

УДК 517.977.56

АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ГРАНИЧНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ КОНОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ, С УПРАВЛЕНИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ ОПЕРАТОРА КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА И НЕЛИНЕЙНОМ ЧЛЕНЕ УРАВНЕНИЯ

© 2024 г. Ф. В. Лубышев¹, М. Э. Файрузов^{1,*}

¹450076 Уфа, ул. Заки Валиди, 32, Уфимский университет науки и технологий, Россия

*e-mail: fairuzovme@mail.ru

Поступила в редакцию 22.05.2023 г.

Переработанный вариант 25.02.2024 г.

Принята к публикации 05.04.2024 г.

В работе изучаются разностные аппроксимации задачи оптимального управления с граничным наблюдением конормальной производной состояния, описываемой задачей Дирихле для полулинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах оператора конвективного переноса и нелинейном члене уравнения. Рассматриваются вопросы корректности постановки задачи оптимального управления. Строятся разностные аппроксимации задачи оптимального управления. Изучаются вопросы сходимости аппроксимаций по функционалу и управлению. Проводится регуляризация аппроксимаций. Библ. 23.

Ключевые слова: задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, краевая задача Дирихле, разностные аппроксимации, сходимость аппроксимаций, регуляризация аппроксимаций.

DOI: 10.31857/S0044466924070055, EDN: xisfoz

1. ВВЕДЕНИЕ

Характер конкретных постановок задач оптимального управления для распределенных систем существенно зависит от того, куда входят управления (в свободные члены уравнений состояния или в коэффициенты уравнений), линейными или нелинейными дифференциальными уравнениями математической физики (УМФ) описываются состояния систем управления (см. [1]–[11]), а также зависит от того, какой гладкостью обладают входные данные систем управления. В настоящее время наиболее полно исследован случай таких систем управления, когда управления входят в линейные уравнения состояния и линейные предельные условия, а также когда входные данные и функции состояния систем являются достаточно гладкими. Характерной особенностью задач оптимального управления нелинейного типа является то, что отображение из множества допустимых управлений в пространство состояний является нелинейным. Нелинейные задачи оптимального управления для УМФ относятся к наиболее сложному классу задач оптимизации. Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы — “конечномерными задачами оптимизации” (см. [1]). Обзор работ, посвященных основам общей теории и методам устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления, а также результатам в этой области, представлен, например, в [1]–[11]. Одним из наиболее удобных, универсальных и широко распространенных методов конечномерных аппроксимаций задач оптимального управления является метод сеток (см. [12]–[17]). Центральными в проблеме аппроксимации являются вопросы “конструирования” аппроксимаций, сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций (см., например, [1]–[11]). Для систем управления, описываемых УМФ, построения и исследования аппроксимаций проводились в основном для

линейных задач оптимального управления, причем с достаточно гладкими коэффициентами УМФ и состояниями.

При исследовании многих процессов в движущихся средах в качестве основных можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т.е. конвективный перенос (см. [12]). Задачи конвекции-диффузии являются типичными для математических моделей механики жидкости и газа. Так, распределение тепла, примесей может происходить не только за счет диффузии, но и быть обусловленным движением среды. Принципиальные особенности физико-химических процессов в механике жидкости и газа могут быть порождены именно учетом движения сред под действием тех или иных сил. Конвективный-диффузионный процесс может играть определяющую роль при моделировании самых разнообразных процессов. В частности, важное значение приобретают экологические проблемы, связанные с описанием процессов распределения примесей в атмосфере и водоемах, с моделированием загрязнения грунтовых вод. В газо- и гидродинамике в качестве базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи как для стационарных, так и нестационарных уравнений конвекции-диффузии — эллиптические или параболические уравнения второго порядка с младшими членами. В настоящее время в теории численных методов решения задач УМФ и задач оптимального управления наиболее глубокие результаты получены при рассмотрении процессов с самосопряженными операторами. Это относится как к методам, базирующимся на конечно-разностных аппроксимациях состояния, так и к методам на основе конечно-элементных аппроксимаций.

Данная работа посвящена исследованию численных методов решения наиболее важных для теории и практики задач оптимального управления для эллиптических уравнений второго порядка с несамосопряженными операторами — задач конвекции-диффузии. Процесс управления описывается полулинейным уравнением конвекции-диффузии с управлениями в коэффициентах оператора конвективного переноса и нелинейном члене уравнения. На управления накладываются локальные ограничения. Наличие несамосопряженного оператора вызывает определенные трудности при построении и изучении аппроксимаций дифференциальных уравнений, в частности при доказательстве корректности разностных аппроксимаций, и при исследовании связи между исходной задачей оптимального управления и аппроксимирующей сеточной задачей. Исследованы вопросы сходимости аппроксимаций: установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу и сходимость аппроксимаций по управлению. На основе метода А. Н. Тихонова и полученных результатов проведена регуляризация предложенных аппроксимаций, позволяющая строить минимизирующие последовательности для целевых функционалов нелинейных задач оптимального управления, сильно сходящиеся в пространствах управлений к множествам точек минимумов функционалов исходных постановок.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ — прямоугольник с границей Γ . Пусть управляемый процесс описывается в Ω краевой задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с переменными коэффициентами:

$$L(g)u = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 b_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(g) = \int_{\Gamma_*} \left| \frac{\partial u(x, g)}{\partial N} - \psi(x) \right|^2 d\Gamma_*, \quad (3)$$

на решениях $u(x) = u(x; g)$ краевой задачи (1)–(2) при следующих ограничениях на управления $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = (d(x), b_1(x), b_2(x))$:

$$g \in U = \prod_{k=1}^3 U_k \subset B = W_\infty^1(\Omega) \times W_\infty^1(\Omega) \times W_\infty^1(\Omega) = (W_\infty^1(\Omega))^3, \quad (4)$$

где $\Gamma_* \subseteq \Gamma$, $\text{mes} \Gamma_* > 0$, $\psi(x) \in W_2^1(\Gamma_*)$ — заданная функция, а $\xi_\alpha, \bar{\xi}_\alpha, \hat{R}_\beta^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\beta = 1, 2$ — заданные числа, п.в. — почти всюду. В данном случае мы имеем, так называемую, задачу оптимального управления с граничным наблюдением конормальной производной состояния. Функционал цели (3) в данной экстремальной задаче характеризует меру отклонения в L_2 — норме конормальной производной состояния на границе Γ области Ω от заданной функции $\psi(x)$. В дальнейшем, для определенности будем считать, что

$$\Gamma_* = \Gamma_{+1} = \{x_1 = l_1, 0 < x_2 < l_2\}.$$

Предполагается выполнение следующих условий: $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $q(u)$, $f(x)$ — заданные функции, причем

$$k_\alpha(x) \in C^1(\bar{\Omega}), \quad f(x) \in C(\bar{\Omega}), \quad k_\alpha(x) \geq \nu > 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \Omega, \\ \text{и } \frac{\partial^2 k_\alpha}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \text{ — ограниченные на } \Omega \text{ кусочно-гладкие функции;} \quad (5)$$

функция $q(s)$ определена на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям

$$q(0) = 0, \quad 0 < q_0 \leq [q(s_1) - q(s_2)] / (s_1 - s_2) \leq L_q < \infty, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, s_1 \neq s_2; \quad (6)$$

$$\xi_1 > 0, \quad -m \leq \xi_2 \leq \bar{\xi}_2 \leq m, \quad -p \leq \xi_3 \leq \bar{\xi}_3 \leq p, \quad m, p = \text{const} > 0, \\ \delta_* = \max_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \nu}} \left\{ \frac{\nu - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{C_\Omega^2} + \xi_1 q_0 - \frac{m^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p^2}{4\varepsilon_2} \right\} > 0, \quad C_\Omega^2 = \left(\frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Используя метод монотонных операторов [18, с. 78], [19, с. 202] можно показать, что существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(2) в классе $\dot{W}_2^1(\Omega)$. Более того, это решение $u(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega) = W_{2,0}^2(\Omega)$, причем

$$\sup_{g \in U} \|u(x, g)\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C_1 \|f(x)\|_{L_2(\Omega)}. \quad (8)$$

Будем считать, что задача (1)–(2) принадлежит также пространству $W_2^3(\Omega)$.

Замечание 2.1. В краевой задаче для состояния (1)–(2) выделим случай: $q(u) = u$, важный для приложений [12], [21]. Тогда источниковый член уравнения (1) будет содержать слагаемое $d(x)u(x)$ пропорциональное функции состояния $u = u(x)$. В этом случае для существования решения $u(x)$ задачи (1)–(2) из пространства $W_2^3(\Omega)$ достаточно (см. [21, с. 31]), чтобы выполнялись, сформулированные выше условия на исходные данные и управления.

Замечание 2.2. Рассмотрим условие (7): $\delta_* > 0$. Оно выполняется, если, например, постоянная C_Ω “достаточно мала” или если положительное число $\xi_1 \cdot q_0$ “достаточно большое”. Выражения “достаточно малое” и “достаточно большое” уточняются условием $\delta_* > 0$, где δ_* определено в (7).

Здесь

$$C_\Omega^2 = \left(\frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}$$

есть константа из неравенства Пуанкаре–Фридрихса

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \leq C_\Omega^2 \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega,$$

с константой C_Ω , зависящей лишь от этой области Ω .

По поводу условия (7) смотри также монографию [23, с. 94].

Условия (6) описывают сильную монотонность и липшиц-непрерывность нелинейной функции $q(u)$.

