

УДК 532.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ЛЕД–ВОДА В ТРУБЕ С МАЛЫМИ ЛЕДЯНЫМИ НАРОСТАМИ НА СТЕНКЕ¹⁾

© 2024 г. Р. К. Гайдуков^{1,*}, В. Г. Данилов¹¹Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*e-mail: roma1990@gmail.com

Поступила в редакцию 18.09.2023 г.

Переработанный вариант 18.09.2023 г.

Принята к публикации 05.03.2024 г.

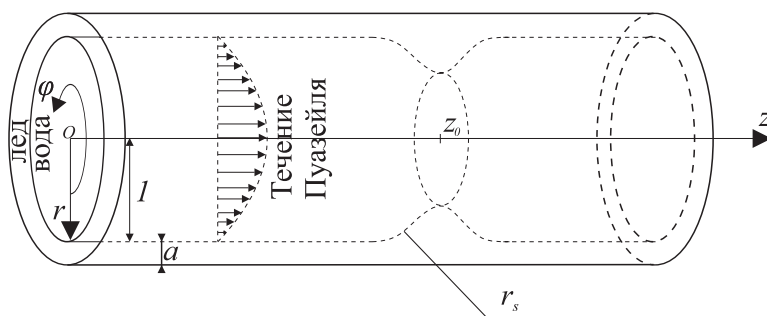
Рассмотрено математическое моделирование фазового перехода лед–вода при течении жидкости внутри трубы с малым ледяным наростом на стенке при больших числах Рейнольдса. В качестве математической модели, описывающей динамику фазового перехода, используется двухпалубная модель пограничного слоя и система фазового поля. Приведены результаты численного моделирования. Библ. 19. Фиг. 5. Табл. 1.

Ключевые слова: фазовый переход, двухпалубная структура, теплоперенос, локализованные возмущения, асимптотика, численное моделирование.

DOI: 10.31857/S0044466924060134, EDN: XYDNHY

1. ВВЕДЕНИЕ

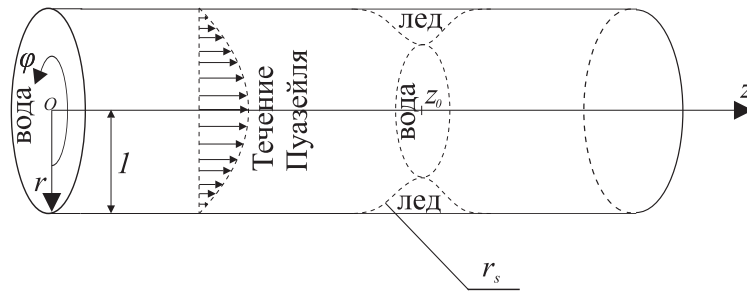
Цель работы — изучение фазового перехода “плавление–кристаллизация” (лед–вода) в задаче о течении вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости внутри аксиально-симметричной трубы радиуса R_0 , на стенке которой сформировался малый локализованный ледяной нарост (см. фиг. 1). А именно, рассматриваются две ситуации: таяние льда при течении нагретой воды внутри трубы и, наоборот, намерзание льда на стенке при течении переохлажденной воды. Задача исследуется при больших числах Рейнольдса Re (но таких, при которых еще сохраняется течение Пуазейля в трубе) в отсутствие силы тяжести. Предполагается, что длина трубы достаточная, чтобы течение Пуазейля сформировалось, краевые эффекты не учитываются.



Фиг. 1. Геометрия рассматриваемой задачи: слоя льда с неровностью.

В работе рассматривается случай, когда внутри трубы на ее стенке сформировался ледяной слой толщиной $\hat{a}$ (здесь и далее переменные с “крышкой” являются размерными, а аналогичные переменные без них — безразмерными, процедуру обезразмеривания подробнее см. далее по тексту) с малым

¹⁾ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00186, <https://rscf.ru/project/22-21-00186/>.



Фиг. 2. Предел применимости модели: кольцевой ледяной нарост конечной ширины.

ледяным наростом (фиг. 1). Отметим, что предлагаемая в настоящей работе математическая модель позволяет описывать плавление до тех пор, пока существует ледяной слой на всей стенке трубы, т.е. до ситуации, изображенной на фиг. 2. Случае, когда остался только кольцевой ледяной нарост конечной ширины, возникают точки контакта трех сред: нерасплавленной стенки трубы, льда и воды, в которых не определены уравнения модели, и ее необходимо модифицировать (см. подробнее [1]). В случае замерзания предлагаемая модель применима до тех пор, пока высота горбика остается соизмеримой с толщиной пограничного слоя (см. подробности ниже).

