ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹⁾

© 2024 г. Г. В. Демиденко^{1,*}

¹630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Новосибирский государственный университет, Россия
*e-mail: demidenk@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 10.03.2024 г.

Переработанный вариант 10.03.2024 г.

Принята к публикации 05.05.2024 г.

Рассмотрен класс строго псевдогиперболических операторов четвертого порядка с переменными коэффициентами. При некоторых условиях на коэффициенты установлены энергетические оценки. Из этих оценок вытекает единственность решения задачи Коши, а также априорные оценки. Библ. 14.

Ключевые слова: уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, псевдогиперболические операторы, весовые соболевские пространства, энергетические оценки.

DOI: 10.31857/S0044466924080111, EDN: YAGPPA

1. ВВЕДЕНИЕ

В монографии [1] была введена некоторая классификация линейных уравнений с частными производными следующего вида:

$$L(D_t, D_x)u \equiv L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

где $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, и для них изучен широкий класс краевых задач. В литературе такие уравнения часто называют *уравнениями соболевского типа*, поскольку исследования С. Л. Соболева [2] были первыми глубокими исследованиями дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. В настоящее время имеется большое число работ, посвященных изучению различных задач для уравнений вида (1.1) (см., например, монографии [1], [3] и имеющуюся там библиографию). Однако для класса *псевдогиперболических уравнений*, введенного в [1], теория краевых задач является мало изученной, в частности, по задаче Коши для таких уравнений с переменными коэффициентами в литературе пока нет результатов.

Напомним определение псевдогиперболических операторов [1] в случае постоянных коэффициентов

$$L(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k.$$

Условие 1. Будем предполагать, что символ $L(i\eta, i\xi)$ оператора $L(D_t, D_x)$ однороден относительно некоторого вектора $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_0 > 0$, $1/\alpha_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$, т. е.

$$L(c^{\alpha_0} i\eta, c^{\alpha_1} i\xi_1, \dots, c^{\alpha_n} i\xi_n) = cL(i\eta, i\xi_1, \dots, i\xi_n), \quad c > 0.$$

Условие 2. Оператор $L_0(D_x)$ является квазиэллиптическим.

Условие 3. Уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{L_{l-k}(i\xi)}{L_0(i\xi)} (i\eta)^k = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (1.2)$$

имеет только вещественные корни $\eta_1(\xi), \dots, \eta_l(\xi)$.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта 24-21-00370), <https://rscf.ru/project/24-21-00370/>.

Определение. Дифференциальный оператор $L(D_t, D_x)$ называется *псевдогиперболическим*, если для его символа $L(i\eta, i\xi)$ выполнены условия 1–3. Если корни уравнения (1.2) являются различными, то оператор $L(D_t, D_x)$ будем называть *строго псевдогиперболическим* и соответствующее дифференциальное уравнение (1.1) будем называть *строго псевдогиперболическим уравнением*.

Первые теоремы о разрешимости задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений с постоянными коэффициентами были доказаны в [1, гл. 2], [4]. В работе [5] была изучена задача Коши для этого класса уравнений, содержащих младшие члены. Следует отметить, что для задачи Коши для псевдогиперболических уравнений имеется ряд особенностей. А именно, для ее разрешимости в соболевских пространствах $W_2^{l,r}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ правая часть $f(t, x)$ уравнения должна иметь дополнительную гладкость и в зависимости от порядков дифференциальных операторов и размерности n должна быть ортогональна некоторым мономам x^β (см. также [6]–[8]).

В данной работе мы начинаем изучение строго псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами. Мы будем рассматривать класс операторов четвертого порядка

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x) = \mathcal{L}^1(D_t, D_x) + \mathcal{L}_a^2(x; D_t, D_x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

где $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$ — однородный строго псевдогиперболический оператор с постоянными вещественными коэффициентами имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(D_t, D_x) &= L_0^1(D_x)D_t^2 + L_1^1(D_x)D_t + L_2^1(D_x), \\ L_0^1(D_x) &= \sum_{|\beta|=2} a_\beta^0 D_x^\beta, \quad L_1^1(D_x) = \sum_{|\beta|=3} a_\beta^1 D_x^\beta, \quad L_2^1(D_x) = \sum_{|\beta|=4} a_\beta^2 D_x^\beta, \end{aligned} \tag{1.4}$$

при этом $L_0^1(D_x)$ — эллиптический оператор. Будем предполагать, что выполнена оценка

$$q_2 |\xi|^2 \geq L_0^1(i\xi) \equiv - \sum_{|\beta|=2} a_\beta^0 \xi^\beta \geq q_1 |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.5}$$

где $q_2 \geq q_1 > 0$ — постоянные.

