ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 12, с. 2229–2242

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.58

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ПРИ СУММИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ГОРНА

© 2024 г. С. И. Безродных[1,*], О. В. Дунин-Барковская[1,2,**]

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия
[2] 119234 Москва, Университетский пр-т, 13, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Россия
*e-mail: sbezrodnykh@mail.ru
**e-mail: olga.ptitsyna@gmail.com

Поступила в редакцию 20.04.2024 г.
Переработанный вариант 31.05.2024 г.
Принята к публикации 05.06.2024 г.

Построены интегральные представления и асимптотические оценки остатков суммирования гипергеометрического ряда Аппеля F_1 и родственного ему ряда G_2, указанных в списке Горна гипергеометрических рядов двух переменных. Найденные формулы имеют приложение к разработке алгоритмов вычисления функции F_1 с помощью формул аналитического продолжения во все пространство $\mathbb{C}^2$. Результаты могут найти приложение в задачах математической физики, и вычислительной теории функции, в том числе, при построении конформного отображения сложных многоугольников на основе интеграла Кристоффеля–Шварца. Библ. 24.

Ключевые слова: гипергеометрические функции Аппеля и Горна, формулы аналитического продолжения, эффективное вычисление гипергеометрических функций.

DOI: 10.31857/S0044466924120016, **EDN**: KCZCNY

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Функция Аппеля F_1 и родственные ряды Горна двух переменных

Гипергеометрическая функция Аппеля F_1 возникает при конструктивном решении ряда важных задач математической физики и теории функций (см., например, некоторые современные работы [1]– [9]). Эта функция в единичном бикруге

$$\mathbb{U}^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\} \tag{1.1}$$

определяется с помощью следующего двойного ряда (см. [10]– [12]):

$$F_1(a_1, a_2; b, c; z_1, z_2) := \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2}(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2}}{(c)_{k_1+k_2}k_1!k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{1.2}$$

где z_1 и z_2 — комплексные переменные, а величины a_1, a_2, b и c — комплексные параметры, от которых зависит функция F_1. Символ Похгаммера $(a)_k$ выражается через гамма-функцию $\Gamma(s)$ по формуле

$$(a)_k := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \tag{1.3}$$

и представляет собой для целых неотрицательных k произведение вида

$$(a)_0 = 1, \qquad (a)_k = a\,(a+1)\cdots(a+k-1), \qquad k = 1, 2, \dots . \tag{1.4}$$

Параметр c в формуле (1.2) не принимает целых неположительных значений, $c \notin \mathbb{Z}^-$. В формуле (1.1), как обычно, через $\mathbb{C}^2$ обозначено двумерное комплексное пространство.

Вне бикруга $\mathbb{U}^2$ под функцией Аппеля F_1 понимается аналитическое продолжение ряда (1.2). Прежде чем перейти к обсуждению такого продолжения, отметим, что ряд F_1, рассматриваемый как функция z_1 и z_2, удовлетворяет следующей системе уравнений с частными производными (см. [10]– [12]):

$$
\begin{aligned}
&z_1(1-z_1)\,\partial_{11}u\,+\,z_2(1-z_1)\,\partial_{12}u\,+\,\big[c-(a_1+b+1)z_1\big]\,\partial_1 u-a_1\,\partial_2 u-a_1 b\,u=0,\\
&z_2(1-z_2)\,\partial_{22}u\,+\,z_1(1-z_2)\,\partial_{12}u\,+\,\big[c-(a_2+b+1)z_2\big]\,\partial_2 u-a_2\,\partial_1 u-a_2 b\,u=0,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где $u=u(z_1,z_2)$ — искомая функция, через $\partial_{jk}u(z,\zeta)$ обозначены частные производные, так что, например, выражения $\partial_{12}u$ и $\partial_{11}u$ означают соответственно $\frac{\partial^2 u}{\partial z_1\partial z_2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}$. Размерность пространства решений системы (1.5) равна трем (см. [12], [13]). Если $z\notin\mathbb{U}^2$, то F_1 можно представить с помощью *формул аналитического продолжения*, дающих выражение в виде линейной комбинации функций, образующих базис в пространстве решений (1.5). Например, если выполнены соотношения

$$
b-a_1\notin\mathbb{Z},\qquad b-a_1-a_2\notin\mathbb{Z},
\tag{1.6}
$$

то формула аналитического продолжения функции F_1, первоначально определенной с помощью ряда (1.2), в область

$$
\mathbb{V}^2:=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_1|>|z_2|>1,|\arg(-z_j)|<\pi,j=1,2\}
\tag{1.7}
$$

имеет следующий вид (см. [14], [15]):

$$
\begin{aligned}
F_1(a_1,a_2;b,c;z_1,z_2)=\frac{\Gamma\,(c)\,\Gamma\,(b-a_1-a_2)}{\Gamma\,(b)\,\Gamma\,(c-a_1-a_2)}\mathcal{U}_0^{(\infty)}(a_1,a_2;b,c;z_1,z_2)+\\
+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1-b)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c-b)}\mathcal{U}_1^{(\infty)}(a_1,a_2;b,c;z_1,z_2)+\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a_1)\Gamma(a_1+a_2-b)}{\Gamma(a_2)\Gamma(c-b)\Gamma(b)}\mathcal{U}_2^{(\infty)}(a_1,a_2;b,c;z_1,z_2),
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

где функции $\mathcal{U}_j^{(\infty)}$, $j=0,1,2$, определяются равенствами

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{U}_0^{(\infty)}(a_1,a_2;b,c;z_1,z_2):=\\
&\quad:=(-z_1)^{-a_1}(-z_2)^{-a_2}F_1\Big(a_1,a_2;1-c+a_1+a_2,1-b+a_1+a_2;\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2}\Big),
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{U}_1^{(\infty)}(a_1,a_2;b,c;z_1,z_2):=\\
&\quad:=(-z_1)^{-b}F_1\Big(1-c+b,a_2;b,1+b-a_1;\frac{1}{z_1},\frac{z_2}{z_1}\Big),
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{U}_2^{(\infty)}(a_1,a_2;b,c;z_1,z_2):=\\
&\quad:=(-z_1)^{-a_1}(-z_2)^{a_1-b}G\Big(a_1,1-c+b;b-a_1,1+b-a_1-a_2;\frac{z_2}{z_1},\frac{1}{z_2}\Big).
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

В (1.11) фигурирует гипергеометрический ряд G, определяемый равенством

$$
G(a_1,a_2;b,c;z_1,z_2)=\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(b)_{k_2-k_1}\,(a_1)_{k_1}\,(a_2)_{k_2}}{(c)_{k_2-k_1}\,k_1!\,k_2!}\,z_1^{k_1}z_2^{k_2}\,,
\tag{1.12}
$$

а областью его сходимости является бикруг (1.1); здесь, также как и выше, z_1,z_2 — переменные, a_1,a_2,c — параметры. Фигурирующий в (1.12) символ Похгаммера (1.3) при отрицательных значениях k имеет вид произведения

$$
(a)_k=(-1)^k\Big((1-a)(2-a)\cdots\big((1-a)-k+1\big)\Big)^{-1},\qquad k=-1,-2,\ldots.
\tag{1.13}
$$

В области (1.7) функции (1.9)–(1.11) образуют базис в пространстве решений системы (1.5). Необходимо подчеркнуть, что формулы продолжения в области

$$
\begin{gathered}
\mathbb{W}^2:=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|1-z_1|<|1-z_2|<1,|\arg(1-z_j)|<\pi,j=1,2\},\\
\widetilde{\mathbb{V}}^2:=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:(z_2,z_1)\in\mathbb{V}^2\},\qquad\widetilde{\mathbb{W}}^2:=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:(z_2,z_1)\in\mathbb{W}^2\}
\end{gathered}
$$

также, как и (1.8)–(1.11), содержат ряды (1.2) и (1.12) (см. [14], [15]).