Отметим, что настоящая работа (наряду с цитируемыми ниже) демонстрирует эффективность сочетания асимптотических и численных методов. В рассматриваемой задаче присутствуют два масштаба в поле скоростей течения и свободная граница (граница фазового перехода), разделяющая область течения и объемлющее пространство (собственно трубу). Непосредственное решение такой задачи прямым численным интегрированием возможно, но требует серьезных вычислительных средств. В рамках предложенного в работе подхода численное решение задач, полученных в результате применения асимптотических разложений, можно построить с помощью обычного компьютера, не используя высокопроизводительные кластеры.

Ранее в работах [1], [2] были рассмотрены подобные задачи в случае другой геометрии — обтекания ледяного нароста на плоской пластине. Заметим, что не все результаты из этих работ могут быть явно перенесены на случай течения внутри трубы. Рассматриваемая в настоящей работе задача имеет свою специфику. Во-первых, таяние ледяного слоя приводит к изменению радиуса $\hat{R}(\hat{t})$ свободного ото льда пространства, в котором течет вода (далее будем называть его эффективным радиусом). Например, при таянии льда он будет изменяться от R_0 до $R_0 + \hat{a}$, где $R_0 = \hat{R}(0)$. Это приводит к изменению поля скоростей течения Пуазейля $u_0(\hat{r}) = \hat{u}_c(\hat{R}(\hat{t})^2 - \hat{r}^2)/4$, где $\hat{u}_c$ — заданный градиент давления в трубе, а $0 \leq \hat{r} \leq \hat{R}(\hat{t})$. Безусловно, это влияние существенно в случае $\hat{a}$, соизмеримого с R_0 . Во-вторых, распределение температуры в рассматриваемой задаче отличается от распределения температуры в задаче обтекания пластинки, что также может влиять на динамику фазового перехода (см. [3]).

Проведем процедуру обезразмеривания задачи. Введем безразмерную цилиндрическую систему координат $(r, \varphi, z) = (\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z})/R_0$, ось z которой сонаправлена с осью трубы (см. фиг. 1), где R_0 — характерный масштаб (расстояние от оси трубы до слоя льда в начальный момент времени, фиг. 1). Также введем характерную скорость u_∞ — максимальная скорость течения Пуазейля в трубе с ровными стенками, характерное время $t_0 = R_0/u_\infty$, характерную температуру $T_0 = l/c_l$, где c_l — удельная теплоемкость жидкости, а l — скрытая теплота плавления (см. табл. 1). Тогда безразмерный вектор скорости $\mathbf{U} = (v, w, u) = \mathbf{U}/u_\infty$, где v, w, u — радиальная, азимутальная и аксиальная его компоненты, безразмерное давление $p = \hat{p}/(\rho_l u_\infty^2)$, где ρ_l — плотность жидкости, безразмерное время $t = \hat{t}/t_0$, безразмерная температура

$$T = (\hat{T} - T_m)/T_0, \quad (1)$$

где T_m — температура плавления льда в случае, когда разделяющая лед и воду поверхность плоская, число Ренольдса $Re = u_\infty R_0/\nu$, где ν — кинематическая вязкость рассматриваемой жидкости (для воды, например, эта величина имеет порядок 10^{-6} , см. табл. 1).

Будем считать, что неровность (ледяной нарост) находится в точке z_0 , ее высота порядка $O(\varepsilon^{4/5})$, а ширина порядка $O(\varepsilon^{2/5})$ (напомним, что рассматривается аксиально-симметричный случай), где

$\varepsilon = \text{Re}^{-1/2}$ — малый параметр. А именно, предполагается, что стенка трубы описывается уравнением

$$r_s = R(t) - \varepsilon^{4/5} h(t, (z - z_0)/\varepsilon^{2/5}), \quad (2)$$

где $h(t, \xi)$ — некоторая гладкая функция, такая что $h(t, \pm\infty) = 0$, а $R(t)$ — эффективный радиус трубы, учитывающий изменение толщины ледяного слоя, $R(0) = 1$. Отметим, что такие геометрические размеры малой неровности приводят к формированию пограничного слоя с двухпалубной структурой (см. [4]).