Напомним следующее

Определение 2.1 (см. [1, с. 49]). Последовательность $\{u_n\} \subset B$ сходится к множеству U слабо в B , где B — банахово пространство, если $\{u_n\}$ имеет хотя бы одну слабо сходящуюся подпоследовательность, причем все точки v , являющиеся слабым пределом какой-либо подпоследовательности $\{u_n\}$ принадлежат U .

Пусть: $H = W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\}$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\}$.

Корректность постановки задачи (1)–(4) устанавливает

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия, принятые при постановке задачи (1)–(4). Тогда

$$J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty,$$

$$U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset,$$

где U_* — слабо компактно в H и любая минимизирующая последовательность $\{g_n\} \subset U$ для функционала $J(g)$ слабо в H сходится к множеству U_* .

Доказательство. Используя оценку (8), можно показать, что функционал $J(g)$ слабо непрерывен на U в слабой топологии пространства H . Кроме того, множество допустимых управлений U является выпуклым ограниченным и замкнутым множеством в рефлексивном пространстве H . Тогда справедливость теоремы 2.1 следует из [1, с. 49, гл. 1, п. 3, определение 6, теорема 2, с. 51, теорема 4. Теорема доказана.

3. РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ В НОРМЕ СЕТОЧНОГО ПРОСТРАНСТВА $W_{2,0}^2(\bar{\omega})$

Для аппроксимации задачи (3), (4), (1), (2) введем в $\bar{\Omega}$ сетки [13]: $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, $\omega = \omega_1 \times \omega_2$, $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$, $\omega^{(\pm 1)} = \omega_1^\pm \times \omega_2$, $\omega^{(\pm 2)} = \omega_1 \times \omega_2^\pm$. Пусть V — множество сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, а $\overset{\circ}{V}$ — его подмножество, состоящее из сеточных функций, обращающихся в нуль на $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$. Для сеточных функций из множества $\overset{\circ}{V}$ введем следующие нормы:

$$\|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 = |y|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 + \|y\|_{L_2(\omega)}^2 = |y|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 + \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y^2,$$

где

$$|y|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 = \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{x \in \omega^{(+\alpha)}} h_1 h_2 y_{\bar{x}_\alpha}^2 = \|\nabla y\|_{L_2(\omega)}^2,$$

$\omega^{(+1)} = \omega_1^+ \times \omega_2$, $\omega^{(+2)} = \omega_1 \times \omega_2^+$, которая превращает множество $\overset{\circ}{V}$ в нормированное пространство, обозначаемое через $\overset{\circ}{W}_{2,0}^1(\bar{\omega})$, и

$$\|y\|_{W_2^2(\bar{\omega})}^2 = |y|_{W_2^2(\bar{\omega})}^2 + \|y\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2,$$

где

$$|y|_{W_2^2(\bar{\omega})}^2 \equiv \|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^2 + 2 \sum_{\omega_1^- \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 x_2}^2,$$

превращающее его в нормированное пространство, обозначаемое через $W_{2,0}^2(\bar{\omega})$.

Здесь, как обычно, через $L_2(\omega)$ обозначено пространство сеточных функций, заданных на сетке ω со скалярным произведением и нормой

$$(y, v)_\omega = (y, v)_{L_2(\omega)} = \sum_{x \in \omega} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|y\|_\omega^2 = (y, y)_\omega = (y, y)_{L_2(\omega)}.$$

Далее, так как для любой сеточной функции $y(x) \in \overset{\circ}{V}$ справедливо неравенство (разностный аналог неравенства Фридрихса)

$$\|y\|_{L_2(\omega)}^2 \leq C_\Omega^2 \|y\|_{\overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}^2, \quad C_\Omega^2 = \left(\frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}, \quad (9)$$

то как следствие из этого неравенства, получим, что в пространстве $\overset{\circ}{V}$ полунорма $|y|_{W_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})} \equiv \|y\|_{\overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}$ определяет эквивалентную $\|\cdot\|_{W_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}$ норму. Действительно,

$$(1 + C_\Omega^2)^{-1} \|y\|_{W_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}^2 \leq \|y\|_{\overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}^2 \leq \|y\|_{W_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}^2. \quad (10)$$

Далее, в пространстве $\overset{\circ}{V}$ сеточных функций, обращающихся в нуль на границе γ , полунорма $|y|_{W_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})} \equiv \|y\|_{W_{\frac{1}{2},0}(\bar{\omega})}$ эквивалентна норме $\|y\|_{W_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}$. Действительно, имеет место оценка

$$\|y\|_{\overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}^2 = |y|_{W_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}^2 \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{8} \|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2. \quad (11)$$

Применяя неравенство (9) к этой оценки, получим

$$C_\Omega^{-2} \|y\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{8} \|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2, \quad (12)$$

откуда вытекает оценка

$$\frac{8}{16 + (1 + C_\Omega^2)(l_1^2 + l_2^2)} \|y\|_{W_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}^2 \leq \|y\|_{W_{\frac{1}{2},0}(\bar{\omega})}^2 \leq \|y\|_{W_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})}^2. \quad (13)$$

Лемма 3.1. Для любой сеточной функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ и обращающейся в нуль на границе γ , справедливо неравенство

$$\|y\|_{L_2(\omega)} \leq M \|y\|_{W_{\frac{1}{2},0}(\bar{\omega})}, \quad M = \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{32} \left[\pi(l_1^2 + l_2^2) + \frac{2l_1^3 l_2^3}{(l_1^2 + l_2^2)^2} \right]. \quad (14)$$

Доказательство. Для функций $y(x)$, заданных на равномерной сетке $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль на γ , справедлива оценка

$$\|y\|_{C(\bar{\omega})} \leq M_0 \|y\|_{W_{\frac{1}{2},0}(\bar{\omega})}, \quad M_0 = \frac{1}{32} \left[\pi(l_1^2 + l_2^2) + \frac{2l_1^3 l_2^3}{(l_1^2 + l_2^2)^2} \right]. \quad (15)$$

Следовательно,

$$\|y\|_{L_2(\omega)}^2 = \sum_{\omega} h_1 h_2 y^2(x) \leq l_1 l_2 M_0^2 \|y\|_{W_{\frac{1}{2},0}(\bar{\omega})}^2, \quad (16)$$

откуда получаем оценку (14).

Лемма 3.2. Для любой сеточной функции $v(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, справедливо неравенство

$$\sum_{\bar{\omega}_2} \hbar_2 v_{\bar{x}_1}^2(l_1, x_2) \leq \varepsilon \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2} v_{\bar{x}_1 x_1}(x_1, x_2) h_1 \hbar_2 + M \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{\varepsilon^3} \right) \|v\|_{L_2(\bar{\omega})}^2, \quad (17)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, а M — некоторая положительная постоянная, не зависящая ни от сетки $\bar{\omega}$, ни от функции $v(x)$.

Доказательство. При произвольном фиксированном x_2 для функции $v(x) = v(x_1, x_2)$ справедлива оценка (см. [13], с.294, теорема 3)

$$v_{\bar{x}_1}^2(l_1, x_2) \leq \varepsilon \sum_{\bar{\omega}_1} v_{\bar{x}_1 x_1}^2(x_1, x_2) h_1 + M \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{\varepsilon^3} \right) \sum_{\bar{\omega}_1} v^2(x_1, x_2) \hbar_1.$$

Умножая это неравенство на h_2 и суммируя полученное соотношение по $\bar{\omega}_2$, получаем оценку (17).

Лемма 3.3. Для любой сеточной функции $y(x)$, заданной на равномерной сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ и обращающейся в нуль на границе γ , справедливо неравенство

$$\sum_{\bar{\omega}_2} \hbar_2 y_{\bar{x}_1}^2(l_1, x_2) \leq C \|y\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}^2. \quad (18)$$

Доказательство следует из оценок (14) и (17).

Перейдем теперь к аппроксимации задачи оптимального управления.

Задаче оптимального управления (3), (4), (1)–(2) (с входными данными $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $q(u)$, $f(x)$) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x_2 \in \bar{\omega}_2} \hbar_2 |a_1(l_1, x_2) y_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) - \psi^{h_2}(x_2)|^2, \quad (19)$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) = y(x, \Phi_h)$, $x \in \bar{\omega}_h$, является решением следующей сеточной задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} \Lambda(\Phi_h)y(x) &= - \sum_{\alpha=1}^2 (a_\alpha(x) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha+1,h}(x) y_{y_\alpha}^\circ(x) + \Phi_{1h}(x) q(y) = \\ &= S^{x_1} S^{x_2} f(x) = f^h(x), \quad x \in \omega, \end{aligned} \quad (20)$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad (21)$$

а сеточные управления Φ_h таковы, что

$$\Phi_h(x) = (\Phi_{1h}(x), \Phi_{2h}(x), \Phi_{3h}(x)) \in \prod_{\alpha=1}^3 U_{\alpha h} = U_h \subset B_h = (W_\infty^1(\omega))^3, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} U_{\alpha h} &= \{ \Phi_{\alpha h}(x) \in W_\infty^1(\omega) : \xi_\alpha \leq \Phi_{\alpha h}(x) \leq \bar{\xi}_\alpha, x \in \omega, |\Phi_{\alpha h x_1}(x)| \leq R_1^{(\alpha)}, \\ &x \in (\omega_1 \setminus \{x_1 - l_1 - h_1\}) \times \omega_2, |\Phi_{\alpha h x_2}(x)| \leq R_2^{(\alpha)}, x \in \omega_1 \times (\omega_2 \setminus \{x_2 = l_2 - h_2\}) \}, \end{aligned} \quad (23)$$

