

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНЫХ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

© 2024 г. Д. Ю. Иванов^{1,*}

¹ 127994 Москва, ул. Образцова, 9, Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)),
Академия базовой подготовки, Россия

*e-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.09.2023 г.

Переработанный вариант 06.09.2023 г.

Принята к публикации 03.04.2024 г.

Предлагаются полуаналитические аппроксимации касательной производной (КП) и нормальной производной (НП) потенциала простого слоя (ППС) вблизи границы двумерной области, выполненные в рамках коллокационного метода граничных элементов и не требующие аппроксимации координатных функций границы. Для получения аппроксимаций используются аналитическое интегрирование по гладкой компоненте функции расстояния и специальный аддитивно-мультипликативный способ выделения особенностей. Доказано, что такие аппроксимации обладают более равномерной сходимостью вблизи границы области по сравнению с аналогичными аппроксимациями КП и НП ППС на основе простого мультипликативного способа выделения особенностей. Установлена одна из причин сильно неравномерной сходимости традиционных аппроксимаций КП и НП ППС на основе квадратурных формул Гаусса. Библ. 26. Табл. 2.

Ключевые слова: метод граничных элементов, почти сингулярный интеграл, аналитическое интегрирование.

DOI: 10.31857/S0044466924070094, EDN: xikdvh

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод граничных элементов (МГЭ) наряду с методом конечных элементов (МКЭ) и методом конечных разностей (МКР) является одним из основных методов решения краевых задач математической физики (см. [1, п. 1.8]). В рамках МГЭ дискретизации подвергается только граница области, в отличие от двух других методов, где дискретизируется вся область. В любой точке x , принадлежащей области, решения получают в виде потенциалов, имеющих вид криволинейных интегралов по длине дуги или поверхностных интегралов по площади поверхности в двумерном и трехмерном случаях соответственно. В коллокационном МГЭ (КМГЭ) (см. [1, п. 2.5]) для приближенного вычисления потенциалов граница разбивается на участки — так называемые граничные элементы, на каждом из которых осуществляется полиномиальная интерполяция функции плотности по длине дуги. Возникающие после этого интегралы на граничных элементах, вообще говоря, не могут быть вычислены точно, и в двумерном случае для их вычисления традиционно используются формулы Гаусса с постоянной (единичной) весовой функцией, которые обычно называют просто формулами Гаусса (см. [2, гл. 3, § 5, п. 3]). Если наблюдаемая точка x расположена достаточно далеко от точек x' , принадлежащих граничному элементу, то интеграл вычисляется с помощью формул Гаусса с удовлетворительной точностью. Если точка x находится на граничном элементе, то подынтегральная функция в общем случае имеет особенность при $x' = x$, и интеграл не может быть удовлетворительно вычислен с помощью формул Гаусса. Для вычисления таких сингулярных интегралов (СИ) применяются специальные методы, в том числе полуаналитические (см. [3]–[5]). Если же точка x не принадлежит граничному элементу, но находится от него достаточно близко, то подынтегральная функция не имеет особенности, но является быстро изменяющейся вблизи точки x_0 — проекции точки x на границу, поэтому

интеграл также не может быть вычислен с помощью формул Гаусса с приемлемой точностью. Такие интегралы принято называть почти сингулярными интегралами (ПСИ) (см. [6]–[10]), и для их вычисления также используются полуаналитические методы (см. [4]–[13]).

Необходимость вычисления потенциалов и их производных вблизи границы области возникает при решении задач в тонкостенных и многослойных конструкциях, тонких покрытиях, пленках, на концах трещин (см. [6], [10], [14]). В этих случаях МКЭ и МКР оказываются неэффективны, так как для их реализации требуется избыточная дискретизация пограничного слоя, и проявляется преимущество МГЭ, не требующего дискретизации области. Но при вычислениях вблизи границы большое значение имеет высокоточная аппроксимация самой границы, и линейная аппроксимация граничных элементов считается неудовлетворительной (см. [6], [14]). Дело в том, что из-за грубой аппроксимации границы может получиться даже так, что точка наблюдения, расположенная вблизи границы, может лежать по одну сторону от точной кривой, но по другую сторону от приближенной. Поэтому некоторые специальные методы вычисления ПСИ, реализованные вначале для линейных граничных элементов (см. [8]), были осуществлены впоследствии для квадратичных граничных элементов (см. [9]). Заметим, что линейными и квадратичными граничными элементами можно считать все те, у которых координатные функции граничной кривой заменены их линейными и квадратичными аппроксимациями соответственно. В последнее время отмечена необходимость еще более точной аппроксимации границы, например, с помощью сплайнов, и такая аппроксимация была реализована в рамках метода адаптивного деления почти сингулярных граничных элементов (см. [15], [16]) и методов нелинейного преобразования переменной интегрирования (см. [14], [17]).

Необходимость аппроксимации границы возникает по двум причинам. Первая причина имеет общий характер: на практике часто известно лишь конечное число граничных точек, на основе которых приходится делать интерполяцию всей границы. Вторая причина заключается в невозможности реализации метода для граничных элементов сложной формы. Вторая проблема характерна для полуаналитических методов, основанных на аналитическом интегрировании по длине дуги или площади поверхности, которое осуществимо лишь в случае простых координатных функций, так как степени функции расстояния находятся под знаком логарифма или в знаменателе подынтегрального выражения. По этой причине в работах [8], [4], [5], [11]–[13] для аппроксимации функции расстояния используются линейные приближения координатных функций, а в [10] используются линейные граничные элементы. В работе [9] применяются квадратичные граничные элементы, но для того, чтобы аналитическое интегрирование стало возможным, квадрат функции расстояния обрезается до квадратичной функции. Очевидно, что при таком подходе нет смысла использовать граничные элементы более высоких степеней, чем вторая.

Тем не менее в двумерном случае в рамках КМГЭ существует полуаналитический метод аппроксимации ПСИ, который может быть реализован для любой аналитически заданной границы без приближения координатных функций. Метод основан на переходе к новой переменной интегрирования $\rho \equiv (r^2 - d^2)^{1/2}$, где d и r — расстояния от наблюдаемой точки x до ее проекции x_0 и до граничной точки интегрирования x' соответственно. Для того чтобы стало возможным аналитическое интегрирование по ρ , применяется мультипликативный способ выделения особенностей: подынтегральная функция, порожденная фундаментальным решением, представляется в виде произведения двух функций переменной ρ , одна из которых при малых значениях d является быстро изменяющейся вблизи $\rho = 0$ и берется в качестве весовой, а другая, включающая якобиан, является медленно изменяющейся и аппроксимируется с помощью полиномиальной интерполяции по переменной ρ . Сложность аналитического интегрирования не зависит от формы границы, так как интегралы по ρ зависят от граничной кривой только параметрически. Заметим, что аппроксимация границы в данном случае осуществляется опосредованно — через интерполяцию медленно изменяющейся функции. Но поскольку интерполянт входит в виде множителя в числитель подынтегрального выражения, сложность интеграла при увеличении степени интерполянта принципиально не возрастает, и теоретически порядок аппроксимации может быть повышен до любого конечного значения. Недостатком данного метода является его реализация в настоящее время только для двумерной области с достаточно гладкой границей.

По существу этот метод изложен в работах [6], [7], [3] (в более ранней работе [3] рассматривается аппроксимация СИ, когда $d = 0$ и $\rho = r$), но формулировка и обоснование метода в этих работах выполнены только для квадратичных граничных элементов. В работе автора [18] доказано, что точное интегрирование по ρ может быть использовано для любой достаточно гладкой аналитически заданной границы без ее аппроксимации. В работах [6], [7] метод применялся для вычисления ПСИ, характерных для потенциала простого слоя (ППС) и его производных в случае уравнения Лапласа. В работах автора на основе аналитического интегрирования по ρ были получены аппроксимации теплового ППС (см. [18]) и его нормальной производной (НП) (см. [19]), а также потенциала двойного слоя (ПДС): теплового (см. [20]) и гармонического (см. [21]). Кроме случая теплового ППС, где также используется простой мультипликативный способ выделения особенностей, ПСИ в работах [19]–[21] специальным образом представляются в виде суммы двух ПСИ, каждый из которых аппроксимируется указанным мультипликативным способом. Такая аддитивно-мультипликативная аппроксимация (АМА) обеспечивает более равномерную сходимость аппроксимаций ПДС и НП ППС в приграничной области, чем простая мультипликативная аппроксимация (ПМА), описанная в [6], [7]. В настоящей работе с помощью АМА и ПМА получены аппроксимации касательной производной (КП) и НП гармонического ППС в любой точке двумерной приграничной области, не включающей саму границу. Для аппроксимации медленно изменяющихся функций используется кусочно-квадратичная интерполяция (ККИ). Как и в работах [18]–[21], точное интегрирование по ρ осуществляется не только для вычисления ПСИ, но и для вычисления интегралов на всех граничных элементах, принадлежащих некоторой фиксированной по ширине дуге граничной кривой вблизи точки наблюдения. На остальной части границы интегралы на граничных элементах, возникающие после интерполяции функции плотности, вычисляются с помощью формул Гаусса с порядком аппроксимации не меньше пятого, что вместе с использованием ККИ обеспечивает кубическую поточечную сходимость аппроксимаций КП и НП ППС. Такие аппроксимации КП и НП ППС, где использование АМА и ПМА сочетается с использованием формул Гаусса, условимся называть АМА КП ППС, АМА НП ППС, ПМА КП ППС, ПМА НП ППС. Кроме того, в настоящей работе исследуются аппроксимации КП и НП ППС, в которых интегралы на граничных элементах, возникающие после ККИ функции плотности, вычисляются исключительно с помощью формул Гаусса. Такие аппроксимации мы считаем традиционными и называем традиционными аппроксимациями КП и НП ППС на основе формул Гаусса.

В разд. 3 настоящей работы для границы класса C^5 доказано, что АМА КП ППС и ПМА КП ППС устойчиво сходятся в приграничной области с порядками аппроксимации не менее, чем $O(h^3 \ln |d|)$ и $O(h^3 d^{-1})$ соответственно (h — длина граничного элемента), а АМА НП ППС и ПМА НП ППС — $O(h^3)$ и $O(h^3 d^{-1})$ соответственно. В разд. 4 и для КП ППС, и для НП ППС доказано, что если расстояние от наблюдаемой точки до граничного элемента уменьшается пропорционально h , то АМА ПСИ и ПМА ПСИ являются аппроксимациями третьего и второго порядков соответственно, а на основе формул Гаусса вообще не могут быть получены аппроксимации ПСИ при фиксированном числе узлов квадратурной формулы. В заключительном разд. 5 приведены результаты вычисления КП и НП ППС вблизи границы единичного круга, которые подтверждают теоретические выводы.

Доказанное здесь утверждение относительно аппроксимаций ПСИ на основе формул Гаусса можно рассматривать как одну из причин сильно неравномерной сходимости традиционных аппроксимаций НП и КП ППС на основе формул Гаусса вблизи границы области. Но существуют и другие объяснения этого явления. Как правило, указывается, что при приближении точки наблюдения x к узлам формулы Гаусса x_μ аппроксимации потенциалов и их производных неограниченно возрастают, и точность катастрофически падает (см., например, [4], [12]). Но точность существенно уменьшается и тогда, когда точка x при пересечении границы проходит мимо узлов x_μ , и аппроксимации остаются конечными. В случае ПДС и НП ППС это можно объяснить тем, что их точные значения при переходе через границу терпят конечный разрыв, а их традиционные аппроксимации на основе формул Гаусса непрерывны и сходятся к точным значениям во всех точках замкнутой области, кроме x_μ , если граница достаточно гладкая. Такая сходимость не может быть равномерной, поскольку в достаточной близости от границы всегда сохраняется абсолютная погрешность, близкая к величине разрыва.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Пусть Ω_+ — двумерная открытая ограниченная односвязная область с границей $\partial\Omega$. В декартовых координатах (x_1, x_2) зададим параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1 = \tilde{x}_1(s)$, $x_2 = \tilde{x}_2(s)$. Параметр s по модулю равен длине дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки и заканчивающейся в точке $\tilde{x}(s) \equiv (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$, и увеличивается, когда область Ω_+ при обходе границы $\partial\Omega$ остается слева. Функции $\tilde{x}_1(s)$, $\tilde{x}_2(s)$ ($s \in \mathbb{R}$), периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S \equiv [-S, S]$ на множество $\partial\Omega$. Условимся далее писать $\partial\Omega \in C^n$, если существуют непрерывные на замкнутом множестве $\overline{I_S}$ производные $\tilde{x}_i^{(l)}(s)$ ($l = \overline{0, n}$, $i = 1, 2$), причем $\tilde{x}_i^{(l)}(-S+0) = \tilde{x}_i^{(l)}(S-0)$. Будем считать, что $\partial\Omega \in C^2$, если не оговорено особо.

Обозначим через $\mathbf{e}(s)$ единичный вектор, направленный по касательной к кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$ в сторону увеличения параметра s , а через $\mathbf{n}(s)$ — единичную нормаль к кривой $\partial\Omega$, проходящую через точку $\tilde{x}(s)$ и направленную внутрь области Ω_+ . Векторы $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ образуют правую систему, и их координаты (x_1, x_2) вычисляются с помощью формул $\mathbf{e}(s) \equiv (\tilde{x}'_1(s), \tilde{x}'_2(s))$, $\mathbf{n}(s) \equiv (-\tilde{x}'_2(s), \tilde{x}'_1(s))$.

Через $C(\partial\Omega)$ обозначим банахово пространство периодических с периодом $2S$ и непрерывных на всей числовой оси $\mathbb{R}$ вещественных функций $f(s)$, с нормой $\|f\|_{C(\partial\Omega)} = \sup_{s \in I_S} |f(s)|$. Через $C^n(\partial\Omega)$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) обозначим банаховы пространства функций $f \in C(\partial\Omega)$, имеющих непрерывные производные

$f^{(l)}(s)$ ($s \in \mathbb{R}$, $l = \overline{1, n}$), с нормой $\|f\|_{C^n(\partial\Omega)} = \sum_{l=0}^n \sup_{s \in I_S} |f^{(l)}(s)|$ ($C^0(\partial\Omega) = C(\partial\Omega)$).

Обозначим через D треть радиуса круга Ляпунова кривой $\partial\Omega$ (см. [22, п. 94]). Введем в рассмотрение местные системы декартовых координат (ξ_s, η_s) с началами в точках $\tilde{x}(s)$ и осями ординат, направленными с соответствующими векторами $\mathbf{n}(s)$. Точки $\tilde{x}_d(s)$ ($s \in I_S$) с местными координатами $(\xi_s, \eta_s) = (0, d)$ при фиксированном $d \in I_D \equiv [-D, 0] \cup (0, D]$ образуют замкнутую линию $\partial\Omega_d \in C^1$, при этом соответствие между точками $\tilde{x}_d(s)$ и $\tilde{x}(s)$ взаимно однозначное ($\tilde{x}_0(s) \equiv \tilde{x}(s)$), а нормали $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d(s)$ к кривой $\partial\Omega$ являются и нормальными к кривой $\partial\Omega_d$ (см. [22, п. 102]).