Для построения аналитического продолжения функции Аппеля F_1 могут быть также применены интегральные представления типа Эйлера. Например, если $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0$, то в области $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|\arg(1-z_j)|<\pi,$ $j=1,2\}$ функция Аппеля F_1 представима следующим интегралом (см. [11], [12]):

$$
F_1(a_1,a_2;b,c;z_1,z_2)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_1t)^{a_1}(1-z_2t)^{a_2}}dt,
\tag{1.14}
$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция. Вместе с тем, подобные интегралы в случае произвольных параметров (a_1, a_2, b, c), вообще говоря, не могут быть вычислены в элементарных функциях. Для адекватного представления функции Аппеля в $\mathbb{C}^2$ естественным аппаратом являются формулы аналитического продолжения (см. [15]–[17]), обеспечивающие ее вычисление с помощью набора экспоненциально сходящихся подходящих подобластях $\mathbb{C}^2$ рядов.

Таким образом, для разработки алгоритма вычисления функции F_1 на основе формул (1.2) и (1.8), а также некоторых других формул аналитического продолжения, необходимо построить эффективный способ оценки и вычисления остатка суммирования рядов (1.2) и (1.12). В разд. 2 найдено интегральное представление и асимптотическая оценка для остатка суммирования ряда (1.2), а в разд. 3 получены аналогичные результаты для ряда (1.12). Основные результаты работы представлены в виде теорем 2 и 3. В следующем п. 1.2 приведены вспомогательные соотношения и теорема, примененные в работе для получения таких интегральных представлений и асимптотик. Отметим, что разработка алгоритмов вычисления гипергеометрических функций двух переменных на основе формул аналитического продолжения привлекает внимание специалистов (см. [18]–[21]). Появление современных работ подчеркивает актуальность построения эффективных алгоритмов для оценки остатка суммирования кратных гипергеометрических рядов.

Нетрудно увидеть, что ряд G, определенный по формуле (1.12), совпадает с точностью до обозначения переменных и параметров с гипергеометрическим рядом G_2, указанным в списке Горна (см. [11, разд. 5.7.1], [12, разд. 1.6]), точнее, справедливо равенство

$$G(a_1, a_2; b, c; z_1, z_2) = G_2(a_1, a_2; b, 1-c; -z_1, -z_2). \tag{1.15}$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать обозначение (1.12), применявшееся также в [15]. Напомним, что ряд Аппеля также присутствует в списке гипергеометрических рядов Горна (см. [11, разд. 5.7.1], [12, разд. 1.6]). Отметим еще, что в [15] были сняты указанные выше ограничения (1.6) на параметры функции F_1 и построены аналоги формул (1.8)–(1.11) при $b = a_1 + m$ или $b = a_1 + a_2 + m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

В завершение отметим, что функция Аппеля F_1 является частным случаем функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ при $N = 2$ и обратим внимание на то, что проблема построения полного набора формул аналитического продолжения функции $F_D^{(N)}$, области сходимости которых покрывают $\mathbb{C}^N$, при произвольном N решена в работах [22], [23]. В работе [23] также представлено применение алгоритма вычисления $F_D^{(N)}$ на основе формул аналитического продолжения для разработки метода решения проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца в ситуации "кроудинга".

1.2. Некоторые используемые формулы и асимптотические оценки

Далее будут применяться следующие известные тождества, связывающие комбинацию гамма-функций и интегральные представления для бета-функции $\mathrm{B}(x, y)$ (см. [11]):

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt =: \mathrm{B}(x, y), \qquad \operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0, \tag{1.16}$$

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{sh}(\pi i x)}\int_1^{(0+)} (-t)^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad x \notin \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Re} y > 0. \tag{1.17}$$

Контур интегрирования в формуле (1.17) начинается в точке $t = 1$, продолжается в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$, обходит точку $t = 0$ против часовой стрелки и возвращается в $t = 1$ по точкам нижней полуплоскости $\operatorname{Im} t < 0$. Приведем также формулу Эйлера для гипергеометрической функции Гаусса:

$$F(a, b; c; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k (a)_k}{(c)_k k!} z^k = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a}\, dt, \qquad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0; \tag{1.18}$$

здесь $|\arg(1-z)| < \pi$, а второе равенство в (1.18) имеет место при $|z| < 1$. Кроме того, нам потребуется следующее тождество:

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F\Big(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\Big). \tag{1.19}$$

При выводе асимптотик для остатков суммирования двойных гипергеометрических рядов (1.2) и (1.12) будет использована теорема 1 из [24, с. 58], приведенная ниже для удобства изложения материалов разд. 2 и 3.

Теорема 1 (см. [24, с. 58, теорема 1]). *Пусть функции $h(x)$ и $\phi(x)$ имеют следующие асимптотические разложения при $x \to a$:*

$$h(x) \sim h(a) + \sum_{s=0}^{\infty} a_s (x-a)^{s+\mu}, \qquad \phi(x) \sim \sum_{s=0}^{\infty} b_s (x-a)^{s+\alpha-1}, \tag{1.20}$$

где $\mu > 0$ *и* $\operatorname{Re}\alpha > 0$*, причем*

$$\forall x \in (a,b): \quad h(x) > h(a), \qquad \forall\delta > 0: \quad \inf_{x\in[a+\delta,b)}(h(x) - h(a)) > 0. \tag{1.21}$$

Предположим, что следующий интеграл

$$I(\lambda) = \int_a^b \phi(x)e^{-\lambda h(x)}dx \tag{1.22}$$

сходится абсолютно для всех достаточно больших λ*. Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение:*

$$I(\lambda) \sim e^{-\lambda h(a)}\sum_{s=0}^{\infty}\Gamma\left(\frac{s+\alpha}{\mu}\right)\frac{c_s}{\lambda^{(s+\alpha)/\mu}}, \qquad \lambda \to \infty, \tag{1.23}$$

где величины c_s *выражаются через коэффициенты рядов* (1.20) *и , в частности, справедливы равенства*

$$c_0 = \frac{b_0}{\mu a_0^{\alpha/\mu}}, \qquad c_1 = \Big(\frac{b_1}{\mu} - \frac{(\alpha+1)a_1b_0}{\mu^2 a_0}\Big)\frac{1}{a_0^{(\alpha+1)/\mu}}. \tag{1.24}$$

В следующих разделах будут вначале построены интегральные представления для остаточных членов при суммировании гипергеометрических рядов (1.2) и (1.12). Затем при получении асимптотик с помощью теоремы 1 в качестве большого параметра λ будет выбрано максимальное значение индексов суммирования, которое выбирается для вычисления частичных сумм в (1.2) и (1.12).

2. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ПРИ СУММИРОВАНИИ РЯДА АППЕЛЯ F_1

2.1. Суммирование ряда F_1 и теорема об оценке остатка

Представим двойной ряд (1.2) в виде

$$F_1\,(a_1,a_2;b,\,c;\,z_1,z_2\,) = \mathcal{F}_1^{(m)}(a_1,a_2;b,\,c;\,z_1,z_2\,) + \mathcal{R}^{(m)}(a_1,a_2;b,\,c;\,z_1,z_2\,), \tag{2.1}$$

где первое слагаемое $\mathcal{F}_1^{(m)}$ является суммой конечного числа членов ряда:

$$\mathcal{F}_1^{(m)}(a_1,a_2;b,\,c;\,z_1,z_2\,) := \sum_{k_1,k_2=0}^{m-1}\frac{(b)_{k_1+k_2}(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2}}{(c)_{k_1+k_2}k_1!k_2!}z_1^{k_1}z_2^{k_2}, \tag{2.2}$$

а второе слагаемое $\mathcal{R}^{(m)}$ — остаток суммирования. Далее для этих величин будем использовать обозначения $\mathcal{F}_1^{(m)}(z_1,z_2)$ и $\mathcal{R}^{(m)}(z_1,z_2)$. Отметим, что для вычисления $\mathcal{F}_1^{(m)}$ удобно воспользоваться следующим рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1^{(m)}(z_1,z_2) = \mathcal{F}_1^{(m-1)}(z_1,z_2) + \frac{(a_2)_{m-1}}{(m-1)!}z_2^{m-1}\sum_{k_1=0}^{m-2}\frac{(b)_{k_1+m-1}(a_1)_{k_1}}{(c)_{k_1+m-1}k_1!}z_1^{k_1} +\\ + \frac{(a_1)_{m-1}}{(m-1)!}z_1^{m-1}\sum_{k_2=0}^{m-2}\frac{(b)_{m-1+k_2}(a_2)_{k_2}}{(c)_{m-1+k_2}k_2!}z_2^{k_2} + \frac{(b)_{2(m-1)}(a_1)_{m-1}(a_2)_{m-1}}{(c)_{2(m-1)}(m-1)!(m-1)!}z_1^{m-1}z_2^{m-1}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Если расположить члены ряда (1.2) в виде бесконечной двумерной таблицы, где строки и столбцы нумеруются индексами k_1 и k_2 соответственно, то в правой части формулы (2.3) к функции $\mathcal{F}_1^{(m-1)}$ добавлены: 1) сумма элементов с индексами $k_1 = m-1, k_2 = 0,\ldots,m-2$, т.е. первых $m-1$ членов m-й строки, 2) сумма элементов с номерами $k_2 = m-1, k_1 = 0,\ldots,m-2$, т.е. первых $m-1$ элементов m-го столбца, а также 3) элемент с индексами $k_1 = k_2 = m-1$.

При вычислении функции Аппеля в точке $(z_1,z_2) \in \mathbb{U}^2$ мы полагаем

$$F_1\,(a_1,a_2;b,\,c;\,z_1,z_2\,) \simeq \mathcal{F}_1^{(m)}(a_1,a_2;b,\,c;\,z_1,z_2), \tag{2.4}$$

при этом число число m требуется выбрать таким, чтобы при некотором заданном числе $\delta > 0$ для остатка $\mathcal{R}^{(m)}$ выполнялось неравенство

$$|\mathcal{R}^{(m)}(z_1,z_2\,)| < \delta. \tag{2.5}$$

При реализации алгоритма вычисления функции F_1 по формулам (2.2) и (2.4) условие (2.5) удобно проверять, приближенно вычисляя $\mathcal{R}^{(m)}(z_1,z_2\,)$ на основе асимптотики или интегрального представления, которые дает приведенная ниже теорема.

Теорема 2. *Предположим, что параметры ряда Аппеля, определенного по формуле* (1.2)*, удовлетворяют условию* $\mathrm{Re}\,\mathrm{c} > \mathrm{Re}\,\mathrm{b} > 0$*, а переменные лежат в бикруге* (1.1)*, т.е.* $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$*. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(i) *Справедлива формула суммирования*

$$F_1\,(a_1, a_2; b,\, c;\, z_1, z_2\,) \,=\, \sum_{k_1,k_2=0}^{m-1} \frac{(b)_{k_1+k_2}(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2}}{(c)_{k_1+k_2}k_1!k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} + \mathcal{R}^{(m)}(z_1, z_2), \tag{2.6}$$

где для остаточного члена $\mathcal{R}^{(m)}(z_1, z_2)$ *имеет место интегральное представление*

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}^{(m)}(a_1, a_2; b, c; z_1, z_2) = \\ &\quad = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \left(\frac{z_1^m (a_1)_m}{m!} \int_0^1 \frac{t^{b+m-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_2t)^{a_2}}\, \mathcal{I}(z_1t, a_1, m)dt + \right. \\ &\quad + \frac{z_2^m (a_2)_m}{m!} \int_0^1 \frac{t^{b+m-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_1t)^{a_1}}\, \mathcal{I}(z_2t, a_2, m)dt - \\ &\quad \left. - \frac{z_1^m z_2^m (a_1)_m (a_2)_m}{(m!)^2} \int_0^1 t^{b+2m-1}(1-t)^{c-b-1} \mathcal{I}(z_1t, a_1, m)\, \mathcal{I}(z_2t, a_2, m)\, dt \right); \end{aligned} \tag{2.7}$$

здесь функция $\mathcal{I}$ *определяется равенством*

$$\mathcal{I}(z, a, m) = m \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{m-1}}{(1-\xi z)^{a+m}}\, d\xi, \quad |\arg(1-z)| < \pi. \tag{2.8}$$

(ii) *Для остаточного члена* $\mathcal{R}^{(m)}(z_1, z_2)$ *справедливы следующие асимптотики при* $m \to \infty$.

1) *Если* $|z_1| < |z_2|$*, то*

$$\mathcal{R}^{(m)}(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \frac{(a_2)_m}{m^{c-b} m!} \frac{z_2^m}{(1-z_1)^{a_1}(1-z_2)} \Big(1 + C_1 m^{-1} + O\big(m^{-2}\big)\Big), \tag{2.9}$$

где коэффициент $C_1 = C_1(z_1, z_2)$ *определяется по формуле*

$$C_1 = (c-b)\left(\frac{(1-b) - (a_1+1-b)z_1 - (2-b)z_2 + (a_1+2-b)z_1z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} - \frac{c-b+1}{2} \right) + \frac{(a_2-1)z_2}{1-z_2}. \tag{2.10}$$

2) *Если* $|z_2| < |z_1|$*, то*

$$\mathcal{R}^{(m)}(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \frac{(a_1)_m}{m^{c-b} m!} \frac{z_1^m}{(1-z_1)(1-z_2)^{a_2}} \Big(1 + C_2 m^{-1} + O\big(m^{-2}\big)\Big), \tag{2.11}$$

где коэффициент $C_2 = C_2(z_1, z_2)$ *определяется по формуле*

$$C_2 = (c-b)\left(\frac{(1-b) - (a_2+1-b)z_2 - (2-b)z_1 + (a_2+2-b)z_1z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} - \frac{c-b+1}{2} \right) + \frac{(a_1-1)z_1}{1-z_1}. \tag{2.12}$$

3) *Если* $|z_1| = |z_2|$*, то асимптотика остаточного члена* $\mathcal{R}^{(m)}(z_1, z_2)$ *при* $m \to \infty$ *дается суммой правых частей* (2.9) *и* (2.11).

2.2. Доказательство теоремы 2

2.2.1. Вывод интегрального представления (2.7) для остаточного члена $\mathcal{R}^{(m)}$. Прежде всего, представим остаток суммирования $\mathcal{R}^{(m)}(z_1, z_2)$ в формуле (2.1) в виде

$$\mathcal{R}^{(m)}(z_1, z_2) = \mathcal{R}^{(0,m)}(z_1, z_2) + \mathcal{R}^{(m,0)}(z_1, z_2) - \mathcal{R}^{(m,m)}(z_1, z_2), \tag{2.13}$$

где функции $\mathcal{R}^{(0,m)}$, $\mathcal{R}^{(m,0)}$ и $\mathcal{R}^{(m,m)}$ определяются равенствами

$$\mathcal{R}^{(0,m)}(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=m}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2}(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2}}{(c)_{k_1+k_2}k_1!k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{2.14}$$

$$\mathcal{R}^{(m,0)}(z_1,z_2)=\sum_{k_1=m}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(b)_{k_1+k_2}(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2}}{(c)_{k_1+k_2}k_1!k_2!}z_1^{k_1}z_2^{k_2}, \tag{2.15}$$

$$\mathcal{R}^{(m,m)}(z_1,z_2)=\sum_{k_1,k_2=m}^{\infty}\frac{(b)_{k_1+k_2}(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2}}{(c)_{k_1+k_2}k_1!k_2!}z_1^{k_1}z_2^{k_2}. \tag{2.16}$$

