

УДК 519.635

ТУРБУЛЕНТНАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ В ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШАТЕЛЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА

© 2024 г. М. И. Болдырев^{1,*}

¹ 456770 Снежинск, Челябинская обл., ул. Васильева, 13, ФГУП «РФЯЦ–ВНИИТФ им. Акад. Е. И. Забабахина», Россия

*e-mail: boldyrevmi@vniitf.ru

Поступила в редакцию 03.11.2023 г.
Переработанный вариант 03.11.2023 г.
Принята к публикации 06.03.2024 г.

Описывается учет турбулентной кинетической энергии в решении газодинамической задачи о распаде разрыва (задаче Римана) с помощью приближенного решателя HLLC. Рассматривается система уравнений Эйлера с добавлением гиперболического уравнения турбулентной кинетической энергии и учетом турбулентного давления в уравнениях баланса импульса и энергии. Находится якобиан данной системы уравнений, его собственные числа. На основе этого вносятся изменения в схему вычислений в решателе HLLC. На примере задачи Сода проверяется корректность учета турбулентной кинетической энергии в решении задачи Римана, и показывается неустойчивость схемы при большом турбулентном давлении в случае неучета турбулентности в вычислении характеристических скоростей. Библ. 19. Фиг. 7. Табл. 3.

Ключевые слова: сжимаемая газодинамика, уравнения Эйлера, турбулентная кинетическая энергия, приближенный решатель Римана, HLLC, неустойчивость Рихтмайера–Мешкова.

DOI: 10.31857/S0044466924060126, EDN: XYEANH

ВВЕДЕНИЕ

Для задач сжимаемой газовой динамики характерно наличие разрывов решения, что требует при численной аппроксимации специальных подходов к вычислению потоков. Одним из них является подход Годунова: использование решения задачи Римана (см. [1]). В частности, один из его вариантов — применение приближенного решения задачи Римана и вычисление потоков по схеме HLLC (см. [2]). Этот решатель, благодаря точному описанию контактной границы, успешно применяется в моделировании многокомпонентных течений (см. [3], [4]). И в настоящей работе рассматривается его применение в задачах моделирования перемешивания, вызванного действием ударных волн на границу между двумя газами.

Одним из вопросов, рассматриваемых сжимаемой газовой динамикой, является неустойчивость, развивающаяся на границе двух газов с разной молярной массой. Она возникает под действием либо постоянного или переменного во времени ускорения, тогда явление носит название неустойчивости Рэлея–Тэйлора (РТ) (см. [5]), либо мгновенного импульса ускорения, вызываемого ударной волной, тогда она называется неустойчивостью Рихтмайера–Мешкова (РМ) (см. [6]). На поздней стадии развития этих неустойчивостей течение приобретает турбулентный характер. Для его моделирования можно использовать осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса (RANS), для замыкания которых применяются те или иные модели турбулентности (см. [7]).

При использовании RANS-подхода совместно с моделями семейства $k - \epsilon$ получается неполная параболическая система уравнений (см. [8]), которую для численного решения удобно расщепить на две подсистемы: гиперболическую и собственно параболическую. Проводя аналогию между молекулярными явлениями и турбулентностью, можно выделить в тензоре Рейнольдса часть, аналогичную

статическому давлению, так называемое турбулентное давление, которую можно включить в систему гиперболических уравнений. В настоящей статье сосредоточимся на том, как это включение повлияет на якобиан системы гиперболических уравнений и покажем, как нужно модифицировать решатель HLLC для учета дополнительного турбулентного давления. Подобная задача ставится в работе [9], но для точного решателя задачи Римана.

Статья разбита на следующие части: сначала кратко описывается решаемая система гиперболических уравнений, осредненных по Рейнольдсу, затем выводится якобиан для данной системы и находятся его собственные числа, после описан модифицированный алгоритм приближенного решателя HLLC с учетом влияния турбулентной кинетической энергии (ТКЭ), наконец, модифицированный решатель тестируется на задаче Сода и эксперименте Феттера и Штуртеванта с неустойчивостью Рихтмайера–Мешкова.

1. УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассмотрим систему уравнений сжимаемой газовой динамики для однокомпонентной системы (систему уравнений Эйлера) (см. [10]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0, \\ \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p &= 0, \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + p) \cdot \vec{u}) &= 0, \\ \rho E &= U + \rho \vec{u} \cdot \vec{u}/2 = \rho \cdot (e + \vec{u}^2/2), \\ p &= f(\rho, \rho \vec{u}, \rho E).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь E — полная энергия единицы массы, U — внутренняя энергия единицы объема, e — внутренняя энергия единицы массы. Осредним систему уравнений (1) по Рейнольдсу. При этом воспользуемся средними по Фавру, чтобы представить результат в более удобной форме. Не вдаваясь в детали (см. [11]), приведем сразу результирующую систему, $[\cdot]$ означает среднее по Рейнольдсу, $[\tilde{\cdot}]$ — среднее по Фавру, $[\cdot]''$ — флуктуация по Фавру:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{u}}) &= 0, \\ \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{\vec{u}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\vec{u}} \otimes \tilde{\vec{u}}) + \nabla \bar{p} &= \nabla \cdot \mathbf{R},\end{aligned}\tag{2}$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{E} \cdot \tilde{\vec{u}} + \bar{p} \cdot \tilde{\vec{u}} - \mathbf{R} \cdot \tilde{\vec{u}}) = -\overline{\rho e'' \cdot \vec{u}''},\tag{3}$$

$$\bar{\rho} \tilde{E} = \bar{U} + \bar{\rho} \tilde{\vec{u}} \cdot \tilde{\vec{u}}/2 + \bar{\rho} k = \bar{\rho} \cdot (\tilde{e} + \tilde{\vec{u}}^2/2 + k),\tag{4}$$

$$\bar{p} = f(\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{\vec{u}}, \bar{\rho} \tilde{E}, \bar{\rho} k).$$

