”. (Такое обобщение может иметь разумные экономические интерпретации.) Однако достаточно простая конструкция позволяет преобразовать G в граф G' без кратных ребер, получая эквивалентную задачу о стабильном матчинге для G' . Такая конструкция указана в [19] для случая линейных порядков на всех вершинах; она применима и к нашей модели КБМ. (В силу этого мы в дальнейшем можем ограничиться обыкновенными графами, что упрощает изложение, не ограничивая общности; в частности, ребро может обозначаться парой его концевых вершин.) Кратко опишем данную конструкцию. В ней (каждое или желаемое) ребро e между вершинами u и v в графе G заменяется подграфом K_e , порождаемым 6-циклом O_e с последовательностью (новых) вершин v_1, \dots, v_6 и двумя дополнительными ребрами uv_1 и vv_4 . Предпочтения в вершинах определены по кругу: ребро $v_{i-1}v_i$ лучше v_iv_{i+1} (полагая $v_6 = v_0$); кроме того, ребро uv_1 (vv_4) полагается средним в тройке для v_1 (соответственно, v_4). Квоты для всех новых вершин v_i равны 1.

Легко проверить, что в стабильном матчинге X' для модели с G' все вершины v_i должны быть покрыты X' . Отсюда следует, что ребра uv_1 и vv_4 одновременно либо принадлежат, либо не принадлежат X' . Это естественно порождает матчинг X для G (единственным образом), который стабилен для модели с G . Обратно, стабильный матчинг X для G может быть преобразован в стабильный матчинг X' для G' ; здесь оба ребра uv_1 и vv_4 принадлежат X' тогда и только тогда, когда ребро e принадлежит X . На подграфе K_e матчинг X' определяется единственным образом за исключением случая, когда $e \notin X$, и при этом ребро e – не интересное при X ни для вершины u , ни для вершины v ; пометим это как *случай (*)*. При нем X' может быть назначен внутри K_e двумя способами: либо $v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6 \in X'$, либо $v_2v_3, v_4v_5, v_6v_1 \in X'$. О связи ротаций в G' и G будет сказано в замечании 2 в разд. 5.

3. АКТИВНЫЙ ГРАФ И РОТАЦИИ

Зафиксируем стабильный матчинг $X \in \mathcal{S}$, отличный от X^{\max} . Нас интересует множество \mathcal{S}_X стабильных матчингов X' , удовлетворяющих $X' >_F X$ и при этом близких к X . Последнее означает, что X *непосредственно предшествует* X' в решете $(\mathcal{S}, >_F)$; иначе говоря, нет $Y \in \mathcal{S}$, лежащего между X и X' , т.е. удовлетворяющего $X' >_F Y >_F X$. Для нахождения \mathcal{S}_X мы будем строить т.н. *активный граф*, в котором будет выделяться семейство специальных циклов, называемых *ротациями*. Наш метод определения ротаций существенно проще и эффективнее, чем метод в [14], разработанный для более общей модели.

Определение 2. Вершину $w \in W$ назовем *дефицитной*, если $|X_w| < q(w)$. Иначе (при $|X_w| = q(w)$) будем именовать вершину w *полновесной*; множество таких вершин обозначим через $W^=$.

(Согласно свойству (2.3)(в), множество $W^=$ не зависит от $X \in \mathcal{S}$. Кроме того, ввиду (2.4) для дефицитной вершины w множество $X_w = X \cap E_w$ не зависит от $X \in \mathcal{S}$.)

В дальнейшем, когда не возникает двусмысленности, мы для краткости будем писать $>$ вместо $>_F$. Для простоты изложения мы далее будем рассматривать случай единичных квот $q(w) = 1$ для всех $w \in W$; общий случай квот q на W будет рассматриваться в разд. 7.

3.1. Активный граф

Для полновесной вершины $w \in W^=$ единственное ребро (зафиксированного) матчинга X , инцидентное w , обозначим через x_w , т.е. $X_w = \{x_w\}$. Рассмотрим множество ребер $e = fw \in E_w$, удовлетворяющих следующим свойствам:

$$(a) e <_w x_w, \text{ и (б) } e \text{ интересное для } f \text{ при } X, \text{ т.е. } e \in C_f(X_f \cup \{e\}). \quad (3.1)$$

Если это множество непустое, то самое лучшее ребро в нем относительно порядка $>_w$ назовем *W-допустимым* для X и обозначим $a_w = a_w(X)$.

Рассмотрим такое ребро $a_w = fw$. Согласно (2.2)(i), возможны два варианта для X_f и a_w . Если $C_f(X_f \cup \{a_w\})$ выражается как $(X_f - \{e'\}) \cup \{a_w\}$ для некоторого $e' \in X_f$ (вариант (б)), то ребро e' назовем *F-допустимым* и обозначим $b_f^w = b_f^w(X)$. Также скажем, что b_f^w *ассоциировано* с a_w , и что пара (a_w, b_f^w) образует *связку*, проходящую через вершину f .

(В случае $C_f(X_f \cup \{a_w\}) = X_f \cup \{a_w\}$ ребро a_w не порождает связку. Заметим также, что некоторые *F-допустимые* ребра могут быть ассоциированы с двумя и более *W-допустимыми* ребрами, т.е. возможны различные связки (a_w, b_f^w) и $(a_{w'}, b_f^{w'}),$ для которых $b_f^w = b_f^{w'}$.) Из определения допустимых ребер непосредственно следует, что

$$\text{для любой связки } (a, b), \text{ проходящей через вершину } f \in F, \text{ справедливо } a \notin X_f, \quad (3.2) \\ b \in X_f, \text{ и } C_f(X_f \cup \{a\}) = (X_f \cup \{a\}) - \{b\}.$$

Пусть $D = D(X) = (V, E_D)$ – ориентированный граф, ребрами которого являются W -допустимые ребра, ориентированные от W к F , и F -допустимые ребра, ориентированные от F к W ; мы применяем обозначение вида (w, f) для первых, и (f, w) для вторых (где $w \in W$ и $f \in F$). Применим к D следующую процедуру.

Процедура очистки. Если в текущем графе D обнаруживается вершина $w \in W$, имеющая исходящее W -допустимое ребро $a_w = (w, f)$, но не имеющая входящего F -допустимого ребра (вида (f', w)), то удаляем a_w из D . Одновременно, если такое a_w имеет ассоциированное ребро b_f^w , и это ребро не участвует в других связках, проходящих через f в текущем D , то также удаляем b_f^w из D . Кроме того, удаляем из D изолированные вершины, когда они появляются. Повторяем процедуру с новым D , и т.д., пока D не стабилизируется.

Пусть $\Gamma = \Gamma(X) = (V_\Gamma, E_\Gamma)$ обозначает граф D , полученный по завершении этой процедуры. Мы называем Γ *активным графом* для X , и его ребра – *активными ребрами*. Положим $W_\Gamma := W \cap V_\Gamma$ и $F_\Gamma := F \cap V_\Gamma$. Для вершины $v \in V_\Gamma$ обозначим через $\delta^{\text{out}}(v) = \delta_\Gamma^{\text{out}}(v)$ и $\delta^{\text{in}}(v) = \delta_\Gamma^{\text{in}}(v)$ множества ребер в Γ , выходящих из v и входящих в v , соответственно. Граф Γ обладает следующими свойствами:

- (а) каждая вершина $w \in W_\Gamma$ удовлетворяет $|\delta^{\text{out}}(w)| = |\delta^{\text{in}}(w)| = 1$;
- (б) для каждой вершины $f \in F_\Gamma$ справедливо $|\delta^{\text{out}}(f)| = |\delta^{\text{in}}(f)|$, и связки (a_w, b_f^w) , проходящие через f , попарно не пересекаются по ребрам и дают разбиение множества $\delta^{\text{out}}(f) \cup \delta^{\text{in}}(f)$ (где $a_w \in \delta^{\text{in}}(f)$ и $b_f^w \in \delta^{\text{out}}(f)$).

Действительно, из определения W - и F -допустимых ребер следует, что $|\delta^{\text{in}}(w)|, |\delta^{\text{out}}(w)| \leq 1$ для всех $w \in W_\Gamma$, и $|\delta^{\text{in}}(f)| \geq |\delta^{\text{out}}(f)|$ для всех $f \in F_\Gamma$. В результате процедуры очистки неравенства в первом выражении (для w) обращаются в 1 = $|\delta^{\text{in}}(w)| \geq |\delta^{\text{out}}(w)|$, а вид второго выражения (неравенства для f) сохраняется. Теперь требуемые равенства следуют из очевидных балансовых соотношений (поскольку ребра в Γ , выходящие из W , и ребра, входящие в F , – одни и те же, и аналогично для ребер, выходящих из F , и ребер, входящих в W).

3.2. Ротации

Из (3.3) следует, что активный граф $\Gamma = \Gamma(X)$ декомпозируется в множество попарно непересекающихся по ребрам ориентированных циклов, где каждый цикл $L = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k = v_0)$ однозначно строится естественным образом, а именно: для $i = 1, \dots, k$, если $v_i \in W_\Gamma$, то $\{e_i\} = \delta^{\text{in}}(v_i)$ и $\{e_{i+1}\} = \delta^{\text{out}}(v_i)$, а если $v_i \in F_\Gamma$, то пара (e_i, e_{i+1}) образует связку, проходящую через v_i . Заметим, что все ребра в L различные, но L может самопересекаться в вершинах доли F . В зависимости от контекста мы также можем рассматривать цикл L как подграф в Γ и применять обозначение $L = (V_L, E_L)$.

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X)$ обозначает множество указанных циклов в Γ . Для каждого цикла L определим разбиение (L^+, L^-) множества его ребер, где L^+ образовано ребрами, идущими от W к F , а L^- – ребрами, идущими от F к W (называемыми, соответственно, W -активными и F -активными ребрами). Циклы $L \in \mathcal{L}$ мы называем *ротациями*, ассоциированными с матчингом X . Ключевые свойства ротаций приводятся в следующих двух утверждениях.