Исследуемая задача состоит из двух подзадач. Первая — гидродинамическая задача, представляющая собой нестационарную задачу о течении в аксиально-симметричной трубе с изменяемой во времени формой стенки, описывается безразмерной системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \varepsilon^2 \left[\Delta v - \frac{v}{r^2} \right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^2 \Delta u, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

где

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

которая дополняется граничными условиями прилипания к стенке трубы $v|_{r=r_s} = u|_{r=r_s} = 0$.

Вторая подзадача — задача о фазовом переходе в подвижной среде с криволинейной границей раздела фаз, которая исходно описывается безразмерными уравнениями теплопроводности в областях жидкой (T_l — температура жидкости) и твердой фаз (T_s — температура льда), имеющими следующий вид с учетом аксиальной симметрии:

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + v \frac{\partial T_l}{\partial r} + u \frac{\partial T_l}{\partial z} = \frac{k_l}{R_0 u_\infty} \Delta T_l + \frac{v u_\infty}{R_0 c_l T_0} \varphi, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = k_s \Delta T_s, \quad (7)$$

где коэффициент теплопроводности $k_i = \lambda_i / (\rho_i c_i)$, $i = l, s$, λ_i , ρ_i , c_i — удельная теплопроводность, плотность и удельная теплоемкость (см. табл. 1), функция диссипации имеет вид

$$\varphi = 2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2.$$

Уравнения теплопроводности (6), (7) дополняются краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial T_l}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad T_s|_{r=1+a} = T_{\text{pipe}} = \text{const} \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial T_s}{\partial r} \right|_{r=1+a} = F_{\text{pipe}} = \text{const} \quad (8)$$

(заданной температурой стенки трубы T_{pipe} или заданным тепловым потоком со стенки F_{pipe}), некоторыми заданными начальными условиями $T_l|_{t=0} = T_{\text{water}}$, $T_s|_{t=0} = T_{\text{ice}}$, условиями на свободной границе

$$T_l|_{r=r_s(t)} = T_s|_{r=r_s(t)} = \bar{T}_m, \quad (9)$$

безразмерным условием Стефана (см. [2], [5])

$$v_n = \frac{k_l}{u_\infty R_0} \left[\frac{\partial T}{\partial n} \right] \Big|_{r=r_s(t)}, \quad (10)$$

где v_n — нормальная скорость точек свободной границы, а $[f]$ — скачок функции f по нормали n , направленной из твердой фазы в жидкую. Температура $\bar{T}_m$ совпадает с температурой плавления T_m на плоской границе раздела фаз. Однако широко известно (см. [6]–[8]), что в случае криволинейной границы раздела фаз температура плавления отличается от равновесной температуры T_m на плоской границе раздела фаз, и $\bar{T}_m$ определяется условием Гиббса–Томсона (см. [6])

$$\bar{T}_m - \frac{T_m}{T_0} + \frac{\sigma T_m}{l \rho_l R_0 T_0} \mathcal{K} + \frac{u_\infty}{T_0 R_0 m} v_n = 0, \quad (11)$$

где $\mathcal{K}$ — средняя кривизна поверхности фазового перехода, m — кинетический коэффициент роста, а σ — коэффициент поверхностного натяжения (подробности см. ниже). Значения всех физически постоянных приведены в табл. 1.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Гидродинамическая часть задачи рассмотрена в работе [4] для случая неизменной во времени формы малой неровности (2), но эти результаты тривиально переносятся на случай изменяемой во времени (в силу процессов плавления–кристаллизации) формы обтекаемой поверхности (см. также [9]), рассматриваемый в настоящей работе. А именно, в работе [4] (см. также [10]) получено, что течение имеет двухпалубную структуру пограничного слоя, и интересующее в данной работе течение вблизи неровности имеет следующий вид:

$$v = \varepsilon^{6/5} v^*(t, \xi, \bar{\theta}), \quad u = \varepsilon^{4/5} u^*(t, \xi, \bar{\theta}), \quad (12)$$

где $\bar{\theta}$ — радиальный пространственный масштаб, ξ — аксиальный пространственный масштаб, имеющие следующий вид:

$$\bar{\theta} = \frac{r_s - r}{\varepsilon^{4/5}}, \quad \xi = \frac{z - z_0}{\varepsilon^{2/5}}. \quad (13)$$