Для вывода интегрального представления (2.7) заменим индексы суммирования в (2.14)–(2.16) так, чтобы суммирование начиналось от нуля:

$$\mathcal{R}^{(0,m)}(z_1,z_2)=z_2^m\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(b)_{k_1+k_2+m}(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2+m}}{(c)_{k_1+k_2+m}k_1!(k_2+m)!}z_1^{k_1}z_2^{k_2}, \tag{2.17}$$

$$\mathcal{R}^{(m,0)}(z_1,z_2)=z_1^m\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(b)_{k_1+k_2+m}(a_1)_{k_1+m}(a_2)_{k_2}}{(c)_{k_1+k_2+m}(k_1+m)!k_2!}z_1^{k_1}z_2^{k_2}. \tag{2.18}$$

$$\mathcal{R}^{(m,m)}(z_1,z_2)=z_1^m z_2^m\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{(b)_{k_1+k_2+2m}(a_1)_{k_1+m}(a_2)_{k_2+m}}{(c)_{k_1+k_2+2m}(k_1+m)!(k_2+m)!}z_1^{k_1}z_2^{k_2}. \tag{2.19}$$

Для дальнейших вычислений воспользуемся следующими выражениями:

1) тождеством, вытекающим из (1.3) и (1.16):

$$\frac{(b)_{k_1+k_2+\beta m}}{(c)_{k_1+k_2+\beta m}}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b+k_1+k_2+\beta m-1}(1-t)^{c-b-1}dt, \tag{2.20}$$

2) тождествами, получаемые с помощью определения (1.3):

$$(k_j+m)!=m!(1+m)_{k_j},\quad (a_j)_{k_j+m}=(a_j)_m(a_j+m)_{k_j},\qquad j=1,2, \tag{2.21}$$

3) а также биномиальным рядом

$$\sum_{k_j=0}^{\infty}\frac{(a_j)_{k_j}}{k_j!}(z_j)^{k_j}=(1-z_j)^{-a_j},\qquad |z_j|<1,\quad |\arg(1-z_j)|<\pi,\qquad j=1,2. \tag{2.22}$$

Выражение, указанное в формуле (2.20), при $\beta=1$ возникает в (2.17) и (2.18), а при $\beta=2$ — в формуле (2.19).

Получим интегральное представление, например, для функции $\mathcal{R}^{(m,0)}(z_1,z_2)$, определяемой равенством (2.18). Для этого подставляя в (2.18) соотношения (2.20), (2.21) при $\beta=1$ и $j=1$, меняя порядок суммирования и интегрирования и учитывая (2.22), получаем

$$\mathcal{R}^{(m,0)}(z_1,z_2)=\frac{z_1^m(a_1)_m}{m!}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b+m-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_2t)^{a_2}}\Big(\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{(a_1+m)_{k_1}}{(1+m)_{k_1}}(z_1t)^{k_1}\Big)dt. \tag{2.23}$$

Применяя формулу (1.18) для суммирования ряда в круглых скобках, получаем

$$\mathcal{R}^{(m,0)}(z_1,z_2)=\frac{z_1^m(a_1)_m}{m!}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b+m-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_2t)^{a_2}}\mathcal{I}(z_1t,a_1,m)dt, \tag{2.24}$$

где функция $\mathcal{I}$ определяется равенством (2.8).

Выполняя аналогичные преобразования для функций $\mathcal{R}^{(0,m)}(z_1,z_2)$ и $\mathcal{R}^{(m,m)}(z_1,z_2)$, приходим к следующим формулам:

$$\mathcal{R}^{(0,m)}(z_1,z_2)=\frac{z_2^m(a_2)_m}{m!}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1\frac{t^{b+m-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_1t)^{a_1}}\mathcal{I}(z_2t,a_2,m)dt, \tag{2.25}$$

$$\mathcal{R}^{(m,m)}(z_1,z_2)=\frac{z_1^m z_2^m(a_1)_m(a_2)_m}{(m!)^2}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b+2m-1}(1-t)^{c-b-1}\mathcal{I}(z_1t,a_1,m)\,\mathcal{I}(z_2t,a_2,m)dt, \tag{2.26}$$

где $\mathcal{I}$ имеет вид (2.8). Подставляя (2.24)–(2.26) в (2.13), приходим к требуемому представлению (2.7) для остатка суммирования ряда Аппеля F_1.

2.2.2. Асиптотика остаточного члена $\mathcal{R}^{(m)}$, $m\to\infty$. Найдем асимптотики функций $\mathcal{R}^{(0,m)}$, $\mathcal{R}^{(m,0)}$ и $\mathcal{R}^{(m,m)}$, фигурирующих в (2.13). Для этого, прежде всего, оценим интеграл $\mathcal{I}(z,a,m)$, $m\to\infty$, определяемый по формуле (2.8), выполняя следующие преобразования:

$$\mathcal{I}(zt,a,m) = F(a+m,1,1+m,zt) \overset{(1.19)}{=} (1-zt)^{-1}F\Big(1,1-a,1+m,\frac{zt}{zt-1}\Big) = \\ = (1-zt)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)_k}{(1+m)_k k!}\frac{(zt)^k}{(zt-1)^k} = \frac{1}{1-zt}+\frac{a-1}{1+m}\frac{zt}{(1-zt)^2}+O\big(m^{-2}\big), \qquad m\to\infty. \tag{2.27}$$

Подставляя (2.27) в представления (2.24)–(2.26) для функций $\mathcal{R}^{(m,m)}$, $\mathcal{R}^{(m,0)}$, $\mathcal{R}^{(0,m)}$, раскрывая все скобки и применяя к каждой из этих функций теорему 1, приходим к следующему утверждению.

Утверждение 1. *Для функций $\mathcal{R}^{(m,m)}$, $\mathcal{R}^{(m,0)}$, $\mathcal{R}^{(0,m)}$, определенных по формулам* (2.14)–(2.16) *для* $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ *при $m\to\infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\mathcal{R}^{(0,m)}(z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\frac{(a_2)_m}{m^{c-b}m!}\frac{z_2^m}{(1-z_1)^{a_1}(1-z_2)}\Big(1+C_1m^{-1}+O\big(m^{-2}\big)\Big), \tag{2.28}$$

$$\mathcal{R}^{(m,0)}(z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\frac{(a_1)_m}{m^{c-b}m!}\frac{z_1^m}{(1-z_1)(1-z_2)^{a_2}}\Big(1+C_2m^{-1}+O\big(m^{-2}\big)\Big), \tag{2.29}$$

$$\mathcal{R}^{(m,m)}(z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\frac{(a_1)_m(a_2)_m}{(2m)^{c-b}(m!)^2}\frac{(z_1z_2)^m}{(1-z_1)(1-z_2)}\Big(1+C_3m^{-1}+O\big(m^{-2}\big)\Big), \tag{2.30}$$

где коэффициенты C_1 и C_2 определены по формулам (2.10) *и* (2.12)*, а C_3 имеет вид*

$$C_3 = \frac{c-b}{2}\left(\frac{(1-b)-(2-b)(z_1+z_2)+(3-b)z_1z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} - \frac{c-b+1}{2}\right) + \frac{(a_1-1)z_1}{1-z_1} + \frac{(a_2-1)z_2}{1-z_2}. \tag{2.31}$$

Отметим, что согласно формуле Стирлинга [11] величины $(a_j)_m/m!$ имеют степенные по m асимптотики при $m\to\infty$. Таким образом, если $\{|z_1|<|z_2|<1\}$, то

$$\mathcal{R}^{(m)}(z_1,z_2) = \mathcal{R}^{(0,m)}(z_1,z_2) + O(|z_2|^m), \qquad m\to\infty; \tag{2.32}$$

а если $\{|z_2|<|z_1|<1\}$, то

$$\mathcal{R}^{(m)}(z_1,z_2) = \mathcal{R}^{(m,0)}(z_1,z_2) + O(|z_1|^m), \qquad m\to\infty. \tag{2.33}$$

Если же $|z_1| = |z_2| < 1$, то

$$\mathcal{R}^{(m)}(z_1,z_2) = \mathcal{R}^{(m,0)}(z_1,z_2) + \mathcal{R}^{(0,m)}(z_1,z_2) + O(|z_1|^{2m}), \qquad m\to\infty. \tag{2.34}$$

Учитывая формулы (2.32)–(2.34), а также (2.30)–(2.29), убеждаемся в справедливости утверждений (ii) теоремы 2, в том числе, асимптотик (2.9) и (2.11).