Второй дифференциальный оператор в (1.3) с вещественнозначными переменными коэффициентами $\mathcal{L}_a^2(x; D_t, D_x)$ имеет вид

$$\mathcal{L}_a^2(x; D_t, D_x) = L_{a,0}^2(x; D_x)D_t^2 + L_1^2(x; D_x)D_t + L_2^2(x; D_x), \tag{1.6}$$

где

$$L_{a,0}^2(x; D_x) = \sum_{|\beta|=2} \alpha_\beta^0(x) D_x^\beta + aI, \quad L_1^2(x; D_x) = \sum_{|\beta|=3} \alpha_\beta^1(x) D_x^\beta, \quad L_2^2(x; D_x) = \sum_{|\beta|=4} \alpha_\beta^2(x) D_x^\beta,$$

при этом $\alpha_\beta^k(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $k = 0, 1, 2$, $a > 0$ — константа.

Оператор $\mathcal{L}_a^2(x; D_t, D_x)$ можно рассматривать, как возмущение псевдогиперболического оператора $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$.

В качестве примера строго псевдогиперболического уравнения с младшими членами можно рассмотреть многомерные аналоги уравнения Власова [9, 10] и уравнения Рэлея–Бишопа [11], [12], [13]

$$(a_0 I - a_1 \Delta) D_t^2 u + a_2 \Delta^2 u + \sum_{|\beta| \leq 3} a_\beta(x) D_x^\beta u = f(t, x),$$

где $a_0, a_1, a_2 > 0$.

Наша цель — получение энергетических оценок для оператора $\mathcal{L}(x; D_t, D_x)$.

В дальнейшем через $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > 0$, будем обозначать соболевское пространство с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$, т. е. функция $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$, если функция $u_\gamma(t, x) = e^{-\gamma t} u(t, x) \in W_2^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$. Символом $\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)$ будем обозначать преобразование Фурье функции $u_\gamma(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^{n+1})$.

В работе будет доказана следующая

Теорема. *Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что если коэффициенты $\alpha_\beta^k(x)$ оператора (1.6) вместе со своими производными до третьего порядка включительно достаточно малы, то для любой функции $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$ при $\gamma > \gamma_0$ такой, что*

$$D_t^2 D_x^\beta u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), \quad |\beta| = 2,$$

имеет место оценка

$$\gamma \| (|\xi|^2 + a) (|\eta| + \gamma + |\xi|) \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| \leq c \| \mathcal{L}(x; D_t, D_x) u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \| \tag{1.7}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(t, x)$.

Оценка (1.7) является аналогом энергетического неравенства для строго гиперболических операторов [14], [15].

Отметим, что полученные энергетические оценки можно использовать для изучения корректности задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x; D_t, D_x) u &= f(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} &= \varphi_1(x), \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x), \end{aligned}$$

в весовом соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Из общего определения псевдогиперболических операторов [1] вытекает, что оператор $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$ является псевдогиперболическим, если уравнение

$$L_0^1(i\xi)(i\eta)^2 + L_1^1(i\xi)i\eta + L_2^1(i\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

имеет только вещественные корни $\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)$, и если корни различные, то этот оператор — строго псевдогиперболический. Отметим, что для оператора (1.4) $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1/4$.

В силу определения операторов $L_k^1(D_x), k = 0, 1, 2$, дифференциальный оператор $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$ является строго псевдогиперболическим тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$d(\xi) = \left(\sum_{|\beta|=3} a_\beta^1 \xi^\beta \right)^2 - 4 \left(\sum_{|\beta|=2} a_\beta^0 \xi^\beta \right) \left(\sum_{|\beta|=4} a_\beta^2 \xi^\beta \right) > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{2.1}$$

Многочлен $d(\xi)$ является однородным шестой степени, поэтому существуют постоянные $p_2 \geq p_1 > 0$ такие, что

$$p_2 |\xi|^6 \geq d(\xi) \geq p_1 |\xi|^6, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

В монографии [1] при получении энергетических оценок для строго псевдогиперболических операторов (1.1) с постоянными коэффициентами и квазиоднородными символами использовалась схема Лере [15], предложенная для изучения корректности задачи Коши для строго гиперболических уравнений. В частности, в [1, гл.2] была получена оценка

$$\begin{aligned} M(i\eta + \gamma, i\xi) &\equiv -\text{Im} \left(L(i\eta + \gamma, i\xi) \overline{D_\eta L(i\eta + \gamma, i\xi)} \right) \geq q \gamma \langle \xi \rangle^{2(1-l\alpha_0)} \left(|\eta + \gamma| + \langle \xi \rangle^{\alpha_0} \right)^{2l-2}, \\ \langle \xi \rangle^2 &= \sum_{j=1}^n \xi_j^{2/\alpha_j}, \quad \gamma > 0, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}, \end{aligned}$$

где $q = \text{const} > 0$, $L(i\eta, i\xi)$ — символ строго псевдогиперболического оператора $L(D_t, D_x)$, который однороден относительно некоторого вектора $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_0 > 0, 1/\alpha_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n$.