Отметим, что масштаб $\bar{\theta}$ введен таким образом, чтобы обтекаемая поверхность стала плоской в переменных $(\xi, \bar{\theta})$, а начало координат перенеслось на границу раздела фаз. Функции v^* и u^* являются решением начально-краевой задачи для системы уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением:

$$\varepsilon^{-2/5} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} \right) - v^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} + g(t) v^* \Big|_{\bar{\theta} \rightarrow \infty} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{\theta}^2} - \varepsilon^{-2/5} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} + \varepsilon^{-6/5} R'(t) \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} - \frac{\partial v^*}{\partial \bar{\theta}} = 0, \quad (15)$$

$$u^* \Big|_{\bar{\theta}=0} = v^* \Big|_{\bar{\theta}=0} = 0, \quad u^* \Big|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = \bar{\theta} g(t), \quad v^* \Big|_{\xi \rightarrow \pm \infty} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} \Big|_{\bar{\theta} \rightarrow \infty} = g(t), \quad u^* \Big|_{t=0} = U^*(\xi, \bar{\theta}), \quad (16)$$

где $g(t) = u'_0(0) = u_c R^2(t)/4$, где u_c — заданный (безразмерный) градиент давления, а $R(t)$ — введенный выше эффективный радиус, $R(0) = 1$. Отметим, что наличие коэффициента $\varepsilon^{-2/5}$ перед производной по времени фактически означает рассмотрение течения вблизи поверхности на малых временах $t \sim \varepsilon^{2/5}$ при рассмотрении всей задачи (уравнений Навье–Стокса (3)–(5), а также уравнений теплопроводности (6), (7)) на конечных временах $t \sim 1$. Забегая вперед, заметим, что рассмотрение теплопереноса на малых временах, особенно в задаче о фазовом переходе (скорость плавления довольно мала, порядка 10^{-6} м/с, см. [11]), не представляет интереса, и задачу вблизи поверхности следует рассматривать на конечных временах $t \sim 1$, что означает рассмотрение всей задачи на больших временах $t \sim \varepsilon^{-2/5}$. Для этого нужно формально сделать замену $t_1 = t \varepsilon^{2/5}$, но для упрощения дальнейших обозначений мы ее не будем делать, а лишь опустим коэффициент перед $\partial/\partial t$. Отметим, что это также следует из исследования теплопереноса в течении Пуазейля без фазовых переходов (см. [3]).

Введем масштабы (12), (13) в уравнение теплопроводности (6), положив $\theta = (R(t) - r)/\varepsilon^{4/5}$ ($\theta = \bar{\theta} + h$ – радиальный масштаб с криволинейной границей обтекаемой поверхности):

$$\varepsilon^{2/5} \frac{\partial T_l}{\partial t} - \varepsilon^{2/5} v^* \frac{\partial T_l}{\partial \theta} + \varepsilon^{2/5} u^* \frac{\partial T_l}{\partial \xi} = \frac{k_l}{R_0 u_\infty} \left[\varepsilon^{-8/5} \frac{\partial^2 T_l}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R(t) - \varepsilon^{4/5} \theta} \varepsilon^{-4/5} \frac{\partial T_l}{\partial \theta} + \varepsilon^{-4/5} \frac{\partial^2 T_l}{\partial \xi^2} \right] +$$

$$+ \frac{\nu u_\infty}{R_0 \rho_l c_l T_0} \left[2 \left(-\varepsilon^{2/5} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \left(\varepsilon^{6/5} \frac{v^*}{R(t) - \varepsilon^{4/5} \theta} \right)^2 + 2 \left(\varepsilon^{2/5} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\varepsilon^{4/5} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} - \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right)^2 \right].$$

Отбрасывая малые слагаемые и разделив на $\varepsilon^{2/5}$, получим

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} - v^* \frac{\partial T_l}{\partial \theta} + u^* \frac{\partial T_l}{\partial \xi} = \frac{k_l}{R_0 u_\infty} \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 T_l}{\partial \theta^2}. \quad (17)$$

Аналогично уравнение (7) с учетом введенных масштабов примет вид

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = k_s \varepsilon^{-2} \frac{\partial^2 T_s}{\partial \theta^2}. \quad (18)$$

Условия Стефана (10) и Гиббса–Томсона (11) с учетом введенных масштабов примут вид

$$v_n^* = \frac{k_l}{u_\infty R_0} \varepsilon^{-2} \left[\frac{\partial T}{\partial n^*} \right] \Big|_{\theta=h(t,\xi)}, \quad (19)$$

$$\bar{T}_m - \frac{T_m}{T_0} + \frac{\sigma T_m}{l \rho_l R_0 T_0} \varepsilon^{-4/5} \mathcal{K}^* + \varepsilon^{6/5} \frac{u_\infty}{T_0 R_0} v_n^* = 0, \quad (20)$$