Предложение 3.1. Для каждого $L \in \mathcal{L}(X)$ матчинг $X' := (X - L^-) \cup L^+$ является стабильным и удовлетворяет $X' > X$.

Скажем, что такой матчинг X' получен из X применением *ротации* L , и обозначим через S_X множество таких матчингов по всем $L \in \mathcal{L}(X)$.

Предложение 3.2. Пусть $Y \in S$ и $X \prec Y$. Тогда существует $X' \in S_X$, удовлетворяющий $X' \leq Y$.

Доказательства этих предложений существенно используют следующую лемму. Для упрощения обозначений здесь и далее для множества ребер Z и элементов $a \notin Z$ и $b \in Z$ мы можем писать $Z + a$ вместо $Z \cup \{a\}$ и $Z - b$ вместо $Z - \{b\}$.

Лемма 3.1. Пусть $(a(1), b(1)), \dots, (a(k), b(k))$ – различные (непересекающиеся по ребрам) связки в Γ , проходящие через вершину $f \in F$. Тогда для любого множества $I \subseteq \{1, \dots, k\} =: [k]$ справедливо

$$C_f(X_f + a(1) + \dots + a(k) - \{b(i) : i \in I\}) = X_f + a(1) + \dots + a(k) - b(1) - \dots - b(k).$$

Доказательство. Обозначим $X_f + a(1) + \dots + a(k) - \{b(i) : i \in I\}$ через Z_I . Надо показать, что $C_f(Z_I) = Z_{[k]}$ для любого $I \subseteq [k]$.

Сперва установим это для $I = \emptyset$. Для этого сравним действие C_f на $Z_\emptyset = X_f + a(1) + \dots + a(k)$ и на $Y_i := X_f + a(i)$ при произвольном $i \in [k]$. Из определения связки $(a(i), b(i))$ следует $C_f(Y_i) = X_f + a(i) - b(i)$. Применяя аксиому (A2) к паре $Z_\emptyset \supset Y_i$, имеем

$$C_f(Z_\emptyset) \cap Y_i \subseteq C(Y_i) = X_f + a(i) - b(i).$$

Поскольку Y_i содержит b_i , получаем $b_i \notin C_f(Z_0)$.

Таким образом, $C_f(Z_0) \subseteq Z_0 - b(1) - \dots - b(k) = Z_{[k]}$. В этом выражении включение выполняется как равенство, что следует из кардинальной монотонности, примененной к паре $Z_0 \supseteq X_f$, в силу которой

$$|C(Z_0)| \geq |C(X_f)| = |X_f| = |Z_{[k]}|.$$

Теперь покажем требуемое равенство для произвольного $I \neq \emptyset$, предполагая это выполненным по индукции для всякого $I' \subset I$. Возьмем $i \in I$, положим $I' := I - i$ и рассмотрим пару $Z_{I'} \supset Z_I$. По индукции имеем $C(Z_{I'}) = Z_{[k]}$. Тогда в силу кардинальной монотонности получим

$$|C_f(Z_I)| \leq |C_f(Z_{I'})| = |Z_{[k]}| = |X_f|.$$

С другой стороны, применяя (A2), имеем $C_f(Z_{I'}) \cap Z_I \subseteq C_f(Z_I)$. Отсюда следует, что $C_f(Z_I)$ содержит $Z_{[k]}$ (ввиду очевидного $Z_I \supseteq Z_{[k]}$). Тогда $C_f(Z_I) = Z_{[k]}$.

Лемма 3.1 доказана.

Из этой леммы следует, что

множество $Z := X_f + a(1) + \dots + a(k) - b(1) - \dots - b(k)$ — приемлемое для f и удовлетворяет $Z >_f X_f$. (3.4)

(Поскольку, применяя лемму 3.1 к $I = \emptyset$, имеем $C_f(Z \cup X_f) = C_f(X_f + a(1) + \dots + a(k)) = Z$.)

Доказательство предложения 3.1. Прежде всего заметим, что множество X'_v приемлемое для всех $v \in V$. Это следует из приемлемости X_v , если $v \notin V_L$. Для $w \in W \cap V_L$ множество X'_w состоит из одного ребра, и $C_w(X'_w) = X'_w$ очевидно. А для $f \in F \cap V_L$ приемлемость X'_f следует из (3.4) при $L^+ \cap E_f = \{a_1, \dots, a_k\}$ и $L^- \cap E_f = \{b(1), \dots, b(k)\}$. Таким образом, $X' \in \mathcal{A}$.

Теперь, рассуждая от противного, предположим, что X' не стабильное и рассмотрим блокирующее ребро $e = wf$ для X' , т.е. e интересное для w при X'_w и интересное для f при X'_f . Заметим, что $e \notin X$. (Иначе из $e \in X$ и $e \notin X'$ следовало бы $e \in L^- \cap E_f =: B_f$, и, применяя лемму 3.1 к $A_f := L^+ \cap E_f$ и $B' := B_f - e$, мы имели бы $C_f(X'_f + e) = C_f((X_f - B') \cup A_f) = X'_f$, вопреки тому, что e интересное для f при X'_f .)

Предположим, что указанное ребро e не интересное для f при X . Тогда $C_f(X_f + e) = X_f$, откуда (применяя плоттovость (2.1)) получаем

$$C_f(X'_f \cup X_f + e) = C_f(X'_f \cup C_f(X_f + e)) = C_f(X'_f \cup X_f) = X'_f.$$

С другой стороны, полагая $Z' := C_f(X'_f + e)$, имеем

$$C_f(X'_f \cup X_f + e) = C_f(C_f(X'_f \cup X_f) + e) = C_f(X'_f + e) = Z'.$$

Следовательно, $Z' = X'_f$. Но согласно (2.2)(ii), из интересности e относительно X'_f должно следовать $Z' >_f X'_f$; противоречие.

Таким образом, e интересное для f при X .

Теперь, чтобы прийти к финальному противоречию, сравним e с активным ребром a_w и ребром $e' \in X$, инцидентным w ; тогда $\{a_w\} = X'_w$ и $\{e'\} = X_w$. Так как e интересное для w при X' , то выполняется $e >_w a_w$. В то же время, так как ребро e интересное для f при X , то e не может быть интересным для w при X (ввиду стабильности X); поэтому $e' >_w e$. Таким образом, e удовлетворяет свойству (3.1) и при этом является более предпочтительным, чем W -активное ребро a_w ; противоречие.

Итак, X' не допускает блокирующих ребер, т.е. является стабильным. Свойство $X' >_F X$ следует из $x_w >_w a_w$, $w \in W_L$ (ввиду (2.3)(б)).

Предложение 3.1 доказано.

Доказательство предложения 3.2. Чтобы построить ротацию $L \in \mathcal{L}(X)$, определяющую требуемый матчинг X' , прежде всего заметим, что согласно (2.3)(в), размеры ограничений X и Y одинаковы для каждой вершины $v \in V$, т.е. $|X_v| = |Y_v|$. Поскольку $X \neq Y$, найдется вершина $w \in W$, для которой $X_w \neq Y_w$. Тогда X_w состоит из одного ребра x_w , и Y_w состоит из одного ребра y_w , и выполняется $x_w >_w y_w$ (так как $X < Y$ влечет $X >_W Y$, ввиду полярности (2.3)(б)).

Ребро $y_w = wf$ должно быть интересным для вершины f при X . Действительно, ввиду $Y_f \succeq_f X_f$, имеем $C(Y_f \cup X_f) = Y_f$, где $C := C_f$. Тогда, используя плоттovость, имеем

$$Y_f = C(Y_f \cup X_f) = C((Y_f - y_w) \cup (X_f + y_w)) = C((Y_f - y_w) \cup C(X_f + y_w)).$$

Из $y_w \notin (Y_f - y_w)$ следует $y_w \in C(X_f + y_w)$, поэтому y_w интересное для f при X .

Следовательно, имеется активное ребро $a_w = wg$, для которого $x_w >_w a_w \geq_w y_w$. Рассмотрим вершину g и множества X_g и Y_g . Ребро a_w является интересным для g при X , но не при Y (иначе мы имели бы $a_w \neq y_w$ и $a_w >_w y_w$, и тогда ребро a_w было бы интересным при Y для обеих вершин w и g , вопреки стабильности Y). Итак, $C_g(Y_g + a_w) = Y_g$.

Факт. $C_g(X_g + a_w) = X_g + a_w - b$ для некоторого $b \in X_g$; при этом b не принадлежит Y , и для $Z := X_g + a_w - b$ выполняется $X_g <_g Z \leq_g Y_g$.

Доказательство. Ввиду интересности a_w относительно X_g , возможны два случая (ср. (2.2)(i)): (a) $C(X_g + a_w) = X_g + a_w$, или (б) $C(X_g + a_w) = X_g + a_w - b$ для некоторого $b \in X_g$, где $C := C_g$. В случае (а), если $a_w \in Y$, имеем

$$|C(X_g + a_w)| = |X_g| + 1 > |Y_g| = |C(Y_g \cup X_g)|,$$

и в то же время $X_g + a_w \subseteq Y_g \cup X_g$, что противоречит кардинальной монотонности. Если же $a_w \notin Y$, то

$$C(Y_g \cup X_g + a_w) = C(C(Y_g \cup X_g) + a_w) = C(Y_g + a_w),$$

а также $|C(Y_g + a_w)| \geq |C(X_g + a_w)| = |X_g| + 1$ (используя кардинальную монотонность для вложения $Y_g \cup X_g + a_w \supseteq X_g + a_w$). Тогда $C(Y_g + a_w) \neq Y_g$, и, следовательно, ребро a_w является блокирующим для Y (учитывая $a_w \neq y_w$); противоречие.