При выводе использовались, среди прочих, следующие соотношения:

$$\overline{\rho \vec{u} \otimes \vec{u}} = \bar{\rho} \cdot \left(\tilde{\vec{u}} + \vec{u}'' \right) \otimes \left(\tilde{\vec{u}} + \vec{u}'' \right),$$

$$\overline{\rho \cdot \tilde{\vec{u}} \cdot \vec{u}''} = 0,$$

$$\mathbf{R} = -\overline{\rho \cdot \vec{u}'' \otimes \vec{u}''},$$

$$k = \frac{1}{2} \frac{\overline{\varrho \cdot \vec{u}'' \cdot \vec{u}''}}{\bar{\varrho}},$$

$$\overline{\varrho \cdot \vec{u}'' \otimes \vec{u}'' \cdot \vec{u}''} \approx 0,$$

$$\overline{\varrho \cdot e \cdot \vec{u}''} = \overline{\rho e'' \cdot \vec{u}''}.$$

Отсюда видно, что при осреднении системы уравнений Эйлера возникают дополнительные сущности: турбулентная кинетическая энергия единицы массы k , которая является частью полной энергии системы (см. уравнение (4)), и тензор Рейнольдса $\mathbf{R}$, который служит источником импульса в уравнении (2) и создает поток полной энергии в уравнении (3).

Согласно гипотезе Буссинеска (см. [11]), тензор Рейнольдса можно представить в виде, аналогичном обобщенному тензору давления:

$$\mathbf{R} = -\frac{2}{3} \bar{\varrho} k \cdot \mathbf{I} + \mu_t \cdot \left(\vec{\nabla} \tilde{\vec{u}} + \vec{\nabla} \tilde{\vec{u}}^T - \left(\frac{2}{3} \nabla \cdot \tilde{\vec{u}} \right) \cdot \mathbf{I} \right),$$

где слагаемое $\frac{2}{3} \bar{\varrho} k$ можно интерпретировать, как “турбулентное давление” p_t .

В семействе $k - \varepsilon$ моделей сжимаемой турбулентности уравнение баланса k имеет, как правило, следующий вид:

$$\frac{\partial (\bar{\varrho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\varrho} k \cdot \tilde{\vec{u}}) = -\nabla \cdot \vec{F}_D + P - \bar{\varrho} \varepsilon,$$

но в настоящей работе нас интересует только гиперболическая подсистема представленных выше уравнений, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\varrho} \tilde{\vec{u}}) &= 0, \\ \frac{\partial (\bar{\varrho} \tilde{\vec{u}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\varrho} \tilde{\vec{u}} \otimes \tilde{\vec{u}} + (\bar{p} + p_t) \cdot \mathbf{I}) &= 0, \\ \frac{\partial (\bar{\varrho} \tilde{E})}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\varrho} \tilde{E} \cdot \tilde{\vec{u}} + (\bar{p} + p_t) \cdot \tilde{\vec{u}}) &= 0, \\ \frac{\partial (\bar{\varrho} k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\varrho} k \cdot \tilde{\vec{u}}) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Обсудим возможные пути численного решения системы (5). Практически она отличается от обыкновенной системы уравнений Эйлера присутствием турбулентного давления p_t , и если допустить, что оно много меньше давления статического, $p_t \ll p$, то одним из двух принципиальных подходов к численному решению системы (5) будет пренебрежение турбулентным давлением и использование стандартной схемы для нахождения потоков, например, HLLC. Второй принципиальный подход, соответственно, состоит в учете p_t при вычислении потоков, и в настоящей работе для этого рассматриваются три варианта.

Первый вариант — двухэтапное интегрирование по времени потоков импульса и полной энергии. На первом этапе интегрируются потоки, полученные применением стандартного решателя задачи Римана, после чего проводится дополнительный шаг интегрирования потоков, вызванных турбулентным давлением, на примере импульса:

$$\begin{aligned} (\bar{\varrho} \tilde{\vec{u}})^* &= (\bar{\varrho} \tilde{\vec{u}})^n - \Delta t \cdot \nabla \cdot (\mathbf{F}_{\bar{\varrho} \tilde{\vec{u}}}^{HLLC}), \\ (\bar{\varrho} \tilde{\vec{u}})^{n+1} &= (\bar{\varrho} \tilde{\vec{u}})^* - \Delta t \cdot \nabla \cdot (p_t \cdot \mathbf{I}). \end{aligned}$$

Второй вариант — замена статического давления при вычислении потоков в решателе HLLC на его сумму с турбулентным. Наконец, третий вариант — в дополнение к замене статического давления на

суммарное анализ влияния турбулентности на матрицу Якоби и собственные числа системы (5) с соответствующим изменением способа вычисления характеристических скоростей в решателе HLLC. Далее в работе подробно описывается последний вариант, и результаты его тестирования сравниваются с прочими упомянутыми решениями.

2. ЯКОБИАН И СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Для применения приближенного решателя Римана HLLC к системе уравнений (5), необходимо для начала рассмотреть ее матрицу Якоби и найти собственные числа (см. [10]). Представим систему в консервативной форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot (F) = 0,$$

где W — это вектор консервативных переменных:

$$W = \left[\bar{q}; \left(\bar{q} \tilde{u} \right); \left(\bar{q} \tilde{E} \right); \left(\bar{q} k \right) \right],$$

а F — вектор потоков:

$$F = \begin{bmatrix} \left(\bar{q} \tilde{u} \right); \\ \left(\bar{q} \tilde{u} \right) \otimes \left(\bar{q} \tilde{u} \right) / \bar{q} + \left(\bar{p} + p_t \right) \cdot \mathbf{I}; \\ \left(\bar{q} \tilde{E} \right) \cdot \left(\bar{q} \tilde{u} \right) / \bar{q} + \left(\bar{p} + p_t \right) \cdot \left(\bar{q} \tilde{u} \right) / \bar{q}; \\ \left(\bar{q} k \right) \cdot \left(\bar{q} \tilde{u} \right) / \bar{q} \end{bmatrix}.$$

Матрица Якоби определяется как производная от вектора потоков по вектору консервативных переменных ($\partial F / \partial W$). Она представлена в табл. 1.