Выпишем аналогичный многочлен $M(i\eta + \gamma, i\xi)$ для оператора $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(i\eta + \gamma, i\xi) &= L_0^1(i\xi)(i\eta + \gamma)^2 + L_1^1(i\xi)(i\eta + \gamma) + L_2^1(i\xi), \\ D_\eta \mathcal{L}^1(i\eta + \gamma, i\xi) &= 2iL_0^1(i\xi)(i\eta + \gamma) + iL_1^1(i\xi), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} M(i\eta + \gamma, i\xi) &= -\text{Im} \left(\left(L_0^1(i\xi)(-\eta^2 + 2i\eta\gamma + \gamma^2) + L_1^1(i\xi)(i\eta + \gamma) + L_2^1(i\xi) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \overline{\left(2iL_0^1(i\xi)(i\eta + \gamma) + iL_1^1(i\xi) \right)} \right), \quad \gamma \geq 0, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Проводя вычисления, получим

$$M(i\eta + \gamma, i\xi) = \gamma \left(\left(\sum_{|\beta|=3} a_{\beta}^1 \xi^{\beta} \right)^2 + 2 \left(\sum_{|\beta|=2} a_{\beta}^0 \xi^{\beta} \right)^2 (\eta^2 + \gamma^2) - \right. \\ \left. - 2 \left(\sum_{|\beta|=2} a_{\beta}^0 \xi^{\beta} \right) \left(\sum_{|\beta|=4} a_{\beta}^2 \xi^{\beta} \right) + 2 \left(\sum_{|\beta|=2} a_{\beta}^0 \xi^{\beta} \right) \left(\sum_{|\beta|=3} a_{\beta}^1 \xi^{\beta} \right) \eta \right).$$

Учитывая обозначение (2.1), это можно переписать в следующем виде:

$$M(i\eta + \gamma, i\xi) = 2\gamma \left(\left(\eta \sum_{|\beta|=2} a_{\beta}^0 \xi^{\beta} + \frac{1}{2} \sum_{|\beta|=3} a_{\beta}^1 \xi^{\beta} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{4} \left(\sum_{|\beta|=3} a_{\beta}^1 \xi^{\beta} \right)^2 - \left(\sum_{|\beta|=2} a_{\beta}^0 \xi^{\beta} \right) \left(\sum_{|\beta|=4} a_{\beta}^2 \xi^{\beta} \right) \right] + \gamma^2 \left(\sum_{|\beta|=2} a_{\beta}^0 \xi^{\beta} \right)^2 \right) = \\ = 2\gamma \left(\left(\eta L_0^1(\xi) + \frac{1}{2} \sum_{|\beta|=3} a_{\beta}^1 \xi^{\beta} \right)^2 + \frac{1}{4} d(\xi) + \gamma^2 \left(L_0^1(\xi) \right)^2 \right)$$

или

$$M(i\eta + \gamma, i\xi) = 2\gamma (L_0^1(\xi))^2 N(\eta, \gamma, \xi),$$

где

$$N(\eta, \gamma, \xi) = \left(\eta + \frac{1}{2} (L_0^1(\xi))^{-1} \left(\sum_{|\beta|=3} a_{\beta}^1 \xi^{\beta} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} (L_0^1(\xi))^{-2} d(\xi) + \gamma^2 \tag{2.4}$$

есть неотрицательная однородная функция второй степени относительно переменных $\gamma \geq 0, (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$. В силу неравенств (1.5), (2.2), очевидно, что $N(\eta, \gamma, \xi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\gamma = \eta = |\xi| = 0$. Следовательно, существуют постоянные $r_2 \geq r_1 > 0$ такие, что выполняется оценка

$$r_2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) \geq N(\eta, \gamma, \xi) \geq r_1(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2). \tag{2.5}$$

Поэтому, учитывая (1.5), получим неравенство

$$2q_2^2 r_2 \gamma |\xi|^4 (\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) \geq M(i\eta + \gamma, i\xi) \geq 2q_1^2 r_1 \gamma |\xi|^4 (\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2), \tag{2.6}$$

$$\gamma > 0, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Из проведенных рассуждений вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$ является строго псевдодогиперболическим тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (2.6).*

Определим дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}_1^1(D_t, D_x) = 2iL_0^1(D_x)D_t + iL_1^1(D_x) \tag{2.7}$$

и рассмотрим форму

$$\mathcal{M}^1 u = -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\gamma t} \mathcal{L}^1(D_t, D_x) u(t, x) \overline{\left(e^{-\gamma t} \mathcal{L}_1^1(D_t, D_x) u(t, x) \right)} dz, \quad z = (t, x). \tag{2.8}$$

