

УДК 519.63

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ТЕРМИНАХ ЛОКАЛЬНЫХ НОРМ И ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

© 2024 г. А. В. Музалевский², С. И. Репин^{1,2,*}, М. Е. Фролов²

¹191023 Санкт-Петербург, ул. Фонтанка, 27, Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Россия

²195251 Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого, Россия

*e-mail: repin@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию 07.08.2024 г.

Переработанный вариант 07.08.2024 г.

Принята к публикации 27.08.2024 г.

Получены функциональные соотношения, которые позволяют оценивать точность приближенных решений в терминах мер, существенно отличных от энергетических норм, которые обычно используются для этих целей. В частности, они применимы к локальным нормам и мерам, построенным с помощью специально построенных линейных функционалов. Потребность в таких инструментах контроля точности возникает, если имеется особый интерес к поведению решения в некоторой подобласти или к специальным свойствам решения. Показано, что апостериорные оценки функционального типа, которые ранее использовались для глобальных оценок, могут быть адаптированы и для решения этой задачи. Получены функциональные тождества и оценки, позволяющие оценивать погрешность любых конформных аппроксимаций в терминах широкого класса мер, включающих локальные нормы и проблемно-ориентированные функционалы. Теоретические результаты проверены в серии примеров, которые подтверждают эффективность предлагаемого метода. Библ. 13. Фиг. 10. Табл. 10.

Ключевые слова: эллиптические краевые задачи, апостериорные оценки функционального типа, локальные оценки погрешности, проблемно-ориентированный (goal-oriented) контроль точности.

DOI: 10.31857/S0044466924120042, **EDN:** KCLPCF

1. ВВЕДЕНИЕ

Апостериорные оценки дают вычисляемые оценки разности между решением некоторой задачи и его аппроксимацией, полученной с помощью какой-либо вычислительной технологии. Если речь идет о краевых задачах для уравнений в частных производных, то в большинстве случаев такие оценки используют глобальные (энергетические) нормы и оценивают точность в интегральном смысле. Однако такая информация может быть недостаточна. В инженерных и научных вычислениях часто интересуются специальными характеристиками точности: локальными ошибками и так называемыми проблемно-ориентированными функционалами ошибок (goal-oriented quantities). Для оценки последних был разработан особый метод, основанный на использовании краевой задачи, сопряженной к исходной (см., например, монографию [1] и статьи [2]–[5]). Есть и другие методы, использующие различные варианты постобработки (post-processing) приближенных решений, иерархии сеток и т.д., которые, однако, применимы только к галеркинским аппроксимациям и требуют выполнения ряда (иногда весьма обременительных) дополнительных условий. Как правило, они дают индикаторы погрешности, которые можно успешно использовать в адаптивных методах, но не гарантированные оценки погрешности приближенного решения.

В настоящей работе мы используем другой подход, который основан на апостериорных оценках функционального типа (см. [6], [7] и другие публикации, цитированные в этих работах). Здесь соответствующие оценки применимы к любым аппроксимациям из базового энергетического пространства независимо от способа их получения. В статье [8] обсуждается апостериорное тождество для норм отклонений от решения абстрактной эллиптической краевой задачи

$$\Lambda^* \mathcal{A} \Lambda u + \ell = 0, \quad (1.1)$$

где $\Lambda : V \rightarrow U$ – ограниченный линейный оператор, U – гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) , $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(U, U)$ является линейным, ограниченным и самосопряженным оператором. Пространства U и V содержат функции, определенные в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с липшицевой границей Γ , причем V – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_V$, а V_0 – его подпространство, V_0^* – пространство сопряженное к V_0 , $\ell \in V_0^*$.

Сопряжение элементов V_0 и V_0^* обозначается $\langle v^*, v \rangle$. Оператор $\Lambda : V \rightarrow Y^*$ имеет сопряженный $\Lambda^* : Y^* \rightarrow V_0^*$, который определяется равенством

$$(y^*, \Lambda v) = \langle \Lambda^* y^*, v \rangle \quad \forall v \in V, y^* \in Y^*. \quad (1.2)$$

Обобщенное решение задачи (1.1) определяется как функция $u \in V_0 + u_0$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$(\mathcal{A}\Lambda u, \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V_0. \quad (1.3)$$

Здесь

$$V_0 + u_0 := \{v \in V \mid v = w + v_0, w \in V_0\},$$

а $u_0 \in V$ – заданная функция, определяющая краевое условие. Функция $p^* := \mathcal{A}\Lambda u$ удовлетворяет уравнению $\Lambda^* p^* + \ell = 0$ и представляет собой решение соответствующей двойственной задачи. Пара u и p^* аппроксимируется функциями $v \in V_0 + u_0$ и $y^* \in Y^*$ соответственно. Нас интересуют функции

$$e := v - u \in V_0 \quad \text{и} \quad e^* = y^* - p^* \in Y^*,$$

которые представляют собой отклонения от искомых решений. Они удовлетворяют тождеству (см. [8])

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + 2\langle \mathbf{r}(y^*), e \rangle, \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{r}(y^*) := \ell + \Lambda^* y^*, \quad \|y^*\|_{\mathcal{A}} := (\mathcal{A}y^*, y^*)^{1/2} \quad \text{и} \quad \|y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} := (\mathcal{A}^{-1}y^*, y^*)^{1/2}.$$

Это тождество является основой для получения гарантированных апостериорных оценок в предположении, что Λ и \mathcal{A} удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} c_1 \|y^*\|^2 &\leq (\mathcal{A}y^*, y^*) \leq c_2 \|y^*\|^2 \quad \forall y^* \in U, \\ \|\Lambda w\| &\geq C_{\Lambda} \|w\|_V \quad \forall w \in V, \end{aligned}$$

с некоторыми положительными постоянными c_1, c_2 и C_{Λ} . Заметим, что аналогичные тождества имеют место и для многих нелинейных эллиптических краевых задач. Методы получения таких тождеств и соответствующие оценки подробно исследованы в монографии [9].

Нетрудно видеть, что левая часть (1.4) представляет собой комбинированную меру отклонения от решения, выраженную через энергетические нормы. Естественно возникает вопрос о том, можно ли получать подобные оценки в терминах других мер. В отношении мер более сильных, чем энергетическая, он рассмотрен в работе [10] (конечно, при этом предполагается, что и решение, и его аппроксимация обладают требуемой регулярностью).

В настоящей статье мы изучаем в некотором смысле противоположную проблему: как получить гарантированные и полностью вычисляемые оценки в терминах более слабых мер. В частности, речь идет о локальных нормах, связанных с областью $\omega \subset \Omega$, где Ω – ограниченная область с липшицевой границей, в которой рассматривается краевая задача, а также о мерах, определенных с помощью заданного линейного функционала ξ .

На первый взгляд имеется простое решение, действительно,

$$|\langle \xi, v - u \rangle| \leq \|\xi\| \|v - u\|_V, \quad (1.5)$$

где $\|\xi\|$ обозначает норму $\xi \in V_0^*$. Таким образом, имея оценку в норме пространства V всегда можно получить оценку для более слабой меры в левой части (1.5). Однако, как правило, оценка такого типа является сильно завышенной и малополезной на практике. Ниже предлагается единообразный подход к получению полностью гарантированных оценок ошибок в терминах мер такого типа. Он использует некоторые результаты, которые были ранее получены в [7], [11]. Подчеркнем, что предлагаемый метод не использует никаких специальных свойств решений и аппроксимаций. Соответствующие обоснования, представленные в разд. 3, используют только обобщенные формулировки краевых задач и некоторые функциональные неравенства. В разд. 4 на нескольких примерах показаны возможности таких специализированных функциональных оценок как для эффективного контроля точности в локальных нормах, так и для получения хороших индикаторов ошибок.

2. ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ В ГЛОБАЛЬНЫХ НОРМАХ

Задача (1.1) соответствует широкому классу уравнений и систем уравнений дивергентного типа. Вопрос о получении гарантированных двусторонних оценок для норм $\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}$ и $\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}$ для краевых задач такого типа хорошо изучен (см. [7], [9] и цитированную там литературу). Напомним некоторые результаты этой теории, которые потребуются в дальнейшем. Прежде всего необходимо ввести некоторые дополнительные понятия и обозначения. В дополнение к пространствам V и U мы введем Гильбертово пространство \mathcal{V} такое, что $V \subset \mathcal{V} \subset V^*$. Пространства V , \mathcal{V} и V^* образуют так называемый триплет Гельфандса, если скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_V$ согласовано с пространствами V и V^* таким образом, что $\langle v^*, v \rangle = (v^*, v)_V$, если $v^* \in \mathcal{V}$.

Мы предполагаем, что ℓ имеет представление в виде $\langle \ell, w \rangle = (g, w)_V$, где $g \in \mathcal{V}$, и определим два подпространства пространства U :

$$Q^* := \{y^* \in U \mid \Lambda^* y^* \in \mathcal{V}\} \quad \text{и} \quad Q_\ell^* := \{y^* \in U \mid \Lambda^* y^* + \ell = 0 \in \mathcal{V}\}.$$

Пространство Q^* является Гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(q, y)_{Q^*} := (q^*, y^*) + (\Lambda^* q^*, \Lambda^* y^*)_V.$$

Нетрудно видеть, что из (1.4) следует соотношение

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \quad \forall q^* \in Q_\ell^*, \quad (2.1)$$

которое можно рассматривать как обобщенную форму так называемой оценки метода гиперциклов. В контексте задачи линейной упругости оно было получено в статье [12], а для вариационной задачи с квадратичным функционалом в [13]. Оценка (2.1) переходит в равенство, если взять инфимум по q^* , т.е.

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} = \inf_{q^* \in Q_\ell^*} \|\mathcal{A}\Lambda v - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}. \quad (2.2)$$

Если $q^* \in Q_\ell^*$, то из (1.4) также следует оценка

$$\|q^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} = \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \quad \forall v \in V_0 \quad (2.3)$$

и равенство

$$\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} = \inf_{\eta \in V_0} \|\mathcal{A}\Lambda \eta - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}. \quad (2.4)$$

Инфимум в (2.2) и (2.4) достигается на функциях $q^* = p^*$ и $v = u$ соответственно.

Условие $q^* \in Q_\ell^*$, которое присутствует в (2.2) и (2.4) является неудобным с практической точки зрения. Его можно значительно ослабить, допуская для этой переменной значительно более широкое множество Q^* , которое позволяет использовать простые аппроксимации (этот вопрос подробно обсуждается в гл. 3 [7]). Пусть

$$d_{Q_\ell^*}(y^*) := \inf_{q^* \in Q_\ell^*} \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

обозначает расстояние между $y^* \in Q^*$ и множеством Q_ℓ^* . Тогда вместо (2.2) мы имеем

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} = \inf_{y^* \in Q^*} M_{\oplus}(v, y^*), \quad \text{где} \quad M_{\oplus}(v, y^*) := \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + d_{Q_\ell^*}(y^*). \quad (2.5)$$

Соответствующее расстояние можно оценить

$$d_{Q_\ell^*}(y^*) \leq \frac{1}{C_\Lambda} \|\ell + \Lambda^* y^*\| \leq C \|\ell + \Lambda^* y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}, \quad C = c_1^{-1} C_\Lambda^{-1}. \quad (2.6)$$

Также тождество (2.2) дает полностью вычисляемую оценку снизу нормы $\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 &= \inf_{y^* \in Q^*} \sup_{w \in V_0} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + \langle \Lambda^* y^* + \ell, w \rangle \right\} \geq \\ &\geq \sup_{w \in V_0} \inf_{y^* \in Q^*} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + (y^*, \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Инфимум по y^* несложно вычислить, действительно он достигается при $y^* = A\Lambda(v + w)$, так что

$$\inf_{y^* \in Q^*} \left(\frac{1}{2} \|y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 - (y^*, \Lambda v) + (y^*, \Lambda w) \right) = -\frac{1}{2} \|\Lambda(v + w)\|_{\mathcal{A}}^2.$$

Подстановка в (2.7) приводит к неравенству

$$\frac{1}{2}\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 \geq \sup_{w \in V_0} \left\{ \frac{1}{2}\|\mathcal{A}\Lambda v\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 - \frac{1}{2}\|\Lambda(v + w)\|_{\mathcal{A}}^2 + \langle \ell, w \rangle \right\} = \sup_{w \in V_0} \left\{ -\frac{1}{2}\|\Lambda w\|_{\mathcal{A}}^2 - (\Lambda v, \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle \right\}.$$

Следовательно, для любой функции $w \in V_0$ имеет место оценка

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} \geq M_{\ominus}(v, w), \quad (2.8)$$

где

$$M_{\ominus}^2(v, w) := -\|\Lambda w\|_{\mathcal{A}}^2 - 2(\Lambda v, \Lambda w) + 2\langle \ell, w \rangle.$$

С помощью (2.4) мы получаем оценки для двойственной переменной:

$$\begin{aligned} \|y^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} &\leq \|p^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} = \inf_{v \in V_0} \|\mathcal{A}\Lambda v - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \\ &\leq \inf_{v \in V_0} \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + 2d_{Q_\ell^*}(y). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|y^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq M_{\oplus}^*(v, y) := \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + 2d_{Q_\ell^*}(y^*) \quad \forall v \in V_0 \quad (2.9)$$

и

$$\|y^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \geq \|p^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} - \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \geq \inf_{v \in V_0} \|\mathcal{A}\Lambda v - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} - 2d_{Q_\ell^*}(y^*).$$

Оценки (2.5), (2.8) и (2.9) позволяют контролировать погрешность аппроксимаций в глобальных нормах. Эффективность этих оценок обсуждается в разд. 4, где они используются для анализа стандартных конечно-элементных аппроксимаций. Вполне естественно, что их точность существенно зависит от выбора y^* в (2.5) и w в (2.8). Чем точнее двусторонние оценки, тем большие вычислительные затраты необходимы для нахождения функций y^* и w . Далее мы покажем, что эти затраты являются оправданными, поскольку позволяют получить также двусторонние гарантированные оценки для широкого набора специальных мер, а также очень эффективные индикаторы распределения ошибок по области.

3. ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕР ОШИБОК

3.1. Основные оценки

Мы рассматриваем класс мер для функций e и e^* , которые задаются неотрицательными функционалами

$$\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{и} \quad \Phi^* : U \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

обращающимися в нуль, если $e = 0$ или $e^* = 0$. Пусть Φ удовлетворяют условиям

$$\Phi(e_1 + e_2) \leq \Phi(e_1) + \Phi(e_2) \quad \forall e_1, e_2 \in V \quad (3.1)$$

и

$$\Phi(e) \leq C_\Phi \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} \quad \forall e \in V. \quad (3.2)$$

Аналогично Φ^* удовлетворяет условиям

$$\Phi^*(e_1^* + e_2^*) \leq \Phi^*(e_1^*) + \Phi^*(e_2^*) \quad \forall e^* \in Y^* \quad (3.3)$$

и

$$\Phi^*(e^*) \leq C_{\Phi^*} \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \quad \forall e^* \in Y^*. \quad (3.4)$$

Условия (3.1)–(3.4) охватывают весьма широкий класс функционалов, используемых для контроля приближенных решений. В частности, $\Phi(e)$ и $\Phi^*(e^*)$ можно определить как нормы $\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}, \omega}$ и $\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}, \omega}$, связанные с некоторой локальной областью $\omega \subset \Omega$. В качестве локальных норм другого рода можно взять

$$\|e\|_{s, \omega} := \left(\int_{\omega} |e|^s d\Omega \right)^{1/s}, \quad \|e^*\|_{s, \omega} := \left(\int_{\omega} |e^*|^s d\Omega \right)^{1/s}, \quad s \geq 1,$$

или нормы, определенные на многообразиях меньшей размерности (например, на части границы области). Также часто используются функционалы, порожденные некоторыми линейными функционалами, ориентированными на специфические формы контроля (так называемые "goal oriented quantities"). Их мы отдельно рассмотрим в п. 3.2.