Таблица 1. Матрица Якоби, $\partial F / \partial W$

Элемент	$\partial \bar{q}$	$\partial \left(\bar{q} \tilde{u} \right)$	$\partial \left(\bar{q} \tilde{E} \right)$	$\partial \left(\bar{q} k \right)$
$\partial F_1 /$	0	1	0	0
$\partial F_2 /$	$-\tilde{u}^2 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{q}}$	$2\tilde{u} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} \tilde{u} \right)}$	$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} \tilde{E} \right)}$	$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} k \right)} + \frac{2}{3}$
$\partial F_3 /$	$\tilde{u} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{q}} - \bar{h} \right)$	$\bar{h} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} \tilde{u} \right)}$	$\tilde{u} \left(1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} \tilde{E} \right)} \right)$	$\tilde{u} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} k \right)} + \frac{2}{3} \right)$
$\partial F_4 /$	$-k \cdot \tilde{u}$	k	0	$\tilde{u}$

Для краткости были введены следующие обозначения:

$$\tilde{u} = \frac{\bar{q} \tilde{u}}{\bar{q}}, \quad k = \frac{\bar{q} k}{\bar{q}}, \quad \tilde{E} = \frac{\bar{q} \tilde{E}}{\bar{q}}, \quad \bar{h} = \tilde{E} + \frac{\bar{p}}{\bar{q}} + \frac{2}{3} k = \tilde{e} + \frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{\bar{p}}{\bar{q}} + \frac{5}{3} k.$$

Якобиан матрицы из табл. 1 имеет четыре собственных числа, из которых два — скорость $\tilde{u}$, а два других имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,4} = \tilde{u} + \frac{1}{2} \left(\tilde{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} \tilde{E} \right)} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} \tilde{u} \right)} \right) \pm \left(\frac{1}{4} \left(\tilde{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} \tilde{E} \right)} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} \tilde{u} \right)} \right)^2 + \tilde{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} \tilde{u} \right)} + \bar{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} \tilde{E} \right)} + k \frac{\partial \bar{p}}{\partial \left(\bar{q} k \right)} + \frac{2}{3} k \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Давление здесь рассматривается как функция от консервативных переменных, но из термодинамики известно, что термическое уравнение состояния — это функция от плотности и температуры, $p = f(q, T)$, что вкпе с калорическим уравнением состояния, $U = f(q, T)$, позволяет представить

давление как функцию плотности и внутренней энергии. Для упрощения уравнения (??) нам необходимо выразить производные от давления по консервативным переменным через производные по плотности и внутренней энергии объема или массы. Так как внутренняя энергия является функцией от консервативных переменных, то воспользуемся правилами дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^m \frac{\partial \delta}{\partial \beta_s} \cdot \frac{\partial \alpha_s}{\partial x_j},$$

где

$$z = \delta(\{\beta_i\}_{i=1}^m), \quad \beta_i = \alpha(\{x_j\}).$$

Рассмотрим выражение давления через внутреннюю энергию единицы объема $\bar{p} = f(\bar{q}, \bar{U})$ и массы $\bar{p} = f(\bar{q}, \bar{e})$. Тогда производную давления по полной энергии можно выразить следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial (\bar{q}\tilde{E})} = \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \cdot \frac{\partial \left((\bar{q}\tilde{E}) - (\bar{q}\tilde{u})^2 / (2\bar{q}) - (\bar{q}k) \right)}{\partial (\bar{q}\tilde{E})} = \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{U})}{\partial \bar{U}}$$

или

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial (\bar{q}\tilde{E})} = \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{e})}{\partial \bar{e}} \cdot \frac{\partial \left((\bar{q}\tilde{E}) / \bar{q} - (\bar{q}\tilde{u})^2 / (2\bar{q}^2) - (\bar{q}k) / \bar{q} \right)}{\partial (\bar{q}\tilde{E})} = \frac{1}{\bar{q}} \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{e})}{\partial \bar{e}}.$$

Аналогичным образом можно вывести и остальные производные от давления в переменных $(\bar{q}, \bar{U})$:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{U})}{\partial \bar{q}} + \frac{\tilde{u}^2}{2} \cdot \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{U})}{\partial \bar{U}},$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial (\bar{q}\tilde{u})} = -\tilde{u} \cdot \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{U})}{\partial \bar{U}},$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial (\bar{q}k)} = -\frac{\partial f(\bar{q}, \bar{U})}{\partial \bar{U}},$$

или в переменных $(\bar{q}, \bar{e})$:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{e})}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{e})}{\partial \bar{e}} \cdot \left(-\frac{(\bar{q}\tilde{E})}{\bar{q}^2} + \frac{\tilde{u}^2}{\bar{q}} + \frac{k}{\bar{q}} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial (\bar{q}\tilde{u})} = -\frac{\tilde{u}}{\bar{q}} \cdot \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{e})}{\partial \bar{e}},$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial (\bar{q}k)} = -\frac{1}{\bar{q}} \cdot \frac{\partial f(\bar{q}, \bar{e})}{\partial \bar{e}}.$$

После этих преобразований собственные числа (??) можно представить в существенно сокращенном виде:

$$\lambda_{1,4} = \tilde{u} \pm \left(\frac{\partial \bar{p}(\bar{q}, \bar{U})}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial \bar{p}(\bar{q}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \cdot \frac{\bar{U} + \bar{p}}{\bar{q}} + \frac{2}{3}k \cdot \left(1 + \frac{\partial \bar{p}(\bar{q}, \bar{U})}{\partial \bar{U}} \right) \right)^{1/2}$$

или

$$\lambda_{1,4} = \tilde{u} \pm \left(\frac{\partial \bar{p}(\bar{Q}, \tilde{e})}{\partial \bar{Q}} + \frac{\partial \bar{p}(\bar{Q}, \tilde{e})}{\partial \tilde{e}} \cdot \frac{\bar{p}}{\bar{Q}^2} + \frac{2}{3}k \cdot \left(1 + \frac{1}{\bar{Q}} \frac{\partial \bar{p}(\bar{Q}, \tilde{e})}{\partial \tilde{e}} \right) \right)^{1/2}.$$

Первые два подкоренных слагаемых представляют собой выражение для квадрата скорости звука a (см. [13]). Тогда для случая турбулентных течений можно ввести эффективную скорость звука a^* , равную

$$a^* = \sqrt{\bar{a}^2 + \frac{2}{3}k \cdot \left(1 + \frac{1}{\bar{Q}} \frac{\partial \bar{p}(\bar{Q}, \tilde{e})}{\partial \tilde{e}} \right)}. \quad (7)$$

Собственные числа якобиана тогда будут

$$\lambda_{2,3} = \tilde{u}, \quad \lambda_{1,4} = \tilde{u} \pm a^*,$$

что аналогично набору собственных чисел обычной системы уравнений Эйлера.