$\alpha = 1, 2, 3$. Здесь $\psi^{h_2}(x_2) = S^{x_2} \psi$ — сеточная аппроксимация функции $\psi(x)$ с помощью операции усреднения по Стеклову (см. [17, с. 56], [12, с. 158]):

$$a_\alpha(x) = k_\alpha^{(-0.5_\alpha)}(x), \quad x \in \omega, \quad \alpha = 1, 2.$$

Разностную схему (20), (21) в дальнейшем будем рассматривать как операторное уравнение

$$\bar{A}_h y = \bar{F}_h, \quad (24)$$

с оператором $\bar{A}_h$, действующим из $W_{2,0}^2(\bar{\omega})$ в $L_2(\omega)$ и определяемым соотношением

$$\bar{A}_h y(x) = \Lambda y(x), \quad \bar{F}_h = f^h(x), \quad x \in \omega. \quad (25)$$

Лемма 3.4. Для оператора $\bar{A}_h : W_{2,0}^2(\bar{\omega}) \rightarrow L_2(\omega)$ справедливы следующие оценки:

$$(\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2, v_1 - v_2)_{L_2(\omega)} \geq \delta_* \|v_1 - v_2\|_{W_{2,0}^1(\bar{\omega})}^2, \quad (26)$$

$$C_0 \|v_1 - v_2\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} - M_1 \|v_1 - v_2\|_{W_{2,0}^1(\bar{\omega})} \leq \|\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2\|_{L_2(\bar{\omega})} \leq M_2 \|v_1 - v_2\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}, \quad (27)$$

где

$$C_0 = \frac{\nu^2}{2\bar{\nu}}, \quad M_1 = C_\Omega L_q \xi_2^* + 2^{1/2}(R + \theta), \quad \bar{\nu} = \max_\alpha \{ \|k_\alpha(x)\|_{L_2(\Omega)} \},$$

$$M_2 = 2^{1/2}\bar{v} + \frac{M_1 l_1 l_2}{16C_\Omega}, \quad R = \max_\alpha \left\{ \left\| \frac{\partial k_\alpha(x)}{\partial x_\alpha} \right\|_{L_\infty(\Omega)} \right\}, \quad \theta = \max\{m, p\}, \quad \xi_2^* = \max\{|\xi_2|, |\bar{\xi}_2|\},$$

константы $C_\Omega, L_q, v, m, p, \xi_2, \bar{\xi}_2, \delta_*$ определены в условиях (4)–(7).

Доказательство. Ограничимся доказательством оценки (27). Используя формулы разностного дифференцирования произведения [13], и обозначая $v(x) = v_1(x) - v_2(x)$, из (20), (21) получим

$$\begin{aligned} \bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2 &= - \sum_{\alpha=1}^2 a_\alpha(x) v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^2 (a_\alpha(x))_{x_\alpha} \cdot v_{x_\alpha} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha+1,h}(x) v_{x_\alpha}^\circ + \Phi_{1h}(x) [q(v_1) - q(v_2)], \quad x \in \omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Откуда найдем

$$\sum_{\alpha=1}^2 a_\alpha(x) v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = D(x, v_1, v_2), \quad x \in \omega, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} D(x, v_1, v_2) &= \Phi_{1h}(x) [q(v_1) - q(v_2)] - [\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2] - \\ &- \sum_{\alpha=1}^2 a_{\alpha x_\alpha} v_{x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha+1,h}(x) v_{x_\alpha}^\circ, \quad x \in \omega. \end{aligned} \quad (30)$$

Умножим обе части (29) на сеточную функцию $\frac{v_{\bar{x}_1 x_1}}{a_2(x)}$ и приведем полученное соотношение к виду

$$\frac{1}{a_2(x)} \left\{ a_1(x) v_{\bar{x}_1 x_1}^2 + a_2(x) \left(\frac{v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2}}{2} \right)^2 \right\} = \frac{v_{\bar{x}_1 x_1}}{a_2(x)} D(x, v_1, v_2) + I(v),$$

где

$$I(v) = \left(\frac{v_{\bar{x}_1 x_1} + v_{\bar{x}_2 x_2}}{2} \right)^2 - v_{\bar{x}_1 x_1} \cdot v_{\bar{x}_2 x_2}. \quad (31)$$

Из (31) установим оценку

$$\frac{v}{\bar{v}} \leq \frac{1}{v} |D| \cdot |v_{\bar{x}_1 x_1}| + I(v) \leq \frac{1}{v} \left[\frac{1}{4\epsilon} D^2(x, v_1, v_2) + \epsilon |v_{\bar{x}_1 x_1}|^2 \right] + I(v), \quad \epsilon > 0. \quad (32)$$

Полагая $\epsilon = \frac{v^2}{2\bar{v}}$ в неравенстве (32), получим оценку

$$\frac{v}{\bar{v}} v_{\bar{x}_1 x_1}^2 \leq \frac{\bar{v}}{\sqrt{3}} D^2(x, v_1, v_2) + I(v). \quad (33)$$

Умножим (33) на $h_1 h_2$ и просуммируем по сетке ω . В результате получим оценку

$$\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \frac{\bar{v}^2}{v^4} \|D(x, v_1, v_2)\|_{L_2(\omega)}^2 + \frac{2\bar{v}}{v} \sum_{\omega} I(v) h_1 h_2. \quad (34)$$

Покажем, что

$$\sum_{\omega} I(v) h_1 h_2 \leq 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}. \quad (35)$$

Действительно, имеем

$$\sum_{\omega} I(v) h_1 h_2 \leq \frac{1}{2} \sum_{\omega} (v_{\bar{x}_1 x_2}^2 + v_{x_1 \bar{x}_2}^2) h_1 h_2 - \sum_{\omega} v_{\bar{x}_1 x_1} \cdot v_{\bar{x}_2 x_2} h_1 h_2. \quad (36)$$

Далее

$$\sum_{\omega} (v_{\bar{x}_1 x_2}^2 + v_{x_1 \bar{x}_2}^2) h_1 h_2 = \sum_{x_1 \in \omega_1} \sum_{x_2=2h_2}^{N_2 h_2} v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + \sum_{x_1=2h_1}^{N_1 h_1} \sum_{x_2 \in \omega_2} v_{x_1 \bar{x}_2}^2 \leq 2 \sum_{x \in \omega_1^+ \times \omega_2^+} v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 h_1 h_2. \quad (37)$$

Используя формулу суммирования по частям (дважды) с учетом соотношений

$$v_{\bar{x}_2 x_2} \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_1=l_1}} = 0, \quad v_{\bar{x}_1 x_1} \Big|_{\substack{x_2=0 \\ x_2=l_2}} = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{\omega} v_{\bar{x}_1 x_1} \cdot v_{\bar{x}_2 x_2} h_1 h_2 &= - \sum_{\omega_2} h_2 \sum_{\omega_1^+} h_1 v_{\bar{x}_1} \cdot (v_{\bar{x}_2 x_2})_{\bar{x}_1} = \\ &= \sum_{\omega_1^+} h_1 \sum_{\omega_2} h_2 v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \cdot (v_{\bar{x}_1})_{\bar{x}_2} = \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 h_1 h_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Теперь с учетом (37), (38) из (36) получим желаемую оценку (35).

Вернемся теперь к неравенству (34). С учетом (35) из неравенства (34) получим

$$\|v_{\bar{x}_1 x_1}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \frac{\bar{v}^2}{v^4} \|D(x, v_1, v_2)\|_{L_2(\omega)}^2. \quad (39)$$

Аналогично устанавливается оценка

$$\|v_{\bar{x}_2 x_2}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \frac{\bar{v}^2}{v^4} \|D(x, v_1, v_2)\|_{L_2(\omega)}^2. \quad (40)$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^2 \|v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq \frac{2\bar{v}^2}{v^4} \|D(x, v_1, v_2)\|_{L_2(\omega)}^2. \quad (41)$$

Далее из (38) имеем

$$\sum_{x \in \omega_1^+ \times \omega_2^+} v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 h_1 h_2 \leq \frac{1}{2} \sum_{\omega} h_1 h_2 (v_{\bar{x}_1 x_2}^2 + v_{x_1 \bar{x}_2}^2). \quad (42)$$

Принимая во внимание оценку (42) и определение сеточной нормы $\|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}$, получим неравенство

$$\|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}^2 = \sum_{\omega} (v_{\bar{x}_1 x_1}^2 + v_{\bar{x}_2 x_2}^2) h_1 h_2 + 2 \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 \leq 2 \sum_{\omega} h_1 h_2 (v_{\bar{x}_1 x_1}^2 + v_{\bar{x}_2 x_2}^2). \quad (43)$$

Теперь из неравенств (43), (41) получаем оценку

$$\|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq \frac{2\bar{v}}{v^2} \|D(x, v_1, v_2)\|_{L_2(\omega)}. \quad (44)$$

Перейдем теперь к оценке правой части неравенств (44). Имеем

$$\begin{aligned} \|D(x, v_1, v_2)\|_{L_2(\omega)} &\leq \|\Phi_{1h}(x)[q(v_1) - q(v_2)]\|_{L_2(\omega)} + \|\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2\|_{L_2(\omega)} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \left[\|a_{\alpha x_\alpha}\|_{L_2(\omega)} + \|\Phi_{\alpha+1,h}(x) v_{\bar{x}_\alpha}^\circ\|_{L_2(\omega)} \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Принимая во внимание очевидные оценки

$$|a_{\alpha x_\alpha}| < R, \quad R = \max_{\alpha} \left\| \frac{\partial k_\alpha(x)}{\partial x_\alpha} \right\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad \alpha = 1, 2; \quad \|v_{\bar{x}_\alpha}^\circ\|_{L_2(\omega)} \leq \|v_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_2(\omega^{+\alpha})}, \quad \alpha = 1, 2,$$