Условия (3.1) и (3.3) означают, что меры удовлетворяют неравенству треугольника. Их можно сделать несколько более общими, но для краткости изложения удобно оставить их в такой форме. Для определения констант C_Φ и C_{Φ^*} необходимо использовать подходящие функциональные неравенства. Например, пусть $s = 1$, V – это пространство Соболева $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$, а Λ – оператор градиента. Тогда для локальной L_1 -нормы имеет место оценка

$$\int_{\omega} |e| d\Omega \leq |\omega|^{1/2} \|e\|_{2,\omega} \leq |\omega|^{1/2} C_F \|\nabla e\|_{\Omega} \leq \left(\frac{|\omega|}{c_1} \right)^{1/2} C_F \|\nabla e\|_{\mathcal{A}},$$

где C_F обозначает постоянную в неравенстве Фридрихса для функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$. Эта оценка показывает, что условие (3.2) выполнено.

Нижеприведенная теорема устанавливает функциональные соотношения, которые выполняются для ошибок, оцениваемых в терминах мер $\Phi(e)$ и $\Phi^*(e^*)$. Эти соотношения позволяют в дальнейшем получать легко вычисляемые оценки для этих мер.

Теорема 1. 1. Если Φ удовлетворяет (3.1) и (3.2), то

$$\Phi(e) = \inf_{\eta \in V} \inf_{q^* \in Q_\ell^*} \left\{ \Phi(\eta) + C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \right\} = \sup_{\eta \in V} \sup_{q^* \in Q_\ell^*} \left\{ \Phi(\eta) - C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \right\}, \quad (3.5)$$

причем

$$|\Phi(e) - \Phi(\eta)| \leq C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \quad \forall \eta \in V, q^* \in Q_\ell^*. \quad (3.6)$$

2. Если Φ^* удовлетворяет (3.3) и (3.4), то

$$\Phi^*(e^*) = \inf_{\tau^* \in Q_0^*} \inf_{\eta \in V} \left\{ \Phi^*(\tau^*) + C_{\Phi^*} \|\mathcal{A}\Lambda\eta - q^* - \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \right\} = \sup_{\tau^* \in Q_0^*} \sup_{\eta \in V} \left\{ \Phi^*(\tau^*) - C_{\Phi^*} \|\mathcal{A}\Lambda\eta - q^* - \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \right\}, \quad (3.7)$$

причем

$$|\Phi^*(e^*) - \Phi^*(\tau^*)| \leq C_{\Phi^*} \|\mathcal{A}\Lambda\eta - q^* - \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \quad \forall \eta \in V, \tau^* \in Q_0^*. \quad (3.8)$$

Доказательство. Пусть $\eta \in V$. Используя (3.1) и (3.2), мы заключаем, что

$$\Phi(e) \leq \Phi(\eta) + \Phi(e - \eta) \leq \Phi(\eta) + C_\Phi \|\Lambda(e - \eta)\|_{\mathcal{A}} \quad (3.9)$$

и

$$\Phi(e) \geq \Phi(\eta) - \Phi(\eta - e) \geq \Phi(\eta) - C_\Phi \|\Lambda(e - \eta)\|_{\mathcal{A}}. \quad (3.10)$$

Неравенство (3.6) следует из (3.9) и (3.9).

Учитывая (2.2), оценка (3.9) приобретает вид

$$\Phi(e) \leq \Phi(\eta) + C_\Phi \inf_{q^* \in Q_\ell^*} \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \Phi(\eta) + C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Таким образом,

$$\inf_{\eta \in V} \inf_{q^* \in Q_\ell^*} \left\{ \Phi(\eta) + C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \right\} \geq \Phi(e).$$

При этом

$$\inf_{\eta \in V} \inf_{q^* \in Q_\ell^*} \left\{ \Phi(\eta) + C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \right\} \leq \Phi(v - u) + C_\Phi \|\Lambda u - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} = \Phi(e),$$

и мы приходим к тождеству (3.5).

Аналогичным образом (2.2) и (3.10) дают оценку

$$\begin{aligned} \Phi(e) &\geq \Phi(\eta) - C_\Phi \inf_{q^* \in Q_\ell^*} \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} = \\ &= \sup_{q^* \in Q_\ell^*} \left\{ \Phi(\eta) - C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \right\} \geq \Phi(\eta) - C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}. \end{aligned}$$

Неравенство верно для любого $\eta \in V$, так что

$$\Phi(e) \geq \sup_{\eta \in V} \sup_{q^* \in Q_\ell^*} \{ \Phi(\eta) - C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \}.$$

Поскольку

$$\sup_{\eta \in V} \sup_{q^* \in Q_\ell^*} \{ \Phi(\eta) - C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \} \geq \sup_{\eta \in V} \{ \Phi(\eta) - C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \} \geq \Phi(e),$$

приходим к (3.5).

Для доказательства (3.7) используем оценки

$$\begin{aligned} \Phi^*(e^*) &\leq \Phi^*(\tau^*) + \Phi^*(e^* - \tau^*) \leq \Phi^*(\tau^*) + C_{\Phi^*} \|e^* - \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}, \\ \Phi^*(e^*) &\geq \Phi^*(\tau^*) - \Phi^*(\tau^* - e^*) \geq \Phi^*(\tau^*) - C_{\Phi^*} \|e^* - \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}, \end{aligned}$$

которые выполняются для любого $\tau^* \in U$. Если $\tau^* \in Q_0^*$, то $q^* - \tau^* \in Q_\ell^*$, и в соответствии с (2.4) имеет место оценка

$$\|e^* - \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} = \|q^* - \tau^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} = \inf_{\eta \in V_0} \|\mathcal{A}\Lambda\eta - q^* + \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Следовательно, имеет место (3.8), и для любого $\tau^* \in Q_0^*$

$$\Phi^*(e^*) \leq \Phi^*(\tau^*) + C_{\Phi^*} \inf_{\eta \in V_0} \|\mathcal{A}\Lambda\eta - q^* + \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \Phi^*(\tau^*) + C_{\Phi^*} \|p^* - q^* + \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Поскольку $q^* - p^* \in Q_\ell^*$,

$$\inf_{\tau^* \in Q_\ell^*} \inf_{\eta \in V_0} \{\Phi^*(\tau^*) + \|\mathcal{A}\Lambda\eta - q^* + \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}\} = \Phi^*(e^*).$$

Аналогично

$$\Phi^*(e^*) \geq \Phi^*(\tau^*) - C_{\Phi^*} \sup_{\eta \in V_0} \|\mathcal{A}\Lambda\eta - q^* + \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \geq \Phi^*(\tau^*) - C_{\Phi^*} \|p^* - q^* + \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}},$$

откуда следует (3.7).

Следствие 1. Определим $\ker \Phi := \{v \in V \mid \Phi(v) = 0\}$. В соответствии с (3.5)

$$\Phi(e) \leq C_\Phi \inf_{\eta \in \ker \Phi} \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \quad \forall q^* \in Q_\ell^*. \quad (3.11)$$

Эту оценку можно рассматривать как обобщение неравенства (2.1) на введенный класс мер ошибок. Легко видеть, что (2.1) следует из (3.11). Действительно, если $\Phi(e) = \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}$, то $\ker \Phi$ содержит только нулевой элемент, а $C_\Phi = 1$. Оценка (3.11) показывает, что мажоранта $\Phi(e)$ может быть получена с помощью дополнительной минимизации на множестве $\ker \Phi$. Далее мы покажем, что, по крайней мере, для одного вида Φ эта оценка точна.

Соотношения (3.5) и (3.7) в определенном отношении аналогичны равенствам (2.2) и (2.4) для глобальных норм и обладают тем же самым недостатком: они определены на весьма узком классе функций Q_ℓ^* . Поскольку

$$\inf_{q^* \in Q_\ell^*} \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \{\|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + d_{Q_\ell^*}(y^*)\}$$

и имеет место (3.5), получаем оценку

$$\Phi(e) \leq \inf_{\eta \in V_0} \{\Phi(\eta) + C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + d_{Q_\ell^*}(y^*)\},$$

где $y^* \in Q^*$, а равенство достигается $y^* = p^*$. Таким образом,

$$\Phi(e) = \inf_{y^* \in Q^*} \inf_{\eta \in V_0} \{\Phi(\eta) + C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + d_{Q_\ell^*}(y^*)\}.$$

Из (3.5) также следует, что

$$\begin{aligned} \Phi(e) &\geq \sup_{\eta \in V_0} \sup_{q^* \in Q_\ell^*} \{\Phi(\eta) - C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} - \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}\} \geq \\ &\geq \sup_{\eta \in V_0} \{\Phi(\eta) - C_\Phi \|\mathcal{A}\Lambda(v - \eta) - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} - d_{Q_\ell^*}(y^*)\}. \end{aligned}$$

Эта миноранта точна, и равенство достигается при $\eta = v - u$ и $y^* = p^*$.