Таким образом, имеет место случай (б). Предположим теперь, что $b \in Y$. Тогда $C(Y_g \cup X_g + a_w) = C(Y_g + a_w)$, и в то же время

$$C(Y_g \cup X_g + a_w) = C((Y_g - b) \cup X_g + a_w) = C((Y_g - b) \cup C(X_g + a_w)) = C((Y_g - b) \cup (X_g + a_w - b)).$$

Поскольку оба операнда в последнем объединении не содержат b , получаем $b \notin C(Y_g + a_w)$. Но тогда $C(Y_g + a_w) \subseteq Y_g + a_w - b \neq Y_g$, что дает противоречие как в случае $a_w \in Y$, так и в случае $a_w \notin Y$ (где можно видеть, что a_w блокирует Y). Таким образом, $b \notin Y$. Указанные сравнения для X_g , $Z = X_g + a_w - b$ и Y_g легко следуют. Факт доказан.

Пусть $b = w'g$. Из факта следует, что ребро b ассоциировано (образует связку) с a_w , и что вершина w' инцидентна ребру $y_{w'} \in Y$, отличному от $b = x_{w'} \in X$. Тогда выполняется $x_{w'} >_{w'} y_{w'}$ (ввиду $X >_W Y$), и мы можем применить к паре $(x_{w'}, y_{w'})$ те же самые рассуждения, что применялись ранее к паре (x_w, y_w) .

Продолжая данный процесс и далее, мы получаем “неограниченный” путь из чередующихся W -активных и F -активных ребер для X . В нем каждая пара соседних ребер, инцидентных вершине f в F , скажем, $e, e' \in E_f$, образует связку, для которой выполняется $e \notin X_f \ni e'$, и множество $Z := X_f + e - e'$ удовлетворяет $Y_f \succeq_f Z$. Выделяя в этом пути участок между двумя попаданиями в одну и ту же вершину в W , мы получаем цикл, являющийся ротацией L , определяющей искомый матчинг $X' := (X - L^-) \cup L^+$ (где L^+ и L^- – множества W -активных и F -активных ребер в L , соответственно). Здесь все вершины в $W \cap V_L$ различные, и из построения следует, что для каждой такой вершины w выполняется $x_w >_w x'_w \geq_w y_w$. (Что касается вершин в $F \cap V_L$, каждая такая вершина f может быть пройдена циклом L несколько раз, что порождает непересекающиеся по ребрам связки; используя лемму 3.1 и факт выше, можно видеть, что $X_f <_f X'_f \leq_f Y_f$.)

Предложение 3.2 доказано.

4. ПОСЕТ РОТАЦИЙ

В этом разд. устанавливаются важные дополнительные свойства ротаций, которые приводят к построению посета ротаций.

Пусть \mathcal{T} – последовательность матчингов X_0, X_1, \dots, X_N , где X_0 стабильное, и каждое X_i получается из X_{i-1} применением (или *сдвигом вдоль*) ротации $L_i \in \mathcal{L}(X_{i-1})$, т.е. $X_i = (X_{i-1} - L_i^-) \cup L_i^+$. Тогда, в силу предложения 3.1, все матчинги X_i являются стабильными, и справедливо $X_0 < X_1 < \dots < X_N$ (где $< = <_F$). Такую последовательность \mathcal{T} мы называем *трассой*, идущей из X_0 в X_N . Множество ротаций $\{L_1, \dots, L_N\}$ обозначим $\mathcal{R}(\mathcal{T})$. Можно видеть, что

- (i) число матчингов в любой трассе \mathcal{T} не превышает $|E|$;
- (ii) для каждого стабильного матчинга X найдется трасса, идущая из минимального матчинга X^{\min} (наихудшего для F и наилучшего для W) в максимальный матчинг X^{\max} и проходящая через X . (4.1)

Действительно, если X_i получается применением ротации к X_{i-1} , то для каждой вершины $w \in W$, где $(X_i)_w$ отличается от $(X_{i-1})_w$, инцидентное матчинговое ребро становится менее предпочтительным. Это дает (i) (и даже оценку $|\mathcal{T}| \leq |E|/2$). В свою очередь (ii) легко следует из Предложения 3.2.

Также, применяя лемму 3.1, легко показать коммутируемость ротаций в активном графе $\Gamma(X)$. Более точно:

для любого подмножества $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}(X)$ матчинг X' , получаемый из X удалением ребер из $\cup(L^- : L \in \mathcal{L}')$ и добавлением ребер из $\cup(L^+ : L \in \mathcal{L}')$ является стабильным, и каждое $L' \in \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}$ является ротацией в $\Gamma(X')$; в частности, ротации в $\mathcal{L}(X)$ могут применяться в произвольном порядке. (4.2)

Это позволяет получить следующее важное свойство инвариантности множества ротаций для трасс, соединяющих фиксированные матчинги (впервые свойство такого рода было получено в [11] для классических стабильных марьяжей и затем было показано рядом авторов для более общих моделей стабильности).

Лемма 4.1. *Пусть $X, Y \in \mathcal{S}$ и $X < Y$. Тогда для всех трасс \mathcal{T} , идущих из X в Y , множество ротаций $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ одно и то же.*

Доказательство. Обозначим через X множество стабильных матчингов X' таких, что $X \leq X' \leq Y$. Мы знаем, что множество трасс, идущих из $X' \in X$ в Y непусто (в силу предложения 3.2). Скажем, что матчинг $X' \in X$ является *особым*, если найдутся две трассы $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ из X' в Y такие, что $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \neq \mathcal{R}(\mathcal{T}')$. Надо показать, что матчинг X неособый (при фиксированном Y).

Предположим, что это не так, и рассмотрим особый матчинг $X' \in X$ максимальный в том смысле, что любой матчинг $Z \in X$ такой, что $X' < Z \leq Y$, уже не является особым. В любой трассе из X' в Y первый после X' матчинг Z получается из X' применением некоторой ротации из $\mathcal{L}(X')$. Поэтому из выбора X' следует, что найдутся две ротации $L, L' \in \mathcal{L}(X')$ такие, что матчинги Z и Z' , полученные из X' применением L и L' (соответственно) являются неособыми, но имеются трасса \mathcal{T} из X' в Y , проходящая через Z , и трасса \mathcal{T}' из X' в Y , проходящая через Z' , для которых $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \neq \mathcal{R}(\mathcal{T}')$.

В то же время, поскольку ротации L и L' коммутируют (ср. (4.2)), L является ротацией для Z' , а L' – ротацией для Z . Поэтому есть две трассы $\tilde{\mathcal{T}}$ и $\tilde{\mathcal{T}'}$ из X' в Y такие, что $\tilde{\mathcal{T}}$ начинается с X', Z, Z'' , а $\tilde{\mathcal{T}'}$ начинается с X', Z', Z'' , а затем эти трассы совпадают; здесь Z'' получается из Z применением L' или, эквивалентно, получается из Z' применением L . Тогда $\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}(\tilde{\mathcal{T}'})$. В силу неособости Z и Z' должно выполняться $\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}(\mathcal{T})$ и $\mathcal{R}(\tilde{\mathcal{T}'}) = \mathcal{R}(\mathcal{T}')$. Но тогда получаем $\mathcal{R}(\mathcal{T}) = \mathcal{R}(\mathcal{T}')$; противоречие.

Лемма 4.1 доказана.

Назовем трассу, идущую из X^{\min} в X^{\max} *полной*. Согласно лемме 4.1, для всех полных трасс \mathcal{T} множество ротаций $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ одно и то же; будем обозначать его через \mathcal{R} (таким образом, \mathcal{R} состоит из всех возможных ротаций, применимых к матчингам в \mathcal{S}). Известный метод сравнения ротаций, первоначально указанный в [11], подходит и для нашей модели КБМ и позволяет задать на \mathcal{R} структуру посета.

Определение 3. Для ротаций $R, R' \in \mathcal{R}$ скажем, что R предшествует R' и обозначим это как $R < R'$, если в каждой полной трассе ротация R применяется раньше, чем ротация R' .

Это бинарное отношение является транзитивным и антисимметричным и задает частичный порядок на \mathcal{R} ; мы называем $(\mathcal{R}, <)$ *посетом ротаций* для G . Тесная связь этого посета со стабильными матчингами позволяет получить “компактное описание” решетки $(\mathcal{S}, <)$ (в духе работы Биркхофа [10], где произвольная конечная дистрибутивная решетка представляется в виде решетки идеалов посета).

Более точно, для каждого $X \in \mathcal{S}$ возьмем трассу \mathcal{T} из X^{\min} в X и обозначим множество ротаций $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ через $\omega(X)$. Это множество не зависит от выбранной трассы, и для $R, R' \in \mathcal{R}$ из $R < R'$ и $R' \in \omega(X)$ следует $R \in \omega(X)$, т.е. $\omega(X)$ является *идеалом* посета $(\mathcal{R}, <)$. Верно и обратное, и более того, отображение ω дает изоморфизм решеток.

Предложение 4.1. *Соответствие $X \mapsto \omega(X)$ устанавливает изоморфизм между решеткой стабильных матчингов $(\mathcal{S}, <_F)$ и решеткой (\mathcal{I}, \subset) идеалов посета $(\mathcal{R}, <)$ (где точные нижняя и верхняя грани для $I, I' \in \mathcal{I}$ – это $I \cap I'$ и $I \cup I'$, соответственно).*

Доказательство. Рассмотрим стабильные матчинги $X, Y \in \mathcal{S}$ и возьмем их структурное пересечение (“meet”) $M := X \wedge Y$ и структурное объединение (“join”) $J := X \vee Y$ в решетке $(\mathcal{S}, <)$. Основная часть доказательства состоит в том, чтобы установить соотношения

$$\omega(X) \cap \omega(Y) = \omega(M) \quad \text{и} \quad \omega(X) \cup \omega(Y) = \omega(J); \quad (4.3)$$

иными словами, нужно показать, что ω определяет гомоморфизм рассматриваемых решеток.