Обозначим через Ω_D множество, образованное точками $x \equiv (x_1, x_2) = \tilde{x}_d(s)$ ($d \in I_D$, $s \in I_S$). На множестве Ω_D зададим функции $u(x) \equiv (2\pi)^{-1}G(x)v$ и $w(x) \equiv (2\pi)^{-1}Q(x)v$, где

$$G(x)v \equiv \int_{I_S} g(x, s')v(s')ds', \quad g(x, s') \equiv \partial_{\mathbf{e}(s)} \ln r^{-1} = -2^{-1}(\partial_s r^2)/r^2, \quad (2.1a)$$

$$Q(x)v \equiv \int_{I_S} q(x, s')v(s')ds', \quad q(x, s') \equiv \partial_{\mathbf{n}(s)} \ln r^{-1} = -2^{-1}(\partial_d r^2)/r^2; \quad (2.1b)$$

$v \in C(\partial\Omega)$, $r(x, s') = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r}(x, s') \equiv \overrightarrow{x\tilde{x}(s')}$; дифференцирования $\partial_{\mathbf{e}(s)}$ и $\partial_{\mathbf{n}(s)}$ осуществляются по переменной $x = \tilde{x}_d(s)$ в направлениях $\mathbf{e}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ соответственно. Функции $u(x)$ и $w(x)$ — КП и НП двумерного гармонического ППС с плотностью v . Условимся, что мы можем иногда для краткости не писать аргументы функции, если они такие же, какие используются при определении функции.

Условимся линейный оператор $\mathbf{A}$, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y , обозначать как $\mathbf{A} [X \rightarrow Y]$. При каждом фиксированном $x \in \Omega_D$ оператор $G(x) [C(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}]$ — линейный функционал, отображающий пространство $C(\partial\Omega)$ в банахово пространство вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Получим представления функций $g(x, s')$ и $q(x, s')$, которые будут использованы для полуаналитических аппроксимаций функций $u(x)$ и $w(x)$ в области Ω_D . Пусть $\mathbf{r}_0(s, s') \equiv \overrightarrow{\tilde{x}(s)\tilde{x}(s')}$, $r_0(s, s') \equiv |\mathbf{r}_0|$. Зададим на множестве $\Theta \equiv \{(s, s') : s \in \overline{I_S}, s' - s \in \overline{I_S}\}$ функции $\psi_i(s, s')$ ($i = \overline{0, 3}$): при $s' \neq s$ равенствами $\psi_i \equiv \varphi_i/(s' - s)^2$ ($i = 0, 2$), $\psi_i \equiv \varphi_i/(s' - s)$ ($i = 1, 3$), где

$$\varphi_0(s, s') \equiv r_0^2 = [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)]^2 + [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)]^2, \quad (2.2)$$

$$\varphi_1(s, s') \equiv -(\mathbf{e}(s), \mathbf{r}_0)_{\mathbb{R}^2} = -\tilde{x}'_1(s) [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] - \tilde{x}'_2(s) [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)] = \partial_s \varphi_0, \quad (2.3)$$

$$\varphi_2(s, s') \equiv -(\mathbf{n}(s), \mathbf{r}_0)_{\mathbb{R}^2} = \tilde{x}'_2(s) [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] - \tilde{x}'_1(s) [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)], \quad (2.4)$$

$$\varphi_3(s, s') \equiv \partial_s \varphi_2 = \tilde{x}_2''(s) [\tilde{x}_1(s') - \tilde{x}_1(s)] - \tilde{x}_1''(s) [\tilde{x}_2(s') - \tilde{x}_2(s)] \quad (2.5)$$

(здесь $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^2}$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$), а при $s' = s$ равенствами $\psi_0 = -\psi_1 \equiv 1$, $\psi_2 = -\psi_3 \equiv 2^{-1} [\tilde{x}_2'(s) \tilde{x}_1''(s) - \tilde{x}_1'(s) \tilde{x}_2''(s)]$. В силу [23, лемма] при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Θ производные $\partial_s^k \partial_{s'}^l \psi_i$ ($k = \overline{0, n-l}$, $l = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, 3}$).

Мы считаем, что значение параметра s соответствует точке наблюдения $x = \tilde{x}_d(s)$, а значение s' — точке интегрирования $\tilde{x}(s')$ в выражениях (2.1) для КП и НП ППС. Местные координаты (ξ_s, η_s) точек $\tilde{x}_d(s)$ и $\tilde{x}(s')$ равны $(0, d)$ и $((e(s), r_0)_{\mathbb{R}^2}, (n(s), r_0)_{\mathbb{R}^2})$ соответственно, поэтому с учетом равенств (2.2)–(2.4) имеем

$$r^2 = \left| \overrightarrow{\tilde{x}_d(s) \tilde{x}(s')} \right|^2 = r_0^2 - 2d (n(s), r_0)_{\mathbb{R}^2} + d^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_2 + d^2. \quad (2.6)$$

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(d, s, s')$ на множестве $\Upsilon \equiv \overline{I_D} \times \Theta$: $\varphi \equiv r^2 - d^2 = \varphi_0 + 2d\varphi_2$. Кривая $\partial\Omega$ и окружность радиуса $d \in I_D$ с центром $\tilde{x}_d(s)$ имеют только одну общую точку $\tilde{x}(s)$, поэтому если $s' \neq s$, то $2d \cos \alpha < r_0$, где α — угол между лучами $\tilde{x}(s)\tilde{x}(s')$ и $\tilde{x}(s)\tilde{x}_d(s)$. Тогда из формулы (2.6) следует, что $\varphi \geq 0$ при $(d, s, s') \in \Upsilon$ ($\varphi > 0$ при $s \neq s'$, $\varphi = 0$ при $s = s'$). На множестве Υ зададим непрерывные функции $\rho(d, s, s')$, $\psi(d, s, s')$: $\rho = \sqrt{\varphi}$, если $s' \geq s$; $\rho = -\sqrt{\varphi}$, если $s' < s$; $\psi \equiv \psi_0 + 2d\psi_2$.

Так как контур $\partial\Omega$ не имеет точек самопересечения, то $c_r \equiv \inf_{(s, s') \in \Theta} \psi_0 > 0$ ($c_r \leq 1$). Если $(s, s') \in \Theta$ и ϑ — острый угол между нормальными, проходящими через точки $\tilde{x}(s)$ и $\tilde{x}(s')$, то $\vartheta \leq c_K |s' - s| \leq c_K c_r^{-1/2} r_0$, при этом $c_K \equiv \sup_{s \in I_S} K(s)$, $K(s) = 2|\psi_2(s, s)|$ — кривизна кривой $\partial\Omega$ в точке $\tilde{x}(s)$. Отсюда

следует, что величина $3D$, где $D \equiv (3c_K)^{-1} c_r^{1/2}$, может быть взята в качестве радиуса круга Ляпунова (см. [22, п. 94]). Так как $\psi_0(s, s) = 1$, $|\psi_2(s, s)| = 2^{-1} K(s)$ и $D \leq 1/(3c_K)$, то при $(d, s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$ имеем оценку $\psi(d, s, s) \geq 2/3$. Кроме того, $\psi = \varphi/(s' - s)^2 > 0$ при $(d, s, s') \in \Upsilon$, $s' \neq s$, поэтому $\psi > 0$ на множестве Υ . Следовательно, производные $\partial_{s'}^j \rho$ ($j = \overline{0, n+1}$) непрерывны на Υ при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), так как $\partial_{s'} \rho = \psi^{-1/2} [-\psi_1(s', s) - d\psi_3(s', s)]$.

В силу формул (2.1), (2.3), (2.5), (2.6) имеем при $d \in I_D$, $(s, s') \in \Theta$ равенства $2^{-1} \partial_s r^2 = \varphi_1 + d\varphi_3$, $2^{-1} \partial_{d'} r^2 = \varphi_2 + d$, и $g(\tilde{x}_d(s), s') = -(\varphi_1 + d\varphi_3) / (\varphi + d^2)$, $q(\tilde{x}_d(s), s') = -(\varphi_2 + d) / (\varphi + d^2)$. Учитывая также, что $\rho / (s' - s) = \psi^{1/2}$, получаем по два представления функций g и q при $x = \tilde{x}_d(s)$, $(d, s, s') \in \Upsilon$, $d \neq 0$:

$$g(x, s') = a_1(d, \rho) \delta_1(d, s, s') + a_2(d, \rho) \delta_2(d, s, s'), \quad (2.7a)$$

$$q(x, s') = a_3(d, \rho) \delta_3(d, s, s') + a_4(d, \rho) \delta_4(d, s, s'), \quad (2.7b)$$

$$g(x, s') = a_5(d, \rho) \delta_5(d, s, s'), \quad (2.8a)$$

$$q(x, s') = a_6(d, \rho) \delta_6(d, s, s'), \quad (2.8b)$$

где $a_1(d, \rho) \equiv \rho / (\rho^2 + d^2)$, $a_3(d, \rho) \equiv \rho^2 / (\rho^2 + d^2)$, $a_2(d, \rho) = a_4(d, \rho) \equiv d / (\rho^2 + d^2)$, $a_5(d, \rho) = a_6(d, \rho) \equiv 1 / (\rho^2 + d^2)$, $\delta_1 \equiv -\psi_1 / \psi^{1/2}$, $\delta_2 \equiv -\varphi_3$, $\delta_3 \equiv -\psi_2 / \psi$, $\delta_4 \equiv 1$, $\delta_5 \equiv -\varphi_1 - d\varphi_3$, $\delta_6 \equiv -\varphi_2 - d$. Так как $\psi > 0$ на множестве Υ , то при условии $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) существуют непрерывные на множестве Υ производные $\partial_{s'}^j \delta_i$ ($j = \overline{0, n}$, $i = \overline{1, 6}$).

Значения $s' - s$, соответствующие при фиксированном $s \in I_S$ точкам $\tilde{x}(s')$ с местными координатами $\xi_s = -D$ и $\xi_s = D$, обозначим через Σ'_s, Σ''_s соответственно ($\Sigma'_s < 0 < \Sigma''_s$).

Теорема 1 (см. [18, теорема 5]). Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Тогда на множестве $\Upsilon' \equiv \{(d, s, s') : d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S}, s' - s \in \Xi_s \equiv [\Sigma'_s, \Sigma''_s]\}$ существуют положительная, ограниченная сверху функция $\delta_0(d, s, s') \equiv (\partial_{s'} \rho)^{-1}$ и непрерывные производные $\partial_{s'}^j \delta_0$ ($j = \overline{0, n}$).

Следствие 1. Пусть $\partial\Omega \in C^{n+2}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Тогда функции $\rho_{d,s}(\sigma) \equiv \rho(d, s, s + \sigma)$ при любых фиксированных $s \in I_S$, $d \in \overline{I_D}$ диффеоморфно с гладкостью C^{n+1} отображают множества Ξ_s на соответствующие множества $\rho_{d,s}(\Xi_s)$. Функции $\delta_0(d, s, \rho) \equiv \delta_0(d, s, s + \sigma_{d,s}(\rho))$, $\tilde{\delta}_i(d, s, \rho) \equiv \delta_i(d, s, s + \sigma_{d,s}(\rho)) \delta_0$ ($i = \overline{1, 6}$; $\sigma_{d,s}(\rho)$ — функция, обратная к функции $\rho_{d,s}(\sigma)$) имеют непрерывные на множестве $\tilde{\Upsilon}' \equiv \{(d, s, \rho) : d \in \overline{I_D}, s \in \overline{I_S}, \rho \in \rho_{d,s}(\Xi_s)\}$ производные $\partial_\rho^j \tilde{\delta}_i$ ($j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, 6}$).

В заключение раздела рассмотрим квадратичные аппроксимации вещественной функции $f(z) \in C([z_0, z_1])$ ($z_0 < z_1$). Обозначим через $\hat{f}(z)$ интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами $z_0, z_1, z_2 \equiv 2^{-1}(z_0 + z_1)$ (см. [2, гл. 2, § 5, п. 2]):

$$\hat{f}(z) \equiv f(z_0) + (z - z_0)f_1(z_0, z_1) + (z - z_0)(z - z_1)f_2(z_0, z_1, z_2).$$

Здесь f_1, f_2 — разделенные разности 1-го и 2-го порядков:

$$f_1(z_0, z_1) \equiv (f(z_1) - f(z_0)) / (z_1 - z_0), \quad f_2(z_0, z_1, z_2) \equiv (f(z_1, z_2) - f(z_0, z_1)) / (z_2 - z_0)$$

(см. [2, гл. 2, § 5, п. 1]). При $z \in (z_0, z_2) \cup (z_2, z_1)$ имеют место две формулы при $f \in C([z_0, z_1])$ и $f \in C^1([z_0, z_1])$ соответственно:

$$f(z) = \hat{f}(z) + p_3(z, z_0, z_1)f_3(z, z_0, z_1, z_2), \quad (2.9)$$

$$f(z) = \hat{f}(z) + p_3(z, z_0, z_1)f_3(z_0, z_1, z_2, z_2) + p_4(z, z_0, z_1)f_4(z, z_0, z_1, z_2, z_2) \quad (2.10)$$

(см. [2, гл. 2, § 5, п. 3] и [2, гл. 2, § 11, п. 5]). Здесь $p_3(z, z_0, z_1) \equiv (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)$, $p_4(z, z_0, z_1) \equiv (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)^2$; f_3, f_4 — разделенные разности 3-го и 4-го порядков:

$$f_3(z, z_0, z_1, z_2) \equiv (f_2(z_0, z_1, z_2) - f_2(z, z_0, z_1)) / (z_2 - z),$$

$$f_3(z_0, z_1, z_2, z_2) \equiv \lim_{z_\epsilon \rightarrow z_2} f_3(z_0, z_1, z_2, z_\epsilon) \quad (z_\epsilon \in (z_0, z_2) \cup (z_2, z_1)),$$

$$f_4(z, z_0, z_1, z_2, z_2) \equiv (f_3(z_0, z_1, z_2, z_2) - f_3(z, z_0, z_1, z_2)) / (z_2 - z)$$

(см. [2, гл. 2, § 5, п. 1] и [2, гл. 2, § 11, п. 4]). Для любого $z \in (z_0, z_2) \cup (z_2, z_1)$ существуют $\zeta_1, \zeta_2 \in [z_0, z_1]$, такие что

$$f_3(z, z_0, z_1, z_2) = 6^{-1}f^{(3)}(\zeta_1) \quad (f \in C^3([z_0, z_1])), \quad (2.11)$$

$$f_4(z, z_0, z_1, z_2, z_2) = 24^{-1}f^{(4)}(\zeta_2) \quad (f \in C^4([z_0, z_1])) \quad (2.12)$$