неравенство (9) и ограничения (4), (5), (7), получим из (45)

$$\|D(x, v_1, v_2)\|_{L_2(\omega)} \leq [C_\Omega L_q \xi_2^* + 2^{1/2}(R + \theta)] \|v\|_{W_{\frac{1}{2}}(\bar{\omega})} + \|\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2\|_{L_2(\omega)}, \quad (46)$$

где

$$\theta = \max\{m, p\}, \quad \xi_2^* = \max\{|\xi_2|, |\bar{\xi}_2|\}.$$

Из неравенств (44), (46) получаем

$$\frac{v^2}{2\bar{v}} \|v\|_{W_{2,0}^2(\omega)} - [C_\Omega L_q \xi_2^* + 2^{1/2}(R + \theta)] \|v\|_{\dot{W}_{\frac{1}{2}}^1(\bar{\omega})} \leq \|\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2\|_{L_2(\omega)}, \quad (47)$$

откуда следует левая часть неравенства (27). Установим теперь правую часть неравенства (27). Из (28) нетрудно получить оценку

$$\begin{aligned} \|\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2\|_{L_2(\omega)} &\leq \sum_{\alpha=1}^2 \left(\|a_\alpha(x) v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}\|_{L_2(\omega)} + \|a_{\alpha x_\alpha}(x) v_{x_\alpha}\|_{L_2(\omega)} + \|\Phi_{\alpha+2,h}(x) v_{x_\alpha}^\circ\|_{L_2(\omega)} \right) + \\ &+ \|\Phi_{1h}(x)[q(v_1) - q(v_2)]\|_{L_2(\omega)} \leq 2^{1/2}\bar{v} \|v\|_{W_{2,0}^2(\omega)} + [C_\Omega L_q \xi_2^* + 2^{1/2}(R + \theta)] \|v\|_{\dot{W}_{\frac{1}{2}}^1(\bar{\omega})}. \end{aligned} \quad (48)$$

Далее, так как сеточная функция $v_{\bar{x}_1}(x_1, x_2)$ обращается в нуль при $x_2 = 0$, $x_2 = l_2$, то (см. [13])

$$\sum_{\omega_2} v_{\bar{x}_1}^2(x) h_2 \leq \frac{l_2^2}{8} \sum_{\omega_2^+} v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 h_2. \quad (49)$$

Умножим эти неравенства на h_1 и просуммируем по $x_1 \in \omega_1^+$, тогда будем иметь

$$\sum_{\omega_1^+ \times \omega_2} v_{\bar{x}_1}^2(x) h_1 h_2 \leq \frac{l_2^2}{8} \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 h_1 h_2. \quad (50)$$

Аналогично можно получить оценку

$$\sum_{\omega_1 \times \omega_2^+} v_{\bar{x}_2}^2(x) h_1 h_2 \leq \frac{l_1^2}{8} \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 h_1 h_2. \quad (51)$$

Следовательно,

$$\|v\|_{\dot{W}_{\frac{1}{2}}^1(\bar{\omega})}^2 \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{8} \|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2. \quad (52)$$

Далее, так как (см. (38))

$$\sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2(x) h_1 h_2 = \sum_{\omega} v_{\bar{x}_1 x_1} \cdot v_{\bar{x}_2 x_2} h_1 h_2,$$

то

$$2 \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} v_{\bar{x}_1 x_2}(x) h_1 h_2 \leq \sum_{\omega} (v_{\bar{x}_1 x_2}^2 + v_{x_1 \bar{x}_2}^2) h_1 h_2. \quad (53)$$

Прибавляя к обеим частям неравенства (53) выражение

$$2 \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} v_{\bar{x}_1 x_2}^2(x) h_1 h_2,$$

получим оценку

$$\|v_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2 \leq \frac{1}{4} \|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}^2. \quad (54)$$

Теперь на основе оценок (52), (54) получим неравенство

$$\|v\|_{\dot{W}_{\frac{1}{2}}^1(\bar{\omega})} \leq \frac{l_1^2 + l_2^2}{32} \|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}. \quad (55)$$

Вернемся к неравенству (48). Для оценки правой части (48) воспользуемся неравенством (55). В результате установим оценку

$$\|\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2\|_{L_2(\omega)} \leq \left\{ 2^{1/2} \bar{v} + [2^{1/2}(R + \theta) + C_\Omega L_q \xi_2^*] \frac{l_1 l_2}{16 C_\Omega} \right\} \|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}.$$

Лемма доказана.

Следствие 3.1. Для всяких сеточных функций $v_1(x)$, $v_2(x)$, обращающихся в нуль на границе γ сетки $\bar{\omega}$ имеет место оценка

$$\|v_1 - v_2\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq \frac{1}{C_0} \left(1 + \frac{M_1 C_\Omega}{\delta_*} \right) \|\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2\|_{L_2(\omega)}, \quad (56)$$

где константы C_0 , M_1 , C_Ω , δ_* определены в лемме 3.4.

Доказательство. В силу оценки (26) и сеточного аналога неравенства Фридрихса (9) имеем

$$\begin{aligned} \|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}^2 &\leq \frac{1}{\delta_*} (\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2, v_1 - v_2)_{L_2(\omega)} \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta_*} \|\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2\|_{L_2(\omega)} \|v\|_{L_2(\omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\delta_*} \|\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2\|_{L_2(\omega)} \|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}. \end{aligned} \quad (57)$$

Теперь из (27) и (57) следует

$$C_0 \|v_1 - v_2\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq \left(1 + \frac{M_1 C_\Omega}{\delta_*} \right) \|\bar{A}_h v_1 - \bar{A}_h v_2\|_{L_2(\omega)},$$

т.е. справедливость неравенства (56) доказана.

Вернемся к разностной схеме (24), (25).

Следствие 3.2. Из неравенства (56) и $A_h 0 = 0$ следует, что для решения $y(x)$ разностного уравнения (24), (25) справедлива оценка

$$\|y(x, \Phi_h)\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq C \|f^h(x)\|_{L_2(\bar{\omega})}, \quad (58)$$

а также оценки

$$\begin{aligned} \|y(x, \Phi_h)\|_{C(\bar{\omega})} &\leq \hat{M}_1 \|f^h(x)\|_{L_2(\bar{\omega})}, \\ \|y(x, \Phi_h)\|_{L_2(\bar{\omega})} &\leq \hat{M}_2 \|f^h(x)\|_{L_2(\bar{\omega})}, \\ \|y(x, \Phi_h)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} &\leq \hat{M}_3 \|f^h(x)\|_{L_2(\bar{\omega})}, \end{aligned} \quad (59)$$

здесь $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3 = \text{const} > 0$.

Теорема 3.1. Пусть разностная аппроксимация задача оптимального управления (1)–(4) определяется соотношениями (19)–(23) и выполнена оценка (58). Тогда

$$\begin{aligned} J_{h*} &= \inf \{ J_h(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h \} > -\infty, \\ U_{h*} &= \{ \Phi_{h*} \in U_h : J_h(\Phi_{h*}) = J_{h*} \} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1 и проводится на основе методики [1], [22].

4. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ПО СОСТОЯНИЮ В НОРМЕ СЕТОЧНОГО ПРОСТРАНСТВА $W_{2,0}^2(\bar{\omega})$

Установим теперь априорную оценку погрешности метода по состоянию в норме сеточного пространства $W_{2,0}^2(\bar{\omega})$. Через $\bar{\psi}_h(x)$ обозначим невязку разностного уравнения (24), (25) (погрешности аппроксимации разностного уравнения (24), (25) на решении исходной задачи для состояния (1), (2))

$$\bar{\psi}_h(x) = \bar{F}_h(x) - \bar{A}_h u. \quad (60)$$

Для определения погрешности $z = y - u$ схемы (24), (25) получим уравнение

$$\bar{A}_h y - \bar{A}_h u = \bar{\Psi}_h(x). \quad (61)$$

В силу неравенства корректности (56) имеем

$$\|y(x, \Phi_h) - u(x, g)\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq M \|\bar{\Psi}_h(x)\|_{L_2(\omega)}. \quad (62)$$

Таким образом, оценка погрешности разностной схемы (24), (25) в сеточной норме $W_{2,0}^2(\bar{\omega})$ сводится к оценке $L_2(\omega)$ — нормы погрешности аппроксимации $\bar{\Psi}_h(x)$ разностной схемы (24), (25).