где n^* – вектор нормали к границе фазового перехода $\theta = h(t, \xi)$, $n^* = (-h'_\xi, 1)$, а вектор ∇T в соответствии с введенными масштабами имеет вид

$$\nabla T = (\varepsilon^{6/5} \partial T / \partial \xi, \partial T / \partial \theta).$$

Отметим, что толщина ледяного слоя a с учетом введенного масштаба $\bar{\theta}$ станет довольно большой, $\varepsilon^{-4/5} a$, и это фактически означает, что влияние температуры на стенке на распределение температур в окрестности фазового перехода довольно мало. Это означает, что краевое условие (8) при $r = 1 + a$ фактически можно заменить условием при $\theta \rightarrow -\infty$. Далее мы будем рассматривать теплоизолированную стенку трубы, т.е. $(\partial T_s / \partial n) \Big|_{\theta \rightarrow -\infty} = 0$. Также отметим, что распределение температуры в течении Пуазейля хорошо изучено (см. [3]), и из результатов этой работы видно, что вблизи обтекаемой поверхности температура мало меняется. Это означает, что в тонком слое около обтекаемой поверхности она мало меняется, и с учетом введенных масштабов (13) можно считать $\partial T_l \Big|_{\theta \rightarrow \infty} = T_{\text{water}} = \text{const}$.

Однако задача Стефана–Гиббса–Томсона (17)–(20) сложна в вычислительном плане: требуется применение различных ресурсоемких численных методов для точного определения положения свободной границы. Существует другой подход, основанный на введении функции порядка $\varphi_\zeta = \varphi_\zeta(t, \xi, \theta)$, такой, что

$$\varphi_\zeta = \begin{cases} +1, & \theta > h(t, \xi), \\ -1, & \theta < h(t, \xi), \end{cases} \quad (21)$$

т.е. внутри твердой фазы принимает значение -1 , внутри жидкой $+1$, а ζ – параметр регуляризации. В ζ -окрестности границы фазового перехода функция φ_ζ быстро меняется от -1 до $+1$. В рамках этого подхода температура T во всей области и функция порядка φ_ζ определяются из системы уравнений фазового поля (см. [6], [7], [12]), которая имеет следующий вид с учетом введенных выше масштабов:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + A \left[u^* \frac{\partial T}{\partial \xi} - v^* \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] - \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_\zeta}{\partial t}, \quad (22)$$

$$\zeta^2 \alpha \frac{\partial \varphi_\zeta}{\partial t} = \zeta^2 \beta \Delta_{\xi, \theta} \varphi_\zeta + \varphi_\zeta \left(1 - \varphi_\zeta^2\right) + \zeta \left(1 - \varphi_\zeta^2\right) \gamma T / \sqrt{2 \beta}, \tag{23}$$

где разрывный безразмерный коэффициент k совпадает с коэффициентами перед вторыми производными в уравнениях (17), (7) в жидкой и твердой фазах соответственно, α, β, γ — коэффициенты в условии Гиббса–Томсона (20) перед скоростью, кривизной, температурой:

$$\alpha = \varepsilon^{6/5} \frac{u_\infty}{T_0 R_0}, \quad \beta = \frac{\sigma T_m}{l \rho_l R_0 T_0} \varepsilon^{-4/5}, \quad \gamma = 1,$$

$A = 1$ в жидкой фазе и $A = 0$ в твердой (слагаемые с коэффициентом A непрерывны на границе раздела фаз в силу того, что скорости можно гладко продолжить нулем в область твердой фазы, см. (16)). Отметим, что система фазового поля (22), (23) является регуляризацией задачи Стефана–Гиббса–Томсона (17)–(20) при $\zeta \rightarrow +0$ (см. [13], [14]). Граница раздела фаз при таком подходе определяется как линия нулевого уровня функции порядка