3. МОДИФИКАЦИЯ РЕШАТЕЛЯ HLLC

Приближенный решатель Римана HLLC, предложенный Торо (см. [2], [10]), является развитием решателя HLL и более подходит для моделирования турбулентных течений, развивающихся вследствие неустойчивостей РТ и РМ. По сравнению с HLL в нем введена дополнительная характеристическая скорость, соответствующая распространению контактного разрыва. Это обеспечивает меньшую численную диффузию и более точное описание контактного разрыва, что для неустойчивостей РТ и РМ особенно важно, так как в их случае контактная граница пролегает по линии раздела системы на разные вещества, и от точности ее описания зависит как минимизация ошибки в определении зоны перемешивания, так и вычисление генерации турбулентной кинетической энергии в RANS-моделях.

Исходя из вышеописанного, для применения решателя HLLC к системе уравнений (5) в него предлагается внести следующие изменения.

Во-первых, необходимо использовать формулу (7) для определения характеристических скоростей S_L , S_R одним из предложенных в литературе методов, например, по Дэвису (см. [12]):

$$\bar{S}_L = \min\{\lambda_{1,L}; \lambda_{1,R}\} = \min\{\tilde{u}_L - a_L^*; \tilde{u}_R - a_R^*\},$$

$$\bar{S}_R = \max\{\lambda_{4,L}; \lambda_{4,R}\} = \max\{\tilde{u}_L + a_L^*; \tilde{u}_R + a_R^*\}.$$

Во-вторых, включить турбулентное давление как часть давления, используемого для расчета характеристической скорости контактного разрыва и среднего давления в распадной области:

$$\bar{S}_C = \frac{\bar{p}_R^\Sigma - \bar{p}_L^\Sigma}{\bar{\rho}_L (\bar{S}_L - \tilde{u}_L) - \bar{\rho}_R (\bar{S}_R - \tilde{u}_R)} + \frac{\bar{\rho}_L \tilde{u}_L (\bar{S}_L - \tilde{u}_L) - \bar{\rho}_R \tilde{u}_R (\bar{S}_R - \tilde{u}_R)}{\bar{\rho}_L (\bar{S}_L - \tilde{u}_L) - \bar{\rho}_R (\bar{S}_R - \tilde{u}_R)},$$

$$\bar{p}_C = 0.5 \cdot (\bar{p}_L^\Sigma + \bar{p}_R^\Sigma + \bar{\rho}_L \cdot (\bar{S}_L - \tilde{u}_L) \times (\bar{S}_C - \tilde{u}_L) + \bar{\rho}_R \cdot (\bar{S}_R - \tilde{u}_R) \cdot (\bar{S}_C - \tilde{u}_R)),$$

где

$$\bar{p}_{L/R}^\Sigma = \bar{p}_{L/R} + (p_t)_{L/R},$$

$$(p_t)_{L/R} = \frac{2}{3} \cdot \bar{Q}_{L/R} \cdot k_{L/R}.$$

В-третьих, использовать суммарное давление для вычисления значений импульса и полной энергии в области распада:

$$(\bar{q}\tilde{u})_{*L/R} = \frac{(\bar{q}\tilde{u})_{L/R} \cdot (\bar{S}_{L/R} - \tilde{u}_{L/R} \cdot \vec{n})}{(\bar{S}_{L/R} - \bar{S}_C)} - \frac{(\bar{p}_{L/R}^\Sigma - \bar{p}_C) \cdot \vec{n}}{(\bar{S}_{L/R} - \bar{S}_C)},$$

$$(\bar{q}\tilde{E})_{*L/R} = \frac{(\bar{q}\tilde{E})_{L/R} \cdot (\bar{S}_{L/R} - \tilde{u}_{L/R} \cdot \vec{n})}{(\bar{S}_{L/R} - \bar{S}_C)} - \frac{\bar{p}_{L/R}^\Sigma \cdot \tilde{u}_{L/R} \cdot \vec{n} - \bar{p}_C \cdot \bar{S}_C}{(\bar{S}_{L/R} - \bar{S}_C)},$$

где $\vec{n}$ — нормаль к грани.

В-четвертых, аналогично поступать и при вычислении потоков:

$$\vec{F}(\bar{q}\tilde{u})_{*L/R} = \left(\left((\bar{q}\tilde{u})_{L/R} \otimes \tilde{u}_{L/R} + \bar{p}_{L/R}^\Sigma \cdot \mathbf{I} \right) \cdot \vec{n} + \bar{S}_{L/R} \cdot \left((\bar{q}\tilde{u})_{*L/R} - (\bar{q}\tilde{u})_{L/R} \right) \right) \otimes \vec{n},$$

$$\vec{F}(\bar{q}\tilde{E})_{*L/R} = \left(\left((\bar{q}\tilde{E})_{L/R} + \bar{p}_{L/R}^\Sigma \right) \cdot \tilde{u}_{L/R} \cdot \vec{n} + \bar{S}_{L/R} \cdot \left((\bar{q}\tilde{E})_{*L/R} - (\bar{q}\tilde{E})_{L/R} \right) \right) \cdot \vec{n}.$$

В остальном решатель HLLC остается стандартным, а для турбулентной кинетической энергии единицы объема схема нахождения распадных значений и потоков аналогична таковой для плотности.

4. ТЕСТИРОВАНИЕ

Для проверки работоспособности полученного HLLC-решателя используем обычный тест Сода (см. [14], [15]). Идея состоит в том, что турбулентное давление должно влиять на решение образом аналогичным статическому, так что если мы имеем такое начальное распределение статического и турбулентного давления в системе, что их сумма равна статическому давлению в задаче Сода без турбулентности, то решение для плотности или скорости между задачами должны совпадать.