(см. [2, гл. 2, § 5, п. 3] и [2, гл. 2, § 11, п. 5]). В силу формул (2.9), (2.11) при $z \in [z_0, z_1]$, $f \in C^3([z_0, z_1])$ имеет место мажорантная оценка погрешности интерполяции

$$|\hat{f}(z) - f(z)| \leq c_\lambda \sup_{z \in [z_0, z_1]} |f^{(3)}(z)| 8^{-1} (z_1 - z_0)^3 \quad (c_\lambda \equiv \sqrt{3}/27). \quad (2.13)$$

Также интерполяционный многочлен $\hat{f}(z)$ может быть записан в виде $\hat{f}(z) = \sum_{m=0}^2 f(z_m) \Lambda_m^{[z_0, z_1]}(z)$ (см. [2, гл. 2, § 2, п. 1]), где $\Lambda_m^{[z_0, z_1]}(z)$ ($m = \overline{0, 2}$) — квадратичные функции, такие что $\Lambda_m^{[z_0, z_1]}(z_m) = 1$ и $\Lambda_m^{[z_0, z_1]}(z_j) = 0$, если $j \neq m$. При $z \in [z_0, z_1]$ имеем неравенства $|\Lambda_m^{[z_0, z_1]}(z)| \leq 1$ ($m = \overline{0, 2}$) и, как следствие, оценки

$$|\hat{f}(z)| \leq c_{\Lambda, 0} \max_{m=\overline{0, 2}} |f(z_m)| \quad (f \in C([z_0, z_1]), \quad c_{\Lambda, 0} \equiv 3). \quad (2.14)$$

При $z \in [z_0, z_1]$ для производных $\hat{f}^{(j)}(z)$ ($j = 1, 2$) справедливы формулы

$$\hat{f}^{(1)}(z) = \frac{2z - (z_2 + z_1)}{(z_0 - z_2)(z_0 - z_1)} \int_{z_2}^{z_0} f^{(1)}(\zeta) d\zeta + \frac{2z - (z_2 + z_0)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_0)} \int_{z_2}^{z_1} f^{(1)}(\zeta) d\zeta,$$

$$\hat{f}^{(2)}(z) = \frac{\int_{z_2}^{z_0} f^{(2)}(\zeta) (z_0 - \zeta) d\zeta}{(z_0 - z_2)(z_0 - z_1)} + \frac{\int_{z_2}^{z_1} f^{(2)}(\zeta) (z_1 - \zeta) d\zeta}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_0)},$$

полученные с помощью формулы Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла (см. [24, п. 318]). В силу этих формул при $z \in [z_0, z_1]$ имеют место оценки

$$|\hat{f}^{(j)}(z)| \leq c_{\Lambda, j} \sup_{z \in [z_0, z_1]} |f^{(j)}(z)| \quad (f \in C^j([z_0, z_1]), \quad j = 1, 2; \quad c_{\Lambda, 1} \equiv 3, \quad c_{\Lambda, 2} \equiv 2^{-1}). \quad (2.15)$$

3. ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ КП И НП ППС

Рассмотрим представления КП и НП ППС, которые будут использованы для построения их полуаналитических аппроксимаций. Пусть $x = \tilde{x}_d(s)$, $d \in I_D$, $s \in I_S$. В силу равенств (2.7), (2.8) функционалы $G(x)$, $Q(x)$ ($x \in \Omega_D$) могут быть представлены в виде сумм двумя способами:

$$G(x) = A_1(x) + A_2(x) + A_7(x), \quad Q(x) = A_3(x) + A_4(x) + A_8(x), \quad (3.1)$$

$$G(x) = A_5(x) + A_7(x), \quad Q(x) = A_6(x) + A_8(x); \quad (3.2)$$

$$A_i(x)f \equiv \int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)} a_i(d, \rho) B_i(d, s, \rho) f \, d\rho, \quad B_i(d, s, \rho) f \equiv \tilde{\delta}_i(d, s, \rho) f(s + \sigma_{d,s}(\rho)) \quad (i = \overline{1, 6});$$

$$A_j(x)f \equiv \int_{\overline{I_S \setminus \Xi_s}} B_j(d, s, s + \sigma) f \, d\sigma \quad (j = 7, 8),$$

$$B_7(d, s, s')f \equiv g(\tilde{x}_d(s), s') f(s'), \quad B_8(d, s, s')f \equiv q(\tilde{x}_d(s), s') f(s').$$

Здесь $f \in C(\partial\Omega)$. В силу следствия 1 и неравенства $r \geq D$, имеющего место, если $(d, s, s') \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}$, для норм функционалов $A_i(x)$ [$C(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$] ($x \in \Omega_D$) справедливы оценки

$$\|A_i(x)\| \leq \chi_i(d) \tilde{c}_i \hat{c}_{i,0} \quad (i = \overline{1, 8}), \quad (3.3)$$

$$\chi_1(d) \equiv |\ln |d||, \quad \chi_2(d) = \chi_3(d) = \chi_4(d) = \chi_7(d) = \chi_8(d) \equiv 1, \quad \chi_5(d) = \chi_6(d) \equiv |d|^{-1},$$

$$\tilde{c}_i \equiv \sup_{d \in I_D} \chi_i^{-1}(d) \int_{I_S} |a_i(d, \rho)| \, d\rho, \quad \hat{c}_{i,0} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \Upsilon'} |\tilde{\delta}_i(d, s, \rho)| \quad (i = \overline{1, 6}),$$

$$\tilde{c}_7 = \tilde{c}_8 \equiv 2S, \quad \hat{c}_{7,0} \equiv \sup_{(d,s,s') \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}} |g(\tilde{x}_d(s), s')|, \quad \hat{c}_{8,0} \equiv \sup_{(d,s,s') \in \overline{\Upsilon \setminus \Upsilon'}} |q(\tilde{x}_d(s), s')|.$$

Заметим, что $A_1(x) + A_2(x) = A_5(x)$, $A_3(x) + A_4(x) = A_6(x)$. Тем не менее представления (3.1) позволяют получить более сильные оценки норм функционалов $G(x)$ и $Q(x)$, чем (3.2). А именно, пусть $D \equiv \min \left\{ (3c_K)^{-1} c_r^{1/2}, e^{-1} \right\}$. Тогда в силу (3.2), (3.3) для норм функционалов $G(x)$, $Q(x)$ [$C(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$] ($x \in \Omega_D$) справедливы оценки $\|G(x)\| \leq |d|^{-1} (\tilde{c}_5 \hat{c}_{5,0} + \tilde{c}_7 \hat{c}_{7,0})$, $\|Q(x)\| \leq |d|^{-1} (\tilde{c}_6 \hat{c}_{6,0} + \tilde{c}_8 \hat{c}_{8,0})$, а в силу (3.1), (3.3) имеем

$$\|G(x)\| \leq |\ln |d|| c_G, \quad c_G \equiv \tilde{c}_1 \hat{c}_{1,0} + \tilde{c}_2 \hat{c}_{2,0} + \tilde{c}_7 \hat{c}_{7,0}; \quad (3.4a)$$

$$\|Q(x)\| \leq c_Q, \quad c_Q \equiv \tilde{c}_3 \hat{c}_{3,0} + \tilde{c}_4 \hat{c}_{4,0} + \tilde{c}_8 \hat{c}_{8,0}. \quad (3.4b)$$

В соответствии с КМГЭ для осуществления дискретизации разобьем границу $\partial\Omega$ на граничные элементы и осуществим ККИ функции плотности. А именно, пусть $L/2 \in \mathbb{N}$, $h \equiv S/(L+1)$, $s_l \equiv lh$, $l \in \mathbb{Z}$. Тогда $\tilde{x}(s_{l+2L+2}) = \tilde{x}(s_l)$. Введем в рассмотрение пространства H_L вещественных сеточных функций f со значениями f_l , заданными в точках коллокации s_l ($f_{l+2L+2} = f_l$), с нормой $\|f\|_{H_L} = \max_{-L-1 \leq l \leq L} |f_l|$. Зададим проецирующие операторы $\mathbf{P}_L$ [$C(\partial\Omega) \rightarrow H_L$]:

$$(\mathbf{P}_L f)_l \equiv f(s_l), \quad f(s) \in C(\partial\Omega) \quad (3.5)$$

($\|\mathbf{P}_L\| \leq 1$), и интерполирующие операторы $\ddot{\mathbf{P}}_L$ [$H_L \rightarrow C(\partial\Omega)$]:

$$(\ddot{\mathbf{P}}_L f)(s) \equiv \sum_{m=0}^2 f_{2l-1+m} \Lambda_m^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s) \quad (s \in [s_{2l-1}, s_{2l+1}], \quad l = \overline{-L/2, L/2}).$$

В силу оценки (2.14) операторы $\ddot{\mathbf{P}}_L$ [$H_L \rightarrow C(\partial\Omega)$] ограничены в совокупности: $\|\ddot{\mathbf{P}}_L\| \leq c_{\Lambda,0}$. На основании неравенства (2.13) имеем оценки

$$\|\ddot{\mathbf{P}}_L \mathbf{P}_L f - f\|_{C(\partial\Omega)} \leq c_\kappa \|f^{(3)}\|_{C(\partial\Omega)} h^3 \quad (f \in C^3(\partial\Omega)). \quad (3.6)$$

С помощью равенств

$$\ddot{G}(x)f \equiv G(x)\ddot{\mathbf{P}}_L f, \quad \ddot{Q}(x)f \equiv Q(x)\ddot{\mathbf{P}}_L f \quad (f \in H_L)$$

зададим сеточные функционалы $\ddot{G}(x), \ddot{Q}(x) [H_L \rightarrow \mathbb{R}]$ ($x \in \Omega_D$). Используя оценки (3.4), (3.6), получаем оценки аппроксимации функционалов $G(x), Q(x)$ ($x \in \Omega_D$) функционалами $\ddot{G}(x)\mathbf{P}_L, \ddot{Q}(x)\mathbf{P}_L$:

$$\left| \ddot{G}(x)\mathbf{P}_L f - G(x)f \right| \leq |\ln |d|| c_G c_\lambda \left\| f^{(3)} \right\|_{C(\partial\Omega)} h^3 \quad (f \in C^3(\partial\Omega)), \quad (3.7a)$$

$$\left| \ddot{Q}(x)\mathbf{P}_L f - Q(x)f \right| \leq c_Q c_\lambda \left\| f^{(3)} \right\|_{C(\partial\Omega)} h^3 \quad (f \in C^3(\partial\Omega)). \quad (3.7b)$$

Функционалы $\ddot{G}(x), \ddot{Q}(x)$ имеют вид матриц-строк длиной $2L + 2$:

$$\ddot{G}(x)f = \sum_{l=-L-1}^L \ddot{g}_l(x)f_l \quad (f \in H_L), \quad \ddot{g}_{2l}(x) \equiv \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} g_{1,l}(x, s') ds', \quad (3.8)$$

$$\ddot{Q}(x)f = \sum_{l=-L-1}^L \ddot{q}_l(x)f_l \quad (f \in H_L), \quad \ddot{q}_{2l}(x) \equiv \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} q_{1,l}(x, s') ds',$$

где при $l = \overline{-L/2, L/2}$

$$\ddot{g}_{2l-1}(x) \equiv \int_{s_{2l-3}}^{s_{2l-1}} g_{2,l}(x, s') ds' + \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} g_{0,l}(x, s') ds' \quad (l = \overline{-L/2, L/2}),$$

$$g_{m,l}(x, s') \equiv g(x, s') \Lambda_m^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s') \quad (m = 0, 1); \quad g_{2,l}(x, s') \equiv g(x, s') \Lambda_m^{[s_{2l-3}, s_{2l-1}]}(s'),$$

$$\ddot{q}_{2l-1}(x) \equiv \int_{s_{2l-3}}^{s_{2l-1}} q_{2,l}(x, s') ds' + \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l+1}} q_{0,l}(x, s') ds' \quad (l = \overline{-L/2, L/2}),$$

$$q_{m,l}(x, s') \equiv q(x, s') \Lambda_m^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s') \quad (m = 0, 1), \quad q_{2,l}(x, s') \equiv q(x, s') \Lambda_2^{[s_{2l-3}, s_{2l-1}]}(s').$$

Интегралы $\ddot{g}_l(x), \ddot{q}_l(x)$ в общем случае не могут быть вычислены точно, поэтому требуется их аппроксимация.

В соответствии с равенствами (3.1), (3.2) функционалы $\ddot{G}(x), \ddot{Q}(x)$ могут быть представлены в виде сумм двумя способами: $\ddot{G}(x) = \ddot{A}_1(x) + \ddot{A}_2(x) + \ddot{A}_7(x)$, $\ddot{Q}(x) = \ddot{A}_3(x) + \ddot{A}_4(x) + \ddot{A}_8(x)$ и $\ddot{G}(x) = \ddot{A}_5(x) + \ddot{A}_7(x)$, $\ddot{Q}(x) = \ddot{A}_6(x) + \ddot{A}_8(x)$, при этом $\ddot{A}_i(x) \equiv A_i(x)\ddot{\mathbf{P}}_L$ ($i = \overline{1, 8}$). Введем в рассмотрение функционалы $\hat{A}_i(x)$, аппроксимирующие $\ddot{A}_i(x)$ ($i = \overline{1, 6}$). Для этого заменим функции $B_i(d, s, \rho)\ddot{\mathbf{P}}_L f$ ($f \in H_L$) их ККИ $\hat{B}_i(d, s, \rho)f$ по переменной ρ :

$$\hat{A}_i(x)f \equiv \int_{\rho_{d,s}(\Xi_s)} a_i(d, \rho) \hat{B}_i(d, s, \rho) f d\rho \quad (i = \overline{1, 6}),$$

$$\hat{B}_i(d, s, \rho)f \equiv \hat{B}_{i,l}(d, s, \rho)f \quad (\rho \in [\rho_{d,s,l}, \rho_{d,s,l+1}], \quad l = \overline{-L-1, L}),$$

$$\hat{B}_{i,l}(d, s, \rho)f \equiv \begin{cases} \sum_{m=0}^2 B_i(d, s, \rho_{d,s,l,m})\ddot{\mathbf{P}}_L f \Lambda_m^{[\rho_{d,s,l}, \rho_{d,s,l+1}]}(\rho) & (\rho_{d,s,l} < \rho_{d,s,l+1}) \\ B_i(d, s, \rho_{d,s,l})\ddot{\mathbf{P}}_L f & (\rho_{d,s,l} = \rho_{d,s,l+1}) \end{cases};$$

$$\rho_{d,s,l,0} \equiv \rho_{d,s,l}, \quad \rho_{d,s,l,1} \equiv \rho_{d,s,l+1}, \quad \rho_{d,s,l,2} \equiv 2^{-1}(\rho_{d,s,l} + \rho_{d,s,l+1}).$$

Здесь $\rho_{d,s,l} \equiv \rho_{d,s}(\alpha_{s,l})$; $\alpha_{s,l} \equiv \min \{s_l - s, \Sigma_s''\}$, если $s_l \geq s$, и $\alpha_{s,l} \equiv \max \{s_l - s, \Sigma_s'\}$, если $s_l < s$. По определению $\bigcup_{l=-L-1}^L [\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1}] = \Xi_s$ ($s \in \overline{I_S}$). Промежутки $[\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1}]$ можно рассматривать как пересечения промежутков $[s_l, s_{l+1}]$ с множеством Ξ_s в том смысле, что выполняются равенства $(\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1}) = (s_l, s_{l+1}) \cap \Xi_s$.