Учитывая (2.3) и (2.4), для любой функции $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ нетрудно получить двухстороннюю оценку

$$2q_2^2 r_2 \gamma \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\xi|^4 (\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) |\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta \geq \mathcal{M}^1 u \geq \\ \geq 2q_1^2 r_1 \gamma \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\xi|^4 (\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) |\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\zeta, \quad \zeta = (\eta, \xi). \tag{2.9}$$

Действительно, используя свойства преобразования Фурье, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^1 u &= -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{L}^1(D_t + \gamma I, D_x) u_\gamma(t, x) \overline{\left(\mathcal{L}_1^1(D_t + \gamma I, D_x) u_\gamma(t, x) \right)} dz = \\ &= -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{L}^1(i\eta + \gamma, i\xi) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi) \overline{\left(\mathcal{L}_1^1(i\eta + \gamma, i\xi) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi) \right)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} M(i\eta + \gamma, i\xi) |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (2.6) вытекает (2.9).

Из неравенства (2.9), очевидно, следует энергетическая оценка для псевдогиперболического оператора $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$.

Лемма 2. Для любой функции $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > 0$, такой, что $D_t^2 D_x^\beta u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $|\beta| = 2$, имеет место оценка

$$\gamma \| |\xi|^2 (|\eta| + |\xi| + \gamma) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| \leq c \| \mathcal{L}^1(D_t, D_x) u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \|, \tag{2.10}$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $u(t, x)$.

Из этой леммы вытекает единственность решения задачи Коши для псевдогиперболического уравнения с постоянными коэффициентами без младших членов в соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\gamma > 0$.

Прежде чем переходить к получению энергетической оценки (1.7) для псевдогиперболического оператора с переменными вещественными коэффициентами, покажем как можно получить такую оценку для псевдогиперболического оператора с младшим членом

$$\mathcal{L}_a^1(D_t, D_x) = \mathcal{L}^1(D_t, D_x) + aD_t^2 = (L_0^1(D_x) + aI)D_t^2 + L_1^1(D_x)D_t + L_2^1(D_x), \quad a > 0. \tag{2.11}$$

Вначале выпишем для этого оператора аналог многочлена (2.3)

$$\begin{aligned} M_a(i\eta + \gamma, i\xi) &= -\text{Im} \left(\left((L_0^1(i\xi) + a)(-\eta^2 + 2i\eta\gamma + \gamma^2) + L_1^1(i\xi)(i\eta + \gamma) + L_2^1(i\xi) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \overline{\left(2i(L_0^1(i\xi) + a)(i\eta + \gamma) + iL_1^1(i\xi) \right)} \right), \quad \gamma \geq 0, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Проводя вычисления, получим

$$M_a(i\eta + \gamma, i\xi) = \gamma \left(\left(L_1^1(\xi) \right)^2 + 2 \left(L_0^1(\xi) - a \right)^2 (\eta^2 + \gamma^2) - 2 \left(L_0^1(\xi) - a \right) L_2^1(\xi) + 2 \left(L_0^1(\xi) - a \right) L_1^1(\xi)\eta \right).$$

Перепишем это в следующем виде:

$$M_a(i\eta + \gamma, i\xi) = 2\gamma \left(-L_0^1(\xi) + a \right)^2 \left(\left(\eta - \frac{L_1^1(\xi)}{2(-L_0^1(\xi) + a)} \right)^2 + \frac{(L_1^1(\xi))^2 + 4(-L_0^1(\xi) + a)L_2^1(\xi)}{4(-L_0^1(\xi) + a)^2} + \gamma^2 \right).$$

Введем обозначение

$$Q(\eta, \gamma, \xi, a) = \left(\eta - \frac{L_1^1(\xi)}{2(-L_0^1(\xi) + a)} \right)^2 + \frac{(L_1^1(\xi))^2 + 4(-L_0^1(\xi) + a)L_2^1(\xi)}{4(-L_0^1(\xi) + a)^2} + \gamma^2. \tag{2.13}$$

Тогда полином (2.12) можно представить в виде

$$M_a(i\eta + \gamma, i\xi) = 2\gamma \left(-L_0^1(\xi) + a \right)^2 Q(\eta, \gamma, \xi, a). \tag{2.14}$$

В силу определений (2.4), (2.13), очевидно, имеем

$$Q(\eta, \gamma, \xi, 0) = N(\eta, \gamma, \xi).$$

Напомним, что функция $N(\eta, \gamma, \xi)$ является однородной второй степени, и в силу строгой псевдогиперболическости оператора $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$ для нее выполнена оценка (2.5), которую можно переписать в виде

$$\begin{aligned} r_2 \geq Q(\eta', \gamma', \xi', 0) = N(\eta', \gamma', \xi') \geq r_1 > 0, \quad s = (\eta', \gamma', \xi'), \\ \eta' = \eta/\Delta, \quad \gamma' = \gamma/\Delta, \quad \xi' = \xi/\Delta, \quad \Delta = \sqrt{\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$