Лемма 4.1. *Погрешность аппроксимации разностной схемы по состоянию (24), (25) представима в виде*

$$\bar{\Psi}_h(x) = \sum_{\alpha=1}^2 \left[(\eta_{\alpha}^{(1)})_{x_{\alpha}} - \frac{1}{2} \left(B_{\alpha}^{-}(x) + B_{\alpha}^{+}(x) + \hat{B}_{\alpha}^{-}(x) + \hat{B}_{\alpha}^{+}(x) \right) - \eta_3^{(\alpha)}(x) \right], \quad x \in \omega, \quad (63)$$

где сеточные функции $\eta_{\alpha}^{(1)}$, $B_{\alpha}^{\pm}(x)$, $\hat{B}_{\alpha}^{\pm}(x)$, $\eta_3^{(\alpha)}(x)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha}^{(1)}(x) &= \left[S^{x_{\beta}} k_{\alpha}^{(-0.5_{\alpha})}(x) \right] u_{\bar{x}_{\alpha}}(x) - S^{x_{\beta}} \left(k_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \right)^{(-0.5_{\alpha})}(x), \quad x \in \omega^{+\alpha}, \\ B_{\alpha}^{-}(x) &= \left[S^x B_{\alpha}(x) \right] u_{x_{\alpha}}(x) - S^x \left(b_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \right)(x), \\ B_{\alpha}^{+}(x) &= \left[S^x B_{\alpha}(x) \right] u_{\bar{x}_{\alpha}}(x) - S^x \left(b_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \right)(x), \\ \hat{B}_{\alpha}^{-}(x) &= (\Phi_{\alpha+1,h}(x) - S^x b_{\alpha+1}) u_{x_{\alpha}}(x), \\ \hat{B}_{\alpha}^{+}(x) &= (\Phi_{\alpha+1,h}(x) - S^x b_{\alpha+1}) u_{\bar{x}_{\alpha}}(x), \\ \eta_3^{(1)}(x) &= [S^x d(x)] q(u(x)) - S^x [d(\xi) q(u(\xi))](x), \\ \eta_3^{(2)}(x) &= (\Phi_{1h}(x) - S^x d(x)) q(u(x)). \end{aligned} \quad (64)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_h(x) &= \bar{F}_h(x) - \bar{A}_h u(x) = \\ &= f^h(x) - \left\{ - \sum_{\alpha=1}^2 (a_{\alpha}(x) u_x)_{x_{\alpha}} + \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha+1,h}(x) u_{x_{\alpha}}^{\circ} + \Phi_{1h}(x) q(u) \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

Для представления погрешности аппроксимации в подходящем виде применим к обеим частям дифференциального уравнения (1) усредняющий оператор $S^x = S^{x_1} S^{x_2}$ с центром в точке $x \in \omega$ (иначе говоря, проинтегрируем уравнение (1) по площадке $e(x)$ и разделим на $h_1 h_2$). Тогда после некоторых преобразований получим соотношение (обобщенное уравнение баланса):

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha=1}^2 \left(S^{x_{\beta}} \left(k_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \right)^{(-0.5_{\alpha})} \right)_{x_{\alpha}}(x) + \sum_{\alpha=1}^2 S^{x_1} S^{x_2} \left(b_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial \xi_{\alpha}} \right)(x) + \\ & + S^{x_1} S^{x_2} (d(\xi) q(u(\xi)))(x) = S^{x_1} S^{x_2} f(x), \quad x \in \omega, \end{aligned} \quad (66)$$

где $S^{x_{\alpha}}$ — усредняющие операторы Стеклова по направлению x_{α} , $\alpha = 1, 2$, ξ — переменная, по которой производится интегрирование в $S^{x_{\alpha}}$, x — точка сетки ω .

Используя соотношение (66), приведем погрешность аппроксимации (65) к виду (63), где сеточные функции — составляющие погрешности аппроксимации имеют вид (64). Лемма 4.1 доказана.

Перейдем к оценке составляющих $(\eta_{\alpha}^{(1)}(x))_{x_{\alpha}}$, $\alpha = 1, 2$, погрешности аппроксимации $\bar{\Psi}_h(x)$.

Лемма 4.2. *Пусть $k_{\alpha}(\xi) \in W_{\infty}^1(\Omega)$, $\alpha = 1, 2$, $u(\xi) \in W_2^3(\Omega)$. Тогда для выражений $(\eta_{\alpha}^{(1)}(x))_{x_{\alpha}}$ справедливы оценки:*

$$\|(\eta_{\alpha}^{(1)}(x))_{x_{\alpha}}\|_{L_2(\omega)} \leq 4\sqrt{3}|h| \|k_{\alpha}(x)\|_{W_{\infty}^1(\Omega)} [u|_{W_2^2(\Omega)} + |u|_{W_2^3(\Omega)}], \quad \alpha = 1, 2. \quad (67)$$

Доказательство. Нетрудно видеть

$$(\eta_1^{(1)}(x))_{x_1} = \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} \left(k_1(x_1 - 0.5h_1, \xi_2) \left[u_{\bar{x}_1} - \frac{\partial u(x_1 - 0.5h_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right] \right) d\xi_2. \quad (68)$$

Используя разностные формулы дифференцирования произведения сеточных функций, из (68) получим представление

$$(\eta_1^{(1)}(x))_{x_1} = \overset{\circ}{B}(x) + B(x), \quad (69)$$

где

$$\overset{\circ}{B}(x) = \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} (k_1(x_1 - 0.5h_1, \xi_2))_{x_1} \left[u_{\bar{x}_1} - \frac{\partial u(x_1 - 0.5h_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right] d\xi_2, \quad (70)$$

$$B(x) = \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} k_1(x_1 + 0.5h_1, \xi_2) \left(u_{\bar{x}_1} - \frac{\partial u(x_1 - 0.5h_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right)_{x_1} d\xi_2. \quad (71)$$

Оценим величины $\overset{\circ}{B}(x)$, $B(x)$. Нетрудно видеть

$$\overset{\circ}{B}(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{e_2(x_2)} \left[\int_{e_1(x_1)} \frac{\partial k_1(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right] \cdot \left[u_{\bar{x}_1}(x) - \frac{\partial u(x_1 - 0.5h_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right] d\xi_2. \quad (72)$$

Откуда

$$|\overset{\circ}{B}(x)| \leq \frac{1}{h_2} \left\| \frac{\partial k_1(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right\|_{L_2(\Omega)} \int_{e_2(x_2)} \left| u_{\bar{x}_1}(x) - \frac{\partial u(x_1 - 0.5h_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right| d\xi_2. \quad (73)$$

В результате оценки интеграла в правой части неравенства (73) получим

$$|\overset{\circ}{B}(x)| \leq \left\| \frac{\partial k_1(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right\|_{L_2(\Omega)} (h_1 h_2)^{-1/2} (h_1 + h_2) |u|_{W_2^2(e^1(x))}, \quad (74)$$

где $e^1(x) = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : x_1 - h_1 \leq \xi_1 \leq x_1, x_2 - 0.5h_2 \leq \xi_2 \leq x_2 + 0.5h_2\}$.

Оценим теперь величину $B(x)$. Можно показать, что справедлива цепочка представлений

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{h_1 h_2} \int_{e_1(x_1)} \int_{e_2(x_2)} k_1(x_1 + 0.5h_1, \xi_2) \left[u_{\bar{x}_1 x_1}(x) - \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi_1^2} \right] d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \frac{1}{h_1^3 h_2} \iint_{e(x)} k_1(x_1 + 0.5h_1, \xi_2) \left\{ \int_{x_1}^{x_1+h_1} \left[\int_{\theta_1-h_1}^{\theta_1} \left(\int_{\xi_2}^{x_2} \frac{\partial^3 u(r_1, m_2)}{\partial r_1^2 \partial m_2} dm_2 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \int_{\xi_1}^{r_1} \frac{\partial^3 u(m_1, \xi_2)}{\partial m_1^3} dm_1 \right) dr_1 \right] d\theta_1 \right\} d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (75)$$

Откуда найдем

$$\begin{aligned} |B(x)| &\leq \frac{1}{h_1^3 h_2} \|k_1(\xi)\|_{L_2(\Omega)} \left[h_1^2 h_2 \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial^3 u(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} \right| d\xi_1 d\xi_2 + \right. \\ &\quad \left. + 2h_1^3 \int_{x_1-h_1}^{x_1+h_1} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial^3 u(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1^3} \right| d\xi_1 d\xi_2 \right] \leq \|k_1(\xi)\|_{L_2(\Omega)} \left[h_1^{-1} (h_1 h_2)^{1/2} |u|_{W_2^3(e_1^- \times e_2)} + \right. \\ &\quad \left. + 2h_2^{-1} (h_1 h_2)^{1/2} |u|_{W_2^3(e_1^- \times e_2)} + h_1^{-1} (h_1 h_2)^{1/2} |u|_{W_2^3(e_1^+ \times e_2)} + 2h_2^{-1} (h_1 h_2)^{1/2} |u|_{W_2^3(e_1^+ \times e_2)} \right]. \end{aligned}$$

В результате получим

$$|B(x)| \leq 2\|k_1(\xi)\|_{L_2(\Omega)}(h_1 h_2)^{-1/2}(h_1 + h_2)[|u|_{W_2^3(e_1^- \times e_2)} + |u|_{W_2^3(e_1^+ \times e_2)}], \quad x \in \omega, \quad (76)$$

где $e_1^+ = \{x_1 \leq \xi_1 \leq x_1 + h_1\}$, $e_1^- = \{x_1 - h_1 \leq \xi_1 \leq x_1\}$. Из соотношений (70), (74), (76) получаем оценку величины $(\eta_1^{(1)}(x))_{x_1}$:

$$\begin{aligned} |(\eta_1^{(1)}(x))_{x_1}| &\leq 2\|k_1(\xi)\|_{W_\infty^1(\Omega)}(h_1 h_2)^{-1/2}(h_1 + h_2) \times \\ &\times \left[|u|_{W_2^2(e_1^- \times e_2)} |u|_{W_2^3(e_1^- \times e_2)} + |u|_{W_2^3(e_1^+ \times e_2)} \right], \quad x \in \omega. \end{aligned} \quad (77)$$

Аналогично установим оценку

$$\begin{aligned} |(\eta_2^{(1)}(x))_{x_2}| &\leq 2\|k_2(\xi)\|_{W_\infty^1(\Omega)}(h_1 h_2)^{-1/2}(h_1 + h_2) \times \\ &\times \left[|u|_{W_2^2(e_1 \times e_2^-)} |u|_{W_2^3(e_1 \times e_2^-)} + |u|_{W_2^3(e_1 \times e_2^+)} \right], \quad x \in \omega. \end{aligned} \quad (78)$$

Оценка (67) является следствием оценок (77), (78). Лемма доказана.