3.2. Меры ошибок, индуцированные линейными функционалами

В работах, посвященных апостериорному контролю точности решений дифференциальных уравнений, часто используются функционалы вида

$$\Phi(e) = |\langle \xi, e \rangle|, \quad \xi \in V^*, \quad \text{и} \quad \Phi^*(e^*) = |(\kappa, e^*)|, \quad \kappa \in U. \quad (3.12)$$

Например, если $\xi(x)$ это неотрицательная функция в Ω , то величина $\left| \int_{\Omega} \xi e dx \right|$ дает некоторую характеристику ошибки e , которая, в первую очередь, ориентирована на те части области, где ξ имеет большие значения. Функционал такого типа не является нормой и, вообще говоря, порождает довольно слабую меру. Для того чтобы частично компенсировать этот недостаток, иногда предлагается использовать несколько таких функционалов и задать полунорму вида

$$|[v]| := \sup_{k=1, \dots, M} |\langle \xi_k, v \rangle|, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Рассмотрим приложение вышеприведенных результатов к случаю (3.12). Пусть

$$V_{\xi} := \ker \Phi = \{\varphi \in V_0 \mid \langle \xi, \varphi \rangle = 0\} \quad \text{и} \quad \|\xi\| := \sup_{w \in V_0} \frac{|\langle \xi, w \rangle|}{\|\Lambda w\|_{\mathcal{A}}}.$$

Тогда

$$|\langle \xi, e \rangle| \leq \|\xi\| \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}, \quad (3.13)$$

так что в этом случае в качестве C_{Φ} можно взять $\|\xi\|$ или оценку сверху этой величины. Покажем, что

$$|\langle \xi, e \rangle| = \|\xi\| \inf_{\varphi \in V_{\xi}} \|\Lambda(e - \varphi)\|_{\mathcal{A}}. \quad (3.14)$$

Из (3.13) следует, что

$$|\langle \xi, e \rangle| \leq \|\xi\| \inf_{\varphi \in V_{\xi}} \|\Lambda(e - \varphi)\|_{\mathcal{A}}. \quad (3.15)$$

Пусть $u_{\xi} \in V$ является решением задачи

$$(\mathcal{A}\Lambda u_{\xi}, \Lambda w) = \langle \xi, w \rangle \quad \forall w \in V, \quad (3.16)$$

где $\xi \in V^*$. Функция \widehat{u}_{ξ} существует и единственна, причем $\|\Lambda u_{\xi}\|_{\mathcal{A}} \leq \|\xi\|$. С другой стороны,

$$\|\xi\| = \sup_{w \in V_0} \frac{(\mathcal{A}\Lambda u_{\xi}, \Lambda w)}{\|\Lambda w\|_{\mathcal{A}}} \leq \|\Lambda u_{\xi}\|_{\mathcal{A}},$$

так что $\|\Lambda u_{\xi}\|_{\mathcal{A}} = \|\xi\|$.

Положим $\widehat{\varphi} = e - \frac{\langle \xi, e \rangle}{\|\xi\|^2} u_{\xi}$. Тогда

$$\langle \xi, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \xi, e \rangle \left(1 - \frac{\langle \xi, u_{\xi} \rangle}{\|\xi\|^2} \right) = 0$$

и, следовательно, $\widehat{\varphi} \in V_{\xi}$. Поэтому

$$\inf_{\varphi \in V_{\xi}} \|\Lambda(e - \varphi)\|_{\mathcal{A}} \leq \|\Lambda(e - \widehat{\varphi})\|_{\mathcal{A}} = |\langle \xi, e \rangle| \frac{\|\Lambda u_{\xi}\|_{\mathcal{A}}}{\|\xi\|^2} = \frac{1}{\|\xi\|} |\langle \xi, e \rangle|,$$

левая часть (3.15) совпадает с правой, что и доказывает (3.14).

Используем (2.5) и (2.6):

$$|\langle \xi, e \rangle| \leq M_{\oplus, \xi}(v, y^*, \varphi) := \|\xi\| M_{\oplus}(v - \varphi, y^*). \quad (3.17)$$

Минимизация правой части (3.17) по φ и y^* дает точное значение $\Phi(e)$.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В процессе численных экспериментов вычислялись апостериорные оценки ошибки (мажоранта и миноранта) для решений различных краевых задач вида $\operatorname{div}(A\nabla u) + f = 0$, $u = 0$ на Γ . В качестве приближенных решений используются стандартные конечноэлементные аппроксимации, так что v представляет собой непрерывную кусочно-аффинную функцию, удовлетворяющую краевому условию. Для контроля ошибок глобальных норм используем оценки (2.5) и (2.8). При этом

$$M_{\oplus}(v, y) = \|A\nabla v - y^*\|_{A^{-1}, \Omega} + C_F \|\operatorname{div} y^* + f\|_{\Omega}$$

и

$$M_{\ominus}^2(v, w) = -\|\nabla w\|_{A, \Omega}^2 - 2 \int_{\Omega} A\nabla v \cdot \nabla w \, dx + 2 \int_{\Omega} f w \, dx.$$

Функция y^* получается с помощью реконструкции вычисленного потока $A\nabla v$ и, затем, уточняется в процессе минимизации мажоранты. Функция w строится на подпространстве непрерывных кусочно-квадратичных функций. Как правило, процесс получения точных двусторонних оценок требует более значительных вычислительных затрат, чем те, что требуются для вычисления v . Это естественно, поскольку построение решения с гарантированной точностью должно требовать больших затрат машинного времени, чем просто получение некоторого приближенного решения. Более того, приведенные далее примеры показывают, что дополнительные затраты можно эффективно использовать для анализа точности с помощью различных функционалов Φ . В частности, мы без всяких дополнительных затрат можем использовать оценку

$$\Phi(e) \leq \Phi(w) + C_{\Phi} \|A\nabla(v + w) - y^*\|_{A^{-1}, \Omega} + C_{\Phi} C_F \|\operatorname{div} y^* + f\|_{\Omega} \quad (4.1)$$

с самыми разными Φ , которые удовлетворяют (3.1), (3.2).

4.1. Пример 1

Решается задача $\Delta u + f = 0$ в области $\Omega = [0, 1]^2$ с нулевыми граничными условиями, $f = -2(x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2)$. Здесь известно точное решение $u = x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)$. В качестве приближенного решения берется галеркинская аппроксимация на разных сетках (N_p – количество узлов).

Результаты использования глобальных оценок (2.5) и (2.8) показаны (в процентах) в левой половине табл. 1, где видно, что энергетическая норма ошибки (нормированная относительно нормы решения) очень точно оценивается как сверху так и снизу.