Запишем теперь функцию (2.13) следующим образом

$$Q(\eta, \gamma, \xi, a) = \Delta^2 Q(\eta', \gamma', \xi', \frac{a}{\Delta^2}).$$

Тогда в силу равномерной непрерывности функции

$$Q(\eta', \gamma', \xi', \alpha), \quad (\eta')^2 + (\gamma')^2 + |\xi'|^2 = 1, \quad \alpha \in [0, \alpha_0],$$

из этой оценки следует, что существует $\gamma_1 > 0$ такое, что при всех $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\gamma \geq \gamma_1$ будет выполняться неравенство

$$2r_2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) \geq Q(\eta, \gamma, \xi, a) \geq \frac{r_1}{2}(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2).$$

Отсюда в силу (2.14) получаем

$$4r_2\gamma \left(-L_0^1(\xi) + a\right)^2 (\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) \geq M_a(i\eta + \gamma, i\xi) \geq r_1\gamma \left(-L_0^1(\xi) + a\right)^2 (\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2).$$

Следовательно, учитывая (1.5), имеем аналог неравенства (2.6)

$$4r_2\gamma(q_2|\xi|^2 + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) \geq M_a(i\eta + \gamma, i\xi) \geq r_1\gamma(q_1|\xi|^2 + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2), \quad \gamma \geq \gamma_1, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (2.15)$$

Используя (2.15), нетрудно получить энергетическую оценку для оператора (2.11). Для этого, определим дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}_{a,1}^1(D_t, D_x) = 2i(L_0^1(D_x) + aI)D_t + iL_1^1(D_x) \quad (2.16)$$

и рассмотрим аналог формы (2.8)

$$\mathcal{M}_a^1 u = -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\gamma t} \mathcal{L}_a^1(D_t, D_x) u(t, x) \overline{\left(e^{-\gamma t} \mathcal{L}_{a,1}^1(D_t, D_x) u(t, x) \right)} dz, \quad z = (t, x). \quad (2.17)$$

$$u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Используя свойства преобразования Фурье, это можно записать в виде

$$\mathcal{M}_a^1 u = -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{L}_a^1(i\eta + \gamma, i\xi) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi) \overline{\left(\mathcal{L}_{a,1}^1(i\eta + \gamma, i\xi) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi) \right)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} M_a(i\eta + \gamma, i\xi) |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\xi.$$

Отсюда в силу (2.15) получаем двухстороннее неравенство

$$\begin{aligned} 4r_2\gamma \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (q_2|\xi|^2 + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\xi &\geq \mathcal{M}_a^1 u \geq \\ &\geq r_1\gamma \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (q_1|\xi|^2 + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) |\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)|^2 d\xi, \quad \gamma \geq \gamma_1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из этого неравенства, очевидно, вытекает энергетическая оценка для оператора (2.11).

Лемма 3. *Существует $\gamma_1 > 0$ такое, что для любой функции $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$ при $\gamma \geq \gamma_1$ такой, что $D_t^2 D_x^\beta u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $|\beta| = 2$, имеет место оценка*

$$\gamma \left((|\xi|^2 + a) (|\eta| + \gamma + |\xi|) \hat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \right) \leq c \left\| \mathcal{L}_a^1(D_t, D_x) u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \right\|$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $u(t, x)$.

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Докажем энергетические оценки для строго гиперболических операторов $\mathcal{L}(x; D_t, D_x)$ вида (1.3) с переменными коэффициентами.

Будем предполагать, что переменные коэффициенты $\alpha_\beta^k(x)$ оператора (1.6) вместе со своими производными до третьего порядка включительно достаточно малы. Рассмотрим аналог формы (2.17)

$$\mathcal{M}u = -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\gamma t} \mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x) \overline{\left(e^{-\gamma t} \mathcal{L}_{a,1}^1(D_t, D_x)u(t, x) \right)} dz,$$

где $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, оператор $\mathcal{L}_{a,1}^1(D_t, D_x)$ имеет вид (2.16). Ее можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{M}u = -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\gamma t} \left(\mathcal{L}_a^1(D_t, D_x)u(t, x) + \mathcal{L}_0^2(x; D_t, D_x)u(t, x) \right) \overline{\left(e^{-\gamma t} \mathcal{L}_{a,1}^1(D_t, D_x)u(t, x) \right)} dz = \mathcal{M}_a^1u + \mathcal{M}_a^2u, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{L}_0^2(x; D_t, D_x)$ — оператор из (1.6) при $a = 0$, $\mathcal{M}_a^1u$ — форма (2.17),