Теорема 2 доказана.

3. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ПРИ СУММИРОВАНИИ РЯДА ГОРНА G

3.1. Суммирование ряда G и теорема об оценке остатка

Проводя рассуждения, схема которых аналогична п. 2.1, представим двойной ряд (1.12) в виде

$$G\,(a_1,a_2;b,\,c;\,z_1,z_2\,) = \mathcal{G}^{(m)}(a_1,a_2;b,\,c;\,z_1,z_2\,) + \mathcal{R}_G^{(m)}(a_1,a_2;b,\,c;\,z_1,z_2\,), \tag{3.1}$$

где первое слагаемое $\mathcal{G}^{(m)}$ является суммой конечного числа членов ряда

$$\mathcal{G}^{(m)}(a_1,a_2;b,\,c;\,z_1,z_2\,) := \sum_{k_1,k_2=0}^{m-1}\frac{(b)_{k_2-k_1}\,(a_1)_{k_1}\,(a_2)_{k_2}}{(c)_{k_2-k_1}\,k_1!\,k_2!}\,z_1^{k_1}z_2^{k_2}, \tag{3.2}$$

а второе слагаемое $\mathcal{R}_G^{(m)}$ — остаток суммирования, который в бикруге $\mathbb{U}^2$ стремится к нулю при $m\to\infty$. Далее для этих величин будем использовать обозначения $\mathcal{G}^{(m)}(z_1,z_2)$ и $\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1,z_2)$. Для вычисления $\mathcal{G}^{(m)}$ удобно использовать следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathcal{G}^{(m)}(z_1, z_2) = \mathcal{G}^{(m-1)}(z_1, z_2) + \frac{(a_1)_{m-1}}{(m-1)!} z_1^{m-1} \sum_{k_2=0}^{m-2} \frac{(b)_{k_2-m+1}}{(c)_{k_2-m+1}} \frac{(a_2)_{k_2}}{k_2!} z_2^{k_2} +$$

$$+ \frac{(a_2)_{m-1}}{(m-1)!} z_2^{m-1} \sum_{k_1=0}^{m-2} \frac{(b)_{m-1-k_1}}{(c)_{m-1-k_1}} \frac{(a_1)_{k_1}}{k_1!} z_1^{k_1} + \frac{(a_1)_{m-1}\,(a_2)_{m-1}}{((m-1)!)^2} z_1^{m-1} z_2^{m-1}.$$

Для вычисления ряда Горна G в точке $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$ мы полагаем

$$G\,(a_1, a_2; b,\, c;\, z_1, z_2\,) \simeq \mathcal{G}^{(m)}(a_1, a_2; b,\, c;\, z_1, z_2), \tag{3.3}$$

при этом число m требуется выбрать таким, чтобы при некотором заданном числе $\delta > 0$ для остатка $\mathcal{R}_G^{(m)}$ выполнялось неравенство

$$|\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1, z_2\,)| < \delta. \tag{3.4}$$

При реализации алгоритма вычисления функции G по формулам (3.2) и (3.3) условие (3.4) удобно проверять, приближенно вычисляя $\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1, z_2\,)$ на основе асимптотики или интегрального представления, которые дает приведенная ниже теорема.

Теорема 3. *Предположим, что параметры ряда Горна G, определенного по формуле* (1.12)*, удовлетворяют условию $\mathrm{Re}(c-b) > 0, b \notin \mathbb{Z}$, а переменные лежат в бикруге* (1.1)*, т.е. $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$.*

(i) *Справедлива формула суммирования*

$$G(a_1, a_2; b,\, c;\, z_1, z_2\,) \;=\; \sum_{k_1,k_2=0}^{m-1} \frac{(b)_{k_2-k_1}}{(c)_{k_2-k_1}} \frac{(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2}}{k_1!k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} + \mathcal{R}_G^{(m)}, \tag{3.5}$$

где для остаточного члена $\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1, z_2)$ имеет место интегральное представление

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_G^{(m)}(a_1, a_2;\, b, c; z_1, z_2) = \\ &= -\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{1}{2i\sin(\pi b)} \Bigg(z_1^m \frac{(a_1)_m(-1)^m}{m!} \oint \frac{(-t)^{m-c}(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_2/t)^{a_2}} \mathcal{I}(z_1 t, a_1, m)dt + \\ &+ z_2^m \frac{(a_2)_m(-1)^m}{m!} \oint \frac{(-t)^{b+m-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_1/t)^{a_1}} \mathcal{I}(z_2 t, a_2, m)dt - \\ &- (z_1 z_2)^m \frac{(a_1)_m (a_2)_m}{(m!)^2} \oint (-t)^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \mathcal{I}\Big(\frac{z_1}{t}, a_1, m\Big)\, \mathcal{I}(z_2 t, a_2, m)\, dt \Bigg); \end{aligned} \tag{3.6}$$

здесь функция $\mathcal{I}$ определяется равенством (2.8)*, а интегралы берутся по контуру $\{t \in \mathbb{C}^2 : |t| = 1, |\arg(-t)| < \pi\}$.*

(ii) *Для остаточного члена $\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1, z_2)$ справедливы следующие асимптотики при $m \to \infty$.*

1) *Если $|z_1| < |z_2|$, то*

$$\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \frac{(a_2)_m}{m^{c-b} m!} \frac{z_2^m}{(1-z_1)^{a_1}(1-z_2)} \Big(1 + D_1 m^{-1} + O\big(m^{-2}\big)\Big), \tag{3.7}$$

где коэффициент D_1 определяется по формуле

$$D_1 = (c-b)\bigg(\frac{(1-b) + (a_1 - 1 + b)z_1 + (b-2)z_2 + (-a_1 + 2 - b)z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} - \frac{c-b+1}{2}\bigg) + \frac{(a_2-1)z_2}{1-z_2}. \tag{3.8}$$

2) *Если $|z_2| < |z_1|$, то*

$$\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-c)} \frac{(a_1)_m}{m^{c-b} m!} \frac{z_1^m}{(1-z_1)(1-z_2)^{a_2}} \Big(1 + D_2 m^{-1} + O\big(m^{-2}\big)\Big), \tag{3.9}$$

где коэффициент D_2 имеет вид

$$D_2 = (c-b)\bigg(\frac{c + (a_2 - c)z_2 - (c+1)z_1 + (-a_2 + 1 + c)z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} - \frac{c-b+1}{2}\bigg) + \frac{(a_1-1)z_1}{1-z_1}. \tag{3.10}$$

3) *Если $|z_1| = |z_2|$, то остаточный член $\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1, z_2)$ является суммой правых частей равенств* (3.7) *и* (3.9).

Отметим, что учитывая равенство (1.15), утверждение теоремы очевидным образом может быть переформулировано для ряда Горна G_2.