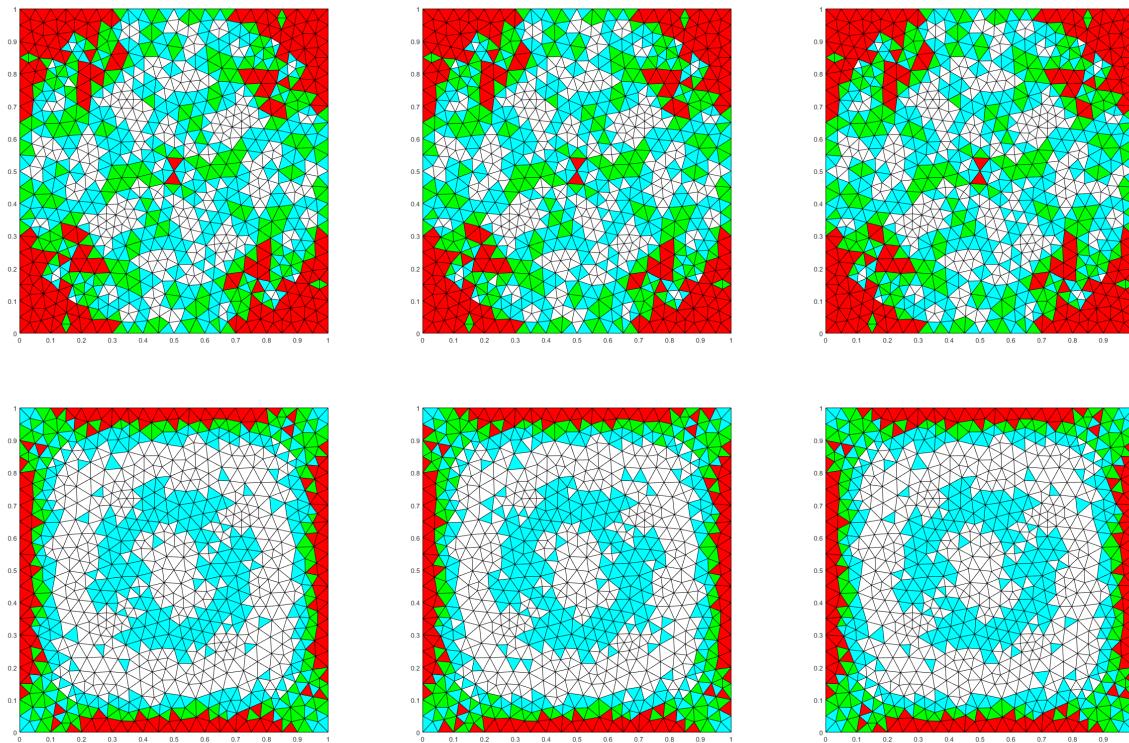
При этом первое слагаемое M_{\oplus} дает прекрасный индикатор распределения ошибок по элементам. Три картинки верхнего ряда фиг. 1 показывают это распределение, где элементы, окрашенные в красный цвет содержат 50% суммарной ошибки, красные и зеленые – 70%, а красные, голубые и зеленые – 90%. Есть и другой способ построить индикатор этого распределения. Для этого надо положить $\Phi(e) = \|\nabla e\|_T$, где T – это треугольник из конечноэлементного разбиения Ω . Если w – это функция, обеспечивающая достаточно точную оценку снизу (как, например в табл. 1), то $\Phi(w)$ является таким индикатором. На фиг. 1 показаны соответствующие результаты. Рисунок слева построен по истинному распределению ошибки, индикатор в центре построен по M_{\oplus} , а индикатор справа построен по $\Phi(w)$. Нетрудно видеть, что эти индикаторы (которые играют важную роль при использовании адаптивных численных методов) воспроизводятся с высокой точностью, построенные с помощью мажоранты и локальной ошибки почти не отличаются от отметок индикатора, построенного по точной ошибке.

Теперь мы покажем, что используя уже вычисленные функции w и y^* , можно без особого труда получать оценки и индикаторы для других функционалов ошибок. Начнем с примера, когда такой функционал представляется собой L_2 норму, т.е.

$$\Phi(e) = \|e\|_{\Omega}.$$

Таблица 1. Двусторонние оценки глобальной ошибки в примере 1

N_p	$\frac{M_{\ominus}}{\ \nabla u\ }$	$\frac{\ \nabla(u-v)\ }{\ \nabla u\ }$	$\frac{M_{\oplus}}{\ \nabla u\ }$	N_p	$\frac{M_{\ominus}}{\ \nabla u\ }$	$\frac{\ \nabla(u-v)\ }{\ \nabla u\ }$	$\frac{M_{\oplus}}{\ \nabla u\ }$
177	10.67	10.68	10.85	177	18.68	18.69	18.94
727	5.10	5.11	5.14	727	15.90	15.90	16.11
2810	2.56	2.56	2.57	2810	15.24	15.24	15.46



Фиг. 1. Индикаторы распределения ошибок в примере 1.

Таблица 2. Оценки L_2 нормы ошибки

N_p	$\frac{\Phi(e)}{\ u\ }, \%$	$\frac{S}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_1}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_2}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_3}{\ u\ }, \%$
177	1.3792	2.0452	1.3778	0.4942	0.1732
727	0.3152	0.4622	0.3151	0.1085	0.0385
2810	0.0786	0.1152	0.0786	0.0270	0.0096

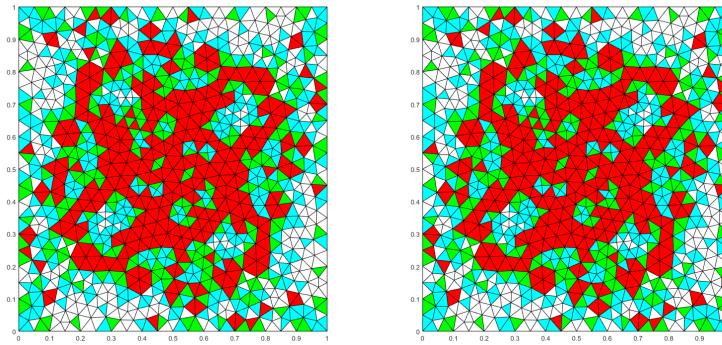
Результаты представлены в табл. 2. Здесь (и далее везде) $S := S_1 + S_2 + S_3$, а компоненты этой суммы соответствуют трем слагаемым мажоранты (4.1). В данном случае $S_1 = \Phi(w)$, $S_2 = C_F \|\nabla(v+w) - y\|_\Omega$ и $S_3 = C_F^2 \|\operatorname{div} y + f\|_\Omega$. Видно, что сумма этих величин мажорирует $\Phi(e)$, а S_1 практически совпадает с $\Phi(e)$. Более того, с помощью S_1 можно построить очень хороший индикатор, который показывает значения $\Phi(e)$, соответствующие отдельным элементам. На фиг. 2 слева маркировка элементов осуществлена по функции $\Phi(e)$, а справа – по S_1 . Эти маркировки практически не отличаются друг от друга.

В табл. 3 представлены результаты для другого функционала: $\Phi(e) = \left| \int_{\Omega} e \, dx \right|$. Здесь

$$S_1 = \Phi(w), \quad S_2 = C_F |\Omega|^{1/2} \|\nabla(v+w) - y\|_\Omega \quad \text{и} \quad S_3 = C_F^2 |\Omega|^{1/2} \|\operatorname{div} y + f\|_\Omega.$$

Несмотря на то что этот функционал сильно отличается от энергетической нормы (и является лишь весьма слабой полунормой), соответствующая мажоранта дает весьма точную оценку сверху (например, при $N_p = 2810$ величина $\Phi(e) = 0.0681$ оценивается как 0.1047).

Теперь обратимся к оценкам локального типа, когда функционал $\Phi(e)$ ассоциирован с некоторой подобластью ω . Пусть, например, эта подобласть расположена в левом нижнем углу Ω и $\Phi(e) = \left| \int_{\omega} e \, dx \right|$, где $\omega = [0, 1/2]^2$. В табл. 4 представлены соответствующие результаты. Здесь гарантированная верхняя граница в несколько раз превышает истинное значение ошибки, но значения $\Phi(w)$ по-прежнему очень близки к $\Phi(e)$. Таким образом, предлагаемый метод для $N_p = 2810$ дает следующий результат: величина $\Phi(e)$ не превосходит 0.0526 и близка

Фиг. 2. Индикатор ошибки в норме L_2 .Таблица 3. Оценка для $\Phi(e) = \left| \int_{\Omega} e dx \right|$

N_p	$\frac{\Phi(e)}{\ u\ }, \%$	$\frac{S}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_1}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_2}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_3}{\ u\ }, \%$
177	1.1901	1.8552	1.1879	0.4942	0.1732
727	0.2737	0.4206	0.2735	0.1085	0.0385
2810	0.0681	0.1047	0.0681	0.0270	0.0096

Таблица 4. Оценка для $\Phi(e) = \left| \int_{\Omega} e dx \right|$

N_p	$\frac{\Phi(e)}{\ u\ }, \%$	$\frac{S}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_1}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_2}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_3}{\ u\ }, \%$
177	0.2415	0.9083	0.2410	0.4942	0.1732
727	0.0627	0.2097	0.0627	0.1085	0.0385
2810	0.0160	0.0526	0.0160	0.0270	0.0096

к 0.0160, т.е. гарантированная оценка превосходит точное значение примерно в 3 раза, а индикатор (вероятное значение) практически совпадает с точным.