$$\{\theta = h(t, \xi)\} = \{(\xi, \theta) : \varphi_\zeta = 0\}. \tag{24}$$

Важно отметить, что система фазового поля (22), (23) эффективно решается численно с помощью обычных разностных схем с постоянным шагом, что позволяет эффективно проводить моделирование всей задачи на обычном персональном компьютере.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данном разделе представим некоторые качественные результаты численного решения задачи (14)–(16), (22), (23). Граничные условия для уравнения Алена–Кана (23) — условия Неймана на границе области для функции порядка φ_ζ . Условия для температуры были определены выше. Отметим, что для численного решения этой задачи не требуется каких-либо нетривиальных численных методов — она эффективно решается численно с помощью разностных схем (детали не приводятся ввиду их тривиальности). Параметры, используемые для численного моделирования, следующие: пространственная область $\Omega = \{-50 \leq \xi \leq 50; -50 \leq \theta \leq 50\}$, время моделирования $0 \leq t \leq 100$, шаги разностной схемы $h_\xi = h_\theta = 5 \times 10^{-2}$, $h_t = 5 \times 10^{-4}$. Отметим, что ошибка, обусловленная таким обрезанием исходной неограниченной области $\bar{\Omega} = \{\xi \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\}$, будет довольно малой, фактически того же порядка, что и ошибка аппроксимации разностной схемы (см. [9], [15], [16]). Все используемые физические постоянные, а также характерные величины, приведены в табл. 1. Параметр регуляризации $\zeta = 5h_0$.

Таблица 1. Физические постоянные (см. [8], [11], [17]–[19]) и характерные масштабы

Физическая величина	Вода	Лед
Удельная теплоемкость	$c_l = 4.2 \times 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	$c_s = 2.05 \times 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
Удельная теплопроводность	$\lambda_l = 0.56 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	$\lambda_s = 2.25 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
Плотность	$\rho_l = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$	$\rho_s = 0.9 \times 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$
Поверхностное натяжение	$\sigma = 3.3 \text{ Н}/\text{м}$	
Кинематическая вязкость	$\nu = 1.79 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	
Кинетический коэффициент роста	$m = 7.3 \times 10^{-3} \text{ м}/(\text{с} \cdot \text{К})$	
Температура плавления	$T_m = 273 \text{ К}$	
Скрытая теплота плавления	$l = 3.3 \times 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$	
Характерный масштаб	$R_0 = 1 \text{ м}$	
Характерная скорость	$u_\infty = 1 \text{ м}/\text{с}$	

В качестве начальной формы границы фаз $h(t, \xi)$ выберем

$$h|_{t=0} = 5e^{-\xi^2/4}.$$

Отметим, что в работах [4], [10] ранее было получено для случая $h(\xi) = Be^{-\xi^2/4}$, что при превышении $|B|$ некоторого критического значения B^* в ламинарном потоке формируется зона отрывного течения (более точно, на этот процесс, помимо амплитуды, влияет величина угла наклона боковых стенок неровности: чем они круче, тем меньше B^*). Рассматриваемый нами случай $B = 5 > B^*$.

В качестве начальных данных для поля скоростей выберем ламинарное обтекание неровности

$$u^*|_{t=0} = \begin{cases} g(0)\bar{\theta}(1 + 0.2h(0, \xi)), & \bar{\theta} \leq 5, \\ g(0)(\bar{\theta} + h(0, \xi)), & \bar{\theta} > 5, \end{cases}, \quad \bar{\theta} = \theta - h(0, \xi). \quad (25)$$

Для функции порядка φ примем

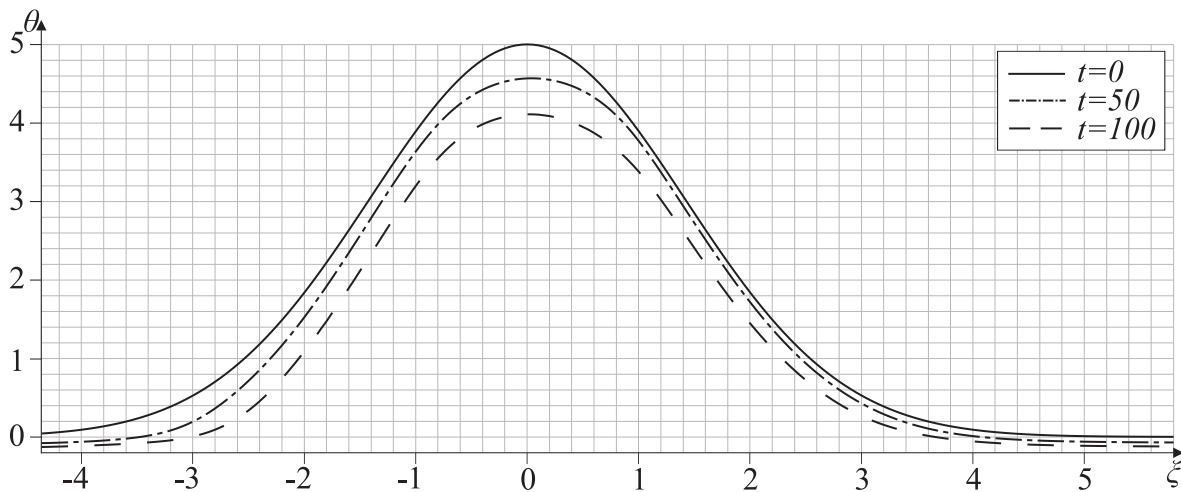
$$\varphi_\xi|_{t=0} = \text{th} \left(\frac{\theta - h(0, \xi)}{\xi\sqrt{2\beta}} \right).$$