Покажем левое равенство в (4.3). Для этого применим метод доказательства предложения 3.2, рассматривая пару $M < X$ и пару $M < Y$. Пусть W_1 (W_2) – множество вершин $w \in W$, где $M_w \neq X_w$ (соответственно, $M_w \neq Y_w$). Мы утверждаем, что $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Чтобы это показать, следуя доказательству предложения 3.2, выберем произвольную начальную вершину $w \in W_1$, для которой выполняется $m_w >_w x_w$ (где $\{m_w\} = M_w$ и $\{x_w\} = X_w$), и построим соответствующий чередующийся путь P в графе допустимости $D(M)$ с началом w до первого зацикливания, получая ротацию $L \in \mathcal{L}(M)$. Тогда для $M' := (M - L^-) \cup L^+$ выполняется $M < M' \leq X$. Заметим, что путь P и ротация L строятся канонически, они определяются только графиком $D(M)$ и начальной вершиной w (и в остальном не зависят от X).

В случае $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, взяв общую вершину $w \in W_1 \cap W_2$, мы получили бы одну и ту же ротацию для обеих пар (M, X) и (M, Y) . Но тогда для X и Y мы имели бы нижнюю грань большую, чем M (а именно, M' как выше); противоречие.

Следовательно, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Продолжая построение по указанному методу для пары (M, X) , мы получим трассу \mathcal{T} из M в X такую, что для каждого промежуточного матчинга \tilde{M} множество вершин $w \in W$, где $\tilde{M}_w \neq X_w$, является подмножеством в W_1 . И аналогично для трассы \mathcal{T}' из M в Y и множества W_2 . Отсюда следует, что $\mathcal{R}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{R}(\mathcal{T}') = \emptyset$. Поскольку $\omega(X) = \omega(M) \cup \mathcal{R}(\mathcal{T})$ и $\omega(Y) = \omega(M) \cup \mathcal{R}(\mathcal{T}')$, мы получаем требуемое левое равенство в (4.3).

Доказательство правого равенства в (4.3) симметричное (оно может проводиться путем перехода от \prec_F к \prec_W и обращением ротационных преобразований).

Теперь требуемое утверждение легко следует из того факта, что для ротаций $R, R' \in \mathcal{R}$ отношение $R \ll R'$ не выполняется тогда и только тогда, когда найдется стабильный матчинг X , для которого $R' \in \omega(X) \not\ni R$. (Иными словами, решетка (\mathcal{S}, \prec) не может быть “более крупной”, чем решетка (\mathcal{I}, \subset) .)

Предложение 4.1 доказано.

Как следствие, множество \mathcal{S} биективно множеству \mathcal{A} анти-цепей посета (\mathcal{R}, \ll) . (Напомним, что *анти-цепь* в посете (P, \prec) – это множество A попарно несравнимых элементов. Оно определяет идеал $\{p \in P : \exists a \in A \mid p \leq a\}$, и определяется идеалом, для которого A – множество максимальных элементов.)

5. ПОСТРОЕНИЯ

Как указывалось выше (ср. (4.1)(i)), число ротаций $|\mathcal{R}|$ не превосходит числа ребер $|E|$ рассматриваемого графа; поэтому посет ротаций (как граф) имеет размер $O(|E|^2)$. (Помимо этого, можно видеть, что ротации попарно не пересекаются по ребрам одного знака; следовательно, суммарное число ребер в ротациях не выше $2|E|$.) В свете леммы 4.1, нахождение множества \mathcal{R} не представляет большого труда, если известен начальный (наименее выгодный для F) стабильный матчинг X^{\min} ; а именно, достаточно построить произвольную полную трассу, идущую из X^{\min} (детали такого построения будут уточнены позднее). Менее тривиальной выглядит задача нахождения отношения предшествования \ll на ротациях, которое было определено неявно, путем рассмотрения всего множества полных трасс. Мы начнем этот раздел с изложения эффективного метода определения этого отношения и затем рассмотрим вопросы эффективного построения других упомянутых структур.

5.1. Построение порождающего графа для (\mathcal{R}, \ll)

Ротация $R \in \mathcal{R}$ называется *непосредственно предшествующей* ротации $R' \in \mathcal{R}$, если $R \ll R'$ и нет такого $R'' \in \mathcal{R}$, что $R \ll R'' \ll R'$. Обозначим через $H = (\mathcal{R}, \mathcal{E})$ ориентированный граф, в котором множество ребер \mathcal{E} образовано всеми парами (R, R') , где R непосредственно предшествует R' ; иными словами, H – это диаграмма Хассе посета (\mathcal{R}, \ll) . Граф H определяет данный посет (через достижимость ориентированными путями) и может заменять посет при работе с приложениями.

Эффективное построение графа H опирается на следующий простой факт.

Лемма 5.1. Для $R \in \mathcal{R}$ обозначим I_R^{\max} максимальный идеал в (\mathcal{R}, \ll) , не содержащий R . Положим $I' := I_{-R}^{\max} \cup \{R\}$. Ротация R непосредственно предшествует ротации R' тогда и только тогда, когда R' является минимальным элементом, не содержащимся в I' .

Доказательство. Заметим, что I_{-R}^{\max} является дополнением до \mathcal{R} множества (“фильтра”) Φ_R , образованного ротациями \tilde{R} большими или равными R (т.е. $R \ll \tilde{R}$ или $R = \tilde{R}$). Ясно, что минимальные элементы в $\Phi_R - \{R\}$ – это в точности те элементы R' , для которых R является непосредственно предшествующим. Эти R' составляют множество минимальных элементов вне идеала I' . Лемма доказана.

Для $R \in \mathcal{R}$ обозначим через I_R^+ множество ротаций, непосредственно следующих за R . Основываясь на предложении 4.1 и лемме 5.1, мы можем эффективно строить множество I_R^+ следующим образом (при условии, что известен матчинг X^{\min}).

Построение I_R^+ . Начиная с X^{\min} , последовательно выстраиваем трассу \mathcal{T} , используя все возможные ротации, кроме R . А именно, на очередном шаге для текущего матчинга X находим множество ротаций $\mathcal{L}(X)$, ассоциированных с X (см. раздел 3.2), выбираем произвольную ротацию $L \in \mathcal{L}(X)$, отличную от R , и сдвигаем X вдоль L , получая новый текущий матчинг X' . В случае $\mathcal{L}(X) = \{R\}$ первая фаза процедуры заканчивается.

Вторая фаза процедуры состоит в сдвиге полученного X вдоль R . Множество $\mathcal{L}(X')$ ротаций, ассоциированных с полученным при сдвиге матчинге X' , выдается как искомое множество I_R^+ .

(Нетрудно видеть, что при завершении первой фазы текущий матчинг X соответствует идеалу $I = I_{-R}^{\max}$, т.е. $\omega(X) = I$. Факт совпадения I_R^+ с $\mathcal{L}(X')$ также очевиден.)

“Незамысловатый” алгоритм, использующий эту процедуру, состоит из $|\mathcal{R}|$ больших итераций, каждая из которых рассматривает очередную ротацию R в списке всех ротаций. (Заметим, что нет нужды строить этот список заранее, он может формироваться по ходу выполнения больших итераций. Список начинается с множества $\mathcal{L}(X^{\min})$.) На каждой большой итерации многократно решается следующая базовая задача:

(P): для заданного $X \in S$ построить активный граф $\Gamma(X)$ и выделить в нем множество ротаций $\mathcal{L}(X)$.

Для построения $\Gamma(X)$ просматриваются вершины $w \in W$, и для каждого w сканируются ребра $wf \in E_w$ в порядке убывания предпочтения $>_w$, начиная с ребра, следующего за x_w . Для каждого ребра $e = wf$ определяется, является ли оно интересным для f при X (путем вычисления $C_f(X_f + e)$ и сравнения с X_f), и первое интересное ребро (если таковое найдется) объявляется W -активным ребром a_w . Попутно определяются F -активные ребра и строятся связки. Это дает допустимый граф $D(X)$. Процедуры очистки графа $D(X)$ и разложения очищенного активного графа $\Gamma(X)$ на ротации рутинные, и могут выполняться за линейное время $O(|E|)$. Как следствие,

решение задачи (P) сводится к выполнению $O(|E|)$ стандартных операций плюс $O(|E|)$ обращениям к “оракулам” C_f ($f \in F$). (5.1)

(Здесь и далее мы предполагаем, что функции выбора C_f задаются неявно при помощи “оракула”, который для опрашиваемого аргумента $Z \subseteq E_f$ сообщает значение $C_f(Z)$; считается, что такая операция занимает $O(1)$ оракульного времени.)

Бесхитростное построение множества I_R^+ для фиксированного R сводится к независимому решению $O(|E|)$ задач (P) (где каждая задача касается элемента строящейся трассы \mathcal{T}), поэтому временные показатели, указанные в (5.1), следует умножить на $O(|E|)$. Однако этот процесс можно ускорить. Для этого в каждой вершине $w \in W$ следует запоминать последнее просканированное ребро $e = wf$ на предыдущих шагах. Если это ребро было активным и участвовало в примененной ротации, то дальнейшее сканирование в E_w следует начинать с ребра, следующего по порядку за e . Если же оно не использовалось при ротации, то оно остается активным на текущем шаге. Это обосновывается при помощи леммы 3.1, из которой следует, что если ротация L входила в $\mathcal{L}(X)$ для X на некотором шаге, но не была применена, то она остается действующей ротацией на последующих шагах, пока не будет применена.

Это дает улучшенную процедуру построения I_R^+ , при которой каждое ребро в E_w сканируется не более одного раза, и поэтому вся процедура для одного $R \in \mathcal{R}$ выполнима за стандартное время $O(|E|)$ и аналогичное оракульное время. Отсюда при переборе по \mathcal{R} получаем

Предложение 5.1. При наличии матчинга X^{\min} нахождение минимального порождающего графа (диаграммы Хасце) $H = (\mathcal{R}, \mathcal{E})$ для посета ротаций $(\mathcal{R}, <)$ осуществимо за время $O(|E|^2)$ (включая оракульное время).