Лемма 4.3. Пусть решение задачи (1), (2) для состояния $u(x) = u(x, g)$ принадлежит классу $W_{2,0}^2(\Omega)$. Тогда справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \|B_\alpha^\pm\|_{L_2(\omega)} &\leq Mh\|b_\alpha\|_{L_\infty(\Omega)}\|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \|\hat{B}_\alpha^\pm\|_{L_2(\omega)} &\leq M\|\Phi_{\alpha+1,h}(x) - S^x b_\alpha(x)\|_{L_\infty(\omega)}\|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}, \quad \alpha = 1, 2, \\ \|\eta_3^{(1)}\|_{L_2(\omega)} &\leq ML_q h \|d(x)\|_{L_\infty(\Omega)}\|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}, \\ \|\eta_3^{(2)}\|_{L_2(\omega)} &\leq ML_q \|\Phi_{1h}(x) - S^x d(x)\|_{L_\infty(\omega)}\|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (79)$$

Доказательство оценок (79) не вызывает труда, они довольно громоздки, и мы их опускаем.

Теорема 4.1. Пусть входные данные задачи (1), (2) $k_\alpha(x)$, $f(x)$ таковы, что ее решение $u(\xi) = u(\xi, g)$ (из $W_{2,0}^2(\Omega)$) для любых управлений $g \in U$, где множество U имеет вид (4), принадлежит классу $W_2^3(\Omega)$. Пусть $y(x) = y(x, \Phi_h)$ — решение сеточной задачи (20), (21). Тогда справедлива следующая оценка погрешности метода по состоянию в норме сеточного пространства $W_{2,0}^2(\bar{\omega})$:

$$\begin{aligned} \|y(x, \Phi_h) - u(x, g)\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} &\leq \left\{ |h| \sum_{\alpha=1}^2 \|k_\alpha\|_{W_\infty^1(\Omega)} \|u(x, g)\|_{W_2^3(\Omega)} + \right. \\ &+ \left[|h| \left(\sum_{\alpha=1}^2 \|b_\alpha\|_{L_\infty(\Omega)} + L_q \|d\|_{L_\infty(\Omega)} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 \|\Phi_{\alpha+1,h}(x) - S^x b_\alpha(x)\|_{L_\infty(\omega)} + \right. \\ &\left. \left. + L_q \|\Phi_{1h}(x) - S^x d(x)\|_{L_\infty(\omega)} \right] \|u(x, g)\|_{W_{2,0}^2(\Omega)} \right\}. \end{aligned} \quad (80)$$

Доказательство теоремы следует из оценки (62), представления погрешности $\bar{\psi}_h$ в виде (63), (64) и оценок норм составляющих погрешности $\bar{\psi}_h$ из (67) и (79).

5. ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ СЕТОЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА, СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛУ, СХОДИМОСТЬ ПО УПРАВЛЕНИЮ. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ АППРОКСИМАЦИЙ

Определим некоторые кусочно-постоянные восполнения сеточных функций. Пусть $v(x_\alpha)$ — сеточная функция, заданная на одномерной сетке $\bar{\omega}_\alpha \subset [0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$. Кусочно-постоянное восполнение $v(x_\alpha)$ на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$, определим по формуле

$$\bar{v}(\xi_\alpha) = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} v(x_\alpha)^{(i_\alpha)} \varphi_{i_\alpha}(\xi), \quad \varphi_{i_\alpha}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_\alpha \in e_\alpha(x_\alpha^{(i_\alpha)}), \\ 0, & \xi_\alpha \notin e_\alpha(x_\alpha^{(i_\alpha)}). \end{cases} \quad (81)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5.1. Пусть $\overline{\psi^{h_2}}(\xi_2)$, $\overline{u_{\bar{x}_1}}(l_1, \xi_2)$, $\overline{a_1}(l_1, \xi_2)$ — кусочно-постоянные восполнения на $[0, l_2]$ сеточных функций $\psi^{h_2}(\xi_2)$, $u_{\bar{x}_1}(l_1, \xi_2)$, $a_1(l_1, \xi_2)$, $x_2 \in \bar{\omega}_2 \in [0, l_2]$ по формулам, аналогичным (81). Тогда справедливы оценки

$$\|\psi^{h_2}(x_2)\|_{L_2(\omega_2)} \leq \|\Psi(\xi_2)\|_{L_2(0, l_2)}, \quad (82)$$

$$\|\overline{\psi^{h_2}}(x_2)\|_{L_2(0, l_2)} \leq \|\Psi(\xi_2)\|_{L_2(0, l_2)}, \quad (83)$$

$$\|\psi^{h_2}(\xi_2) - \overline{\psi^{h_2}}(x_2)\|_{L_2(0, l_2)} \leq |h| \|\Psi(\xi_2)\|_{W_2^1(0, l_2)}, \quad (84)$$

$$\|\overline{u_{\bar{x}_1}}(l_1, x_2)\|_{L_2(0, l_2)}^2 = \|u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2)\|_{L_2(\bar{\omega}_2)}^2 \leq C \left[|h| \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \right] \leq M \|u\|_{W_2^2(\Omega)}^2, \quad (85)$$

$$\left\| k_1(l_1, \xi_2) \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - \overline{a_1}(l_1, \xi_2) \overline{u_{\bar{x}_1}}(l_1, \xi_2) \right\|_{L_2(0, l_2)} \leq M |h| \|k_1\|_{W_\infty^1(\Omega)} \|u\|_{W_2^3(\Omega)}. \quad (86)$$

Доказательство. Установим оценку (85). Нетрудно показать, что справедливо представление

$$u_{\bar{x}_1}(x) = u_{x_1}(x_1 - h_1, x_2) = \tilde{h}_2(h_1 \tilde{h}_2)^{-1/2} |u(\xi)|_{W_2^2(e^1(x_1 - h_1, x_2))} + \\ + (h_1 \tilde{h}_2)^{-1/2} |u(\xi)|_{W_2^1(e^1(x_1 - h_1, x_2))}, \quad x \in \omega_1^+ \times \bar{\omega}_2, \quad (87)$$

где $e^1(x) = \bar{e}_1(x_1) \times e_2(x_2) = (x_1, x_1 + h_1) \times e_2(x_2)$.

Из (87) при $x_1 = l_1$ получаем

$$u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) = \tilde{h}_2(h_1 \tilde{h}_2)^{-1/2} |u(\xi)|_{W_2^2((l_1 - h_1, l_1) \times (0, l_2))} + (h_1 \tilde{h}_2)^{-1/2} |u(\xi)|_{W_2^1((l_1 - h_1, l_1) \times (0, l_2))}. \quad (88)$$

Принимая во внимание оценку (88), установим

$$\|u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2)\|_{L_2(\bar{\omega}_2)}^2 \leq 2 \left[h_1^{-1} \tilde{h}_2^2 |u(\xi)|_{W_2^2((l_1 - h_1) \times (0, l_2))}^2 + h_1^{-1} |u(\xi)|_{W_2^1((l_1 - h_1) \times (0, l_2))}^2 \right]. \quad (89)$$

Используя неравенство [21] имеем

$$|u(\xi)|_{W_2^1(\Omega_h)}^2 \leq M_0 h_1 \|u(\xi)\|_{W_2^2(\Omega)}^2, \quad (90)$$

где $\Omega_h = (l_1 - h_1, l_1) \times (0, l_2)$, из (89) получим оценку (85).

Докажем теперь оценку (86). Нетрудно видеть, что

$$\left\| k_1(l_1, \xi_2) \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - \overline{a_1}(l_1, \xi_2) \overline{u_{\bar{x}_1}}(l_1, \xi_2) \right\|_{L_2(0, l_2)}^2 = \sum_{\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left[k_1(l_1, \xi_2) \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - \right. \\ \left. - a_1(l_1, x_2) u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) \right]^2 d\xi_2 = \sum_{\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left[\left(\frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) \right) a_1(l_1, x_2) + \right. \\ \left. + (k_1(l_1, \xi_2) - a_1(l_1, x_2)) \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right]^2 d\xi_2 \leq 2 \sum_{\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left[\frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) \right]^2 \times \\ \times |a_1(l_1, x_2)|^2 d\xi_2 + 2 \sum_{\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} [k_1(l_1, \xi_2) - a_1(l_1, x_2)]^2 \left| \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right|^2 d\xi_2. \quad (91)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (91). Имеем

$$|a_1(l_1, x_2)| = \left| \frac{1}{\tilde{h}_2} \int_{e_2(x_2)} k_1(l_1 - 0.5h_1, r) dr \right| \leq \|k_1(\xi)\|_{L_\infty(\Omega)} \quad \forall x_2 \in \bar{\omega}_2. \quad (92)$$