Рассмотрим одномерную систему с положением границ $x_l = 0$ и $x_r = 1$ см. На границах задается граничное условие свободного выхода. Внутри системы задаются разрывные начальные условия плотности ($\bar{q}$) и давления ($\bar{p}$) с положением границы x_I между состояниями 1 и 2, значения приведены в табл. 2, скорость $\tilde{u}$ задана равной 0 по всей системе. Расчет ведется до момента времени 0.25 с.

Таблица 2. Начальные условия задачи Сода

x_I , см	$\bar{q}_1$, г/см ³	$\bar{p}_1$, дин/см ²	$\bar{q}_2$, г/см ³	$\bar{p}_2$, дин/см ²
0.5	1	1	0.125	0.1

Используется уравнение состояния идеального газа, универсальная газовая постоянная $R = 8.31446 \times 10^7$ эрг/(моль·К), изохорная теплоемкость $C_V = 20.78616 \times 10^7$ эрг/моль, молярная масса $M = 1$ г/моль. Будем рассматривать данную задачу как эталонную и сравнивать с ней расчеты следующей задачи, включающей турбулентную кинетическую энергию k , заданную так, чтобы турбулентное давление в зоне состояния 1 составляло 10% от статического давления этой области в вышеописанной задаче, само статическое давление соответственно уменьшим на ту же величину. Таким образом, начальные данные модифицированной задачи Сода будут иметь вид, приведенный в табл. 3. В остальном начальные и граничные условия совпадают.

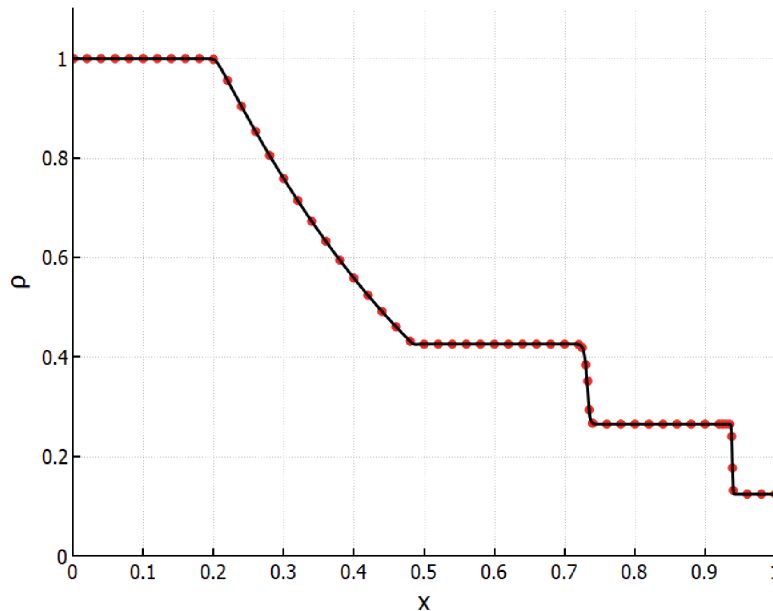
Таблица 3. Начальные условия задачи Сода с турбулентным давлением

x_I , см	$\bar{q}_1$, г/см ³	$\bar{p}_1$, дин/см ²	k_1 , (см/с) ²	$\bar{q}_2$, г/см ³	$\bar{p}_2$, дин/см ²	k_2 , (см/с) ²
0.5	1	0.9	0.15	0.125	0.1	0

Расчеты проводятся по схеме MUSCL-Hancock (см. [16]) второго порядка аппроксимации по пространству и времени с реконструкцией примитивных переменных $\bar{q}$, $\tilde{u}$, $\bar{p}$, k . Так как при стремлении ТКЭ к нулю модифицированная HLLC схема сводится к стандартной, то расчет обеих задач можно

проводить, используя один и тот же решатель, положив для первой задачи ТКЭ равную 0 во всей области расчета. В расчетах использовалась сетка на 1000 ячеек.

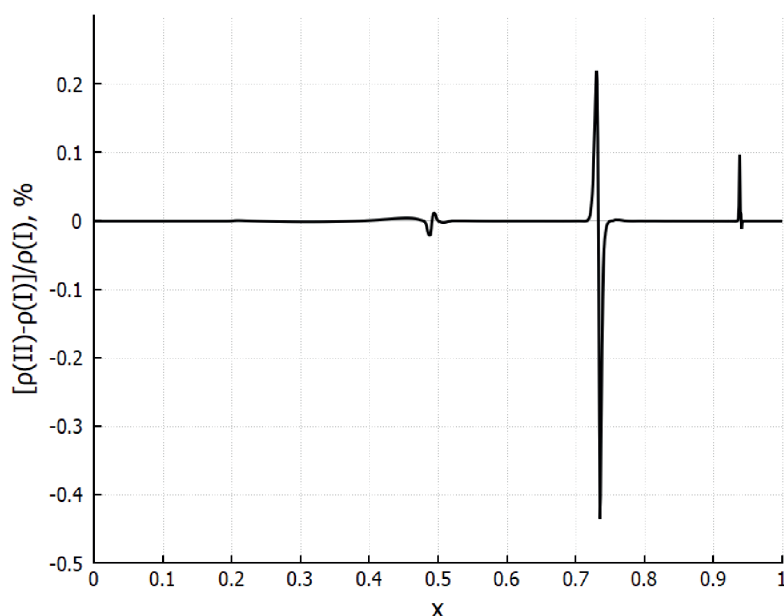
На фиг. 1 представлены графики плотности для обеих задач на конечный момент времени. Они практически совпадают, а значит, можно сделать вывод, что схема с учетом турбулентного давления корректно воспроизводит поток массы стандартной схемы. Тем не менее, детальное сравнение двух расчетов, а именно, рассмотрение относительной разности между решениями, $(q(II) - q(I))/q(I)$ (фиг. 2), показывает небольшое, не более 0.5%, различие в расчетах, что может быть объяснено тем, что турбулентное давление, в отличие от статического, реконструируется не как единое целое, а “покомпонентно”, т.е. на грани независимо интерполируются плотность и ТКЭ, и только после этого они преобразуются в турбулентное давление.