5.2. Построение начального матчинга X^{\min}

Чтобы сконструировать X^{\min} , можно воспользоваться методом в [17, Sec. 3.1], приспособленным для более широкого класса моделей стабильности на двудольных графах. Ниже мы даем его описание применительно к нашей модели КБМ. Альтернативный метод, основанный на классической технике “отложенных принятий” (deferred acceptance), излагается в [14, Sec. 4.1].

На итерациях алгоритма построения X^{\min} последовательно конструируются тройки множеств (B^i, X^i, Y^i) , $i = 0, 1, \dots, i, \dots$. В начале полагается $B^0 := E$. На входе очередной i -й итерации имеется множество $B^i \subseteq E$ (уже известное), которое преобразуется на двух стадиях итерации.

На 1-й стадии итерации B^i преобразуется в $X^i \subseteq E$ применением оператора C_w к каждому ограничению $B_w^i = B^i|_{E_w}$ ($w \in W$), т.е. X^i – это матчинг, для которого $X_w^i = C_w(B_w^i)$. Иными словами, в нашей модели с линейными предпочтениями и единичными квотами в W для каждой вершины $w \in W$ в множестве B_w^i выбирается наиболее предпочтительное (относительно $>_w$) ребро e , и полагается $X_w^i := \{e\}$. В случае $B_w^i = \emptyset$, полагается $X_w^i := \emptyset$ (и вершина w будет дефицитной). Таким образом, X^i удовлетворяет квотам во всех вершинах доли W .

На 2-й стадии итерации полученный матчинг X^i трансформируется в $Y^i \subseteq E$ применением оператора C_f к каждому ограничению $X_f^i = X^i|_{E_f}$ ($f \in F$), т.е. Y^i – это матчинг, для которого $Y_f^i = C_f(X_f^i)$. (Следовательно, Y^i приемлемое для всех вершин; однако оно не обязано быть стабильным.)

Полученные множества X^i, Y^i затем используются при генерации множества B^{i+1} для следующей итерации. А именно:

$$B^{i+1} \text{ состоит из всех } e \in E \text{ таких, что } e \in B^i, \text{ или } e \in X^i \cap Y^i, \text{ либо } e \notin X^i \cup Y^i \text{ (иначе говоря, } e \in B^i \text{ не попадает в } B^{i+1}, \text{ если } e \text{ принадлежит } X^i \text{ и не принадлежит } Y^i\text{).} \quad (5.2)$$

Затем B^{i+1} преобразуется в X^{i+1} и Y^{i+1} как указано выше, и т.д. Процесс заканчивается, когда на текущей, p -й, итерации получаем равенство $Y^p = X^p$ (эквивалентно, $B^{p+1} = B^p$). Можно видеть, что $B^0 \supset B^1 \supset \dots \supset B^p$, поэтому процесс конечен и число итераций не превосходит $|E|$.

Из доказанного в [17] следует

Предложение 5.2. Полученный матчинг X^p стабильный и оптимальный для W , т.е. $X^p = X^{\min}$.

Следует заметить, что для рассматриваемой в [17] общей модели, которая может иметь дело с вещественными функциями на E , процесс преобразования соответствующих функций (b^i, x^i, y^i) может быть бесконечным, но всегда сходится к некоторой тройке $(\hat{b}, \hat{x}, \hat{y})$, удовлетворяющей $\hat{x} = \hat{y}$. Доказывается (в Теоремах 1 и 2 в [17]), что предельная функция \hat{x} стабильная и оптимальная для соответствующей доли вершин. В нашем частном булевом случае мы получаем предложение 5.2.

На i -й итерации алгоритма множество X^i формируется из B^i за $O(|W|)$ (“амортизационных”) действий, путем взятия первых элементов в ограничениях $B_w^i, w \in W$. Множества X_f^i для всех $f \in F$ можно также сформировать за $O(|W|)$ действий, и оператор C_f применяется к каждому X_f^i не более одного раза (вычисляя Y_f^i). С учетом этого, имплементацию алгоритма можно организовать так, чтобы получить следующие оценки сложности:

$$\text{матчинг } X^{\min} \text{ строится за время } O(|E||V|) \text{ (включая оракульное время).} \quad (5.3)$$

Это вместе с предложением 5.1 дает следующий результат.

Теорема 5.1. Построй ротаций (\mathcal{R}, \prec) может быть построен за время $O(|E|^2)$ (включая оракульное время).

Замечание 2. Построение ротаций и их посета нетрудно перенести на КБМ с графом $G = (V, E)$, содержащим кратные ребра. Для этого используется редукция к графу $G' = (V', E')$ без кратных ребер путем замены ребер e подграфами K_e как указано в замечании 1 (в разд. 2); здесь множество U заменяемых ребер содержит по крайней мере одно ребро из каждой пары кратных ребер. Стабильные матчинги в G' назовем *родственными*, если они отличаются только на некоторых циклах O_e для $e \in U$ (учитывая случай (*), отмеченный в замечании 1). Тогда множество S стабильных матчингов для G изоморфно множеству классов родственности в множестве стабильных матчингов для G' . В соответствии с этим, множество \mathcal{R}' ротаций для G' делится на два подмножества \mathcal{R}'_1 и \mathcal{R}'_2 , где каждая ротация в \mathcal{R}'_2 соответствует циклу O_e для некоторого $e \in U$. Можно видеть, что если при построении трассы в G' применяется ротация, содержащая ребро из K_e для некоторого $e \in U$, то значения матчинга стабилизируются на K_e , т.е. никакая из последующих ротаций уже не использует ребер из K_e . (Это следует из структуры K_e и монотонности изменений на всех ребрах, а именно, если при ротации ребро перестает быть матчинговым, то оно остается таковым в дальнейшем.)

Как следствие, каждая ротация в \mathcal{R}'_2 является максимальным элементом посета (\mathcal{R}', \prec') . В свою очередь, ротации для G взаимно однозначно соответствуют элементам в \mathcal{R}'_1 (являясь образами последних при замене подграфов K_e ребрами e), и посет ротаций (\mathcal{R}, \prec) для G изоморфен ограничению посета (\mathcal{R}', \prec') на \mathcal{R}'_1 . Так как $|E'| < 8|E|$, посет для G строится за время $O(|E|^2)$, ввиду теоремы 5.1.

6. АФФИННАЯ ПРЕДСТАВИМОСТЬ И СТАБИЛЬНЫЕ МАТЧИНГИ МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

Биекция ω , представленная в предложении 4.1, позволяет показать аффинную представимость решетки (S, \prec_F) , по аналогии с тем, как это делается в [14] для общей булевой задачи или в [20] для задачи о стабильных распределениях.

Напомним, что каждая ротация $R \in \mathcal{R}$ возникает как цикл определенного активного графа $\Gamma(X)$, и множество ее ребер имеет фиксированное разбиение, обозначаемое (R^+, R^-) и состоящее из W - и F -активных ребер, соответственно. Мы ассоциируем с R характеристический вектор $\beta^R \in \mathbb{R}^E$, принимающий значение 1 для $e \in R^+$, -1 для $e \in R^-$, и 0 для остальных ребер.

Помимо пространства \mathbb{R}^E , мы также будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$ с координатами, индексируемыми ротациями; в этом случае мы будем обозначать единичный базисный вектор, соответствующий ротации R , как $\langle R \rangle$.

Для подмножества $X \subseteq E$ его характеристический 0,1 вектор в \mathbb{R}^E будет обозначаться как $\chi^X = \chi_E^X$, и аналогично, для подмножества $I \subseteq \mathcal{R}$ его характеристический 0,1 вектор в $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$ будет обозначаться как $\chi^I = \chi_{\mathcal{R}}^I$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{E \times \mathcal{R}}$ – матрица, столбцы которой образованы векторами $\beta^R, R \in \mathcal{R}$. Из предложения 4.1 следует, что

$$\text{отображение } \lambda \in \mathbb{R}^{\mathcal{R}} \xrightarrow{\gamma} x \in \mathbb{R}^E, \text{ где } x \text{ определяется как } \chi^{X^{\min}} + A\lambda, \text{ порождает биекцию между характеристическими векторами } \chi_{\mathcal{R}}^I \text{ идеалов } I \text{ посета } (\mathcal{R}, \lessdot_F) \text{ и характеристическими векторами } \chi_E^X \text{ стабильных матчингов } X \in \mathcal{S}. \quad (6.1)$$

(Здесь γ соответствует естественному расширению отображения ω^{-1} из предложения 4.1.)

Согласно описаниям в разд. 5, матрица A может быть построена эффективно за время $O(|E|^2)$. Благодаря этому, аффинная представимость для решетки $(\mathcal{S}, \lessdot_F)$, выраженная в (6.1) (где порядок \lessdot_F согласуется с вложением \subset в решетке идеалов для (\mathcal{R}, \lessdot)), может применяться для сведения определенных задач о стабильных матчингах к “более простым” задачам на идеалах посета ротаций.