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a^2u &= -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\gamma t} \mathcal{L}_0^2(x; D_t, D_x)u(t, x) \overline{\left(e^{-\gamma t} \mathcal{L}_{a,1}^1(D_t, D_x)u(t, x) \right)} dz = \\ &= -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{L}_0^2(x; D_t + \gamma I, D_x)u_\gamma(t, x) \overline{\left(\mathcal{L}_{a,1}^1(D_t + \gamma I, D_x)u_\gamma(t, x) \right)} dz. \end{aligned}$$

В дальнейшем нам удобно будет использовать следующее обозначение для скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$\langle v, \omega \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} v(z) \overline{\omega(z)} dz$$

и для сокращения записи будем писать

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^2(x) &= \mathcal{L}_0^2(x; D_t + \gamma I, D_x) = L_{0,0}^2(x, D_x)(D_t + \gamma I)^2 + L_1^2(x, D_x)(D_t + \gamma I) + L_2^2(x, D_x), \\ \mathcal{L}_{a,1}^1 &= \mathcal{L}_{a,1}^1(D_t + \gamma I, D_x) = 2i(L_0^1(D_x) + aI)(D_t + \gamma I) + iL_1^1(D_x). \end{aligned}$$

Тогда форму $\mathcal{M}_a^2u$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a^2u &= -\text{Im} \langle \mathcal{L}_0^2(x)u_\gamma, \mathcal{L}_{a,1}^1u_\gamma \rangle = -\frac{1}{2i} \left(\langle \mathcal{L}_0^2(x)u_\gamma, \mathcal{L}_{a,1}^1u_\gamma \rangle - \langle \mathcal{L}_{a,1}^1u_\gamma, \mathcal{L}_0^2(x)u_\gamma \rangle \right) = \\ &= -\frac{1}{2i} \langle \left((\mathcal{L}_{a,1}^1)^* \mathcal{L}_0^2(x) - (\mathcal{L}_0^2(x))^* \mathcal{L}_{a,1}^1 \right) u_\gamma, u_\gamma \rangle. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В силу определения операторов $\mathcal{L}_{a,1}^1(D_t, D_x)$, $\mathcal{L}_0^2(x, D_t, D_x)$, учитывая, что все коэффициенты вещественные, для сопряженных операторов имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{a,1}^1)^* &= 2i(D_t - \gamma I)(L_0^1(D_x) + aI) + iL_1^1(D_x), \\ (\mathcal{L}_0^2(x))^* v(z) &= (D_t - \gamma I)^2 \left(\sum_{|\beta|=2} D_x^\beta (\alpha_\beta^0(x)v(z)) \right) + \\ &+ (D_t - \gamma I) \sum_{|\beta|=3} D_x^\beta (\alpha_\beta^1(x)v(z)) + \sum_{|\beta|=4} D_x^\beta (\alpha_\beta^2(x)v(z)), \quad v(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}). \end{aligned}$$

Введем дифференциальный оператор

$$\mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma) = -\frac{1}{2i} \left((\mathcal{L}_{a,1}^1)^* \mathcal{L}_0^2(x) - (\mathcal{L}_0^2(x))^* \mathcal{L}_{a,1}^1 \right).$$

Тогда выражение (3.2) будет иметь вид

$$\mathcal{M}_a^2 u = \langle \mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle. \tag{3.3}$$

Учитывая гладкость коэффициентов операторов $L_{0,0}^2(x; D_x), L_1^2(x; D_x), L_2^2(x; D_x)$, дифференциальный оператор $\mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma)$ можно представить в виде суммы старшей его части $P(x; D_t, D_x, \gamma)$ и операторов меньшего порядка $p(x; D_t, D_x, \gamma)$, при этом будем считать умножение на параметр γ^k оператором k -го порядка, т. е.

$$\mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma) = P(x; D_t, D_x, \gamma) + p(x; D_t, D_x, \gamma), \tag{3.4}$$

где оператор $P(x; D_t, D_x, \gamma)$ имеет седьмой порядок, а оператор $p(x; D_t, D_x, \gamma)$ — шестой порядок. Тогда (3.3) можно записать в виде

$$\mathcal{M}_a^2 u = \langle P(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle + \langle p(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle. \tag{3.5}$$