Аппроксимации $\hat{A}_7(x)$, $\hat{A}_8(x)$ функционалов $\ddot{A}_7(x)$, $\ddot{A}_8(x)$ построим с помощью формулы Гаусса с γ узлами:

$$\hat{A}_i(x) f \equiv 2^{-1} \sum_{l=-L-1}^L (\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l}) \hat{B}_{i,l}(d, s) f \quad (i = 7, 8),$$

$$\hat{B}_{i,l}(d, s) f \equiv \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j B_i(d, s, \beta_{s,l,j}) \ddot{P}_L f, \quad \beta_{s,l,j} \equiv 2^{-1}(\beta_{s,l} + \beta_{s,l+1}) + 2^{-1}(\beta_{s,l+1} - \beta_{s,l}) z_j,$$

где $\beta_{s,l} \equiv \max \{s_l, s + \Sigma_s''\}$, если $s_l \geq s$, и $\beta_{s,l} \equiv \min \{s_l, s + \Sigma_s'\}$, если $s_l < s$; z_j — корни многочлена $(d'/dz^\gamma)(z^2 - 1)^\gamma$ на интервале $(-1, 1)$ (см. [2, гл. 3, § 5, п. 2]); для весовых коэффициентов ω_j выполняются условия $\sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j = 2$, $\omega_j > 0$ (см. [2, гл. 3, § 5, п. 1]). По определению $\bigcup_{l=-L-1}^L [\beta_{s,l}, \beta_{s,l+1}] = \overline{I_S} \setminus \overline{\Xi_s}$ ($s \in \overline{I_S}$). Промежутки $[\beta_{s,l}, \beta_{s,l+1}]$ можно рассматривать как пересечения промежутков $[s_l, s_{l+1}]$ с множеством $\overline{I_S} \setminus \overline{\Xi_s}$ в том смысле, что выполняются равенства $(\beta_{s,l}, \beta_{s,l+1}) = (s_l, s_{l+1}) \cap \overline{I_S} \setminus \overline{\Xi_s}$.

Зададим функционалы $\hat{G}_I(x)$, $\hat{G}_{II}(x)$, $\hat{Q}_I(x)$, $\hat{Q}_{II}(x)$ [$H_L \rightarrow \mathbb{R}$] ($x \in \Omega_D$):

$$\hat{G}_I(x) \equiv \hat{A}_1(x) + \hat{A}_2(x) + \hat{A}_7(x), \quad \hat{G}_{II}(x) \equiv \hat{A}_5(x) + \hat{A}_7(x),$$

$$\hat{Q}_I(x) \equiv \hat{A}_3(x) + \hat{A}_4(x) + \hat{A}_8(x), \quad \hat{Q}_{II}(x) \equiv \hat{A}_6(x) + \hat{A}_8(x).$$

В силу оценки (2.14) функционалы $\hat{B}_i(d, s, \rho)$ [$H_L \rightarrow \mathbb{R}$] ($i = \overline{1, 6}$) равномерно ограничены по $(d, s, \rho) \in \tilde{\Upsilon}'$: $\|\hat{B}_i(d, s, \rho)\| \leq c_{\Lambda,0}^2 \hat{c}_{i,0}$, а функционалы $\hat{B}_{j,l}(d, s)$ ($j = 7, 8$) [$H_L \rightarrow \mathbb{R}$] равномерно ограничены по $(d, s) \in \overline{I_D} \times \overline{I_S}$, $l \in \mathbb{Z}$: $\|\hat{B}_{j,l}(d, s)\| \leq 2c_{\Lambda,0} \hat{c}_{j,0}$. Поэтому при $x \in \Omega_D$ справедливы неравенства $\|\hat{A}_i(x)\| \leq \chi_i(d) \tilde{c}_i c_{\Lambda,0}^2 \hat{c}_{i,0}$ ($i = \overline{1, 6}$), $\|\hat{G}_j(x)\| \leq \tilde{c}_j c_{\Lambda,0} \hat{c}_{j,0}$ ($j = 7, 8$), на основании которых получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $\gamma \in \mathbb{N}$. Тогда функционалы $\ln^{-1} |d| \hat{G}_I(x)$, $d \hat{G}_{II}(x)$, $\hat{Q}_I(x)$, $d \hat{Q}_{II}(x)$ [$H_L \rightarrow \mathbb{R}$] ($L/2 \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega_D$) ограничены в совокупности.

В силу следствия 1 и неравенства $r \geq D$, имеющего место, если $(d, s, s') \in \overline{\Upsilon} \setminus \overline{\Upsilon}'$, при указанных гладкостях кривой $\partial\Omega$ и $j = \overline{0, n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ могут быть определены константы

$$\hat{c}_{i,j} \equiv \sup_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}'} \left| \partial_\rho^j \tilde{\delta}_i \right| \quad (i = \overline{0, 6}, \partial\Omega \in C^{m+2}),$$

$$\hat{c}_{7,j} \equiv \sup_{(d,s,s') \in \overline{\Upsilon} \setminus \overline{\Upsilon}'} \left| \partial_{s'}^j g(\tilde{x}_d(s), s') \right|, \quad \hat{c}_{8,j} \equiv \sup_{(d,s,s') \in \overline{\Upsilon} \setminus \overline{\Upsilon}'} \left| \partial_{s'}^j q(\tilde{x}_d(s), s') \right| \quad (\partial\Omega \in C^{m+1}).$$

Используя неравенства (2.13)–(2.15) и $\rho_{d,s,l+1} - \rho_{d,s,l} \leq c_h h$ ($c_h \equiv \sup_{(d,s,s') \in \Upsilon'} \partial_{s'} \rho$), при $f \in C^2(\partial\Omega)$, $\ddot{f} \equiv \ddot{P}_L \mathbf{P}_L f$, $x \in \Omega_D$ и указанных гладкостях кривой $\partial\Omega$ получаем оценки

$$\begin{aligned} \left| \hat{A}_i(x) \mathbf{P}_L f - \ddot{A}_i(x) \mathbf{P}_L f \right| &\leq \chi_i(d) \tilde{c}_i c_\Lambda 8^{-1} c_h^3 h^3 \operatorname{ess\,sup}_{(d,s,\rho) \in \tilde{\Upsilon}'} \left| \partial_\rho^3 B_i(d, s, \rho) \ddot{f} \right| \leq \\ &\leq 8^{-1} \chi_i(d) \tilde{c}_i c_h^3 c_\Lambda c_i \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} h^3 \quad (\partial\Omega \in C^5), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$c_i \equiv \hat{c}_{i,3} c_{\Lambda,0} + (3\hat{c}_{i,2} \hat{c}_{0,0} + 3\hat{c}_{i,1} \hat{c}_{0,1} + \hat{c}_{i,0} \hat{c}_{0,2}) c_{\Lambda,1} + 3(\hat{c}_{i,1} \hat{c}_{0,0}^2 + \hat{c}_{i,0} \hat{c}_{0,1} \hat{c}_{0,0}) c_{\Lambda,2} \quad (i = \overline{1, 6});$$

$$\begin{aligned} \left| \hat{A}_i(x) \mathbf{P}_L f - \ddot{A}_i(x) \mathbf{P}_L f \right| &\leq \tilde{c}_i h^{2\gamma} \operatorname{ess\,sup}_{(d,s,s') \in \overline{\Upsilon} \setminus \Upsilon'} \left| \partial_{s'}^{2\gamma} B_j(d, s, s') \ddot{f} \right| \leq \\ &\leq 2S\tilde{c}_i \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} h^{2\gamma} \quad (\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$c_i \equiv (\gamma!)^4 [(2\gamma)!]^{-3} (2\gamma+1)^{-1} [\hat{c}_{i,2\gamma} c_{\Lambda,0} + 2\gamma \hat{c}_{i,2\gamma-1} c_{\Lambda,1} + \gamma(2\gamma-1) \hat{c}_{i,2\gamma-2} c_{\Lambda,2}] \quad (i = 7, 8).$$

Здесь $\operatorname{ess\,sup}$ — существенный супремум (см. [25, гл. III, п. 1, пп. 11]). При получении оценки (3.10) используется оценка остаточного члена формулы Гаусса (см. [2, гл. 3, § 5, п. 2]).

На основании оценок (3.7), (3.9), (3.10) при $f \in C^3(\partial\Omega)$, $x \in \Omega_D$, $h \leq 1$, $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, получаем оценки

$$\left| \hat{G}_I(x) \mathbf{P}_L f - G(x) f \right| \leq |\ln |d|| c_{G,I} \|f\|_{C^3(\partial\Omega)} h^3, \quad c_{G,I} \equiv 8^{-1} c_h^3 c_\lambda (\tilde{c}_1 c_1 + \tilde{c}_2 c_2) + \tilde{c}_7 c_7 + c_G c_\lambda,$$

$$\left| \hat{G}_{II}(x) \mathbf{P}_L f - G(x) f \right| \leq |d|^{-1} c_{G,II} \|f\|_{C^3(\partial\Omega)} h^3, \quad c_{G,II} \equiv 8^{-1} c_h^3 c_\lambda \tilde{c}_5 c_5 + \tilde{c}_7 c_7 + c_G c_\lambda,$$

$$\left| \hat{Q}_I(x) \mathbf{P}_L f - Q(x) f \right| \leq c_{Q,I} \|f\|_{C^3(\partial\Omega)} h^3, \quad c_{Q,I} \equiv 8^{-1} c_h^3 c_\lambda (\tilde{c}_3 c_3 + \tilde{c}_4 c_4) + \tilde{c}_8 c_8 + c_Q c_\lambda,$$

$$\left| \hat{Q}_{II}(x) \mathbf{P}_L f - Q(x) f \right| \leq |d|^{-1} c_{Q,II} \|f\|_{C^3(\partial\Omega)} h^3, \quad c_{Q,II} \equiv 8^{-1} c_h^3 c_\lambda \tilde{c}_6 c_6 + \tilde{c}_8 c_8 + c_Q c_\lambda,$$

из которых вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $\gamma, L/2 \in \mathbb{N}$. Тогда функционалы $\ln^{-1} |d| \hat{G}_I(x) \mathbf{P}_L$, $d \hat{G}_{II}(x) \mathbf{P}_L$ [$C^3(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$], $\hat{Q}_I(x) \mathbf{P}_L$, $d \hat{Q}_{II}(x) \mathbf{P}_L$ [$C^3(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$] сходятся при $L \rightarrow \infty$ по операторной норме к соответствующим функционалам $\ln^{-1} |d| G(x)$, $d G(x)$, $Q(x)$, $d Q(x)$ [$C^3(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$] равномерно относительно $x \in \Omega_D$ со скоростью не меньше, чем кубическая.

Определения и основные сведения, касающиеся сходимости последовательностей операторов в различных топологиях см. в [25, гл. VI, п. 1, пп. 1–3].

С учетом формул (3.8) функционалы $\hat{G}_I(x)$, $\hat{G}_{II}(x)$, $\hat{Q}_I(x)$, $\hat{Q}_{II}(x)$ имеют вид матриц-строк длиной $2L+2$:

$$\hat{G}_I(x) f = \sum_{l=-L-1}^L [b_{1,l} + b_{2,l} + b_{7,l}] f_l, \quad \hat{G}_{II}(x) f = \sum_{l=-L-1}^L [b_{5,l} + b_{7,l}] f_l \quad (f \in H_L), \quad (3.11a)$$

$$\hat{Q}_I(x) f = \sum_{l=-L-1}^L [b_{3,l} + b_{4,l} + b_{8,l}] f_l, \quad \hat{Q}_{II}(x) f = \sum_{l=-L-1}^L [b_{6,l} + b_{8,l}] f_l \quad (f \in H_L), \quad (3.11b)$$

где при $l = \overline{-L/2, L/2}$

$$\begin{aligned} b_{i,2l}(x) &\equiv \sum_{k=-1}^0 \int_{\rho_{d,s,2l+k}}^{\rho_{d,s,2l+k+1}} a_i \hat{\delta}_{i,2l+k,1} d\rho \quad (i = \overline{1,6}), \\ b_{i,2l-1}(x) &\equiv \sum_{k=-3}^{-2} \int_{\rho_{d,s,2l+k}}^{\rho_{d,s,2l+k+1}} a_i \hat{\delta}_{i,2l+k,2} d\rho + \sum_{k=-1}^0 \int_{\rho_{d,s,2l+k}}^{\rho_{d,s,2l+k+1}} a_i \hat{\delta}_{i,2l+k,0} d\rho \quad (i = \overline{1,6}), \\ \hat{\delta}_{i,2l+k,m}(d, s, \rho) &\equiv \\ &\equiv \sum_{m'=0}^2 \tilde{\delta}_i(d, s, \rho_{d,s,2l+k,m'}) \Lambda_m^{[s_{2l-1}, s_{2l+1}]}(s + \sigma_{d,s}(\rho_{d,s,2l+k,m'})) \Lambda_{m'}^{[\rho_{d,s,2l+k}, \rho_{d,s,2l+k+1}]}(\rho) \quad (m = 0, 1), \\ \hat{\delta}_{i,2l+k,2}(d, s, \rho) &\equiv \\ &\equiv \sum_{m'=0}^2 \tilde{\delta}_i(d, s, \rho_{d,s,2l+k,m'}) \Lambda_2^{[s_{2l-3}, s_{2l+1}]}(s + \sigma_{d,s}(\rho_{d,s,2l+k,m'})) \Lambda_{m'}^{[\rho_{d,s,2l+k}, \rho_{d,s,2l+k+1}]}(\rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{7,2l}(x) &\equiv 2^{-1} \sum_{k=-1}^0 (\beta_{s,2l+k+1} - \beta_{s,2l+k}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j g_{1,l}(x, \beta_{s,2l+k,j}), \\
b_{7,2l-1}(x) &\equiv 2^{-1} \sum_{k=-3}^{-2} (\beta_{s,2l+k+1} - \beta_{s,2l+k}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j g_{2,l}(x, \beta_{s,2l+k,j}) + \\
&\quad + 2^{-1} \sum_{k=-1}^0 (\beta_{s,2l+k+1} - \beta_{s,2l+k}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j g_{0,l}(x, \beta_{s,2l+k,j}), \\
b_{8,2l}(x) &\equiv 2^{-1} \sum_{k=-1}^0 (\beta_{s,2l+k+1} - \beta_{s,2l+k}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j q_{1,l}(x, \beta_{s,2l+k,j}), \\
b_{8,2l-1}(x) &\equiv 2^{-1} \sum_{k=-3}^{-2} (\beta_{s,2l+k+1} - \beta_{s,2l+k}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j q_{2,l}(x, \beta_{s,2l+k,j}) + \\
&\quad + 2^{-1} \sum_{k=-1}^0 (\beta_{s,2l+k+1} - \beta_{s,2l+k}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j q_{0,l}(x, \beta_{s,2l+k,j}).
\end{aligned}$$

Интегралы $b_{i,l}(x)$ ($l = \overline{-L-1, L}$, $i = \overline{1, 6}$) вычисляются аналитически.