Прежде всего отметим, что аффинное отображение γ в (6.1) переводит выпуклую оболочку $\text{conv}(\mathcal{I}) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{R}}$ множества \mathcal{I} идеалов посета ротаций в выпуклую оболочку $\text{conv}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^E$ множества стабильных матчингов \mathcal{S} . (Здесь мы для простоты изложения отождествляем идеалы посета и стабильные матчинги с их характеристическими векторами.) Многогранник $\text{conv}(\mathcal{I})$ полноразмерный (поскольку каждый единичный базисный вектор $\langle R \rangle (R \in \mathcal{R})$ может быть выражен как разность характеристических векторов двух идеалов в \mathcal{I}). Он описывается неравенствами

$$0 \leq \lambda(R) \leq 1, \quad R \in \mathcal{R}; \quad (6.2)$$

$$\lambda(R) \geq \lambda(R'), \quad R, R' \in \mathcal{R}, \quad R \lessdot R'. \quad (6.3)$$

Эта линейная система соответствует описанию *порядкового многогранника* (order polytope) \mathcal{P}_Q для конечного посета Q в работе Стэнли [15]; в нашем случае $Q = (\mathcal{R}, \lessdot)$ и $\mathcal{P}_Q = \text{conv}(\mathcal{I})$. Гиперграницы (facets) в $\text{conv}(\mathcal{I})$ выражаются неравенствами трех видов:

$$(a) \lambda(R) \leq 1 \text{ для минимальных } R; \quad (b) \lambda(R) \geq 0 \text{ для максимальных } R; \quad (v) \lambda(R) \geq \lambda(R'), \text{ где } R \text{ непосредственно предшествует } R'. \quad (6.4)$$

Что касается вершин, то

$$\text{вершины в } \text{conv}(\mathcal{I}) \text{ взаимно однозначно соответствуют идеалам в } \mathcal{I}. \quad (6.5)$$

(Действительно, каждый идеал $I \in \mathcal{I}$ определяет вершину в $\text{conv}(\mathcal{I})$, поскольку χ^I – единственный вектор, максимизирующий скалярное произведение $a\chi^I$ по всем идеалам $I' \in \mathcal{I}$, где a принимает значение 1 на ротациях $R \in I$, и значение -1 на ротациях $R \in \mathcal{R} - I$. Обратное очевидно.)

Важное свойство отображения γ в (6.1) следует из того, что

$$\text{матрица } A \text{ имеет полный столбцовый ранг.} \quad (6.6)$$

Этот факт был показан в [14, Th. 1.4] для общего булевого случая (где **ФВ** для всех вершин подчиняются аксиомам (A1),(A2),(A3)). Доказательство этого для нашей модели КБМ довольно простое, и для полноты изложения, мы его приводим.

Доказательство (6.6). Положим $N := |\mathcal{R}|$ и перенумеруем ротации как $R(1), \dots, R(N)$, соблюдая правило: из $R(i) \lessdot R(j)$ следует $i < j$ (упорядочение такого рода известно под названием “топологической сортировки” вершин ациклического ориентированного графа). Для каждого $i = 1, \dots, N$ в $R(i)$ выделим одно ребро в “отрицательной” части $R(i)^-$, которое обозначим как e_i . Для полученных нумераций справедливо следующее:

$$(a) \text{ все ребра } e_1, \dots, e_N \text{ различные; и (б) для любых } 1 \leq i < j \leq N \text{ значение } \beta^{R(j)} \text{ на ребре } e_i \text{ равно } 0. \quad (6.7)$$

Эти свойства следуют из того, что для ротации R , строящейся в активном графе $\Gamma(X)$ матчинга X , в каждой вершине $w \in W$, принадлежащей R , матчинговое ребро $e = wf \in X$ более предпочтительное, чем активное ребро $a = wf'$, т.е. $e >_w a$. Мы имеем $e \in R^-$ и $a \in R^+$, и при применении ротации R к X матчинговое ребро e меняется на a (так сказать “сдвигается вправо”). Поэтому при построении любой трассы после использования ротации R каждая последующая ротация не может содержать ребро e . Отсюда следуют оба свойства в (6.7). (Фактически можно наблюдать следующее: любое ребро e принадлежит не более двум ротациям, и если e принадлежит $R(k)$ и $R(i)$ при $k < i$, то эти ротации сравнимы, т.е. выполняется $R(k) \lessdot R(i)$, и при этом $e \in R(k)^+$ и $e \in R(i)^-$.)

Теперь переставим столбцы и строки матрицы A так, чтобы столбцы $\beta^{R(i)}$ шли по возрастанию индекса i (слева-направо), и первые N строк соответствовали ребрам e_1, \dots, e_N , следующих по возрастанию их индексов (сверху-вниз). Тогда из (6.7) следует, что подматрица, образованная первыми N строками, является нижне треугольной с коэффициентами -1 на диагонали. Это дает (6.6).

Из (6.1) и (6.6) получаем

Следствие 6.1. $\dim(\text{conv}(\mathcal{S})) = \dim(\text{conv}(\mathcal{I})) = |\mathcal{R}|$, и многогранник $\text{conv}(\mathcal{S})$ аффинно конгруэнтен порядковому многограннику $\text{conv}(\mathcal{I})$ посета (\mathcal{R}, \lessdot) .

В частности, вершины $\text{conv}(\mathcal{S})$ образованы всеми стабильными матчингами в \mathcal{S} и взаимно однозначно соответствуют идеалам в \mathcal{I} , многогранник $\text{conv}(\mathcal{S})$ имеет $O(|\mathcal{R}|^2)$ гиперграней, все они являются образами при γ гиперграней в $\text{conv}(\mathcal{I})$ (указанными в (6.4)) и могут быть эффективно выписаны.

В завершении этого раздела мы рассматриваем задачу о стабильном матчинге минимальной стоимости:

$$\begin{aligned} &\text{для заданных стоимостей } c(e) \in \mathbb{R} \text{ ребер } e \in E \text{ найти стабильный матчинг } X \in \mathcal{S} \\ &\text{минимальной общей стоимости } c(X) := \sum_{e \in E} c(e). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Заметим, что поскольку все стабильные матчинги X имеют одинаковый размер $|X|$, функция c может задаваться с точностью до константы; в частности, можно считать c положительной. Заменяя c на $-c$, мы получаем эквивалентную задачу максимизации $c(X)$ среди $X \in \mathcal{S}$.

Эффективный метод, разработанный в [12] для решения задачи минимизации линейной функции на множестве стабильных марьяжей и впоследствии успешно примененный рядом авторов для некоторых других моделей стабильности, состоит в сведении к задаче линейной минимизации на множестве идеалов соответствующего посета ротаций (в предположении, что такой посет существует и может быть эффективно построен), и затем последняя задача сводится методом Пикара [13] к классической задаче о минимальном разрезе ориентированного графа. Для полноты изложения мы далее описываем метод решения задачи (6.8) для нашего случая (придерживаясь описания в работе [21]).

Вначале вычисляется стоимость $c\beta^R$ ($= c(R^+) - c(R^-)$) каждой ротации $R \in \mathcal{R}$. Тогда для каждого $X \in \mathcal{S}$ и соответствующего идеала $I := \omega(X)$ имеем

$$c(X) = c(X^{\min}) + \sum(c\beta^R : R \in I).$$

Это позволяет перейти к следующей задаче для ротаций R с весами (стоимостями) $\zeta(R) := c\beta^R$:

$$\text{найти идеал } I \in \mathcal{I} \text{ посета } (\mathcal{R}, \lessdot), \text{ минимизирующий общий вес } \zeta(I) := \sum(\zeta(R) : R \in I). \quad (6.9)$$

Удобно слегка расширить постановку последней задачи, рассматривая произвольный конечный ориентированный граф $H = (V_H, E_H)$ и функцию весов $\zeta : V_H \rightarrow \mathbb{R}$. Требуется найти замкнутое множество вершин $X \subseteq V_H$ минимального веса $\zeta(X)$; назовем это задачей (*). Здесь множество X называется замкнутым, если в H нет ребер, идущих из $V_H - X$ в X . (Ясно, что в соответствующем графе посета замкнутые множества — это идеалы.)

Следуя [13], задача (*) сводится к задаче о минимальном разрезе ориентированного графа $\widehat{H} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ с функцией пропускных способностей ребер h , которые получаются из H, ζ при:

- (а) добавлении двух вершин: “источника” s и “стока” t ;
- (б) добавлении множества E^+ ребер (s, v) для всех вершин v , принадлежащих $V^+ := \{v \in V_H : \zeta(v) > 0\}$;
- (в) добавлении множества E^- ребер (u, t) для всех вершин u , принадлежащих $V^- := \{u \in V_H : \zeta(u) < 0\}$;
- (г) назначении пропускных способностей $h(s, v) := \zeta(v)$ для $v \in V^+$, $h(u, t) := |\zeta(u)|$ для $u \in V^-$, и $h(e) := \infty$ для всех $e \in E_H$.

Напомним, что под $s-t$ разрезом в \widehat{H} понимается множество направленных ребер $\delta(A)$, идущих из подмножества вершин $A \subset \widehat{V}$ такого, что $s \in A \not\ni t$, в его дополнение $\widehat{V} - A$, и пропускной способностью этого разреза считается величина $h(\delta(A)) := \sum(h(e) : e \in \delta(A))$. Можно видеть, что $\delta(A)$ имеет минимальную пропускную способность среди всех $s-t$ разрезов тогда и только тогда, когда $X := V_H - A$ — замкнутое множество минимального веса $\zeta(X)$ в H .

Действительно, для $s-t$ разреза $\delta(A)$ величина $h(\delta(A))$ является конечной тогда и только тогда, когда $\delta(A)$ не содержит ребер из H (учитывая бесконечную пропускную способность последних). Отсюда следует, что $\delta(A) \subseteq E^+ \cup E^-$, и что множество X замкнутое. Тогда

$$\begin{aligned} h(\delta(A)) &= h(\delta(A) \cap E^+) + h(\delta(A) \cap E^-) = \zeta(X \cap V^+) + \sum(|\zeta(u)| : u \in (V_H - X) \cap V^-) = \\ &= \zeta(X \cap V^+) + \zeta(X \cap V^-) - \zeta(V^-) = \zeta(X) - \zeta(V^-). \end{aligned}$$

Таким образом, $\zeta(X)$ отличается от $h(\delta(A))$ на константу $\zeta(V^-)$, откуда следует требуемое свойство, и мы приходим к желаемому результату.

Теорема 6.1. *Задача о стабильном матчинге минимальной стоимости (6.8) для рассматриваемой модели КБМ разрешима в сильно полиномиальное время (оценивающее число стандартных и оракульных операций).*

7. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ КВОТЫ НА W

Выше мы описывали конструкции и доказывали утверждения в предположении, что в рассматриваемой комбинированной модели стабильности (КБМ) квоты всех вершин в доле W равны 1. Все это достаточно просто обобщается на случай произвольных квот $q(w) \in \mathbb{Z}_+$, $w \in W$, и ниже мы даем краткое изложение уточнений и изменений, оставляя аккуратную проверку деталей читателю как упражнение.