Рассмотрим локальные оценки другого рода. Разобьем Ω на 16 одинаковых квадратных подобластей

$$\omega_{ij} := \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N} \right] \times \left[\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N} \right], \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad N = 4,$$

и пусть

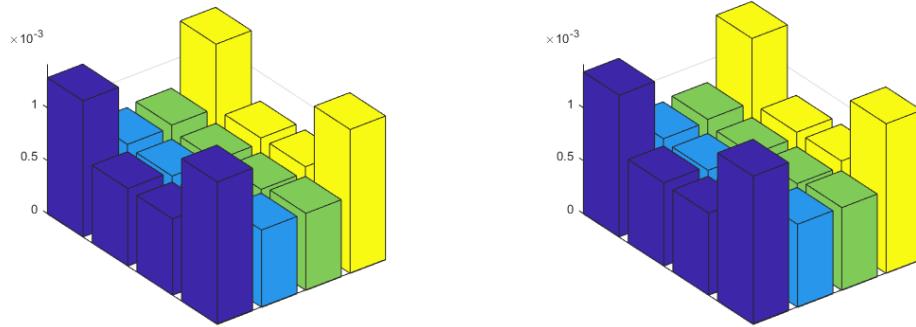
$$\Phi_{ij}(e) = \|\nabla e\|_{\omega_{ij}}.$$

Оценки сверху для локальных норм вычисляются согласно (4.1), где

$$S_1 = \Phi(w), \quad S_2 = \|\nabla(v + w) - y\|_{\Omega}, \quad S_3 = C_F \|\operatorname{div} y + f\|_{\Omega}.$$

На фиг. 3 показаны истинные значения локальных ошибок (слева) и их мажоранты, вычисленные согласно предлагаемому нами методу. При $N_p = 2810$ абсолютные значения локальных ошибок колеблются в диапазоне $10^{-3} - 10^{-4}$, а их переоценка мажорантой составляет не более 5–7%.

Отметим, что обсуждаемый нами метод позволяет получать как глобальные, так и локальные оценки не только для галеркинских, но и для любых конформных аппроксимаций. Например, в качестве аппроксимации решения можно взять кусочно-аффинный интерполянт функции $v = \frac{1}{16} \sin \pi x \sin \pi y$ на соответствующей сетке. Такая функция может рассматриваться как некоторая конечноэлементная аппроксимация решения, но, конечно, она не является галеркинской. Для нее глобальные оценки (2.5) и (2.8) показаны (в процентах) в правой половине табл. 1. Видно, что и для такой не-галеркинской аппроксимации энергетическая норма ошибки очень точно оценивается как сверху, так и снизу. Так же, как и ранее, можно построить индикаторы распределения ошибок по области. Эти результаты показаны в нижнем ряду фиг. 1. Рисунок слева построен по истинному



Фиг. 3. Распределение локальных ошибок.

распределению ошибки, индикатор в центре построен по M_{\oplus} , а индикатор справа построен с помощью функции w . Обратимся к локальным ошибкам для подобластей ω_{ij} , аналогичных тем, что были рассмотрены ранее. В табл. 5 представленные 16 значений $\|\nabla e\|_{\omega_{ij}}$ (верхняя часть) сравниваются с теми локальными оценками, что были вычислены согласно предлагаемой методике (нижняя часть). Нетрудно видеть, что эти значения очень

Таблица 5. Локальные ошибки и их оценки для не-галеркинской аппроксимации

5.5672e-03	5.2766e-03	5.2254e-03	5.7631e-03
5.2976e-03	3.2929e-03	3.2620e-03	5.4771e-03
5.2635e-03	3.2441e-03	3.2525e-03	5.4045e-03
5.7214e-03	5.4481e-03	5.4768e-03	5.8414e-03
6.8223e-03	6.5317e-03	6.4805e-03	7.0182e-03
6.5526e-03	4.5480e-03	4.5171e-03	6.7322e-03
6.5186e-03	4.4992e-03	4.5076e-03	6.6596e-03
6.9765e-03	6.7032e-03	6.7319e-03	7.0965e-03

блезки, а переоценка колеблется в пределах 1.2–1.4. Таким образом, для данного приближенного решения метод работает ничуть не хуже, чем для галеркинской аппроксимации.

4.2. Пример 2

В L -образной области $\Omega_L := [0, 1]^2 \setminus [1/2, 1]^2$ решается задача

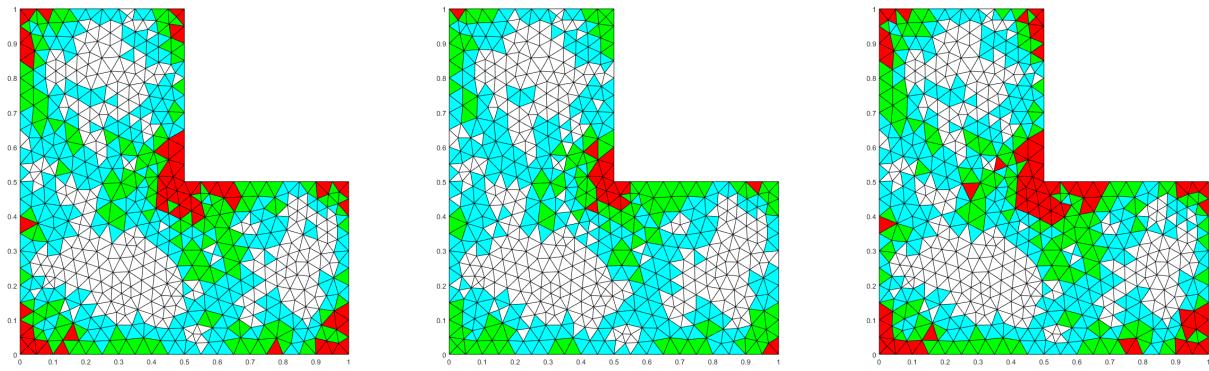
$$\Delta u + 1 = 0, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

В качестве точного решения u используется так называемое референсное решение (referenced solution), построенное на очень тонкой сетке, содержащей 226 837 узла. Результаты, относящиеся к двусторонним оценкам энергетической нормы ошибки приведены (в процентах) в табл. 6.

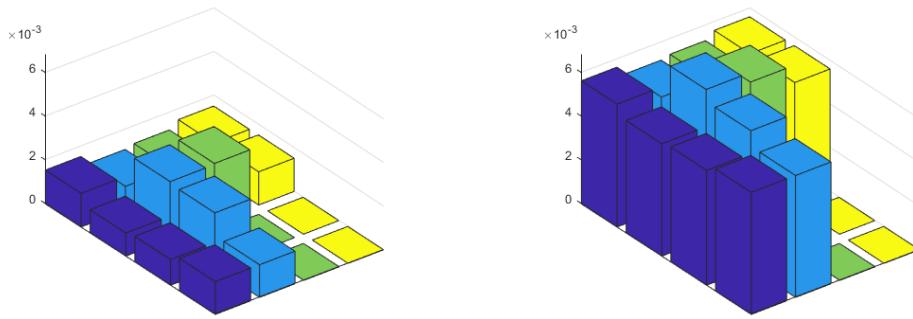
С помощью фиг. 4 можно сравнить работу индикаторов, генерируемых мажорантой (рисунок в центре) и минорантой (рисунок справа). Слева показано истинное распределение ошибки по области.

Таблица 6. Двусторонние оценки глобальной ошибки в примере 2

N_p	$\frac{M_{\oplus}}{\ \nabla u\ }$	$\frac{\ \nabla(u-v)\ }{\ \nabla u\ }$	$\frac{M_{\oplus}}{\ \nabla u\ }$
148	19.56	20.15	21.80
535	10.43	10.77	11.95
2102	5.80	6.10	6.80



Фиг. 4. Индикаторы распределения ошибок в примере 2.



Фиг. 5. Распределение локальных ошибок (регулярная сетка).