Далее

$$\begin{aligned}
& \int_{e_2(x_2)} \left[\frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) \right]^2 d\xi_2 = \int_{e_2(x_2)} \left[\frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - \frac{1}{h_1} \int_{l_1-h_1}^{l_1} \frac{\partial u(\xi_1, x_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right]^2 d\xi_2 = \\
& = \int_{e_2(x_2)} \left\{ \frac{1}{h_1} \int_{l_1-h_1}^{l_1} \left[\frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u(\xi_1, x_2)}{\partial \xi_1} \right] d\xi_1 \right\}^2 d\xi_2 = \\
& = \frac{1}{h_1^2} \int_{e_2(x_2)} \left\{ \int_{l_1-h_1}^{l_1} \left[\int_{\xi_1}^{l_1} \frac{\partial^2 u(m_1, \xi_2)}{\partial m_1^2} dm_1 + \int_{x_2}^{\xi_2} \frac{\partial^2 u(\xi_1, m_2)}{\partial \xi_1 \partial m_2} dm_2 \right] d\xi_1 \right\}^2 d\xi_2 \leq \\
& \leq \frac{1}{h_1^2} \int_{e_2(x_2)} \left\{ \int_{l_1-h_1}^{l_1} \left[\int_{\xi_1}^{l_1} \left| \frac{\partial^2 u(m_1, \xi_2)}{\partial m_1^2} \right| dm_1 + \int_{x_2}^{\xi_2} \left| \frac{\partial^2 u(\xi_1, m_2)}{\partial \xi_1 \partial m_2} \right| dm_2 \right] d\xi_1 \right\}^2 d\xi_2 = \quad (93) \\
& = \frac{1}{h_1^2} \int_{e_2(x_2)} \left\{ h_1 \int_{l_1-h_1}^{l_1} \left| \frac{\partial^2 u(m_1, \xi_2)}{\partial m_1^2} \right| dm_1 + \int_{l_1-h_1}^{l_1} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial^2 u(\xi_1, m_2)}{\partial \xi_1 \partial m_2} \right| dm_2 d\xi_1 \right\}^2 d\xi_2 \leq \\
& \leq \frac{2}{h_1^2} \int_{e_2(x_2)} \left\{ h_1^2 \left(\int_{\xi_1}^{l_1} \left| \frac{\partial^2 u(m_1, \xi_2)}{\partial m_1^2} \right| dm_1 \right)^2 + \left(\int_{l_1-h_1}^{l_1} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial^2 u(\xi_1, m_2)}{\partial \xi_1 \partial m_2} \right| dm_2 d\xi_1 \right)^2 \right\} d\xi_2 = \\
& = 2 \int_{e_2(x_2)} \left(\int_{l_1-h_1}^{l_1} \left| \frac{\partial^2 u(m_1, \xi_2)}{\partial m_1^2} \right| dm_1 \right)^2 d\xi_2 + \frac{2h_2}{h_1^2} \left(\int_{l_1-h_1}^{l_1} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial^2 u(\xi_1, m_2)}{\partial \xi_1 \partial m_2} \right| dm_2 d\xi_1 \right)^2 \leq \\
& \leq 2 \int_{e_2(x_2)} h_1 \left(\int_{\xi_1}^{l_1} \left| \frac{\partial^2 u(m_1, \xi_2)}{\partial m_1^2} \right| dm_1 \right)^2 d\xi_2 + \frac{2h_2}{h_1^2} h_1 h_2 \int_{\xi_1}^{l_1} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial^2 u(\xi_1, m_2)}{\partial \xi_1 \partial m_2} \right| dm_2 d\xi_1 = \\
& = 2h_1 \int_{\xi_1}^{l_1} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial^2 u(m_1, \xi_2)}{\partial m_1^2} \right|^2 dm_1 d\xi_2 + \frac{2h_2^2}{h_1} \int_{\xi_1}^{l_1} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial^2 u(\xi_1, m_2)}{\partial \xi_1 \partial m_2} \right|^2 dm_2 d\xi_1.
\end{aligned}$$

На основе оценок (92), (93) получаем оценку первого слагаемого в правой части неравенства (91):

$$\sum_{\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left[\frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) \right]^2 |a_1(l_1, x_2)|^2 d\xi_2 \leq M|h| \|k_1(\xi)\|_{L_\infty(\Omega)} |u(\xi)|_{W_2^2(\Omega_h)}^2. \quad (94)$$

Используя неравенство (см. [21, с. 24])

$$|u(\xi)|_{W_2^2(\Omega_h)}^2 \leq M|h| \|u\|_{W_2^3(\Omega)}^2, \quad (95)$$

из (94) установим оценку

$$\sum_{\bar{\omega}_2} \int_{e_2(x_2)} \left[\frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) \right]^2 |a_1(l_1, x_2)|^2 d\xi_2 \leq M|h|^2 \|k_1(\xi)\|_{L_\infty(\Omega)} \|u\|_{W_2^3(\Omega)}^2. \quad (96)$$

Перейдем теперь к оценке второго слагаемого в правой части неравенства (90). Имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\omega_2} \int_{e_2(x_2)} [k_1(l_1, \xi_2) - a_1(l_1, x_2)]^2 \left| \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right|^2 d\xi_2 \leq \\
 & \leq \left(\sum_{\omega_2} \int_{e_2(x_2)} [k_1(l_1, \xi_2) - a_1(l_1, x_2)]^4 d\xi_2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\omega_2} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right|^4 d\xi_2 \right)^{1/2} = \\
 & = \left(\sum_{\omega_2} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{1}{\bar{h}_2} \int_{e_2(x_2)} [k_1(l_1, \xi_2) - k_1(l_1 - 0.5h_1, r_2)] dr_2 \right|^4 d\xi_2 \right)^{1/2} \times \\
 & \times \left(\sum_{\omega_2} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right|^4 d\xi_2 \right)^{1/2} \leq M \|u(\xi)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \times \\
 & \times \left(\sum_{\omega_2} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{1}{\bar{h}_2} \int_{e_2(x_2)} \left[\int_{l_1-0.5h_1}^{l_1} \frac{\partial k_1(m_1, \xi_2)}{\partial m_1} dm_1 + \int_{r_2}^{\xi_2} \frac{\partial k_1(l_1 - 0.5h_1, m_2)}{\partial m_2} dm_2 \right] dr_2 \right|^4 d\xi_2 \right)^{1/2} \leq \\
 & \leq M_1 |h|^2 \left(\left\| \frac{\partial k_1(\xi)}{\partial \xi_1} \right\|_{L_\infty(\Omega)} + \left\| \frac{\partial k_1(\xi)}{\partial \xi_2} \right\|_{L_\infty(\Omega)} \right)^2 \|u(\xi)\|_{W_2^2(\Omega)}^2.
 \end{aligned} \tag{97}$$

Принимая во внимание оценки (96), (97) и неравенство (91), получаем оценку (86). Лемма доказана.

Теорема 5.1. Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ и любых $h > 0$ для погрешности сеточного функционала (19) справедлива оценка

$$|J(g) - J_h(\Phi_h)| \leq M \left[|h| + \|S^x d(x) - \Phi_{1h}(x)\|_{L_\infty(\omega)} + \sum_{\alpha=1}^2 \|S^x b_\alpha(x) - \Phi_{\alpha+1,h}(x)\|_{L_\infty(\omega)} \right]. \tag{98}$$

Доказательство. Принимая во внимание (3), (19) приведем погрешность аппроксимации функционала $\epsilon_h(g, \Phi) = J(g) - J_h(\Phi_h)$ к специальному виду

$$\epsilon_h(g, \Phi_h) = \sum_{k=1}^2 D_h^{(k)}, \tag{99}$$

где

$$D_h^{(1)} = \left\| k_1(l_1, \xi_2) \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - \psi(\xi_2) \right\|_{L_2(0, l_2)}^2 - \left\| \bar{a}_1(l_1, \xi_2) \bar{u}_{\bar{x}_1}(l_1, \xi_2) - \bar{\psi}^{h_2}(\xi_2) \right\|_{L_2(0, l_2)}^2, \tag{100}$$

$$D_h^{(2)} = \left\| \bar{a}_1(l_1, \xi_2) \bar{u}_{\bar{x}_1}(l_1, \xi_2) - \bar{\psi}^{h_2}(\xi_2) \right\|_{L_2(0, l_2)}^2 - \left\| a_1(l_1, x_2) y_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) - \psi^{h_2}(x_2) \right\|_{L_2(\bar{\omega}_2)}^2. \tag{101}$$

Оценим величины $D_h^{(k)}$, $k = 1, 2$. Нетрудно убедиться, что справедливы оценки

$$\begin{aligned}
 |D_h^{(1)}| \leq & \left[\left\| k_1(l_1, \xi_2) \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} - \bar{a}_1(l_1, \xi_2) \bar{u}_{\bar{x}_1}(l_1, \xi_2) \right\| + \right. \\
 & \left. + \left\| \psi(\xi_2) - \bar{\psi}^{h_2}(\xi_2) \right\|_{L_2(0, l_2)} \right] \cdot \left[\left\| k_1(l_1, \xi_2) \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right\|_{L_2(0, l_2)} + \right. \\
 & \left. + \left\| \bar{a}_1(l_1, \xi_2) \bar{u}_{\bar{x}_1}(l_1, \xi_2) \right\|_{L_2(0, l_2)} + \left\| \psi(\xi_2) \right\|_{L_2(0, l_2)} + \left\| \bar{\psi}^{h_2}(\xi_2) \right\|_{L_2(0, l_2)} \right],
 \end{aligned} \tag{102}$$

$$|D_h^{(2)}| \leq \|a_1(l_1, x_2)[u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) - y_{\bar{x}_1}(l_1, x_2)]\|_{L_2(\bar{\omega}_2)} \times \\ \times [\|a_1(l_1, x_2)u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2)\|_{L_2(\bar{\omega}_2)} + \|a_1(l_1, x_2)y_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) + 2\psi^{h_2}(x_2)\|_{L_2(\bar{\omega}_2)}]. \quad (103)$$

Наконец проведем оценки правых частей неравенств (102), (103). Для этого воспользуемся оценками (82)–(86), неравенствами

$$\left\| \frac{\partial u(l_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} \right\|_{L_2(0, l_2)} \leq M_1 \|u(\xi)\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad (104)$$

$$\|y_{\bar{x}_1}(l_1, x_2)\|_{L_2(\bar{\omega}_2)} \leq M_2 \|y(x)\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}, \quad (105)$$

$$\|y_{\bar{x}_1}(l_1, x_2) - u_{\bar{x}_1}(l_1, x_2)\|_{L_2(\bar{\omega}_2)} \leq M_2 \|y - u\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}, \quad (106)$$

вытекающими из теорем вложения Соболева и их разностных аналогов, а также оценками (8), (10), (20). В результате, для величины $\varepsilon_h(g, \Phi_h)$ установим оценку (98). Теорема доказана.