1) Прежде всего уточним конструкцию активного графа для стабильного матчинга $X \subseteq E$ (разд. 3.1). Ранее для полновесной вершины $w \in W^+$ мы обозначали x_w единственное ребро в $X_w = X \cap E_w$. Теперь, рассматривая полновесную вершину $w \in W$ (т.е. удовлетворяющую $|X_w| = q(w)$), мы обозначаем x_w последнее (наименее предпочтительное) ребро в X_w . Определения W -допустимого ребра a_w в E_w и связки (a_w, b_f^w) остаются прежними (как в (3.1) и (3.2)). Заметим, что, как и прежде, каждая вершина в W имеет не более одного W -допустимого ребра.

2) Как и прежде, в графе $D = D(X)$, определяемом направленными W - и F -допустимыми ребрами, для вершин $f \in F$ число входящих W -допустимых ребер (вида $a_w = (w, f)$) больше или равно числу выходящих F -допустимых ребер (вида $b = (f, w)$). (Здесь первое число превосходит второе, когда для входящего ребра $a_w = (w, f)$ выполняется $C_f(X_f + a_w) = X_f + a_w$ (и следовательно, a_w не порождает связку), или когда имеются две или более связки $(a, b), (a', b')$ с $b = b'$.) В то же время, для вершин $w \in W$ имеется одно выходящее W -допустимое ребро a_w , а число σ_w входящих F -допустимых ребер (f, w) может быть равно 0, 1 или более (последнее может возникнуть при $q(w) > 1$).

3) Процедура очистки остается дословно той же самой, она преобразует D в активный граф $\Gamma = \Gamma(X)$. Заметим, что для вершин w в $W_\Gamma := W \cap V_\Gamma$ процедура будет обеспечивать выполнение $|\delta^{in}(w)| \geq |\delta^{out}(w)| = 1$ (где $\delta^{in}(w)$ и $\delta^{out}(w)$ обозначают множества входящих и выходящих ребер в Γ , инцидентных w); в случае $\sigma_w > 1$ здесь априори допустимо строгое неравенство. Тем не менее, этого не происходит, и свойство (3.3) сохраняется в силу простых балансовых соотношений (ввиду того, что, как и прежде, $|\delta^{in}(v)| \geq |\delta^{out}(v)|$ для всех $v \in V_\Gamma$). Таким образом, как и прежде, Γ распадается на непересекающиеся по ребрам циклы-ротации, каждая вершина в W_Γ принадлежит ровно одной ротации, и любая ротация L проходит через каждую вершину в W_L ровно один раз, но может многократно проходить через одну и ту же вершину в F_L .

4) Лемма 3.1 остается справедливой, и ее доказательство не изменяется. В доказательстве предложения 3.1 множество X'_w теперь не обязано состоять из одного ребра, а в соответствии с общим правилом определяется как $X'_w := X_w - e + a_w$, где $\{e\} = L^- \cap E_w$. Это не влияет на доказательство, с точностью до мелких поправок. В доказательстве предложения 3.2 в случае $X_w \neq Y_w$, вместо $\{x_w\} = X_w$ и $\{y_w\} = Y_w$, ребра x_w и y_w должны выбираться в $X_w - Y_w$ и $Y_w - X_w$, соответственно, так, чтобы выполнялось $x_w >_w y_w$ (что можно сделать, ввиду $X_w >_w Y_w$). Структура доказательства и основные детали сохраняются.

5) В доказательстве предложения 4.1, вместо $\{m_w\} = M_w$ и $\{x_w\} = X_w$, следует выбрать $m_w \in M_w - X_w$ и $x_w \in X_w - M_w$ таким образом, чтобы выполнялось $m_w >_w x_w$. В остальном изложение разд. 4 принципиально не изменяется.

6) Можно убедиться, что построения и результаты, изложенные в разд. 5 и 6, верны и для общего случая квот в W . В частности, остается верной теорема 5.1, утверждающая, что посет ротаций $(\mathcal{R}, \preccurlyeq)$ строится за время $O(|E|^2)$.

8. МОДЕЛЬ СТАБИЛЬНОСТИ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ ВЫБОРОМ

Как упоминалось во Введении, рассматриваемая нами модель стабильности (КБМ) появляется при редукции более общей модели стабильных матчингов в двудольном графе. В последней предпочтения агентов одной доли (“фирм”) задаются с помощью плоттовских и кардинально монотонных ФВ, а предпочтения агентов другой доли (“работников”) задаются т.н. последовательными (sequential) ФВ; для определенности мы далее будем именовать эту модель *последовательной*, или *П-моделью*. В работе [16] было установлено, что имеет место редукция П-модели к КБМ, при которой множества стабильных матчингов оказываются изоморфными. Ниже, следуя [16], мы даем описание П-модели и ее редукции к КБМ и формулируем утверждения об изоморфизмах

соответствующих матчингов и их решеток. Затем мы обсуждаем, какие следствия для П-модели можно получить из результатов о ротациях и их приложениях, полученных для КБМ.

Следует заметить, что в [16] рассматривается более широкий класс моделей с последовательными ФВ, однако нас сейчас интересует только та из них, что непосредственно связана с редукцией к КБМ. Для простоты изложения мы будем предполагать, что рассматриваемые графы не содержат кратных ребер (допущение кратных ребер будет сделано в замечании в конце раздела).

Как и прежде, рассматривается двудольный граф $G = (V, E)$ с вершинами долями W (“работники”) и F (“фирмы”), и для каждой вершины $f \in F$ задана плоттовская и кардинально монотонная ФВ $C_f : 2^{E_f} \rightarrow 2^{E_f}$. В то же время для каждой вершины $w \in W$ задана последовательность линейных ФВ $C_w^1, \dots, C_w^{q(w)}$ на E_w ; это означает, что каждая ФВ C_w^i связана с линейным порядком $>_w^i$ на E_w и выбирает в каждом подмножестве $Z \subseteq E_w$ максимальный элемент относительно $>_w^i$. Можно считать, что $q(w) \leq |E_w|$.

Определение 4. Обозначим $C_w^1 * \dots * C_w^{q(w)}$ функцию выбора C_w , которая для любого $Z \subseteq E_w$ определяет его подмножество $C_w(Z)$, состоящее из элементов z_1, \dots, z_k , где $k = \min\{|Z|, q(w)\}$, которые выбираются по следующему рекурсивному правилу: z_i — это максимальный элемент относительно $>_w^i$ в множестве $Z - \{z_1, \dots, z_{i-1}\}$. Такую функцию C_w назовем *последовательной ФВ* ранга $q(w)$, порожденную линейными порядками $>_w^1, \dots, >_w^{q(w)}$ (или линейными ФВ $C_w^1, \dots, C_w^{q(w)}$).

Показывается, что ФВ C_w является плоттовской и квотируемой с квотой $q(w)$. Совокупность $\{C_v, v \in V\}$ указанных ФВ и определяет то, что мы выше назвали П-моделью. Эта модель представляет собой частный случай СБМ (специальной булевской модели, упомянутой во Введении), и в то же время она обобщает КБМ. (Заметим также, что, как указано в [16], ранее было показано, что не всякая квотируемая плоттовская ФВ является последовательной ФВ.)

Приступим к описанию редукции данной П-модели, определяемой вышеуказанными ФВ $C_v, v \in V$. Граф G преобразуется путем репликации вершин доли W . А именно,

$$\begin{aligned} \text{каждая вершина } w \in W \text{ заменяется } q(w) \text{ вершинами } w^1, \dots, w^{q(w)}, \text{ и, соответственно,} \\ \text{каждое ребро } wf \in E \text{ порождает } q(w) \text{ ребер } w^i f, i = 1, \dots, q(w). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Полученный граф обозначим $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ и обозначим через π естественное отображение (проекцию) $\tilde{V} \cup \tilde{E}$ в $V \cup E$. Объекты, связанные с \tilde{G} , мы будем также обозначать с тильдой. В частности, копии вершин $f \in F$ в \tilde{G} обозначим как \tilde{f} , и для любой вершины $\tilde{v} \in \tilde{V}$ множество инцидентных ребер в \tilde{G} обозначим как $\tilde{E}_{\tilde{v}}$.

Теперь объясним, как задаются предпочтения и функции выбора $\tilde{C}_{\tilde{v}}$ для вершин $\tilde{v} \in \tilde{V}$. Для вершин в \tilde{W} это делается бесхитростно, а именно:

$$\text{для вершины } w^i \in \tilde{W} \text{ (где } w \in W \text{ и } 1 \leq i \leq q(w)) \text{ ФВ } \tilde{C}_{w^i} \text{ — это линейная ФВ, определяемая линейным порядком } >_{w^i} \text{ на } \tilde{E}_{w^i}, \text{ являющимся копией порядка } >_w^i \text{ на } E_w. \quad (8.2)$$

Для вершин в \tilde{F} устройство функций выбора менее тривиально. А именно, для вершины $\tilde{f} \in \tilde{F}$ (копии $f \in F$) рассмотрим подмножество ребер $\tilde{Z} \subseteq \tilde{E}_{\tilde{f}}$ и его образ $Z = \pi(\tilde{Z})$ в G , и образуем $\tilde{C}_{\tilde{f}}$ следующим образом:

$$\text{для каждого } wf \in C_f(Z) \text{ в “слое” } \pi^{-1}(wf) \text{ возьмем ребро } w^i f \text{ такое, что } w^i f \text{ принадлежит множеству } \tilde{Z} \text{ и при этом имеет минимальный номер } i; \text{ тогда } \tilde{C}_{\tilde{f}} \text{ является объединением взятых элементов.} \quad (8.3)$$