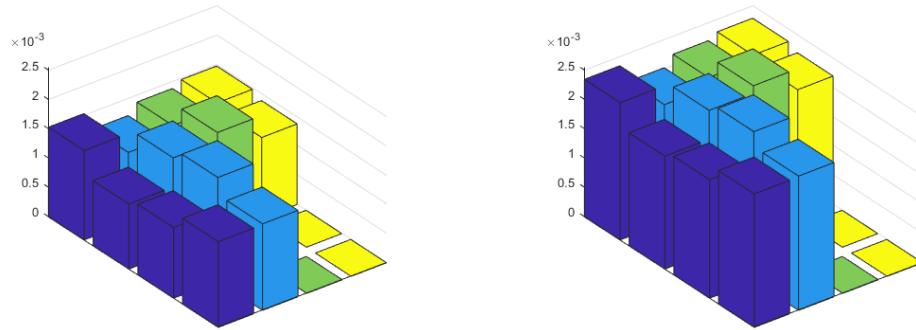
Обратимся к локальным ошибкам для подобластей ω_{ij} , аналогичных тем, что были рассмотрены в предыдущем примере (разница только в том, что теперь этих подобластей 12, а не 16). Определим значения $\|\nabla e\|_{\omega_{ij}}$ для конечноэлементного решения, построенного на сетке, составленной из примерно одинаковых треугольников с 2102 узлами (фиг. 7 слева). Такую квазиоднородную сетку будем называть регулярной. Гистограмма локальных ошибок показана в левой части фиг. 5. Значения ошибок, полученные с помощью мажоранты, показаны в правой части фиг. 5.

Видно, что в этом случае оценка превышает настоящее значение локальной ошибки в несколько раз. Индексы эффективности, которые показывают отношение мажоранты к норме ошибки, колеблются от 2.5 до 5.

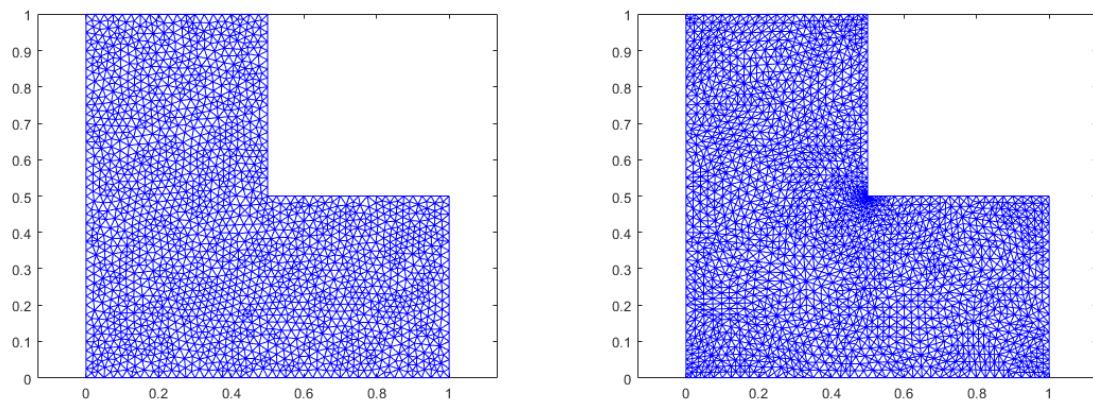
Этот эксперимент показывает, что для задач с особенностями в углах возможна значительная переоценка точной ошибки, если функция y^* определена недостаточно точно. Однако, надо заметить, что использование регулярной сетки в такой задаче довольно неестественно, и любой эффективный численный алгоритм будет строить сетки, адаптированные к сингулярности во внутреннем углу области. Задача была решена на одной из таких сеток, состоящей из 2696 узлов (фиг. 7 справа). Величины локальных ошибок и их оценки изображены в виде гистограмм на фиг. 6. Для адаптированной сетки точность локальных оценок значительно выше, чем для квазиоднородной, а соответствующие индексы эффективности незначительно колеблются около 1.5 для всех подобластей ω_{ij} . Вероятно, это связано с тем, что на адаптированной сетке функции w и y^* удалось построить значительно лучше.

4.3. Пример 3

В области Ω_L решается задача $\Delta u + 8\pi^2 \sin 2\pi x \sin 2\pi y = 0$ с нулевыми граничными условиями. В этом примере известно точное решение $u = \sin 2\pi x \sin 2\pi y$. Для мажоранты и миноранты энергетической нормы ошибки результаты (в процентах) приведены в табл. 7. В отличие от примера 2, здесь во внутреннем углу у решения особенности нет. Поэтому даже для решения, построенного на регулярной сетке (содержащей 2102 узлов) локальные оценки дают значения, приемлемые с точки зрения индекса эффективности. Рассмотрим локальные ошибки для подобластей ω_{ij} , что были рассмотрены в предыдущем примере. Вычислив значения $\|\nabla e\|_{\omega_{ij}}$ по



Фиг. 6. Распределение локальных ошибок (адаптированная сетка).



Фиг. 7. Конечноэлементные сетки в примере 3.

Таблица 7. Двусторонние оценки глобальной ошибки в примере 3

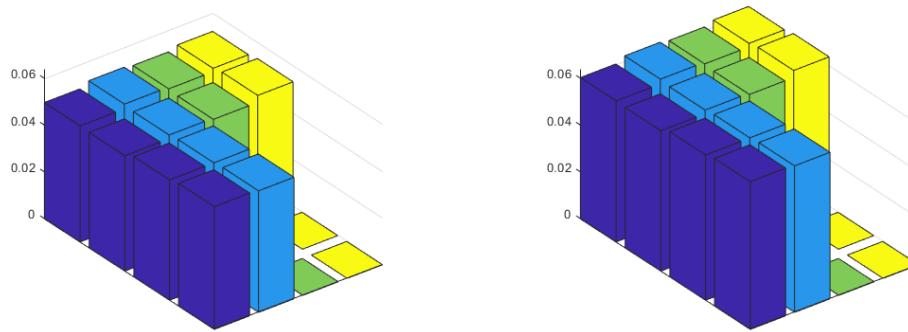
N_p	$\frac{M_\oplus}{\ \nabla u\ }$	$\frac{\ \nabla(u-v)\ }{\ \nabla u\ }$	$\frac{M_\oplus}{\ \nabla u\ }$
148	19.86	19.95	22.59
535	9.74	9.75	10.41
2102	4.87	4.87	5.04

конечноэлементному решению, построенному на равномерной сетке с 2102 узлами, получим гистограмму в левой части фиг. 8. Значения, полученные с помощью оценок локальных ошибок, показаны в правой части фиг. 8. Соответствующие индексы эффективности колеблются около 1.2.

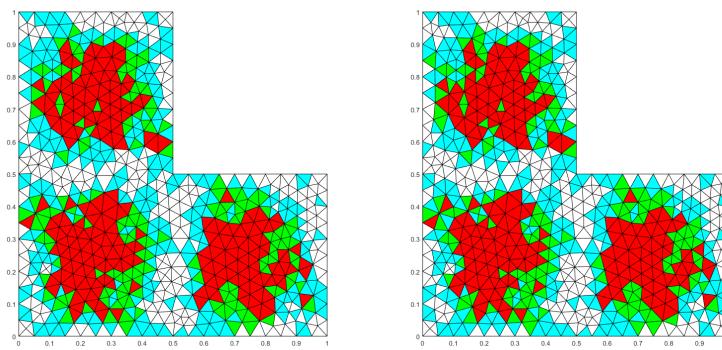
В табл. 8 представлены результаты для случая

$$\Phi(e) = \int_{\Omega} |e| dx.$$

Здесь $S_1 = \Phi(w)$, $S_2 = C_F |\Omega|^{1/2} \|\nabla(v + w) - y\|_{\Omega}$, $S_3 = C_F^2 |\Omega|^{1/2} \|\operatorname{div} y + f\|_{\Omega}$. На фиг. 9 слева маркировка элементов осуществлена по функции $\Phi(e)$, а справа — по S_1 . Эти маркировки практически не отличаются друг от друга. Определенная симметрия картинки объясняется периодичностью решения, которая индуцирует аналогичную периодичность в разнице между решением и галерkinской аппроксимацией, если ошибка оценивается с помощью нормы, не содержащей производных.