3.2. Доказательство теоремы 3

3.2.1. Интегральное представление для остатка суммирования $\mathcal{R}_G^{(m)}$. Нетрудно убедиться в том, что остаток суммирования $\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1, z_2)$ в формуле (3.1) можно записать в виде

$$\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1, z_2) = \mathcal{R}_G^{(m,0)}(z_1, z_2) + \mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1, z_2) - \mathcal{R}_G^{(m,m)}(z_1, z_2), \tag{3.11}$$

где введены обозначения

$$\mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=m}^{\infty} \frac{(b)_{k_2-k_1}}{(c)_{k_2-k_1}} \frac{(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2}}{k_1!k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{3.12}$$

$$\mathcal{R}_G^{(m,0)}(z_1, z_2) = \sum_{k_1=m}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_2-k_1}}{(c)_{k_2-k_1}} \frac{(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2}}{k_1!k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2}, \tag{3.13}$$

$$\mathcal{R}_G^{(m,m)}(z_1, z_2) = \sum_{k_1=m}^{\infty}\sum_{k_2=m}^{\infty} \frac{(b)_{k_2-k_1}}{(c)_{k_2-k_1}} \frac{(a_1)_{k_1}(a_2)_{k_2}}{k_1!k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2}. \tag{3.14}$$

Здесь, напомним, символ Похгаммера $(b)_n$ при отрицательных n определяем по формуле (1.3) или (1.13). Используя те же приемы, что и в п. 2.2, получаем следующие интегральные выражения для $\mathcal{R}_G^{(0,m)}$, $\mathcal{R}_G^{(m,0)}$ и $\mathcal{R}_G^{(m,m)}$:

$$\mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{(-1)^{m+1}}{2i\sin(\pi b)} \frac{z_2^m (a_2)_m}{m!} \oint \frac{(-t)^{b+m-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_1/t)^{a_1}} \mathcal{I}(z_2 t, a_2, m)dt, \tag{3.15}$$

$$\mathcal{R}_G^{(m,0)}(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{(-1)^{m+1}}{2i\sin(\pi b)} \frac{z_1^m (a_1)_m}{m!} \oint \frac{(-t)^{m-c}(1-t)^{c-b-1}}{(1-z_2/t)^{a_2}} \mathcal{I}(z_1 t, a_1, m)dt, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_G^{(m,m)}(z_1, z_2) = -\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{1}{2i\sin(\pi b)} \frac{(z_1 z_2)^m (a_1)_m (a_2)_m}{(m!)^2} \times \\ \times \oint (-t)^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \mathcal{I}\Big(\frac{z_1}{t}, a_1, m\Big)\, \mathcal{I}(z_2 t, a_2, m)\, dt,\end{aligned} \tag{3.17}$$

где интегралы берутся по контуру $\{t \in \mathbb{C}^2 : |t| = 1, |\arg(-t)| < \pi\}$. Складывая (3.15)–(3.17), получаем интегральное представление (3.6).

3.2.2. Асимптотика функций $\mathcal{R}_G^{(0,m)}$ и $\mathcal{R}_G^{(m,0)}$. Заменяя индекс $k_2 \to k_2 + m$ и используя тождества (2.21), получаем для функции $\mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1, z_2)$ следующее выражение:

$$\mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1, z_2) = \frac{(a_2)_m}{m!} z_2^m \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_2-k_1+m}}{(c)_{k_2-k_1+m}} \frac{(a_1)_{k_1}}{k_1!} z_1^{k_1} \frac{(a_2+m)_{k_2}}{(1+m)_{k_2}} z_2^{k_2}. \tag{3.18}$$

Записывая символы Похгаммера, которые фигурируют в коэффициентах (3.18), через гамма-функции и используя контурный интеграл (1.17) для бета-функции, находим

$$\begin{aligned}\frac{(b)_{k_2-k_1+m}}{(c)_{k_2-k_1+m}} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b+k_2-k_1+m)}{\Gamma(c+k_2-k_1+m)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \mathrm{B}(b+k_2-k_1+m, c-b) = \\ = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{(-1)^{k_2-k_1+m+1}}{2i\sin(\pi b)} \int_1^{(0+)} (-t)^{b+k_2-k_1+m-1}(1-t)^{c-b-1}dt,\end{aligned} \tag{3.19}$$

где $|\arg(-t)| \le \pi$, и $\mathrm{Re}(c-b) > 0$, $b \notin \mathbb{Z}$.

Получим асимптотику интеграла в (3.19) при $m \to \infty$. Для этого запишем его в виде

$$\int_1^{(0+)} (-t)^{b+k_2-k_1+m-1}(1-t)^{c-b-1}dt = (-1)^m \int_1^{(0+)} e^{m\ln t}(-t)^{b+k_2-k_1-1}(1-t)^{c-b-1}dt. \tag{3.20}$$

Так как $\ln t < 0$, $t \in (0,1)$, и этот логарифм достигает максимума в точке $t = 1$, то при $m \to \infty$ вклад точек интегрирования, лежащих вне некоторой окрестности $t = 1$, в интеграл является экспоненциально малым.

Точнее говоря, выполняя оценку интеграла и подставляя ее в (3.20) и (3.19), а затем результат — в (3.18), можно показать, что справедливо равенство

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{(a_2)_m z_2^m}{m!}\int_{1-\epsilon}^{1} r^{b+m-1}(1-r)^{c-b-1}\times \\ \times\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{k_1}(z_1/r)^{k_1}}{k_1!}\Big(\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(a_2+m)_{k_2}(z_2 r)^{k_2}}{(1+m)_{k_2}}\Big)dr\Big(1+O\big(m^{-k}\big)\Big) \qquad \forall k, \quad m\to\infty,\end{aligned}\tag{3.21}$$

где число ε выбрано таким, что $|z_j| < |1-\varepsilon|$, $j = 1,2$. Используя формулу Эйлера (1.18) для преобразования ряда в интеграл и учитывая (2.22), получаем следующее асимптотическое интегральное представление для $\mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1,z_2)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{(a_2)_m z_2^m}{m!}\int_{1-\epsilon}^{1} r^{b+m-1}(1-r)^{c-b-1}\Big(1-\frac{z_1}{r}\Big)^{-a_1}\times \\ \times\mathcal{I}(z_2 r,a_2,m)dr\Big(1+O\big(m^{-k}\big)\Big) \qquad \forall k, \quad m\to\infty,\end{aligned}\tag{3.22}$$

где $|\arg(1-z_1/r)|<\pi$, а функция $\mathcal{I}$ определена равенством (2.8).

Подставляя полученную в п. 2.2 асимптотику (2.27) интеграла $\mathcal{I}$ в (3.22), получаем следующее выражение для $\mathcal{R}_G^{(0,m)}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{(a_2)_m z_2^m}{m!}\times \\ \times\int_{1-\epsilon}^{1} r^{b+m-1}(1-r)^{c-b-1}\frac{1}{(1-z_1/r)^{a_1}}\frac{1}{1-z_2 r}\Big(1+\frac{(a_2-1)z_2 r}{1-z_2 r}m^{-1}+O\big(m^{-2}\big)\Big)dr.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Раскроем квадратные скобки в (3.23) и очевидным образом введем обозначения I_j, $j=1,2,3$, для получившихся интегралов:

$$\mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{(a_2)_m z_2^m}{m!}\big[I_1(z_1,z_2)+I_2(z_1,z_2)+I_3(z_1,z_2)\big].\tag{3.24}$$

Выполняя в $I_1(z_1,z_2)$ замену переменного $r=1-x$ и применяя к полученному интегралу теорему 1, находим

$$I_1(z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c-b)}{m^{c-b}}\frac{1}{(1-z_1)^{a_1}(1-z_2)}\Big(1+E_1 m^{-1}+O\big(m^{-2}\big)\Big), \qquad m\to\infty,\tag{3.25}$$

где коэффициент E_1 имеет вид

$$E_1 := (c-b)\bigg(\frac{(1-b)+(a_1-1+b)z_1+(b-2)z_2+(-a_1+2-b)z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)}-\frac{c-b+1}{2}\bigg).$$

Аналогично получаем асимптотику интеграла $I_2(z_1,z_2)$:

$$I_2(z_1,z_2) = \frac{\Gamma(c-b)}{m^{c-b+1}}\frac{(a_2-1)z_2}{(1-z_1)^{a_1}(1-z_2)^2}\Big(1+O\big(m^{-1}\big)\Big), \qquad m\to\infty.\tag{3.26}$$

Третий интеграл имеет порядок $I_3(z_1,z_2)=O(m^{-2})$. Складывая полученные асимптотики для I_j и подставляя в (3.24), получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть параметры ряда Горна* (1.12) *таковы, что* $\mathrm{Re}(c-b)>0$ *и* $b\notin\mathbb{Z}$. *Тогда для функции* $\mathcal{R}_G^{(0,m)}$*, определенной по формуле* (3.12)*, справедливо следующее асимптотическое соотношение:*

$$\mathcal{R}_G^{(0,m)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\frac{(a_2)_m}{m^{c-b}m!}\frac{z_2^m}{(1-z_1)^{a_1}(1-z_2)}\Big(1+D_1 m^{-1}+O\big(m^{-2}\big)\Big), \qquad m\to\infty,\tag{3.27}$$

где коэффициент D_1 *определяется по формуле* (3.8).