Пусть \mathcal{S} обозначает множество стабильных матчингов для рассматриваемой П-модели с графом G и функциями выбора C_f ($f \in F$) и C_w ($w \in W$) (где C_f плоттовская и кардинально монотонная, а C_w — последовательная ФВ, порожденная линейными порядками $>_w^1, \dots, >_w^{q(w)}$). Пусть $\tilde{\mathcal{S}}$ обозначает множество стабильных матчингов для КБМ с построенным графом \tilde{G} , ФВ $\tilde{C}_{\tilde{f}}$ ($f \in F$) и линейными порядками $>_{w^i}$. В [16] доказываются следующие ключевые свойства:

- (i) для каждого стабильного матчинга $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{S}}$ ограничение отображения π на множество \tilde{X} инъективно;
- (ii) отображение π индуцирует биекцию между множествами стабильных матчингов $\tilde{\mathcal{S}}$ и \mathcal{S} ;
- (iii) указанное отображение стабильных матчингов $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ дает изоморфизм решеток на $\tilde{\mathcal{S}}$ и \mathcal{S} , т.е. для $X, Y \in \mathcal{S}$ выполняются $\pi^{-1}(X \curlywedge Y) = \pi^{-1}(X) \tilde{\wedge} \pi^{-1}(Y)$ и $\pi^{-1}(X \curlyvee Y) = \pi^{-1}(X) \tilde{\vee} \pi^{-1}(Y)$ (где \curlywedge и \curlyvee обозначают взятие точной нижней грани (meet) и точной верхней грани (join) для \mathcal{S} , и аналогичные обозначения с тильдами применяются для $\tilde{\mathcal{S}}$).

Основываясь на (8.4) и используя полученные результаты о ротациях для КБМ, мы можем дать описание ротаций для П-модели.

Для этого рассмотрим ротацию \tilde{R} в графе \tilde{G} . Она применяется для перехода от некоторого стабильного матчинга $\tilde{X} \in \tilde{S}$ к непосредственно следующему (в смысле порядка $\prec_{\tilde{F}}$ в \tilde{S}) стабильному матчингу \tilde{X}' , а именно, $\tilde{X}' = (\tilde{X} - \tilde{R}^-) \cup \tilde{R}^+$. Положим $X := \pi(\tilde{X})$ и $X' := \pi(\tilde{X}')$. В силу (8.4)(i),(ii), π устанавливает биекцию между \tilde{X} и X и между \tilde{X}' и X' , откуда легко заключить, что \tilde{R}^- изоморфно $\pi(\tilde{R}^-)$, и \tilde{R}^+ изоморфно $\pi(\tilde{R}^+)$. Априори мы не можем исключить ситуацию $\Delta := \pi(\tilde{R}^-) \cap \pi(\tilde{R}^+) \neq \emptyset$ (в этом случае имеется ребро $wf \in E$ такое, что $w^i f \in \tilde{R}^-$ и $w^j f \in \tilde{R}^+$ для некоторых $i \neq j$), и в данный момент мы оставляем возможность $\Delta \neq \emptyset$ как открытый вопрос. Определим

$$R^- := \pi(\tilde{R}^-) - \Delta \quad \text{и} \quad R^+ := \pi(\tilde{R}^+) - \Delta.$$

Тогда $X' = (X - R^-) \cup R^+$, $|R^-| = |R^+|$, и оба множества R^-, R^+ непустые (иначе было бы $\tilde{X} \neq \tilde{X}'$, но $\pi(\tilde{X}) = \pi(\tilde{X}')$, вопреки (8.4)(ii)).

Можно видеть, что $R := \pi(\tilde{R}) - \Delta$ порождает реберно простой цикл в G (индуцированный ротацией \tilde{R} , рассматриваемой как цикл), и в этом цикле чередуются ребра из R^- (“отрицательные”) и R^+ (“положительные”). Это R (рассматриваемое, в зависимости от контекста, как множество ребер или как цикл) играет роль ротации в G , и мы говорим, что стабильный матчинг X' получается из X применением ротации R .

(Мы также оставляем открытым вопрос, может ли ротация R проходить через одну и ту же вершину в W более одного раза, что невозможно для \tilde{R} и \tilde{W} .)

Суммируя сказанное выше, мы можем получить из свойств в (8.4) и результатов для КБМ следующие ожидаемые утверждения:

- (i) каждый стабильный матчинг $X \in \mathcal{S}$ может быть получен из минимального матчинга в (\mathcal{S}, \prec_F) применением последовательности ротаций в G ;
 - (ii) отображение $\tilde{R} \mapsto R = \pi(\tilde{R}) - (\pi(\tilde{R}^+) \cap \tilde{R}^-)$ дает биекцию между ротациями в \tilde{G} и G ;
 - (iii) отображение π индуцирует изоморфизм между посетами ротаций для \tilde{G} и G .
- (8.5)

Заметим, что размеры графа \tilde{G} , полученного репликацией каждой вершины $w \in W$ копиями в количестве $q(w) \leq |F|$, можно грубо оценить как $O(|W||F|)$ вершин и $O(|W||F|^2)$ ребер. Поэтому из теоремы 5.1 можно заключить, что

для П-модели с графом $G = (V = W \sqcup F, E)$ множество ротаций и их посет могут быть построены за время $O(|W|^2|F|^4)$ (включая число обращений к оракулам). (8.6)

(При $|W| > |F|$ эта оценка слегка улучшает оракульную оценку $O(|W|^3|F|^3)$ для построения посета ротаций для СБМ в работе [14].)

Эффективное построение ротаций и их посета в П-модели позволяет эффективно решать задачу минимизации линейной функции на множестве стабильных матчингов, применяя метод, аналогичный описанному в разд. 6.

В заключении, заметим также, что при рассмотрении П-модели на графике G с возможными кратными ребрами можно действовать как изложено в замечании 1 (в разд. 2), получая сведение к П-модели на графике G' без кратных ребер (с индуцированными ФВ для прежних вершин и линейными порядками для добавленных вершин), и затем описывать связь ротаций в G , G' и \tilde{G}' , рассуждая как выше и используя замечание 2 из разд. 5 (подробности мы здесь опускаем).

Автор благодарит Данилова Владимира Ивановича за полезные обсуждения по теме статьи и информирование о работе [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gale D. and Shapley L.S. College admissions and the stability of marriage // Amer. Math. Monthly **69** (1) (1962) 9–15.
2. Gusfield D. and Irving R.W. The stable marriage problem: structure and algorithms, MIT press, 1989.
3. Manlove D. Algorithmics of matching under preferences, Vol. 2, World Scientific, 2013.
4. Kelso A.S. and Crawford V.P. Job matching, coalition formation and gross substitutes // Econometrica **50** (1982) 1483–1504.

5. *Roth A.E.* Stability and polarization of interests in job matching // *Econometrica* **52** (1984) 47–57.
6. *Blair C.* The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners // *Math. Oper. Res.* **13** (1988) 619–628.
7. *Plott C.R.* Path independence, rationality, and social choice // *Econometrica* **41** (6) (1973) 1075–1091.
8. *Alkan A.* On preferences over subsets and the lattice structure of stable matchings // *Review of Economic Design* **6** (1) (2001) 99–111.
9. *Alkan A.* A class of multipartner matching models with a strong lattice structure // *Econom. Theory* **19** (2002) 737–746.
10. *Birkhoff G.* Rings of sets // *Duke Mathematical Journal* **3** (3) (1937) 443–454.
11. *Irving R.W. and Leather P.* The complexity of counting stable marriages. *SIAM J. Comput.* **15** (1986) 655–667.
12. *Irving R.W., Leather P. and Gusfield D.* An efficient algorithm for the optimal stable marriage problem // *J. ACM* **34** (1987) 532–543.
13. *Picard J.* Maximum closure of a graph and applications to combinatorial problems // *Manage. Sci.* **22** (1976) 1268–1272.
14. *Faenza Yu. and Zhang X.* Affinely representable lattices, stable matchings, and choice functions. ArXiv:2011.06763v2[math.CO], 2021.
15. *Stanley R.P.* Two poset polytopes. *Discrete and Computational Geometry* **1** (1) (1986) 9–23.
16. *Danilov V.I.* Sequential choice functions and stability problems. ArXiv:2401.00748v2 [math.CO], 2024.
17. *Alkan A. and Gale D.* Stable schedule matching under revealed preference. *J. Economic Theory* **112** (2003) 289–306.
18. *Aizerman M. and Malishevski A.* General theory of best variants choice: Some aspects // *IEEE Transactions on Automatic Control* **26** (5) (1981) 1030–1040.
19. *Cechlarova K. and Fleiner T.* On a generalization of a stable roommates problem. EGREST Technical Report No. 2003–03, 2003.
20. *Mourtos I. and Samaris M.* Stable allocations and partially ordered sets // *Discrete Optimization* **46** (2022) 100731.
21. *Karzanov A.V.* On stable assignments generated by choice functions of mixed type // *Discrete Applied Math.* **358** (2024) 112–135, <https://doi.org/10.1016/j.dam.2024.06.037>.

STABLE MATCHINGS, CHOICE FUNCTIONS, AND LINEAR ORDERS

A. V. Karzanov^{a,*}

^aThe Central Economic Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 117418 Russia
**e-mail: akarzanov7@gmail.com*

Received: 29 August 2024

Revised: 29 August 2024

Accepted: 26 September 2024

Abstract. A model of stable edge subsets (“matchings”) in a bipartite graph $G = (V, E)$ is considered, in which preferences for vertices of one side (“firms”) are given by choice functions with standard properties of consistency, substitutability, and cardinal monotonicity, and preferences for vertices of the other side (“workers”) are given by linear orders. For such a model, we give a combinatorial description of the structure of rotations and propose an algorithm for constructing a rotation poset with a time complexity estimate $O(|E|^2)$ (including calls to oracles associated with choice functions). As a consequence, a “compact” affine representation of stable matchings can be obtained and related problems can be solved efficiently.

Keywords: bipartite graph, choice function, linear preferences, stable matching, affine representability, sequential choice