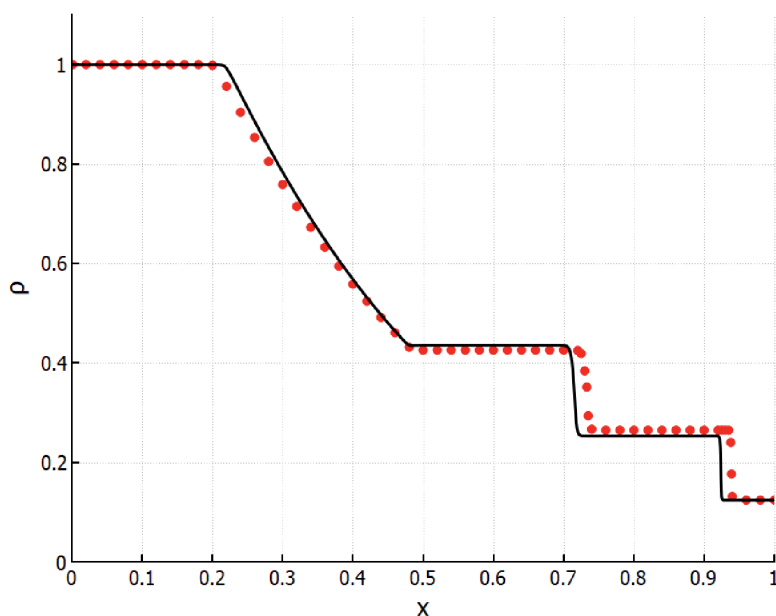
Фиг. 1. Распределение плотности на момент $t = 0.25$ с: стандартная задача Сода (•) и турбулентная задача Сода с модифицированным решателем HLLC (—).

Корректность вышеописанной схемы была показана, но возникает вопрос: насколько оправдан именно такой подход? Можно встретить утверждение (см. [11]), что турбулентная кинетическая энергия, как правило, пренебрежимо мала, и ее вклад в полную энергию и тензор Рейнольдса можно не учитывать, тем самым рассматривая ее как пассивный скаляр. Применительно к данной задаче это, очевидно, не так, что следует из фиг. 3, где сравниваются результаты стандартной задачи со схемой, где турбулентное давление игнорируется, а k рассматривается как пассивный скаляр. Видно, что решение с пассивным скаляром k отстает от эталонного. Конечно, в связи с этим возникает вопрос: в каких задачах действительно достигается такая величина k , что ею нельзя пренебречь?

Прямолинейное введение турбулентного давления и ТКЭ в схему HLLC без анализа собственных чисел матрицы Якоби может привести к схеме, когда ТКЭ учтена в полной энергии, турбулентное давление суммируется со статическим при вычислении распадных значения и потоков, но не учитывается в вычислении волновых скоростей $\tilde{S}_L, \tilde{S}_R, \tilde{S}_C$. Такой вариант схемы приводит к серьезным осцилляциям, возникающим за волной разряжения, как показано на фиг. 4. Это делает такую схему непригодной для расчетов. Наконец, можно учесть влияние турбулентного давления вне решателя HLLC, аппроксимировав соответствующие члены уравнений импульса, $\vec{\nabla} p_t$, и полной энергии, $\nabla \cdot (p_t \cdot \vec{u})$, например, линейной интерполяцией с последующим вычислением градиента и дивергенции по теореме Гаусса—Остроградского. Такой вариант схемы более устойчив, чем предыдущий, что следует из фиг. 5, наблюдаемые осцилляции весьма малы, но все же данный вариант уступает модифицированной схеме HLLC, которая сохраняет на этом участке гладкость решения.

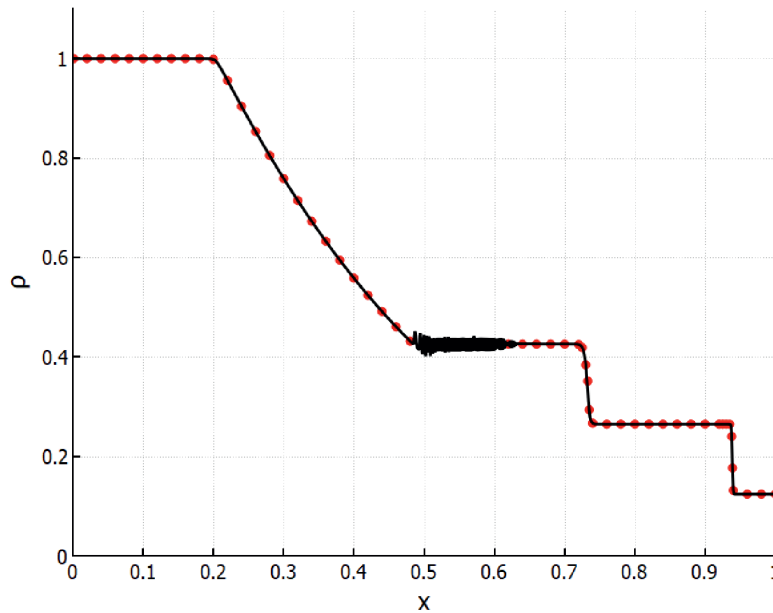


Фиг. 2. Относительная разница плотности между стандартной задачей Сода (I) и турбулентной задачей Сода с модифицированным решателем HLLC (II); $t = 0.25$ с.