Теорема 3 позволяет получить по две аппроксимации КП ППС $u(x)$ и НП ППС $w(x)$ при $x \in \Omega_D$:

$$\hat{u}_I(x) \equiv (2\pi)^{-1} \hat{G}_I(x) \mathbf{P}_L v, \quad \hat{u}_{II}(x) \equiv (2\pi)^{-1} \hat{G}_{II}(x) \mathbf{P}_L v, \quad (3.12a)$$

$$\hat{w}_I(x) \equiv (2\pi)^{-1} \hat{Q}_I(x) \mathbf{P}_L v, \quad \hat{w}_{II}(x) \equiv (2\pi)^{-1} \hat{Q}_{II}(x) \mathbf{P}_L v. \quad (3.12b)$$

Функционалы $\hat{G}_I(x)$, $\hat{G}_{II}(x)$, $\hat{Q}_I(x)$, $\hat{Q}_{II}(x)$ могут быть вычислены с помощью формул (3.11), операторы $\mathbf{P}_L$ определяются формулой (3.5). АМА КП ППС $\hat{u}_I(x)$ и АМА НП ППС $\hat{w}_I(x)$ предлагаются в настоящей работе, ПМА КП ППС $\hat{u}_{II}(x)$ и ПМА НП ППС $\hat{w}_{II}(x)$ получены на основе работ [6], [7].

В силу теоремы 2 и неравенства $\|\mathbf{P}_L\| \leq 1$ функционалы $\ln^{-1}|d| \hat{G}_I(x) \mathbf{P}_L$, $d \hat{G}_{II}(x) \mathbf{P}_L$, $\hat{Q}_I(x) \mathbf{P}_L$, $d \hat{Q}_{II}(x) \mathbf{P}_L$ [$C(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$] ($L/2 \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega_D$) ограничены в совокупности, поэтому аппроксимации $\ln^{-1}|d| \hat{u}_I(x)$, $d \hat{u}_{II}(x)$, $\hat{w}_I(x)$, $d \hat{w}_{II}(x)$ равномерно устойчивы вблизи границы $\partial\Omega$ к возмущениям функции плотности v в норме $C(\partial\Omega)$. Сформулируем основной результат настоящей работы.

Следствие 2. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\gamma+1}$, $\gamma \geq 2$, $\gamma, L/2 \in \mathbb{N}$, $R > 0$, $t \in (0, D]$. Тогда функции $\ln^{-1}|d| \hat{u}_I(x)$, $d \hat{u}_{II}(x)$, $\hat{w}_I(x)$, $d \hat{w}_{II}(x)$ сходятся при $L \rightarrow \infty$ со скоростью не меньше, чем кубическая, к соответствующим функциям $\ln^{-1}|d| u(x)$, $du(x)$, $w(x)$, $dw(x)$ равномерно относительно $x \in \Omega_D$ и функций $v \in C^3(\partial\Omega)$, удовлетворяющих неравенству $\|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \leq R$. В частности, функции $\hat{u}_I(\tilde{x}_d(s))$, $\hat{u}_{II}(\tilde{x}_d(s))$, $\hat{w}_{II}(\tilde{x}_d(s))$ сходятся при $L \rightarrow \infty$ к соответствующим функциям $u(\tilde{x}_d(s))$, $u(\tilde{x}_d(s))$, $w(\tilde{x}_d(s))$ равномерно относительно $|d| \in [t/L, D]$, $s \in I_S$ с порядками аппроксимации не ниже, чем $O(L^{-3} \ln L)$, $O(L^{-2})$, $O(L^{-2})$ соответственно. Кроме того, функции $\ln^{-1}|d| \hat{u}_I^\delta(x)$, $d \hat{u}_{II}^\delta(x)$, $\hat{w}_I^\delta(x)$, $d \hat{w}_{II}^\delta(x)$, где $\hat{u}_I^\delta(x) \equiv (2\pi)^{-1} \hat{G}_I(x) \mathbf{P}_L v_\delta$, $\hat{u}_{II}^\delta(x) \equiv (2\pi)^{-1} \hat{G}_{II}(x) \mathbf{P}_L v_\delta$, $\hat{w}_I^\delta(x) \equiv (2\pi)^{-1} \hat{Q}_I(x) \mathbf{P}_L v_\delta$, $\hat{w}_{II}^\delta(x) \equiv (2\pi)^{-1} \hat{Q}_{II}(x) \mathbf{P}_L v_\delta$, сходятся при $L \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow +0$ к соответствующим функциям $\ln^{-1}|d| u(x)$, $du(x)$, $w(x)$, $dw(x)$ равномерно относительно $x \in \Omega_D$ и функций $v \in C^3(\partial\Omega)$, $v_\delta \in C(\partial\Omega)$, удовлетворяющих неравенствам $\|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \leq R$, $\|v_\delta - v\|_{C(\partial\Omega)} \leq \delta$.

В заключение раздела рассмотрим традиционные аппроксимации КП и НП ППС на основе формул Гаусса. Для этого построим аппроксимации $\hat{A}_9(x)$, $\hat{A}_{10}(x)$ соответствующих функционалов $\hat{A}_5(x)$, $\hat{A}_6(x)$ на основе формулы Гаусса с μ узлами:

$$\hat{A}_i(x) f \equiv 2^{-1} \sum_{l=-L-1}^L \sum_{2n=0}^1 (\alpha_{s,l+n+1/2} - \alpha_{s,l+n}) \hat{B}_{i,l+n}(d, s) f \quad (i = 9, 10), \quad (3.13)$$

$$\hat{B}_{i,l+n}(d, s)f \equiv \sum_{j=1}^{\mu} \omega_j B_{i-2}(d, s, \alpha_{s,l+n,j}) \ddot{P}_L f,$$

$$\alpha_{s,l+n,j} \equiv 2^{-1}(\alpha_{s,l+n} + \alpha_{s,l+n+1/2}) + 2^{-1}(\alpha_{s,l+n+1/2} - \alpha_{s,l+n}) z_j.$$

Здесь вводится дополнительная точка $\alpha_{s,l+1/2} \equiv 0$ при $s \in [s_l, s_{l+1})$, делящая промежуток численного интегрирования $[\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1}]$ на два: $[\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1/2}]$ и $[\alpha_{s,l+1/2}, \alpha_{s,l+1}]$. Это делается для того, чтобы точка s никогда не совпадала с узлами формул Гаусса. В связи с этим для удобства записи считаем, что $\alpha_{s,l+1/2} \equiv \alpha_{s,l}$, если $s \notin [s_l, s_{l+1})$, и в формуле (3.13) делаем двойное суммирование, где во внутренней сумме второе ненулевое слагаемое появляется только при таких l , при которых $s \in (s_l, s_{l+1})$.

Аппроксимации КП ППС $u(x)$ и НП ППС $w(x)$ на множестве Ω_D зададим с помощью формул

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &\equiv (2\pi)^{-1} \tilde{G}(x) \mathbf{P}_L v, & \tilde{w}(x) &\equiv (2\pi)^{-1} \tilde{Q}(x) \mathbf{P}_L v, \\ \tilde{G}(x) &\equiv \hat{A}_9(x) + \hat{A}_7(x), & \tilde{Q}(x) &\equiv \hat{A}_{10}(x) + \hat{A}_8(x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Операторы $\mathbf{P}_L$ определяются формулой (3.5). Функционалы $\tilde{G}(x)$, $\tilde{Q}(x)$ имеют вид матриц-строк длиной $2L + 2$:

$$\tilde{G}(x)f = \sum_{l=-L-1}^L [b_{9,l} + b_{7,l}] f_l, \quad \tilde{Q}(x)f = \sum_{l=-L-1}^L [b_{10,l} + b_{8,l}] f_l,$$

где при $l = \overline{-L/2, L/2}$

$$\begin{aligned} b_{9,2l}(x) &\equiv 2^{-1} \sum_{k=-1}^0 \sum_{2n=0}^1 (\alpha_{s,2l+k+n+1/2} - \alpha_{s,2l+k+n}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j g_{1,l}(x, \alpha_{s,2l+k+n,j}), \\ b_{9,2l-1}(x) &\equiv 2^{-1} \sum_{k=-3}^{-2} \sum_{2n=0}^1 (\alpha_{s,2l+k+n+1/2} - \alpha_{s,2l+k+n}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j g_{2,l}(x, \alpha_{s,2l+k+n,j}) + \\ &+ 2^{-1} \sum_{k=-1}^0 \sum_{2n=0}^1 (\alpha_{s,2l+k+n+1/2} - \alpha_{s,2l+k+n}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j g_{0,l}(x, \alpha_{s,2l+k+n,j}), \\ b_{10,2l}(x) &\equiv 2^{-1} \sum_{k=-1}^0 \sum_{2n=0}^1 (\alpha_{s,2l+k+n+1/2} - \alpha_{s,2l+k+n}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j q_{1,l}(x, \alpha_{s,2l+k+n,j}), \\ b_{10,2l-1}(x) &\equiv 2^{-1} \sum_{k=-3}^{-2} \sum_{2n=0}^1 (\alpha_{s,2l+k+n+1/2} - \alpha_{s,2l+k+n}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j q_{2,l}(x, \alpha_{s,2l+k+n,j}) + \\ &+ 2^{-1} \sum_{k=-1}^0 \sum_{2n=0}^1 (\alpha_{s,2l+k+n+1/2} - \alpha_{s,2l+k+n}) \sum_{j=1}^{\gamma} \omega_j q_{0,l}(x, \alpha_{s,2l+k+n,j}). \end{aligned}$$

Вычисление функций $b_{7,l}$, $b_{8,l}$ см. формулы (3.11). Аппроксимации $\tilde{u}(x)$, $\tilde{w}(x)$ можно считать традиционными аппроксимациями КП ППС $u(x)$ и НП ППС $w(x)$, так как все интегралы $\ddot{g}_l(x)$, $\ddot{q}_l(x)$, в том числе и на промежутках $[\alpha_{s,l}, \alpha_{s,l+1}]$ ($\alpha_{s,l} < \alpha_{s,l+1}$), вычисляются с помощью формул Гаусса.

При условии $\partial\Omega \in C^{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) для любой замкнутой области $\Omega'_D \subset \Omega_D$ можно определить константы $\tilde{c}'_{9,j} \equiv \sup_{x \in \Omega'_D, s' \in I_S} |\partial_{s'}^j g(x, s')|$, $\tilde{c}'_{10,j} \equiv \sup_{x \in \Omega'_D, s' \in I_S} |\partial_{s'}^j q(x, s')|$ ($j = \overline{0, n}$) и получить для функционалов $\hat{A}_9(x)$, $\hat{A}_{10}(x)$ оценки, аналогичные (3.10). Тогда по аналогии со следствием 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\mu+1}$, $\mu \geq \gamma \geq 2$, $\mu, \gamma, L/2 \in \mathbb{N}$, $R > 0$. Тогда функции $\tilde{u}(x)$, $\tilde{w}(x)$ сходятся при $L \rightarrow \infty$ со скоростью не меньше, чем кубическая, к соответствующим функциям $u(x)$, $w(x)$ равномерно относительно $x \in \Omega'_D$ и функций $v \in C^3(\partial\Omega)$, удовлетворяющих неравенству $\|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \leq R$. Функции $\tilde{u}_\delta(x) \equiv (2\pi)^{-1} \tilde{G}(x) \mathbf{P}_L v_\delta$, $\tilde{w}_\delta(x) \equiv (2\pi)^{-1} \tilde{Q}(x) \mathbf{P}_L v_\delta$ сходятся при $L \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow +0$ к соответствующим функциям $u(x)$, $w(x)$ равномерно относительно $x \in \Omega'_D$ и функций $v \in C^3(\partial\Omega)$, $v_\delta \in C(\partial\Omega)$, удовлетворяющих неравенствам $\|v\|_{C^3(\partial\Omega)} \leq R$, $\|v_\delta - v\|_{C(\partial\Omega)} \leq \delta$.

4. АППРОКСИМАЦИИ ПСИ

Интегралы на граничных элементах, возникающие при вычислении аппроксимаций $\hat{A}_i(x)\mathbf{P}_L f$ и точных функций $A_i(x)f$ ($i = \overline{1,6}$), при $f = 1$ имеют вид

$$\hat{J}_i \equiv \int_{\rho_0}^{\rho_1} a_i(d, \rho) \hat{\delta}_i(d, s, \rho) d\rho, \quad J_i \equiv \int_{\rho_0}^{\rho_1} a_i(d, \rho) \tilde{\delta}_i(d, s, \rho) d\rho \quad (d \in I_D, s \in I_S),$$

$$\hat{\delta}_i(d, s, \rho) \equiv \sum_{m=0}^2 \tilde{\delta}_i(d, s, \rho_m) \Lambda_m(\rho, \rho_0, \rho_1);$$

$$\rho_0 \equiv \rho_{d,s}(\alpha h), \quad \rho_1 \equiv \rho_{d,s}((\alpha + 1)h), \quad \rho_2 \equiv 2^{-1}(\rho_0 + \rho_1).$$

Если $d = th$ и при этом величины $\alpha, t \in \mathbb{R}$ ограничены и выполняется хотя бы одно из условий: $\alpha(\alpha + 1) > 0$ или $t \neq 0$, то интегралы J_i можно считать ПСИ, так как точка наблюдения $\tilde{x}_d(s)$ не находится на граничном элементе $[\tilde{x}(\alpha h), \tilde{x}((\alpha + 1)h)] \subset \partial\Omega$, но расстояние между ними неограниченно уменьшается при $h \rightarrow +0$. Заметим, что $J_1 + J_2 = J_5 \equiv J_G$, $J_3 + J_4 = J_6 \equiv J_Q$.