Нетрудно увидеть, что функция $\mathcal{R}_G^{(m,0)}$ получается из $\mathcal{R}_G^{(0,m)}$ с помощью следующих замен переменных и параметров:

$$b\to(1-c), \qquad c\to(1-b), \qquad a_1\leftrightarrow a_2, \qquad k_1\leftrightarrow k_2, \qquad z_1\leftrightarrow z_2.$$

Тогда, используя (3.27), приходим к утверждению, позволяющему оценить $\mathcal{R}_G^{(m,0)}$.

Утверждение 3. *Пусть параметры ряда Горна* (1.12) *таковы, что* $\mathrm{Re}(c-b)>0$ *и* $b\notin\mathbb{Z}$. *Тогда для функции* $\mathcal{R}_G^{(m,0)}$, *определенной по формуле* (3.13), *справедливо следующее асимптотическое равенство:*

$$\mathcal{R}_G^{(m,0)}=\frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-c)}\frac{(a_1)_m}{m^{c-b}m!}\frac{z_1^m}{(1-z_1)(1-z_2)^{a_2}}\Big(1+D_2m^{-1}+O\big(m^{-2}\big)\Big),\qquad m\to\infty, \tag{3.28}$$

где коэффициент D_2 *определяется по формуле* (3.10).

3.2.3. Асимптотика $\mathcal{R}_G^{(m,m)}$, при $m\to\infty$. Перепишем функцию $\mathcal{R}_G^{(m,m)}(z_1,z_2)$, определяемую равенством (3.14), в виде

$$\mathcal{R}_G^{(m,m)}(z_1,z_2)=\frac{(a_1)_m}{m!}z_1^m\frac{(a_2)_m}{m!}z_2^m\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(b)_{k_2-k_1}}{(c)_{k_2-k_1}}\frac{(a_1+m)_{k_1}}{(1+m)_{k_1}}z_1^{k_1}\frac{(a_2+m)_{k_2}}{(1+m)_{k_2}}z_2^{k_2}, \tag{3.29}$$

и представим отношение $(b)_{k_2-k_1}/(c)_{k_2-k_1}$ в виде интеграла следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{(b)_{k_2-k_1}}{(c)_{k_2-k_1}}&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{(-1)^{k_1-k_2+1}}{2i\sin(\pi b)}\int_1^{(0+)}(-t)^{b+k_2-k_1-1}(1-t)^{c-b-1}dt=\\&=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{(-1)^{k_1-k_2+1}}{2i\sin(\pi b)}\oint(-t)^{b+k_2-k_1-1}(1-t)^{c-b-1}dt,\end{aligned} \tag{3.30}$$

где $\oint$ — интеграл, взятый по контуру $\{t\in\mathbb{C}^2:|t|=1,|\arg(-t)|<\pi\}$, а параметры удовлетворяют ограничениям $\mathrm{Re}(c-b)>0$ и $b\notin\mathbb{Z}$. Выполняя замену переменного $-t=e^{i\varphi}$ во втором интеграле (3.30), перепишем отношение $(b)_{k_2-k_1}/(c)_{k_2-k_1}$ в виде

$$\frac{(b)_{k_2-k_1}}{(c)_{k_2-k_1}}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{(-1)^{k_1-k_2+1}}{2\sin(\pi b)}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\varphi b}e^{i\varphi(k_2-k_1)}(1+e^{i\varphi})^{c-b-1}d\varphi. \tag{3.31}$$

Подставляя (3.31) в (3.29), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_G^{(m,m)}(z_1,z_2)=\sum_{k_1,k_2=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{(-1)^{k_1-k_2+1}}{2\sin(\pi b)}\frac{(a_1)_mz_1^m}{m!}\frac{(a_2)_mz_2^m}{m!}\times\\\times\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\varphi b}e^{i\varphi(k_2-k_1)}(1+e^{i\varphi})^{c-b-1}\frac{(a_1+m)_{k_1}z_1^{k_1}}{(1+m)_{k_1}}\frac{(a_2+m)_{k_2}z_2^{k_2}}{(1+m)_{k_2}}d\varphi,\end{aligned}$$

а меняя здесь порядок суммирования и интегрирования, находим

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_G^{(m,m)}(z_1,z_2)=-\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{1}{2\sin(\pi b)}\frac{(a_1)_mz_1^m}{m!}\frac{(a_2)_mz_2^m}{m!}\times\\\times\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\varphi b}(1+e^{i\varphi})^{c-b-1}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{(a_1+m)_{k_1}}{(1+m)_{k_1}}\left(-\frac{z_1}{e^{i\varphi}}\right)^{k_1}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(a_2+m)_{k_2}}{(1+m)_{k_2}}(-z_2e^{i\varphi})^{k_2}d\varphi.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Учитывая выражения (2.22) и (2.27), с помощью (3.32) получаем требуемую асимптотику для $\mathcal{R}_G^{(m,m)}$, которую устанавливает следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть параметры ряда Горна* (1.12) *таковы, что* $\mathrm{Re}(c-b)>0$ *и* $b\notin\mathbb{Z}$. *Тогда для функции* $\mathcal{R}_G^{(m,m)}$, *определенной по формуле* (3.14), *справедливо асимптотическое равенство*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_G^{(m,m)}(z_1,z_2)=-\frac{\Gamma(c)}{2\sin(\pi b)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\frac{(a_1)_m(a_2)_m}{(m!)^2}(z_1z_2)^m\times\\\times\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\varphi b}(1+e^{i\varphi})^{c-b-1}}{(1+z_1e^{-i\varphi})(1+z_2e^{i\varphi})}\left[1+\left(\frac{(1-a_1)z_1e^{-i\varphi}}{1+z_1e^{-i\varphi}}+\frac{(1-a_2)z_2e^{i\varphi}}{1+z_2e^{i\varphi}}\right)m^{-1}+O\big(m^{-2}\big)\right]d\varphi.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Можно получить несколько менее точную, но проще реализуемую оценку для $\mathcal{R}_G^{(m,m)}$ следующим способом. Оценим модуль интеграла, входящего в (3.33), с помощью соотношений

$$\begin{aligned}|I|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\varphi b}(1+e^{i\varphi})^{c-b-1}}{(1+z_1e^{-i\varphi})(1+z_2e^{i\varphi})}d\varphi\right|\le\\\le\frac{1}{(1-|z_1|)(1-|z_2|)}\frac{\sqrt{\pi}2^{\mathrm{Re}(c-b)}\left(1+e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(c+b-1)|}\right)}{\mathrm{Re}(c-b-1)}\frac{\Gamma\left(\frac{\mathrm{Re}(c-b)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{Re}(c-b-1)}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Тогда имеет место оценка

$$|\mathcal{R}_G^{(m,m)}| \leq \frac{z_1^m z_2^m}{(1-|z_1|)(1-|z_2|)} \frac{(a_1)_m (a_2)_m}{(m!)^2} D_3(b,c), \tag{3.34}$$