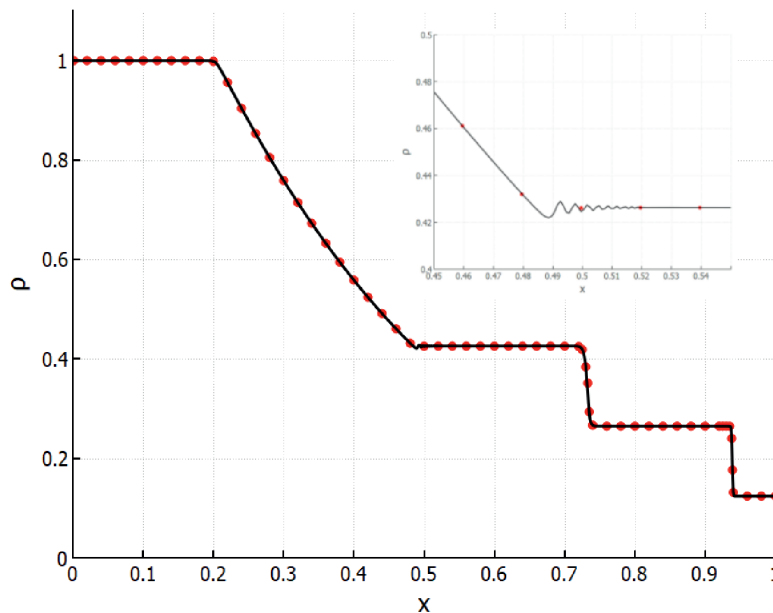


Фиг. 3. Распределение плотности на момент $t = 0.25$ с: стандартная задача Сода (•) и турбулентная задача Сода с турбулентной энергией в качестве пассивного скаляра (—).

Можно заключить, что сравнение модифицированной схемы HLLC с более простыми вариантами расчета потоков сжимаемого турбулентного течения показывает, что при значительной величине турбулентной кинетической энергии ее влияние необходимо строго учитывать в решении задачи Римана о распаде произвольного разрыва, чтобы получать точное и устойчивое решение. “Значительность” ТКЭ можно охарактеризовать соотношением турбулентного и статического давлений. Полагаем, что в случаях, когда турбулентное давление составляет порядка 1% от статического и выше, следует применять описанную в настоящей статье схему.



Фиг. 4. Распределение плотности на момент $t = 0.25$ с: стандартная задача Сода (•) и турбулентная задача Сода без учета турбулентной кинетической энергии в волновых скоростях (—).



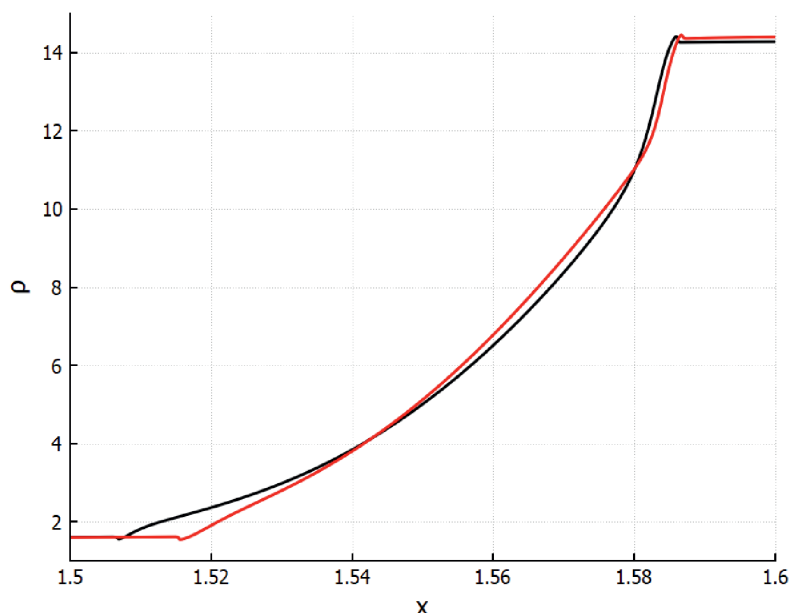
Фиг. 5. Распределение плотности на момент $t = 0.25$ с: стандартная задача Сода (•) и турбулентная задача Сода с линейной аппроксимацией p_t (—).

5. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РИХТМАЙЕРА–МЕШКОВА

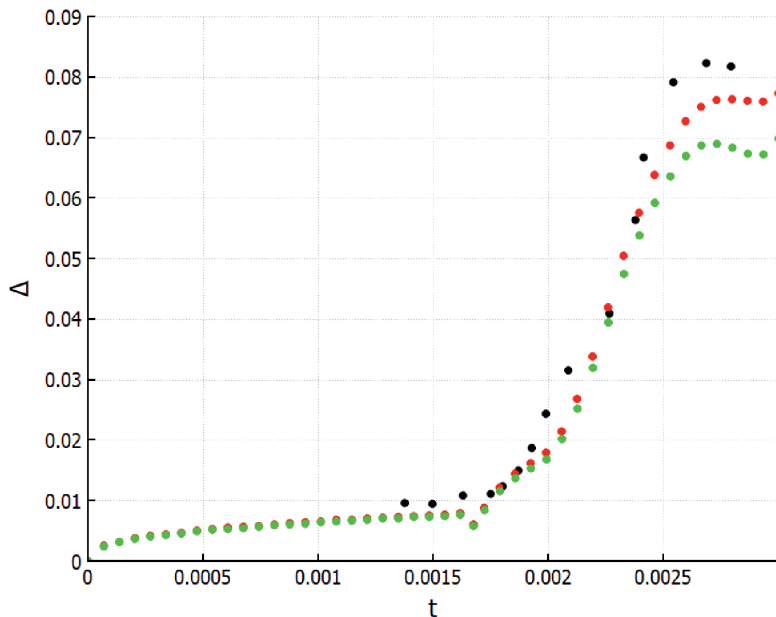
Рассмотрим эффект от учета турбулентного давления в реальной задаче моделирования турбулентного перемешивания вследствие неустойчивости Рихтмайера–Мешкова. В качестве объекта исследования возьмем эксперимент Феттера и Штуртеванта (см. [17]) по измерению ширины зоны перемешивания при прохождении ударной волны с числом Маха 1.98. Постановка задачи берется из работы [18]. Для моделирования турбулентности используется $k - \varepsilon - a - b$ модель (см. [19]), являющаяся упрощенным вариантом модели BHR.