Определение. Вещественные функции $f_1(t, h), f_2(t, h)$ эквивалентны при $h \rightarrow +0, t \in [t_1, t_2]$ с порядком аппроксимации $k > 0$, если существуют постоянные $c_1, c_2, h_0 > 0$, такие что при любых $t \in [t_1, t_2], h \in (0, h_0]$ выполняются неравенства $c_1 h^k \leq |f_1(t, h) - f_2(t, h)| \leq c_2 h^k$. Функции $f_1(t, h), f_2(t, h)$ не эквивалентны при $h \rightarrow +0, t \in [t_1, t_2]$, если существуют постоянные $c_1, h_0 > 0$, такие что при любых $t \in [t_1, t_2], h \in (0, h_0]$ выполняется неравенство $|f_1(t, h) - f_2(t, h)| \geq c_1$.

Теорема 4. Пусть $\partial\Omega \in C^6$, значения $s \in I_S, \alpha \in [-2, -1) \cup (0, 1]$ фиксированы, $(\partial_\rho^3 \tilde{\delta}_i)(0, s, 0) \neq 0$ ($i = 1, 4, 5, 6$). Тогда

(i) существует достаточно малое число $t_1 > 0$, такое что при $h \rightarrow +0, d = th, t \in [-t_1, t_1]$ функции $\hat{J}_{G,I}(t, h) \equiv \hat{J}_1 + \hat{J}_2$ и $J_G(t, h)$ эквивалентны с третьим порядком аппроксимации, а функции $\hat{J}_{G,II}(t, h) \equiv \hat{J}_5, \hat{J}_{Q,II}(t, h) \equiv \hat{J}_6$ эквивалентны соответствующим функциям $J_G(t, h), J_Q(t, h)$ со вторым порядком аппроксимации;

(ii) существует достаточно малое число $t_0 > 0$, такое что для любого $t_2 \in (0, t_0]$ функции $\hat{J}_{Q,I}(t, h) \equiv \hat{J}_3 + \hat{J}_4$ и $J_Q(t, h)$ при $h \rightarrow +0, d = th, |t| \in [t_2, t_0]$ эквивалентны с третьим порядком аппроксимации.

Доказательство. Введем в рассмотрение функции $z_m(d, h) \equiv \rho_m/h$ ($m = \overline{0,2}$) при $d \in \overline{I_D}, h \in (0, \Sigma_s/2]$ ($\Sigma_s \equiv \min\{-\Sigma'_s, \Sigma''_s\}$). Доопределим функции z_0, z_1, z_2 при $h = 0, d \in \overline{I_D}$: $z_0(d, 0) \equiv \alpha \rho'_{d,s}(0), z_1(d, 0) \equiv (\alpha + 1) \rho'_{d,s}(0), z_2(d, 0) \equiv 2^{-1}(z_0 + z_1)$, тогда в силу теоремы 1 функции z_m при $d \in \overline{I_D}, h \in [0, \Sigma_s/2]$ непрерывны и справедливы оценки $z_1 - z_0 \geq z'_0, \alpha z'_0 \leq z_0 < z_1 \leq (\alpha + 1)z'_1$, где $z'_0 \equiv \inf_{s'-s \in \Xi_s, d \in \overline{I_D}} \partial_{s'} \rho > 0, z'_1 \equiv \sup_{s'-s \in \Xi_s, d \in \overline{I_D}} \partial_{s'} \rho$.

После замены переменной $\rho = zh$ в интегралах $\hat{J}_i, J_i$ ($i = \overline{1,6}$) остаточные члены $\Delta \hat{J}_i \equiv J_i - \hat{J}_i$ при $d = th, |t| \leq 2D/\Sigma_s, h \in (0, \Sigma_s/2]$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\Delta \hat{J}_i(t, h) = \eta_i(h) \int_{z_0(th, h)}^{z_1(th, h)} a_i(t, z) [\tilde{\delta}_i(th, s, zh) - \hat{\delta}_i(th, s, zh)] dz,$$

где $\eta_1(h) = \eta_2(h) = \eta_4(h) \equiv 1, \eta_3(h) \equiv h, \eta_5(h) = \eta_6(h) \equiv h^{-1}$. В силу формулы (2.10) при $\rho = zh, z \in (z_0, z_2) \cup (z_2, z_1), d \in \overline{I_D}, h \in (0, \Sigma_s/2]$ имеем равенства

$$\Delta \hat{\delta}_i = h^3 p_3(z, z_0, z_1) \tilde{\delta}_{i,3}(d, s, z_0 h, z_1 h, z_2 h, z_2 h) + h^4 p_4(z, z_0, z_1) \tilde{\delta}_{i,4}(d, s, zh, z_0 h, z_1 h, z_2 h, z_2 h),$$

где $\Delta \hat{\delta}_i(d, \rho) \equiv \tilde{\delta}_i - \hat{\delta}_i, i = \overline{1,6}; \tilde{\delta}_{i,3}, \tilde{\delta}_{i,4}$ — соответствующие разделенные разности 3-го и 4-го порядков. Заметим, что $\tilde{\delta}_{i,3}$ не зависят от z , а функции $a_i(t, z) p_4(z, z_0, z_1)$ в силу условия $z_0 z_1 > 0$ не меняют знака при $z \in [z_0, z_1]$ и фиксированных t . С учетом формулы (2.12) и обобщенной теоремы о среднем (см. [24, п. 304]) имеем при $|t| \leq 2D/\Sigma_s, h \in (0, \Sigma_s/2]$

$$\Delta \hat{J}_i = \eta_i(h) h^3 \tilde{\delta}_{i,3}(t, \zeta_{i,1}, h) j_{i,3}(t, h) + \eta_i(h) h^4 \tilde{\delta}_{i,4}(t, \zeta_{i,2}, h) j_{i,4}(t, h) \quad (i = \overline{1,6}); \quad (4.1)$$

$$j_{i,3}(t, h) \equiv \int_{\tilde{z}_0(t, h)}^{\tilde{z}_1(t, h)} a_i(t, z) p_3(z, \tilde{z}_0, \tilde{z}_1) dz, \quad j_{i,4}(t, h) \equiv \int_{\tilde{z}_0(t, h)}^{\tilde{z}_1(t, h)} a_i(t, z) p_4(z, \tilde{z}_0, \tilde{z}_1) dz;$$

$\tilde{z}_m(t, h) \equiv z_m(th, h)$ ($m = \overline{0, 2}$); $\tilde{\delta}_{i,3}(t, z, h) \equiv 6^{-1} \left(\partial_\rho^3 \tilde{\delta}_i \right) (th, s, zh)$, $\tilde{\delta}_{i,4}(t, z, h) \equiv 24^{-1} \left(\partial_\rho^4 \tilde{\delta}_i \right) (th, s, zh)$; $\zeta_{i,1}$, $\zeta_{i,2}$ — некоторые точки на промежутке $[\alpha z'_0, (\alpha + 1)z'_1]$, точное положение которых зависит от t, h .

В условиях теоремы в силу следствия 1 существуют константы $h_0 \in (0, \Sigma_s/2]$, $t_0 \in (0, D/h_0]$, такие что функции $\tilde{\delta}_{i,3}$, $\tilde{\delta}_{i,4}$ ($i = \overline{1, 6}$) непрерывны и $\tilde{\delta}_{i,3} \neq 0$ ($i = 1, 4, 5, 6$) при $t \in [-t_0, t_0]$, $z \in [\alpha z'_0, (\alpha + 1)z'_1]$, $h \in [0, h_0]$. Так как при $|t| \leq 2D/\Sigma_s$, $h \in [0, \Sigma_s/2]$ функции $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1$ непрерывны и $\tilde{z}_0 \tilde{z}_1 > 0$, то функции $j_{i,3}, j_{i,4}$ ($i = \overline{1, 6}$) при этом также непрерывны.

При $t = 0$ и фиксированных $h \in [0, \Sigma_s/2]$ для функций $f_i(z) \equiv a_i p_3$ ($i = 1, 5, 6$) в силу условий $\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0 > 0$, $\tilde{z}_0 \tilde{z}_1 > 0$ имеют место неравенства $f_i(\tilde{z}_0 + \alpha) > -f_i(\tilde{z}_1 - \alpha)$, где $0 < \alpha < 2^{-1}(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_0)$. Поэтому при $h \in [0, \Sigma_s/2]$ выполняются неравенства $j_{i,3}(0, h) > 0$ ($i = 1, 5, 6$). Также при $h \in [0, \Sigma_s/2]$ выполняется равенство $j_{2,3}(0, h) = 0$. Следовательно, существуют постоянные $t_1 \in (0, t_0]$, $c_1, c_2 > 0$, такие что при $t \in [-t_1, t_1]$, $h \in (0, h_0]$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} c_1 &\leq \left| \tilde{\delta}_{1,3}(t, \zeta_{1,1}, h) j_{1,3}(t, h) + \tilde{\delta}_{2,3}(t, \zeta_{2,1}, h) j_{2,3}(t, h) \right| \leq c_2, \\ c_1 &\leq \left| \tilde{\delta}_{k,3}(t, \zeta_{k,1}, h) j_{k,3}(t, h) \right| \leq c_2 \quad (k = 5, 6), \\ \left| \tilde{\delta}_{i,4}(t, \zeta_{i,2}, h) j_{i,4}(t, h) \right| &\leq c_2 \quad (i = 1, 2, 5, 6). \end{aligned} \quad (4.2)$$

С учетом формул (4.1) и оценок (4.2) утверждение (i) доказано.

При $0 \neq |t| \leq 2D/\Sigma_s$, $h \in [0, \Sigma_s/2]$ выполняется неравенство $j_{4,3}(t, h) > 0$. Пусть $t_2 \in (0, t_0]$. Тогда существуют постоянные $c_3, c_4 > 0$, такие что при $|t| \in [t_2, t_0]$, $h \in (0, h_0]$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} c_3 &\leq \left| \tilde{\delta}_{4,3}(t, \zeta_{4,1}, h) j_{4,3}(t, h) \right| \leq c_4, \\ \left| \tilde{\delta}_{3,3}(t, \zeta_{3,1}, h) j_{3,3}(t, h) \right| &\leq c_4, \quad \left| \tilde{\delta}_{i,4}(t, \zeta_{i,2}, h) j_{i,4}(t, h) \right| \leq c_4 \quad (i = 3, 4). \end{aligned} \quad (4.3)$$

С учетом формул (4.1) и оценок (4.3) утверждение (ii) также доказано. Теорема 4 полностью доказана.

Обозначим через $\tilde{J}_{G,\mu}$, $\tilde{J}_{Q,\mu}$ аппроксимации соответствующих интегралов $J_G = \int_{ah}^{(\alpha+1)h} g(\tilde{x}_d(s), s + \sigma) d\sigma$, $J_Q = \int_{ah}^{(\alpha+1)h} q(\tilde{x}_d(s), s + \sigma) d\sigma$, полученные с помощью формулы Гаусса с μ узлами. Они возникают при построении приближенных функций $\hat{A}_9(x) \mathbf{P}_L f$, $\hat{A}_{10}(x) \mathbf{P}_L f$ при $f = 1$.

Теорема 5. Пусть $\partial\Omega \in C^{2\mu+1}$, значения $\mu \in \mathbb{N}$, $s \in I_S$, $\alpha \in [-2, -1) \cup (0, 1]$ фиксированы. Тогда

(i) существует достаточно малое число $t_0 > 0$, такое что при $h \rightarrow +0$, $d = th$, $t \in [-t_0, t_0]$ функции $\tilde{J}_{G,\mu}(t, h)$ и $J_G(t, h)$ не эквивалентны;

(ii) существует достаточно малое число $t_1 > 0$, такое что для любого $t_2 \in (0, t_1]$ функции $\tilde{J}_{Q,\mu}(t, h)$ и $J_Q(t, h)$ при $h \rightarrow +0$, $d = th$, $|t| \in [t_2, t_1]$ не эквивалентны.

Доказательство. Остаточные члены $\Delta \tilde{J}_{G,\mu} \equiv J_G - \tilde{J}_{G,\mu}$, $\Delta \tilde{J}_{Q,\mu} \equiv J_Q - \tilde{J}_{Q,\mu}$ имеют вид $\Delta \tilde{J}_{G,\mu} = r_G(d, \zeta_G, h)$, $\Delta \tilde{J}_{Q,\mu} = r_Q(d, \zeta_Q, h)$ ($d \in \overline{I_D}$, $h \in (0, S/2]$), где

$$r_G(d, \sigma, h) \equiv c_\mu h^{2\mu+1} \partial_\sigma^{2\mu} g(\tilde{x}_d(s), s + \sigma), \quad r_Q(d, \sigma, h) \equiv c_\mu h^{2\mu+1} \partial_\sigma^{2\mu} q(\tilde{x}_d(s), s + \sigma); \quad (4.4)$$

$c_\mu \equiv (\mu!)^4 [(2\mu)!]^{-3} (2\mu + 1)^{-1}$; ζ_G, ζ_Q — некоторые точки на промежутке $[ah, (\alpha + 1)h]$, точное положение которых зависит от d, h (см. [2, гл. 3, § 5, п. 2]). Согласно равенствам (2.8) при $d \in \overline{I_D}$, $\sigma \in [ah, (\alpha + 1)h]$, $h \in (0, S/2]$ имеем формулы

$$g(\tilde{x}_d(s), s + \sigma) \equiv (-\sigma \tilde{\psi}_1 - d \sigma \tilde{\psi}_3) / (\sigma^2 \tilde{\psi} + d^2), \quad (4.5a)$$

$$q(\tilde{x}_d(s), s + \sigma) \equiv (-\sigma^2 \tilde{\psi}_2 - d) / (\sigma^2 \tilde{\psi} + d^2), \quad (4.5b)$$

где $\tilde{\psi}_i(\sigma) \equiv \psi_i(s, s + \sigma)$ ($i = \overline{1, 3}$), $\tilde{\psi}(d, \sigma) \equiv \psi(d, s, s + \sigma)$. В условиях теоремы производные $\tilde{\psi}_i^{(j)}$ ($i = \overline{1, 3}$), $\partial_0^j \tilde{\psi}$ ($j = \overline{0, 2\mu}$) непрерывны и $\tilde{\psi} \neq 0$ при $\sigma \in \overline{I_S}$, $d \in \overline{I_D}$, поэтому в силу формул (4.5) и условия $\alpha(\alpha + 1) > 0$ функции r_G , r_Q при $d = th$, $\sigma = yh$, $y \in [\alpha, (\alpha + 1)]$, $|t| \leq 2D/S$, $h \in (0, S/2]$ могут быть представлены в виде

$$r_G(th, yh, h) = -c_\mu r'_G(t, y, h) + o_G(t, y, h), \quad (4.6a)$$

$$r_Q(th, yh, h) = -c_\mu t r'_Q(t, y, h) + o_Q(t, y, h); \quad (4.6b)$$

$$r'_G \equiv \partial_y^{2\mu} \left[y \tilde{\psi}_1(yh) (y^2 \tilde{\psi}(th, yh) + t^2)^{-1} \right], \quad r'_Q \equiv \partial_y^{2\mu} \left[(y^2 \tilde{\psi}(th, yh) + t^2)^{-1} \right];$$

$o_G, o_Q \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$ равномерно по $y \in [\alpha, (\alpha + 1)]$, $|t| \leq 2D/S$. При $t = 0$, $y \in [\alpha, (\alpha + 1)]$, $h \in (0, S/2]$ имеем равенства

$$r'_G(0, y, h) = \partial_y^{2\mu} \left[\tilde{\psi}_1(yh) (y \tilde{\psi}(0, yh))^{-1} \right] = (y^{-1})^{(2\mu)} \tilde{\psi}_1(yh) / \tilde{\psi}(0, yh) + o'_G(y, h), \quad (4.7a)$$

$$r'_Q(0, y, h) = \partial_y^{2\mu} \left[(y^2 \tilde{\psi}(0, yh))^{-1} \right] = (y^{-2})^{(2\mu)} / \tilde{\psi}(0, yh) + o'_Q(y, h), \quad (4.7b)$$

где $o'_G, o'_Q \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$ равномерно по $y \in [\alpha, (\alpha + 1)]$.