где коэффициент $D_3(b,c)$ определен равенством

$$D_3(b,c) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \frac{2^{\mathrm{Re}(c-b-1)}\sqrt{\pi}}{\sin(\pi b)\mathrm{Re}(c-b-1)} \left(1 + e^{\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(c+b-1)|}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{\mathrm{Re}(c-b)}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{Re}(c-b-1)}{2}\right)}.$$

3.2.4. Сравнение величин $\mathcal{R}_G^{(m,0)}$, $\mathcal{R}_G^{(0,m)}$ и $\mathcal{R}_G^{(m,m)}$ при $m \to \infty$. Как и в пп. 2.2 вспомним, что согласно формуле Стирлинга [11] асимптотики величин $(a_j)_m/m!$ имеют степенной по m характер при $m \to \infty$. Поэтому, согласно формуле (3.11), суммируя выражения (3.27), (3.28) и (3.34) для $\mathcal{R}_G^{(0,m)}$, $\mathcal{R}_G^{(m,0)}$ и $\mathcal{R}_G^{(m,m)}$, получаем:

если $\{|z_1| < |z_2| < 1\}$, то

$$\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1,z_2) = \mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1,z_2) + O(|z_2|^m), \qquad m \to \infty; \tag{3.35}$$

а если $\{|z_2| < |z_1| < 1\}$, то

$$\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1,z_2) = \mathcal{R}_G^{(m,0)}(z_1,z_2) + O(|z_1|^m), \qquad m \to \infty. \tag{3.36}$$

Если же $|z_1| = |z_2| < 1$, то

$$\mathcal{R}_G^{(m)}(z_1,z_2) = \mathcal{R}_G^{(m,0)}(z_1,z_2) + \mathcal{R}_G^{(0,m)}(z_1,z_2) + O(|z_1|^{2m}), \qquad m \to \infty. \tag{3.37}$$

Учитывая формулы (3.35)–(3.37), а также (3.27)–(3.33), убеждаемся в справедливости утверждений (ii) теоремы 3, в том числе, асимптотик (3.7) и (3.9).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарасов О.В.* Применение функциональных уравнений для вычисления фейнмановских интегралов // Теор. и матем. физ. 2019. Т. 200. № 2. С. 324–342.

2. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина. I // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 12. С. 2098–2121.

3. *Kalmykov M., Bytev V., Kniehl B., Moch S.-O., Ward B., Yost S.* Hypergeometric functions and Feynman diagrams. In: Blumlein J., Schneider C. (eds) Anti-Differentiation and the Calculation of Feynman Amplitudes. Texts & Monographs in Symbolic Computation (A Series of the Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University, Linz, Austria). Springer, Cham, 2021.

4. *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* Asymptotics of the Riemann — Hilbert problem for the Somov model of magnetic reconnection of long shock waves // Матем. заметки. 2021. V. 110. № 6. P. 853–871,

5. *Шилин И. А., Чой Дж.* Метод континуальных теорем сложения и интегральные соотношения между функциями Кулона и функцией Аппеля F_1 // Ж. вычисл. мат. и матем. физики. 2022. Т. 62. № 9. С. 131–140.

6. *Karp D., Zhang Yi.* Convergent expansions and bounds for the incomplete elliptic integral of the second kind near the logarithmic singularity // Math. Comp. 2023. V. 92. № 344. P. 2769.

7. *Шилин И. А., Чой Дж.* Алгебры Ли и специальные функции, связанные с изотропным конусом // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 222, ВИНИТИ РАН, М., 2023, 141–152.

8. *Claude Duhr, Franziska Porkert* Feynman integrals in two dimensions and single-valued hypergeometric functions // J. High Energ. Phys. 2024. V. 2.

9. *Wei Fan*. Celestial conformal blocks of massless scalars and analytic continuation of the Appell function F1 // J. High Energ. Phys. 2024. V. 1.

10. *Appel P., Kampe de Feriet J.* Fonctions hypergeometriques et hyperspherique. Paris: Gauthier–Villars, 1926.

11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.

12. *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and application. New York: J. Willey & Sons inc, 1976.

13. *Erdelyi A.* Hypergeometric functions of two variables // Acta Mat. 1950. V. 83. Iss. 131. P. 131–164.

14. *Olsson O.M.* Integration of the partial differential equations for the hypergeometric function F_1 and F_D of two and more variables // J. Math. Phys. 1964. V. 5. № 420. P. 420–430.

15. *Безродных С.И.* Аналитическое продолжение функции Аппеля F_1 и интегрирование связанной с ней системы уравнений в логарифмическом случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 555–587.

16. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of Lauricella's function $F_D^{(N)}$ for large in modulo variables near hyperplanes $\{z_j = z_l\}$ // Integral Transforms and Special Functions. 2022. V. 33. № 4. P. 276–291.

17. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of Lauricella's function $F_D^{(N)}$ for variables close to unit near hyperplanes $\{z_j = z_l\}$ // Integral Transforms and Special Functions. 2022. V. 33. № 5. P. 419–433.

18. *Colavecchia F.D., Gasaneo G., Miraglia J.E.* Numerical evaluation of Appell's F_1 hypergeometric function // Comput. Phys. Communicat. 2001. V. 138. P. 29–43.

19. *Colavecchia F.D., Gasaneo G.* f1: a code to compute Appell's F1 hypergeometric function // Comput. Phys. Communicat. 2004. V. 157. P. 32–38.

20. *Ananthanarayan B., Bera S., Friot S., Pathak T.* Olsson.wl & ROC2.wl: Mathematica packages for transformations of multivariable hypergeometric functions & regions of convergence for their series representations in the two variables case // Comput. Phys. Communicat. 2024. V. 300. 109162 crossref.

21. *Ananthanarayan B., Bera S., Friot S., Marichev O., Pathak T.* On the evaluation of the Appell F2 double hypergeometric function // Comput. Phys. Communicat. 2023. V. 284. 108589.

22. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, задача Римана–Гильберта и некоторые приложения // Успехи матем. наук. 2018. Т. 73. № 6 (444). С. 3–94.

23. *Безродных С.И.* Формулы для вычисления интегралов типа Эйлера и их приложение к задаче построения конформного отображения многоугольников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. V. 63. № 11. P. 1763–1798.

24. *Wong R.* Asymptotic approximations of integrals. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

ESTIMATION OF THE REMAINDER TERMS OF CERTAIN HORN HYPERGEOMETRIC SERIES

S. I. Bezrodnykh[a,]*, **O. V. Dunin-Barkovskaya**[a,b,]**

[a] *119333 Moscow, Vavilov str., 44, Federal Research Center "Informatics and Management" of the Russian Academy of Sciences, Russia*
[b] *119234 Moscow, Universitetsky pr., 13, Sternberg Astronomical Institute, Moscow State University, Russia*
**e-mail: sbezrodnykh@mail.ru*
***e-mail: olga.ptitsyna@gmail.com*

Received: 20.04.2024
Revised: 31.05.2024
Accepted: 05.06.2024

Abstract. Integral representations and asymptotic estimates for remainder terms arising in the summation of the Appel hypergeometric F_1 series and its related series G_2, indicated in the Horn list of hypergeometric series of two variables, are constructed. The formulas found have an application to the development of algorithms for calculating the F_1 function using formulas of analytical continuation into the entire $\mathbb{C}^2$ space. The results can be applied in problems of mathematical physics and computational theory of function, including the construction of a conformal mapping of complex polygons based on the Schwarz–Christoffel integral.

Keywords: Appel and Horn hypergeometric functions, formulas of analytical continuation, effective calculation of hypergeometric functions.