Были выполнены расчеты этой задачи по схеме с модифицированным для учета ТКЭ решателем HLLC и по схеме с ТКЭ как пассивным скаляром. На фиг. 6 и 7 представлены сравнения: плотность по обеим схемам на момент времени 3 мс и ширина зоны перемешивания для обеих схем с экспери-

ментальными данными. Из них следует, что турбулентное давление оказывает существенное влияние на решение. На фиг. 7 ширина зоны перемешивания в конце расчета на момент времени 2.9 мс без учета ТКЭ на 10% ниже, чем при учете ТКЭ в решателе HLLC.



Фиг. 6. Эксперимент Феттера и Штуртеванта. Распределение плотности (кг/м^3) по координате x (м) на момент времени 3 мс: (—) — с учетом ТКЭ в решателе HLLC, (—) — ТКЭ рассматривается как пассивный скаляр.



Фиг. 7. Эксперимент Феттера и Штуртеванта. Ширина зоны перемешивания (м) от времени (с): (•) — экспериментальные данные, (•) — с учетом ТКЭ в решателе HLLC, (•) — ТКЭ рассматривается как пассивный скаляр.

На фиг. 6 волна разряжения в расчете с ТКЭ пассивным скаляром отстает на 1 см от волны в случае учета ТКЭ. Наибольшее влияние турбулентного давления в этой области объясняется тем, что пик турбулентной кинетической энергии на момент 3 мс располагается в районе точки $x = 1.54$ м, и турбулентное давление в нем составляет 1.85% от статического.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе было показано, что турбулентное давление, являющееся частью тензора Рейнольдса, требует специальной модификации решателя Римана для системы уравнений сжимаемой газовой динамики, так как, если оно достаточно велико, турбулентность на среднее течение оказывает влияние не только аналогичное вязкости, но также и аналогичное давлению. На примере решателя HLLC показано, что это влияние заключается не только в простом вкладе в общее давление, но также и в изменении метода расчета волновых скоростей. Примером задачи, где подобный подход может быть применен, можно назвать моделирование турбулентного перемешивания вследствие неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с помощью k – ε и k – L моделей турбулентности. При вторичном прохождении ударной волны через турбулизированную контактную границу в этих моделях происходит мощная генерация турбулентной кинетической энергии, и турбулентное давление в максимуме может достигать нескольких процентов от статического давления, что делает использование предложенной в настоящей работе модифицированной схемы HLLC в этих задачах вполне оправданным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver // Shock Waves. 1994. V. 4. P. 25–34.
3. Hu X., Adams N. A., Iaccarino G. On the HLLC Riemann solver for interface interaction in compressible multi-fluid flow // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 6572–6589.
4. Garrick D. P., Owkes M., Regele J. D. A finite-volume HLLC-based scheme for compressible interfacial flows with surface tension // J. Comput. Phys. 2017. V. 339. P. 46–67.
5. Taylor G. I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes // Proc. Royal. Soc. Ser. A. 1950. V. 201. P. 192.
6. Мешков Е. Е. Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной // Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа. 1969. № 5. С. 151–157.
7. Zhou Y. Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instability induced flow, turbulence, and mixing. II // Phys. Rep. 2017. V. 723–725. P. 1–160.
8. Jakobsen H. A. Chemical reactor modeling. Multiphase reactive flows. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
9. Declercq E., Forestier A., Hérard J.-C., Louis X., Poissant G. An exact Riemann solver for multicomponent turbulent flow // Inter. J. Comput. Fluid Dyn. 2001. V. 14. P. 117–131.
10. Toro E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
11. Mohammadi B., Pironneau O. Analysis of the k – ε turbulence model. New York: John Wiley & Sons, 1994.
12. Davis S. F. Simplified second-order Godunov-type methods // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1988. V. 9. P. 445–473.
13. Pelanti M., Shyue K.-M. A numerical model for multiphase liquid-vapor-gas flows with interfaces and cavitation // Inter. J. Mul. Flow. 2019. V. 113. P. 208–230.
14. Sod G. A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation Laws // J. Comput. Phys. 1978. V. 27. P. 1–31.
15. Kamm J. R. An exact, compressible one-dimensional Riemann solver for general, Convex Equations of State. Los Alamos National Laboratory. 2015. <https://permalink.lanl.gov/object/tr?what=info:lanl-repo/lareport/LA-UR-15-21616>
16. van Leer B. On the relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1985. V. 5. P. 1–20.
17. Vetter M., Sturtevant B. Experiments on the Richtmyer–Meshkov instability of an air/ SF_6 interface // Shock Waves. 1995. V. 4. P. 247–252.
18. Morán-López J. T., Schilling O. Multicomponent Reynolds-averaged Navier-Stokes simulations of reshocked Richtmyer–Meshkov instability-induced mixing // High Energy Den. Phys. 2013. V. 9. P. 112–121.

19. *Schwarzkopf J. D., Livescu D., Gore R. A., Rauenzahn R. M., Ristorcelli J. R.* Application of a second-moment closure model to mixing processes involving multicomponent miscible fluids // *J. of Turb.* V. 12. N 49. P. 1–35.

TURBULENT KINETIC ENERGY IN AN APPROXIMATE SOLVER OF THE RIEMANN GAS DYNAMICS PROBLEM

M. I. Boldyrev*

Russian Federal Nuclear Center—Zababakhin All-Russia Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Chelyabinsk oblast, 456770 Russia

**e-mail: boldyremni@vniitf.ru*

Received 03 November, 2023

Revised 03 November, 2023

Accepted 06 March, 2024

Abstract. The paper describes the consideration of turbulent kinetic energy in solving the gas-dynamic problem of discontinuity decay (Riemann problem) using the HLLC approximate solver. The system of Euler equations is considered with the addition of the hyperbolic equation of turbulent kinetic energy and consideration of turbulent pressure in the momentum and energy balance equations. The Jacobian coefficient of the system of equations and its eigenvalues are found. Based on this, changes are made to the calculation scheme in the HLLC solver. Using the Sod problem as an example, the correctness of taking into account turbulent kinetic energy in solving the Riemann problem is verified, and the instability of the scheme at high turbulent pressure is shown in the case of not taking turbulence into account in calculating the characteristic velocities.

Keywords: compressible gas dynamics, Euler equations, turbulent kinetic energy, approximate Riemann solver, HLLC, Richtmyer-Meshkov instability.