Так как $\tilde{\psi}_1(0) = -1$, то в силу формул (4.6a), (4.7a) и непрерывности функции r'_G при $|t| \leq 2D/S$, $y \in [\alpha, (\alpha + 1)]$, $h \in (0, S/2]$ существуют постоянные $h_0 \in (0, S/2]$, $t_0 \in (0, D/h_0]$, $c_0 > 0$, такие что $|r_G(d, \sigma, h)| \geq c_0$ при $d = th$, $t \in [-t_0, t_0]$, $\sigma \in [\alpha h, (\alpha + 1)h]$, $h \in (0, h_0]$. Утверждение (i) доказано.

В силу формулы (4.7b) и непрерывности функции r'_Q при $|t| \leq 2D/S$, $y \in [\alpha, (\alpha + 1)]$, $h \in (0, S/2]$ существуют постоянные $h_1 \in (0, S/2]$, $t_1 \in (0, D/h_1]$, $c_1 > 0$, такие что $|r'_Q(t, y, h)| \geq c_1$ при $t \in [-t_1, t_1]$, $y \in [\alpha, \alpha + 1]$, $h \in (0, h_1]$. Поэтому в силу формулы (4.6b) для любого $t_2 \in (0, t_1]$ существуют постоянные $h_2 \in (0, h_1]$, $c_2 \in (0, t_2 c_1]$, такие что $|r_Q(d, \sigma, h)| \geq c_2$ при $d = th$, $|t| \in [t_2, t_1]$, $\sigma \in [\alpha h, (\alpha + 1)h]$, $h \in (0, h_2]$. Утверждение (ii) доказано. Доказательство теоремы 5 завершено.

Заметим, что остаточные члены аппроксимаций интегралов J на основе квадратурных формул Ньютона—Котеса (КФНК) также допускают представление типа (4.4) (см. [2, гл. 3, § 4, п. 2]), где порядок производной на единицу меньше степени длины промежутка интегрирования. Поэтому теорема 5 справедлива и для аппроксимаций на основе КФНК.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Рассмотрим вычисление КП и НП ППС с плотностью $v(s) = \cos s$ во внешности единичного круга. Пусть $x = \tilde{x}_d(s)$, $d \in I_D$, $s \in I_S$. Точные значения КП ППС $\bar{u}(x)$ и НП ППС $\bar{w}(x)$ вычисляются по формулам

$$\bar{u}(x) = -2^{-1} (1 - d)^{-1} \sin s, \quad \bar{w}(x) = 2^{-1} (1 - d)^{-2} \cos s.$$

Полуаналитические аппроксимации $\hat{u}_I(x)$, $\hat{u}_{II}(x)$, $\hat{w}_I(x)$, $\hat{w}_{II}(x)$ вычисляются с помощью формул (3.12), при этом для вычисления функционалов $\hat{A}_7(x)$, $\hat{A}_8(x)$ используется формула Гаусса с $\gamma = 2$ узлами. Традиционные аппроксимации $\tilde{u}_i(x)$, $\tilde{w}_i(x)$ вычисляются с помощью формул (3.14), при этом для вычисления функционалов $\hat{A}_9(x)$, $\hat{A}_{10}(x)$ используется формула Гаусса с $\mu_i = 12 \cdot 2^{i-1}$ узлами ($i = \overline{1, 3}$), а для вычисления функционалов $\hat{A}_7(x)$, $\hat{A}_8(x)$ по прежнему используется формула Гаусса с $\gamma = 2$ узлами (веса и абсциссы формул Гаусса с большим числом узлов см., например, [26, гл. 17, табл. 1]). Для данной геометрии $D = 2/(3\pi)$, $\Sigma''_s = -\Sigma'_s = \arcsin(2/(3\pi))$. Вычисления осуществляем с двойной точностью.

Для экспериментального определения точности аппроксимаций вычисляем $\Delta \hat{u}_I$, $\Delta \hat{u}_{II}$, $\Delta \tilde{u}_i$ и $\Delta \hat{w}_I$, $\Delta \hat{w}_{II}$, $\Delta \tilde{w}_i$ — максимумы модулей абсолютных погрешностей приближенных решений $\hat{u}_I(x)$, $\hat{u}_{II}(x)$, $\tilde{u}_i(x)$ и $\hat{w}_I(x)$, $\hat{w}_{II}(x)$, $\tilde{w}_i(x)$ на множествах точек вида $\{x_{l,j} \equiv \tilde{x}_{d_m}(s_{l,j}), j = \overline{0, 7}, l = \overline{-2^{k+1} + 1, 2^{k+1} - 2}\}$, где $s_{l,j}$ принимает значения $(l \pm \alpha_j) h_k$, d_m принимает значения $t_m h_k$ при фиксированных $k \in \{\overline{1, 6}\}$, $m \in \{-2, -3, -4, -5, -14\}$, при этом

$\alpha_0 \equiv 0$, $\alpha_j \equiv 10^{-(6-j)}$ при $j = \overline{1, 5}$, $\alpha_6 \equiv 0.25$, $\alpha_7 \equiv 0.5$; $h_k \equiv \pi/(2^{k+1} - 1)$, $t_m \equiv -10^m$. Например, $\Delta \hat{u}_I \equiv \max_{l,j} |\hat{u}_I(x_{l,j}) - \bar{u}(x_{l,j})|$. В табл. 1 в каждой основной ячейке представлены значения $\Delta \hat{u}_I$, $\Delta \hat{u}_{II}$, $\Delta \tilde{u}_1$, $\Delta \tilde{u}_2$, $\Delta \tilde{u}_3$, а в табл. 2 — значения $\Delta \hat{w}_I$, $\Delta \hat{w}_{II}$, $\Delta \tilde{w}_1$, $\Delta \tilde{w}_2$, $\Delta \tilde{w}_3$ в соответствующем порядке сверху вниз.

Вычисляя на основании табл. 1 и табл. 2 степени ν скоростей сходимости аппроксимаций КП и НП ППС (например, для $\hat{u}_I$ степень скорости сходимости $\nu = \ln[\Delta \hat{u}_I(h_k)/\Delta \hat{u}_I(h_{k+1})]/\ln(h_k/h_{k+1})$ при переходе от h_k к h_{k+1}), можно заметить, что при $h \rightarrow +0$, $d = th$ и фиксированных $t \in I_D$ АМА КП ППС $\hat{u}_I$ и АМА НП ППС $\hat{w}_I$, предлагаемые в настоящей работе, обладают скоростями сходимости соответственно чуть меньше кубической и кубической, что хорошо согласуется с утверждениями следствия 2 и теоремы 4. ПМА КП ППС $\hat{u}_{II}$ и ПМА НП ППС $\hat{w}_{II}$, полученные на основе работ [6], [7], обладают квадратичными скоростями сходимости при $h \rightarrow +0$, $d = th$ и фиксированных $t \in I_D$, что также согласуется со следствием 2 и теоремой 4. Таким образом, вычислительные эксперименты подтверждают теоретические выводы, и АМА КП ППС, АМА НП ППС обладают более равномерной сходимостью в приграничной области, чем ПМА КП ППС, ПМА НП ППС соответственно.

Традиционные аппроксимации КП ППС $\tilde{u}_i$ и НП ППС $\tilde{w}_i$ на основе формул Гаусса имеют нулевые скорости сходимости при $h \rightarrow +0$, $d = th$ и фиксированных $t \in I_D$, что согласуется с теоремой 5. Здесь вычислительные эксперименты подтверждают известный факт, что традиционные аппроксимации КП и НП ППС на основе формул Гаусса обладают сильно неравномерной сходимостью в приграничной области, и для достижения удовлетворительной точности требуется избыточная дискретизация или увеличение порядка аппроксимации формул Гаусса.

При увеличении $|t|$ при фиксированных h скорости сходимости аппроксимаций $\tilde{u}_i$ и $\tilde{w}_i$ возрастают до кубических, что согласуется со следствием 3, так как при этом происходит увеличение расстояния $|d| = |t|h$ от точки наблюдения до границы, и на достаточном удалении от границы сходимость аппроксимаций КП и НП ППС становится равномерной.

Заметим, что значения $\Delta \tilde{w}_i$ при $t \rightarrow 0$, $d = th$ и фиксированных h , μ приближаются к 0.5 — наибольшей абсолютной величине разрыва НП ППС с плотностью $v = \cos \varphi$ на границе $\partial\Omega$. Это объясняется непрерывностью аппроксимаций традиционных НП ППС на основе формул Гаусса в граничных точках, не совпадающих с узлами формулы Гаусса, и конечным разрывом точных значений НП ППС на границе. Поэтому сходимость традиционных аппроксимаций НП ППС на основе формул Гаусса не может быть равномерной, поскольку в достаточной близости от границы всегда сохраняется абсолютная погрешность, близкая к величине разрыва.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы полуаналитические аппроксимации КП и НП ППС: АМА и ПМА, позволяющие вычислить КП и НП ППС в любой точке двумерной приграничной области, не включающей саму границу, с конечной полушириной, зависящей от кривизны граничной кривой. В этих аппроксимациях для вычисления интегралов, возникающих после ККИ функции плотности, используются точное интегрирование по переменной ρ и ККИ медленно изменяющихся подынтегральных функций, если граничные элементы расположены вблизи точки наблюдения, и используются формулы Гаусса с порядком аппроксимации не ниже пятого, если граничные элементы расположены достаточно далеко от точки наблюдения. При этом установлено, что использование АМА, предлагаемой в настоящей работе, предпочтительнее ПМА, описанной в работах [6], [7], а именно, скорости равномерной сходимости АМА КП ППС и АМА НП ППС вблизи границы выше, чем соответствующие скорости равномерной сходимости ПМА КП ППС и ПМА НП ППС. В частности, если расстояние от наблюдаемой точки до граничного элемента уменьшается пропорционально h , то скорости сходимости АМА КП ППС и АМА НП ППС почти кубическая и кубическая соответственно, а скорости сходимости ПМА КП ППС и ПМА НП ППС квадратичные. Также установлено, что использование исключительно формул Гаусса для вычисления интегралов, возникающих после ККИ функции плотности, невозможно вблизи границы вследствие серьезного нарушения равномерной сходимости. В частности, если расстояние от наблюдаемой точки до граничного элемента уменьшается пропорционально h , то сходимость традиционных аппроксимаций КП и НП ППС на основе формул Гаусса отсутствует.

Таблица 1. Максимумы модулей абсолютных погрешностей аппроксимаций КП ППС

$-t_m$	$h_1 = \pi/3$	$h_1 = \pi/7$	$h_1 = \pi/15$	$h_1 = \pi/31$	$h_1 = \pi/63$	$h_1 = \pi/127$
10^{-2}	$3.32 \cdot 10^{-2}$	$2.82 \cdot 10^{-3}$	$3.16 \cdot 10^{-4}$	$3.69 \cdot 10^{-5}$	$4.44 \cdot 10^{-6}$	$5.48 \cdot 10^{-7}$
	$3.40 \cdot 10^{-2}$	$5.58 \cdot 10^{-3}$	$3.17 \cdot 10^{-3}$	$7.35 \cdot 10^{-4}$	$1.77 \cdot 10^{-4}$	$4.35 \cdot 10^{-5}$
	$3.32 \cdot 10^{-2}$	$3.63 \cdot 10^{-3}$	$2.34 \cdot 10^{-2}$	$2.34 \cdot 10^{-2}$	$2.34 \cdot 10^{-2}$	$2.33 \cdot 10^{-2}$
	$3.32 \cdot 10^{-2}$	$2.82 \cdot 10^{-3}$	$8.03 \cdot 10^{-4}$	$7.33 \cdot 10^{-4}$	$7.32 \cdot 10^{-4}$	$7.31 \cdot 10^{-4}$
	$3.32 \cdot 10^{-2}$	$2.82 \cdot 10^{-3}$	$3.21 \cdot 10^{-4}$	$3.77 \cdot 10^{-5}$	$4.57 \cdot 10^{-6}$	$6.76 \cdot 10^{-7}$
10^{-3}	$3.39 \cdot 10^{-2}$	$2.94 \cdot 10^{-3}$	$3.25 \cdot 10^{-4}$	$3.81 \cdot 10^{-5}$	$4.60 \cdot 10^{-6}$	$5.73 \cdot 10^{-7}$
	$3.63 \cdot 10^{-2}$	$8.84 \cdot 10^{-3}$	$6.30 \cdot 10^{-3}$	$1.47 \cdot 10^{-3}$	$3.56 \cdot 10^{-4}$	$8.75 \cdot 10^{-5}$
	$5.88 \cdot 10^{-2}$	$5.68 \cdot 10^{-2}$	$1.27 \cdot 10^{-1}$	$1.27 \cdot 10^{-1}$	$1.27 \cdot 10^{-1}$	$1.27 \cdot 10^{-1}$
	$3.45 \cdot 10^{-2}$	$3.95 \cdot 10^{-2}$	$4.67 \cdot 10^{-2}$	$4.68 \cdot 10^{-2}$	$4.68 \cdot 10^{-2}$	$4.68 \cdot 10^{-2}$
	$3.39 \cdot 10^{-2}$	$3.51 \cdot 10^{-3}$	$4.70 \cdot 10^{-3}$	$4.96 \cdot 10^{-3}$	$4.96 \cdot 10^{-3}$	$4.96 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	$3.40 \cdot 10^{-2}$	$2.95 \cdot 10^{-3}$	$3.26 \cdot 10^{-4}$	$3.83 \cdot 10^{-5}$	$4.61 \cdot 10^{-6}$	$5.66 \cdot 10^{-7}$
	$3.83 \cdot 10^{-2}$	$1.21 \cdot 10^{-2}$	$9.49 \cdot 10^{-3}$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$5.37 \cdot 10^{-4}$	$1.32 \cdot 10^{-4}$
	$2.54 \cdot 10^{-1}$	$3.86 \cdot 10^{-1}$	$4.97 \cdot 10^{-1}$	$4.97 \cdot 10^{-1}$	$4.97 \cdot 10^{-1}$	$4.97 \cdot 10^{-1}$
	$7.37 \cdot 10^{-2}$	$1.90 \cdot 10^{-1}$	$2.89 \cdot 10^{-1}$	$2.89 \cdot 10^{-1}$	$2.89 \cdot 10^{-1}$	$2.89 \cdot 10^{-1}$
	$5.53 \cdot 10^{-2}$	$4.14 \cdot 10^{-2}$	$6.89 \cdot 10^{-2}$	$6.89 \cdot 10^{-2}$	$6.89 \cdot 10^{-2}$	$6.89 \cdot 10^{-2}$
10^{-5}	$3.40 \cdot 10^{-2}$	$2.95 \cdot 10^{-3}$	$3.26 \cdot 10^{-4}$	$3.83 \cdot 10^{-5}$	$4.62 \cdot 10^{-6}$	$5.75 \cdot 10^{-7}$
	$4.10 \cdot 10^{-2}$	$1.58 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.09 \cdot 10^{-3}$	$7.45 \cdot 10^{-4}$	$1.83 \cdot 10^{-4}$
	$5.93 \cdot 10^{-1}$	$6.72 \cdot 10^{-1}$	$7.21 \cdot 10^{-1}$	$7.21 \cdot 10^{-1}$	$7.21 \cdot 10^{-1}$	$7.21 \cdot 10^{-1}$
	$4.20 \cdot 10^{-1}$	$5.54 \cdot 10^{-1}$	$6.70 \cdot 10^{-1}$	$6.70 \cdot 10^{-1}$	$6.70 \cdot 10^{-1}$	$6.70 \cdot 10^{-1}$
	$1.70 \cdot 10^{-1}$	$3.01 \cdot 10^{-1}$	$4.17 \cdot 10^{-1}$	$4.17 \cdot 10^{-1}$	$4.17 \cdot 10^{-1}$	$4.17 \cdot 10^{-1}$
10^{-14}	$3.40 \cdot 10^{-2}$	$2.95 \cdot 10^{-3}$	$3.27 \cdot 10^{-4}$	$3.83 \cdot 10^{-5}$	$4.62 \cdot 10^{-6}$	$5.67 \cdot 10^{-7}$
	$9.05 \cdot 10^{-2}$	$5.21 \cdot 10^{-2}$	$4.87 \cdot 10^{-2}$	$3.33 \cdot 10^{-2}$	$2.78 \cdot 10^{-3}$	$6.56 \cdot 10^{-4}$
	$9.85 \cdot 10^{-1}$	$9.78 \cdot 10^{-1}$	$9.83 \cdot 10^{-1}$	$9.86 \cdot 10^{-1}$	$9.64 \cdot 10^{-1}$	$1.05 \cdot 10^0$
	$1.17 \cdot 10^0$	$1.16 \cdot 10^0$	$1.20 \cdot 10^0$	$1.14 \cdot 10^0$	$1.06 \cdot 10^0$	$1.06 \cdot 10^0$
	$1.19 \cdot 10^0$	$1.36 \cdot 10^0$	$1.25 \cdot 10^0$	$1.11 \cdot 10^0$	$1.12 \cdot 10^0$	$1.11 \cdot 10^0$