Будем допускать, что вычисления функционалов $J_h(\Phi_h)$, определяемых соотношением (19), ведутся приближенно, и получающийся приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$ связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \leq \delta_h, \\ \forall \Phi_h \in U_h, \quad \delta_h \rightarrow +0 \text{ при } |h| \rightarrow 0. \quad (107)$$

Предположим, что при каждом $h = (h_1, h_2)$ и соответствующей сетки $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h$ с помощью какого-либо метода минимизации получено сеточное управление $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\varepsilon_h} \in U_h$, дающее решение задачи (19)–(23), (107) в смысле

$$J_{h\delta_h*} \leq J_{h\delta_h}(\hat{\Phi}_h) \leq J_{h\delta_h*} + \varepsilon_h, \quad \hat{\Phi}_h \in U_h, \quad (108)$$

где последовательность $\{\varepsilon_h\}$ такова, что $\varepsilon_h > 0$ и $\varepsilon_h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Определим отображения

$$R_h : H \rightarrow H_h \text{ и } N_h : H_h \rightarrow H$$

по правилу: $R_h g = \Phi_h$, где

$$g = (g_1(t), g_2(t), g_3(t)) = (d(t), b_1(t), b_2(t)), \quad \Phi_h(x) = (\bar{R}_h g_1(x), \bar{R}_h g_2(x), \bar{R}_h g_3(x)),$$

а $\bar{R}_h g_k(x)$, $k = 1, 2, 3$ — дискретизации на сетке $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ управляющих функций $g_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, по формуле $\bar{R}_h g_k(x) = S^x g_k$, $k = 1, 2, 3$; $N_h \Phi_h = g$, где $\Phi_h = (\Phi_{1h}(x), \Phi_{2h}(x), \Phi_{3h}(x))$, $g = (Q_h \Phi_{1h}(t), Q_h \Phi_{2h}(t), Q_h \Phi_{3h}(t))$, $Q_h \Phi_{kh}(t)$, $k = 1, 2, 3$ — кусочно-линейные восполнения на Ω сеточных управлений $\Phi_{kh}(x)$, $k = 1, 2, 3$, $x \in \omega$, такие что $R_h g \in U_h$, $N_h \Phi_h \in U$.

Справедлива

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Тогда последовательность разностных задач минимизации (19), (20)–(21), (22)–(23) при $|h| \rightarrow 0$ аппроксимирует исходную экстремальную задачу (3), (4), (1)–(2) по функционалу, т.е. $\lim J_{h\delta_h*} = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, причем справедлива оценка скорости сходимости

$$|J_{h\delta_h*} - J_*| \leq |J_{h*} - J_*| + \delta_h \leq C|h| + \delta_h; \quad (109)$$

если последовательность сеточных управлений $\{\hat{\Phi}_h\} \subset U_h$ определена из условий (108), то последовательность управлений $\{N_h \hat{\Phi}_h\}$ является минимизирующей для задачи (3), (4), (1)–(2) и справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(N_h \hat{\Phi}_h) - J_* \leq C[|h| + \varepsilon_h + \delta_h];$$

последовательность $\{N_h \hat{\Phi}_h\}$ слабо в H сходится к множеству $U_* \neq \emptyset$ оптимальных управлений задачи (3), (4), (1)–(2).

Доказательство теоремы 5.2 проводится на основе методики [1], [22] и опирается на полученные выше результаты.

Согласно теореме 2.1 задача (3), (1), (2), (4) является корректно поставленной в слабой топологии H . В сильной топологии пространства H (в метрике пространства H) задача, вообще говоря, некорректна, т.е. могут существовать минимизирующие последовательности, не сходящиеся по норме H к множеству U_* . Поэтому для построения минимизирующей последовательности, сходящейся в метрике пространства H к множеству U_* воспользуемся методом регуляризации А. Н. Тихонова [1], [22]. Введем стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_H^2$ и его разностный аналог $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2$, где $H_h = (W_2^1(\omega))^3$. При каждом $h > 0$ рассмотрим задачу минимизации дискретного функционала Тихонова

$$T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega_h(\Phi_h), \quad \Phi_h \in U_h, \quad (110)$$

на множестве U_h , где $\{\alpha_h\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящихся к нулю при $|h| \rightarrow 0$.

Определим последовательность $\check{\Phi}_h = \{\Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h}\}$ из условий

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} \equiv \inf\{T_{h\delta_h\alpha_h} : \Phi_h \in U_h\} \leq T_{h\delta_h\alpha_h}(\check{\Phi}) \leq T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \quad \check{\Phi}_h \in U_h, \quad (111)$$

где $\{\nu_h\}$ — положительная последовательность, сходящаяся к нулю при $h \rightarrow 0$.

Теорема 5.3. Пусть выполнены условия теоремы 5.1, последовательность $\check{\Phi}_h = \{(\check{\Phi}_{1h}(x), \check{\Phi}_{2h}(x), \check{\Phi}_{3h}(x))\}$ определена из условий (111). Тогда последовательность управлений $\{N_h\check{\Phi}_h\}$ является минимизирующей для задачи (3), (1), (2), (4) и справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(N_h\check{\Phi}_h) - J_* \leq C[|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h];$$

если, кроме того, параметры $\alpha_h, \delta_h, \nu_h$ согласованы так, что $(|h| + \nu_h + \delta_h)/\alpha_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, то последовательность $\{N_h\check{\Phi}_h\} = \{Q_h\check{\Phi}_{1h}(t), Q_h\check{\Phi}_{2h}(t), Q_h\check{\Phi}_{3h}(t)\}$ сильно в H сходится к множеству $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**} = \|g_{**}\|_H^2) = \inf\{\|g_*\|_H^2 : g_* \in U_*\} = \Omega_*\}$ — нормальных решений задачи (3), (1), (2), (4), т.е.

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \inf\{\|N_h\check{\Phi}_h - g_{**}\|_H : g_{**} \in U_{**}\} = 0 \text{ и } \lim \Omega(N_h\check{\Phi}_h) = \Omega_* \text{ при } |h| \rightarrow 0.$$

Доказательство теоремы проводится на основе методики [1], [22] и опирается на полученные выше результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
3. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 480 с.
4. Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 368 с.
5. Райтум У. Ё. Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 276 с.
6. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
7. Ишмухаметов А. З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления. М.: ВЦ РАН, 1999.
8. Ишмухаметов А. З. Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: ВЦ РАН, 2001.
9. Потапов М. М. Аппроксимация экстремальных задач в математической физике (гиперболические уравнения). М.: Изд-во МГУ, 1985.

10. *Лубышев Ф. В.* Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БашГУ, 1999. 244 с.
11. *Лубышев Ф. В., Манапова А. Р.* Аппроксимации задач оптимального управления старшими коэффициентами эллиптических уравнений в недивергентной форме с неограниченной нелинейностью в коэффициентах // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 6. С. 796–820.
12. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. Изд. 2-е. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009. 784 с.
13. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные схемы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
14. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
15. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 589 с.
16. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 416 с.
17. *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая школа, 1987.
18. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
19. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
20. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 334 с.
21. *Оганесян Л. А., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Из-во АН Армянской ССР, 1979. 334 с.
22. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
23. *Ладженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

APPROXIMATION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR SEMILINEAR ELLIPTIC CONVECTION-DIFFUSION EQUATIONS WITH BOUNDARY OBSERVATION OF THE CONORMAL DERIVATIVE, WITH CONTROLS IN THE COEFFICIENTS OF THE CONVECTIVE TRANSPORT OPERATOR AND THE NONLINEAR TERM OF THE EQUATION

F. V. Lubyshev^a, M. E. Fairuzov^{a,*}

^a450076, Ufa, Zaki Validi Str. 32, Ufa Science and Technology University

*e-mail: fairuzovme@mail.ru

Received May 22, 2023

Revised February 25, 2024

Accepted April 5, 2024

Abstract. The paper studies difference approximations of the optimal control problem with boundary observation of the conormal derivative of the state described by the Dirichlet problem for semi-linear elliptic equations with controls in the coefficients of the convective transport operator and the nonlinear term of the equation. The issues of the correctness of the formulation of the optimal control problem were considered. Differential approximations of the optimal control problem are constructed. The issues of convergence of approximations in terms of functionality and control are studied. The regularization of approximations is carried out.

Keywords: optimal control problem, semi-linear elliptic equations, Dirichlet boundary value problem, difference approximations, convergence of approximations, regularization of approximations.