В силу гладкости коэффициентов оператора (1.6), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} P(x; D_t, D_x, \gamma) = & -(D_t - \gamma I)(D_t + \gamma I)^2 L_{0,0}^2(x; D_x) L_0^1(D_x) - (D_t^2 - \gamma^2 I) L_1^2(x; D_x) L_0^1(D_x) - \\ & - (D_t - \gamma I) L_2^2(x; D_x) L_0^1(D_x) - \frac{1}{2} (D_t + \gamma I)^2 L_{0,0}^2(x; D_x) L_1^1(D_x) - \\ & - \frac{1}{2} (D_t + \gamma I) L_1^2(x; D_x) L_1^1(D_x) - \frac{1}{2} L_2^2(x; D_x) L_1^1(D_x) + \\ & + (D_t - \gamma I)^2 (D_t + \gamma I) L_{0,0}^2(x; D_x) L_0^1(D_x) + \frac{1}{2} (D_t - \gamma I)^2 L_{0,0}^2(x; D_x) L_1^1(D_x) + \\ & + (D_t - \gamma I)(D_t + \gamma I) L_1^2(x; D_x) L_0^1(D_x) + \frac{1}{2} (D_t - \gamma I) L_1^2(x; D_x) L_1^1(D_x) + \\ & + (D_t + \gamma I) L_2^2(x; D_x) L_0^1(D_x) + \frac{1}{2} L_2^2(x; D_x) L_1^1(D_x). \end{aligned}$$

А этот оператор, очевидно, имеет вид

$$\begin{aligned} P(x; D_t, D_x, \gamma) = & -2\gamma \left((D_t^2 - \gamma^2 I) L_{0,0}^2(x; D_x) L_0^1(D_x) + \right. \\ & \left. + D_t L_{0,0}^2(x; D_x) L_1^1(D_x) + \frac{1}{2} L_1^2(x; D_x) L_1^1(D_x) - L_2^2(x; D_x) L_0^1(D_x) \right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Поэтому, подставляя оператор (3.6) в первое слагаемое в правой части (3.5) и учитывая, что $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, то после интегрирования по частям его можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \langle P(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle = & 2\gamma \left(\langle (D_t - \gamma I) L_0^1(D_x) u_\gamma, (D_t - \gamma I) (L_{0,0}^2(x; D_x))^* u_\gamma \rangle + \right. \\ & \left. + \langle L_1^1(D_x) u_\gamma, D_t (L_{0,0}^2(x; D_x))^* u_\gamma \rangle - \frac{1}{2} \langle L_1^1(D_x) u_\gamma, (L_1^2(x; D_x))^* u_\gamma \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{|\beta| \leq 3} \langle D_{x_j} L_0^1(D_x) u_\gamma, b_{j,\beta}(x) D_x^\beta u_\gamma \rangle \right). \end{aligned}$$

Тогда, очевидно, имеем оценку

$$\begin{aligned} |\langle P(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle| \leq & d\gamma \| |\xi|^2 (|\eta| + \gamma + |\xi|) \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| \times \left(\| (D_t - \gamma I) (L_{0,0}^2(x; D_x))^* u_\gamma, L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| + \right. \\ & \left. + \| D_t (L_{0,0}^2(x; D_x))^* u_\gamma, L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| + \| (L_1^2(x; D_x))^* u_\gamma, L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| + \sum_{j=1}^n \sum_{|\beta| \leq 3} \| b_{j,\beta}(x) D_x^\beta u_\gamma, L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Обозначим выражение в скобках через J .

Напомним, что коэффициенты операторов $L_{0,0}^2(x; D_x), L_1^2(x; D_x), L_2^2(x; D_x)$ являются бесконечно дифференцируемыми и финитными, при этом сейчас мы пока предполагаем, что они вместе со своими производными до третьего порядка включительно достаточно малы. Тогда для J можно выписать следующую оценку:

$$J \leq \varepsilon \left(\| (|\xi|^2 + 1) (|\eta| + \gamma) \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| + \| (|\xi|^3 + 1) \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \| \right),$$

где величина малой константы $\varepsilon > 0$ полностью определяется малостью коэффициентов $\alpha_\beta^k(x)$ и их производных до третьего порядка.

Из этого неравенства, очевидно, следует, что при $a > 0$ существует $\gamma_2 > 0$ такое, что при $\gamma \geq \gamma_2$ выполняется следующая оценка:

$$J \leq c_1(a, \gamma_2)\varepsilon\|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|,$$

где константа $c_1(a, \gamma_2) > 0$ зависит от a и γ_2 . Отсюда в силу (3.7) получаем неравенство

$$|\langle P(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma \rangle| \leq dc_1(a, \gamma_2)\varepsilon\gamma\|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2.$$

Учитывая еще, что порядок оператора $p(x; D_t, D_x, \gamma)$ меньше, чем порядок оператора $P(x; D_t, D_x, \gamma)$, получим также

$$|\langle p(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma \rangle| \leq c_2(a, \gamma_2)\|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2,$$

где константа $c_2(a, \gamma_2) > 0$ зависит от a и γ_2 . Из этих двух оценок и (3.5) при $\gamma \geq \gamma_2$ вытекает неравенство

$$|\mathcal{M}_a^2 u| \leq (dc_1(a, \gamma_2)\varepsilon\gamma + c_2(a, \gamma_2))\|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2. \tag{3.8}$$