В заключение отметим, что предлагаемый метод практически и теоретически осуществим для любой аналитически заданной граничной кривой класса гладкости C^5 . Это накладывает ограничение для его практического использования, поскольку часто бывает известно положение лишь конечного числа граничных точек, а аппроксимация границы в рамках описанного метода не предусмотрена. Тем не менее можно предположить, что аппроксимация границы с помощью аналитически заданной гладкой кривой является самостоятельной проблемой. Тогда при условии ее удовлетворительного решения метод может быть всегда реализован, независимо от сложности аппроксимирующих функций. Например, граничные элементы можно аппроксимировать с помощью сплайнов высоких порядков, обеспечивающих непрерывность производных достаточно высоких порядков на стыках граничных элементов и высокоточную аппроксимацию границы, необходимую при вычислениях вблизи границы. При этом другие полуаналитические методы, основанные на точном интегрировании по длине дуги, не могут быть использованы, так как для их реализации, т.е. возможности аналитического ин-

Таблица 2. Максимумы модулей абсолютных погрешностей аппроксимаций НП ППС

$-t_m$	$h_1 = \pi/3$	$h_1 = \pi/7$	$h_1 = \pi/15$	$h_1 = \pi/31$	$h_1 = \pi/63$	$h_1 = \pi/127$
10^{-2}	$3.01 \cdot 10^{-2}$	$2.66 \cdot 10^{-3}$	$2.77 \cdot 10^{-4}$	$3.15 \cdot 10^{-5}$	$3.76 \cdot 10^{-6}$	$4.59 \cdot 10^{-7}$
	$3.04 \cdot 10^{-2}$	$4.58 \cdot 10^{-3}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$	$7.39 \cdot 10^{-4}$	$1.78 \cdot 10^{-4}$	$4.36 \cdot 10^{-5}$
	$3.00 \cdot 10^{-2}$	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$
	$3.01 \cdot 10^{-2}$	$2.66 \cdot 10^{-3}$	$1.06 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$
	$3.01 \cdot 10^{-2}$	$2.66 \cdot 10^{-3}$	$2.76 \cdot 10^{-4}$	$3.15 \cdot 10^{-5}$	$3.76 \cdot 10^{-6}$	$1.90 \cdot 10^{-6}$
10^{-3}	$3.11 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$	$2.85 \cdot 10^{-4}$	$3.24 \cdot 10^{-5}$	$3.86 \cdot 10^{-6}$	$5.73 \cdot 10^{-7}$
	$3.20 \cdot 10^{-2}$	$7.92 \cdot 10^{-3}$	$6.41 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-3}$	$3.57 \cdot 10^{-4}$	$8.75 \cdot 10^{-5}$
	$1.21 \cdot 10^{-1}$	$3.00 \cdot 10^{-1}$	$4.01 \cdot 10^{-1}$	$4.01 \cdot 10^{-1}$	$4.01 \cdot 10^{-1}$	$4.01 \cdot 10^{-1}$
	$3.21 \cdot 10^{-2}$	$7.81 \cdot 10^{-3}$	$1.68 \cdot 10^{-1}$	$1.68 \cdot 10^{-1}$	$1.68 \cdot 10^{-1}$	$1.68 \cdot 10^{-1}$
	$3.11 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$	$2.26 \cdot 10^{-2}$	$2.26 \cdot 10^{-2}$	$2.26 \cdot 10^{-2}$	$2.26 \cdot 10^{-2}$
10^{-4}	$3.12 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$	$2.85 \cdot 10^{-4}$	$3.25 \cdot 10^{-5}$	$3.87 \cdot 10^{-6}$	$4.73 \cdot 10^{-7}$
	$3.27 \cdot 10^{-2}$	$1.19 \cdot 10^{-2}$	$9.65 \cdot 10^{-3}$	$2.23 \cdot 10^{-3}$	$5.39 \cdot 10^{-4}$	$1.32 \cdot 10^{-4}$
	$4.51 \cdot 10^{-1}$	$4.79 \cdot 10^{-1}$	$4.90 \cdot 10^{-1}$	$4.90 \cdot 10^{-1}$	$4.90 \cdot 10^{-1}$	$4.90 \cdot 10^{-1}$
	$3.19 \cdot 10^{-1}$	$4.20 \cdot 10^{-1}$	$4.62 \cdot 10^{-1}$	$4.62 \cdot 10^{-1}$	$4.62 \cdot 10^{-1}$	$4.62 \cdot 10^{-1}$
	$4.36 \cdot 10^{-2}$	$2.15 \cdot 10^{-1}$	$3.54 \cdot 10^{-1}$	$3.54 \cdot 10^{-1}$	$3.54 \cdot 10^{-1}$	$3.54 \cdot 10^{-2}$
10^{-5}	$3.12 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$	$2.86 \cdot 10^{-4}$	$3.25 \cdot 10^{-5}$	$3.87 \cdot 10^{-6}$	$4.73 \cdot 10^{-7}$
	$3.33 \cdot 10^{-2}$	$1.58 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.09 \cdot 10^{-3}$	$7.45 \cdot 10^{-4}$	$1.83 \cdot 10^{-4}$
	$5.95 \cdot 10^{-1}$	$4.98 \cdot 10^{-1}$	$4.99 \cdot 10^{-1}$	$4.99 \cdot 10^{-1}$	$4.99 \cdot 10^{-1}$	$4.99 \cdot 10^{-1}$
	$4.81 \cdot 10^{-1}$	$4.92 \cdot 10^{-1}$	$4.96 \cdot 10^{-1}$	$4.96 \cdot 10^{-1}$	$4.96 \cdot 10^{-1}$	$4.96 \cdot 10^{-1}$
	$4.27 \cdot 10^{-1}$	$4.69 \cdot 10^{-1}$	$4.85 \cdot 10^{-1}$	$4.85 \cdot 10^{-1}$	$4.85 \cdot 10^{-1}$	$4.85 \cdot 10^{-1}$
10^{-14}	$3.12 \cdot 10^{-2}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$	$2.86 \cdot 10^{-4}$	$3.25 \cdot 10^{-5}$	$3.87 \cdot 10^{-6}$	$4.73 \cdot 10^{-7}$
	$5.49 \cdot 10^{-2}$	$5.18 \cdot 10^{-2}$	$4.92 \cdot 10^{-2}$	$1.13 \cdot 10^{-2}$	$2.78 \cdot 10^{-3}$	$6.65 \cdot 10^{-4}$
	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$
	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$
	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$	$5.00 \cdot 10^{-1}$

тегрирования, требуется более простая аппроксимация координатных функций: линейная или квадратичная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
3. Gao X. W., Yang K., Wang J. An adaptive element subdivision technique for evaluation of various 2D singular boundary integrals // Eng. Anal. Bound. Elem. 2008. V. 32. Iss. 8. P. 692–696.
4. Крутицкий П. А., Федотова А. Д., Колыбасова В. В. Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференц. ур-ния. 2019. Т. 55. № 9. С. 1269–1284.

5. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Улучшенная квадратурная формула для потенциала двойного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 230–244.
6. Zhang Y.-M., Gu Y., Chen J.-T. Stress analysis for multilayered coating systems using semi-analytical BEM with geometric non-linearities // Comput. Mech. 2011. V. 47. Iss. 5. P. 493–504.
7. Gu Y., Chen W., Zhang B., Qu W. Two general algorithms for nearly singular integrals in two dimensional anisotropic boundary element method // Comput. Mech. 2014. V. 53. Iss. 6. P. 1223–1234.
8. Niu Z., Cheng C., Zhou H., Hu Z. Analytic formulations for calculating nearly singular integrals in two-dimensional BEM // Eng. Anal. Bound. Elem. 2007. V. 31. Iss. 12. P. 949–964.
9. Niu Z., Hu Z., Cheng C., Zhou H. A novel semi-analytical algorithm of nearly singular integrals on higher order elements in two dimensional BEM // Eng. Anal. Bound. Elem. 2015. V. 61. P. 42–51.
10. Cheng C., Pan D., Han Z., Wu M., Niu Z. A state space boundary element method with analytical formulas for nearly singular integrals // Acta Mech. Solida Sin. 2018. V. 31. № 4. P. 433–444.
11. Крутицкий П. А., Колыбасова В. В. Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1262–1276.
12. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 932–950.
13. Крутицкий П. А., Резниченко И. О. Квадратурная формула для потенциала двойного слоя в случае уравнения Гельмгольца // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 3. С. 421–436.
14. Gong Y. P., Dong C. Y., Bai Y. Evaluation of nearly singular integrals in isogeometric boundary element method // Eng. Anal. Bound. Elem. 2017. V. 75. P. 21–35.
15. Gao X.-W., Zhang J.-B., Zheng B.-J., Zhang C. Element-subdivision method for evaluation of singular integrals over narrow strip boundary elements of super thin and slender structures // Eng. Anal. Bound. Elem. 2016. V. 66. P. 145–154.
16. Zhang J., Wang P., Lu C., Dong Y. A spherical element subdivision method for the numerical evaluation of nearly singular integrals in 3D BEM // Eng. Comput. 2017. V. 34. Iss. 6. P. 2074–2087.
17. Gong Y., Dong C., Qin F., Hattori G., Trevelyan J. Hybrid nearly singular integration for isogeometric boundary element analysis of coatings and other thin 2D structures // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2020. V. 367. 113099.
18. Иванов Д. Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. № 57. С. 5–25.
19. Иванов Д. Ю. Об аппроксимации нормальной производной теплового потенциала простого слоя вблизи границы двумерной области // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2023. № 83. С. 31–51.
20. Иванов Д. Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы двумерной области с помощью полуаналитической аппроксимации теплового потенциала двойного слоя // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2020. № 65. С. 30–52.
21. Иванов Д. Ю. О равномерной сходимости аппроксимаций потенциала двойного слоя вблизи границы двумерной области // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Мех. Комп. науки. 2022. Т. 32. Вып. 1. С. 26–43.
22. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981.

23. *Иванов Д. Ю.* Устойчивая разрешимость в пространствах дифференцируемых функций некоторых двумерных интегральных уравнений теплопроводности с операторно-полугрупповым ядром // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2015. № 38. С. 33–45.
24. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 2003.
25. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
26. *Крылов В. И., Шульгина Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, 1966.

ON THE UNIFORM CONVERGENCE OF APPROXIMATIONS OF THE TANGENT AND NORMAL DERIVATIVES OF THE POTENTIAL OF A SIMPLE LAYER NEAR THE BOUNDARY OF A TWO-DIMENSIONAL DOMAIN

D. Yu. Ivanov^{a,*}

^a 127994 Moscow, Obraztsova str., 9, Russian University of Transport, (RUT (MIIT)), Academy of Basic Training, Russia

*e-mail: ivanovdyu@yandex.ru

Received 6 September, 2023

Revised 6 September, 2023

Accepted 3 April, 2024

Abstract. Semi-analytical approximations of the tangent derivative (TD) and the normal derivative (ND) of the potential of a simple layer (PSL) near the boundary of a two-dimensional region are proposed, performed within the framework of the collocation method of boundary elements and not requiring approximation of the coordinate functions of the boundary. To obtain approximations, analytical integration over the smooth component of the distance function and a special additive-multiplicative method of distinguishing features are used. It is proved that such approximations have a more uniform convergence near the boundary of the domain compared with similar approximations of TD and PSL ND based on a simple multiplicative method of distinguishing features. One of the reasons for the highly uneven convergence of traditional approximations of the TD and PSL ND based on Gauss's quadrature formulas has been established.

Keywords: boundary element method, almost singular integral, analytical integration.