Начальное условие для температуры

$$T|_{t=0} = \frac{1}{2} \left[(T_{\text{water}} - T_{\text{ice}}) \text{th} \left(\frac{\theta - h(0, \xi)}{4} \right) + (T_{\text{water}} + T_{\text{ice}}) \right],$$

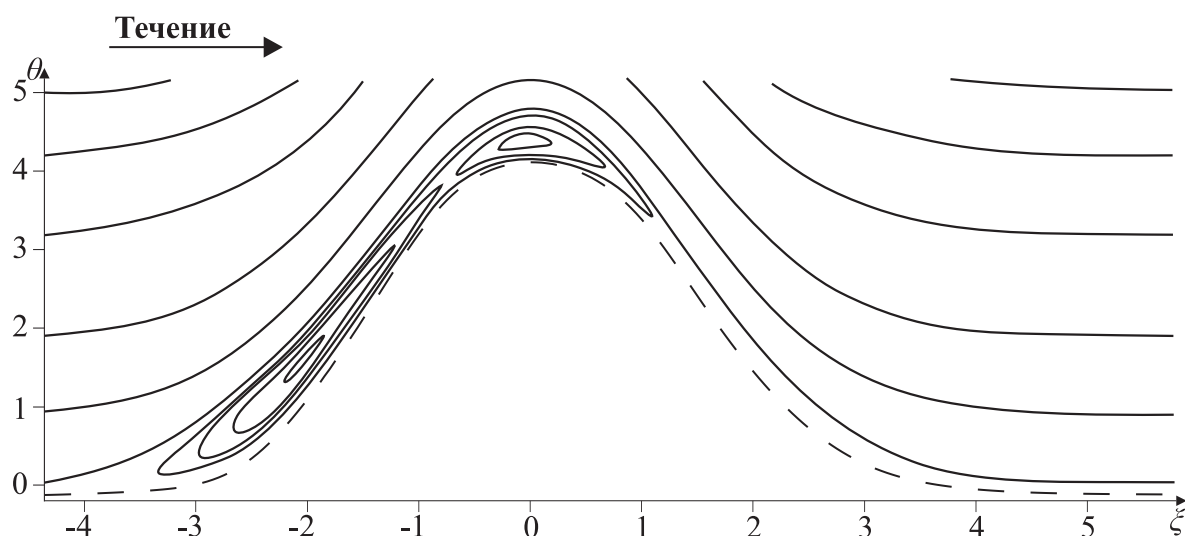
где T_{water} и T_{ice} — постоянные температуры воды и льда на границе области.

Перейдем к результатам численного моделирования. Далее для удобства восприятия будем приводить температуру в градусах Цельсия. На фиг. 3 показано характерное изменение границы раздела фаз с течением времени для случая плавления, начальные температуры воды и льда — $\pm 5^\circ\text{C}$. Видно влияние кривизны обтекаемой поверхности и наличия потока: плавление происходит неравномерно — вершина горбика плавится быстрее ровной поверхности, а также наблюдается асимметрия — левая стенка плавится быстрее правой, что обусловлено наличием потока слева направо. Также отметим, что такое асимметричное искажение формы обтекаемой поверхности приводит к образованию зоны отрыва пограничного слоя слева от обтекаемой поверхности (см. фиг. 4).



Фиг. 3. Плавление, $T_{\text{ice}} = -5^\circ\text{C}$, $T_{\text{water}} = 5^\circ\text{C}$.

На фиг. 5 показано характерное изменение границы раздела фаз с течением времени для случая замерзания, обусловленного течением переохлажденной воды ($T_{\text{water}} = -1^\circ\text{C}$). Можно заметить, что вершина горбика немного плавится, а замерзание происходит на ровной поверхности и на стенках горбика. Это обуславливается влиянием кривизны поверхности раздела фаз. Также видна асимметрия — на правой стенке замерзает больше, чем на левой, что обуславливается наличием потока слева направо.