Фиг. 8. Распределение локальных ошибок.

Фиг. 9. Индикатор ошибки по L_1 -норме.Таблица 8. Оценка для $\Phi(e) = \int_{\Omega} |e| dx$

N_p	$\frac{\Phi(e)}{\ u\ }, \%$	$\frac{S}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_1}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_2}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_3}{\ u\ }, \%$
148	4.0386	13.5253	4.0097	3.8425	5.6731
535	0.9880	3.2617	0.9862	0.9208	1.3548
2102	0.2426	0.7995	0.2425	0.2178	0.3392

4.4. Пример 4

В заключение рассмотрим пример, где матрица A отлична от единичной и имеет существенно разные собственные значения. Здесь рассматривается задача

$$\operatorname{div}(A \nabla u) + 1 = 0 \quad \text{в } \Omega = [0, 1]^2$$

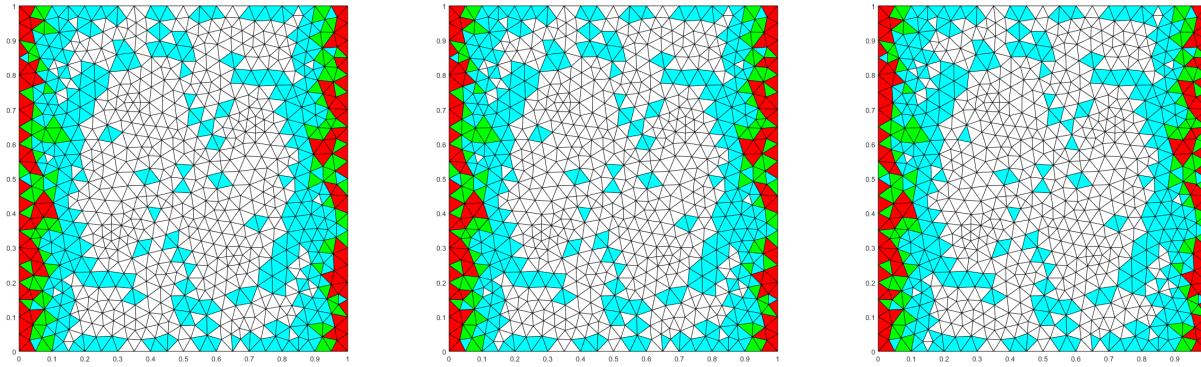
с нулевыми граничными условиями и $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$. В качестве точного решения u для вычислений используется референсное решение, т.е. галерkinская аппроксимация, построенная на симплексиальной сетке с 299 313 узлами. Для мажоранты и миноранты энергетической нормы ошибки результаты (в процентах) приведены в табл. 9. Как и в предыдущих примерах, мажоранта и миноранта генерируют очень хорошие индикаторы распределения ошибки, выраженной в энергетической норме $\|\nabla e\|_A$ (см. фиг. 10). Рисунок слева отражает истинное распределение ошибки, рисунок в центре построен по M_{\oplus} , а справа – по M_{\ominus} .

В табл. 10 представлены результаты для

$$\Phi(e) = \left| \int_{\Omega} \phi(x) e \, dx \right|, \quad \phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \omega, \\ 0, & \text{если } x \notin \omega, \end{cases}$$

Таблица 9. Двусторонние оценки глобальной ошибки в примере 4

N_p	$\frac{M_\ominus}{\ \nabla u\ }$	$\frac{\ \nabla(u-v)\ _A}{\ \nabla u\ }$	$\frac{M_\oplus}{\ \nabla u\ }$
177	33.00	33.18	33.22
727	17.22	17.25	17.25
2810	8.45	8.45	8.45

**Фиг. 10.** Индикаторы распределения ошибки в примере 4.**Таблица 10.** Оценка для $\Phi(e) = \left| \int_{\Omega} \phi(x) e \, dx \right|$

N_p	$\frac{\Phi(e)}{\ u\ }, \%$	$\frac{S}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_1}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_2}{\ u\ }, \%$	$\frac{S_3}{\ u\ }, \%$
177	0.4395	2.4647	0.4349	2.0276	0.0022
727	0.1329	0.7012	0.1325	0.5686	0.0002
2810	0.0325	0.1807	0.0325	0.1482	0.0000

где $\omega = [0, 1/2]^2$.

Здесь, $S_1 = \Phi(w)$, $S_2 = C_F |\omega|^{1/2} \|A\nabla(v+w) - y\|_{A^{-1}, \Omega}$ и $S_3 = C_F^2 |\omega|^{1/2} \|\operatorname{div} y + f\|_{\Omega}$. Гарантированная оценка сверху переоценивает $\Phi(e)$ примерно в 5 раз, но индикатор (величина S_1) практически совпадает с $\Phi(e)$.

Суммируя результаты приведенных экспериментов, можно сказать, что апостериорные оценки функционального типа позволяют уверенно контролировать точность приближенного не только в энергетической норме, но и в терминах локальных норм и специально сконструированных функционалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bangerth W., Rannacher R.* Adaptive finite element methods for differential equations. Berlin: Birkhauser, 2003.
2. *Johnson C., Hansbo P.* Adaptive finite elements in computational mechanics // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1992. V. 101. P. 143–181.
3. *Johnson C., Szepessy A.* Adaptive finite element methods for conservation laws based on a posteriori error estimates // Commun. Pure and Appl. Math. 1995. V. XLVIII. P. 199–234.
4. *Mommer M.S., Stevenson R.* A goal-oriented adaptive finite element method with convergence rates // SIAM J. Numer. Anal. 2009. V. 47. № 2. P. 861–886.
5. *Stein E., Ruter M., Ohnimus S.* Error-controlled adaptive goal-oriented modeling and finite element approximations in elasticity // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 2007. V. 196. № 37–40. P. 3598–3613.
6. *Repin S. I.* A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // Math. Comput. 2000. V. 69. № 230. P. 481–500.

7. Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations. Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2008.
8. Репин С.И. Тождество для отклонений от точного решения задачи $\Lambda^* \mathcal{A} \Lambda u + \ell = 0$ и его следствия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 22–45.
9. Repin S., Sauter S. Accuracy of Mathematical Models. Dimension Reduction, Simplification, and Homogenization. EMS Tracts in Mathematics. Vol. 33. 2020.
10. Репин С.И. Оценки отклонения от точных решений краевых задач в мерах более сильных, чем энергетическая норма // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 5. С. 767–783
11. Repin S.I. A posteriori estimates in local norms // J.Math. Sci. 2004. V. 124 № 3. P. 5026–5035.
12. Prager W., Syng J.L. Approximations in elasticity based on the concept of functions space // Quart. Appl. Math. 1947. V. 5. P. 241–269.
13. Mikhlin S.G. Variational Methods in Mathematical Physics. Oxford: Pergamon Press, 1964.

A POSTERIORI ERROR ESTIMATES FOR APPROXIMATE SOLUTIONS OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN TERMS OF LOCAL NORMS AND OBJECTIVE FUNCTIONALS

A. V. Muzalevsky^b, S. I. Repin^{a,b,*}, M. E. Frolov^b

^a191023 St. Petersburg, Fontanka str., 27, St. Petersburg Department of the V.A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Russia

^b195251 St. Petersburg, Polytechnic Str., 29, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia

*e-mail: repin@pdmi.ras.ru

Received: 07.08.2024

Revised: 07.08.2024

Accepted: 27.08.2024

Abstract. Functional relations have been obtained that allow us to evaluate the accuracy of approximate solutions in terms of measures significantly different from the energy norms that are usually used for these purposes. In particular, they are applicable to local norms and measures constructed using specially built linear functionals. The need for such precision control tools arises if there is a special interest in the behavior of the solution in some subdomain or in the special properties of the solution. It is shown that a posteriori functional-type estimates, which were previously used for global estimates, can be adapted to solve this problem. Functional identities and estimates are obtained that allow estimating the error of any conformal approximations in terms of a wide class of measures, including local norms and problem-oriented functionals. The theoretical results are verified in a series of examples that confirm the effectiveness of the proposed method.

Keywords: elliptic boundary value problems, a posteriori functional type estimates, local error estimates, goal-oriented accuracy control.