Используя теперь оценки (2.18) и (3.8), форму $\mathcal{M}u$ из (3.1) можно оценить снизу. Вначале отметим, что из оценки (2.18) вытекает неравенство

$$\mathcal{M}_a^1 u \geq \rho_1\gamma\|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2, \quad \gamma \geq \gamma_1,$$

где константа $\rho_1 > 0$ зависит от r_1, q_1, a . Тогда, учитывая (3.8), при $\gamma \geq \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$ получим

$$\mathcal{M}u = \mathcal{M}_a^1 u + \mathcal{M}_a^2 u \geq \mathcal{M}_a^1 u - |\mathcal{M}_a^2 u| \geq \gamma \left(\rho_1 - dc_1(a, \gamma_2)\varepsilon - \frac{c_2(a, \gamma_2)}{\gamma} \right) \|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2.$$

Пусть $\gamma_3 = 4c_2(a, \gamma_2)/\rho_1$ и предположим, что коэффициенты оператора (1.6) вместе с производными до третьего порядка включительно настолько малы, что

$$dc_1(a, \gamma_2)\varepsilon \leq \rho_1/4.$$

Тогда из последнего неравенства при $\gamma \geq \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ получаем оценку

$$\mathcal{M}u \geq \gamma \frac{\rho_1}{2} \|(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2, \quad u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}). \tag{3.9}$$

Оценим теперь форму $\mathcal{M}u$ сверху. Из определения (3.1), очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}u &\leq \|e^{-\gamma t} \mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \|e^{-\gamma t} \mathcal{L}_{a,1}^1(D_t, D_x)u(t, x), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| = \\ &= \| \mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \| \| \mathcal{L}_{a,1}^1(i\eta + \gamma, i\xi)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \|. \end{aligned}$$

А поскольку из определения (2.16) вытекает

$$|\mathcal{L}_{a,1}^1(i\eta + \gamma, i\xi)| \leq c(|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|), \quad \gamma > 0,$$

то

$$\mathcal{M}u \leq c \| \mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}) \| \| (|\xi|^2 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1}) \|.$$

Учитывая это неравенство и (3.9), а также теорему о всюду плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ в соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^{n+1})$, при $\gamma \geq \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ получаем энергетическую оценку (1.7) для псевдогиперболического оператора (1.3) при достаточно малых возмущениях коэффициентов.

Теорема доказана.

Замечание. Учитывая доказанную теорему и используя теорему о разбиении единицы, нетрудно установить энергетическую оценку (1.7) для операторов вида (1.3), являющихся строго псевдогиперболическими при любом $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и имеющих достаточно гладкие коэффициенты, постоянные вне компакта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. Соболев С.Л. Избранные труды. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал “Гео” Изд-ва СО РАН. Т. I. 2003. Т. II. 2006.
3. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
4. Demidenko G. The Cauchy problem for pseudohyperbolic equations // *Selcuk J. Appl. Math.* 2001. V. 1. № 1. P. 47–62.
5. Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // *Сиб. матем. ж.* 2015. Т. 56. № 6. С. 1289–1303.
6. Fedotov I., Volevich L.R. The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // *Russian J. Math. Physics.* 2006. V. 13. № 3. P. 278–292.
7. Bondar L.N., Demidenko G.V. On the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations with lower order terms // *Mathematics.* 2023. V. 11. 3943.
8. Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В. О корректности задачи Коши для псевдогиперболических уравнений в весовых соболевских пространствах // *Сиб. матем. ж.* 2023. Т. 64. № 5. С. 895–911.
9. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1959.
10. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров: ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014.
11. Bishop R.E.D. Longitudinal waves in beams // *Aeronautical Quarterly.* 1952. V. 3. № 4. P. 280–293.
12. Rao J.S. *Advanced Theory of Vibration.* New York: Wiley, 1992.
13. Fedotov I., Shatalov M., Marais J. Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration // *Acta Mechanica.* 2016. V. 227. № 11. P. 3315–3324.
14. Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986.
15. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

ENERGY ESTIMATES FOR A CLASS OF PSEUDO-HYPERBOLIC OPERATORS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

G. V. Demidenko*

Novosibirsk State University, Pirogov St., 2, Novosibirsk, 630090 Russia

*e-mail: demidenk@math.nsc.ru

Received: 10 March, 2024

Revised: 10 March, 2024

Accepted: 05 May, 2024

Abstract. A class of strictly pseudo-hyperbolic fourth-order operators with variable coefficients is considered. Energy estimates are established under certain conditions on the coefficients. These estimates imply the uniqueness of the solution to the Cauchy problem, as well as a priori estimates.

Keywords: equations not resolved with respect to the highest derivative, pseudo-hyperbolic operators, weighted Sobolev spaces, energy estimates.