Фиг. 4. Плавление, линии тока при $t = 100$.Фиг. 5. Намерзание, $T_{\text{ice}} = -5^\circ\text{C}$, $T_{\text{water}} = -1^\circ\text{C}$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена математическая модель фазового перехода с учетом наличия течения в жидкой фазе, позволяющая эффективно численно моделировать процессы плавления–намерзания. С помощью построенной модели исследована динамика границы раздела фаз при обтекании малой неровности на ледяной поверхности внутри трубы с масштабами двухпалубной структуры пограничного слоя. Приведены характерные результаты численного моделирования, качественно показывающие динамику границы раздела фаз с учетом влияния кривизны и наличия потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Danilov V. G., Gaydukov R. K. Ice-water phase transition on a substrate // Rus. J. Math. Phys. 2023. V. 30. P. 165–175.
2. Гайдуков Р. К., Данилов В. Г., Фонарева А. В. Моделирование таяния-намерзания льда в задаче обтекания жидкостью малой неровности // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа, в печати, 2023.
3. Aydın O., Avcı M. Viscous-dissipation effects on the heat transfer in a poiseuille flow, 2006.
4. Danilov V. G., Gaydukov R. K. Double-deck structure of the boundary layer in the problem of flow in an axially symmetric pipe with small irregularities on the wall for large Reynolds numbers // Rus. J. Math. Phys. 2017. V. 24. P. 1–18.
5. Meirmanov A. M. The Stefan Problem. De Gruyter, 1992.

6. *Caginalp G.* An analysis of a phase field model of a free boundary // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1986. V. 92. P. 205–245.
7. *Caginalp G.* Stefan and hele-shaw type models as asymptotic limits of the phase field equations // *Phys. Rev. A.* 1989. V. 39. P. 5887–5896.
8. *Медведев Д. А., Ершов А. П.* Моделирование намерзания льда на подводной трубе газопровода // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.* 2013. Т. 13. С. 96–101.
9. *Gaydukov R. K.* Double-deck structure in the fluid flow problem over plate with small irregularities of time-dependent shape // *Europ. J. Mech. B/Fluid.* 2021. V. 89. P. 401–410.
10. *Fonareva A. V., Gaydukov R. K.* Nonstationary double-deck structure of boundary layers in compressible flow problem inside a channel with small irregularities on the walls // *Rus. J. Math. Phys.* 2021. V. 28. P. 224–243.
11. *Fernandez R., Barduhn A. J.* The growth rate of ice crystals // *Desalinat.* 1967. V. 3. P. 330–342.
12. *Plotnikov P. I., Starovoitov V. N.* The stefan problem with surface tension as a limit of the phase field model // *Differ. Equat.* 1993. V. 29. P. 395–404.
13. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase-field system // *Europ. J. Appl. Math.* 1999. V. 10. P. 55–77.
14. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Shelkovich V. M.* Weak asymptotics method and interaction of nonlinear waves, 2003.
15. *Roache P. J.* Computational fluid dynamics. Hermosa Publ., Albuquerque, 1976.
16. *Yapalparvi R.* Double-deck structure revisited // *Europ. J. Mech. B/Fluid.* 2012. V. 31. P. 53–70.
17. *Кикоин И. К.* Таблицы физических величин. Справочник. М.: Атомиздат, 1976.
18. *Григорьев И. С., Мейлихов Е. З.* Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991.
19. *Кузнецов В. В., Усть-Качкинцев В. Ф.* Физическая и коллоидная химия: Уч. пособие. М.: Высш. школа, 1976.

MODELING OF ICE-WATER PHASE TRANSITION IN A PIPE WITH SMALL ICE BUILDUPS ON THE WALL

R. K. Gaidukov*, V. G. Danilov

National Research University—Higher School of Economics (HSE University), Moscow, 109028 Russia

**e-mail: romal990@gmail.com*

Received 18 September, 2023

Revised 18 September, 2023

Accepted 05 March, 2024

Abstract. The mathematical modeling of the ice-water phase transition during fluid flow inside a pipe with a small ice buildup on the wall at high Reynolds numbers is considered. As a mathematical model describing the dynamics of the phase transition, a double-deck boundary layer model and a phase field system are used. The results of numerical simulation are presented.

Keywords: phase transition, double-deck structure, heat transfer, localized disturbances, asymptotics, numerical simulation.