

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.927.25+517.988.2

# ФУНКЦИОНАЛЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИИ ПОТЕНЦИАЛОВ

© 2024 г. Я. М. Дымарский<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> 141701 М.о., г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9, Московский физико-технический институт

\*e-mail: dymarskii@mail.ru

Поступила в редакцию 12.12.2023 г.

Переработанный вариант 20.02.2024 г.

Принята к публикации 05.03.2024 г.

Даны аналитическое и топологическое описания функционала собственных значений на многообразии периодических потенциалов. Библ. 6.

**Ключевые слова:** пространство периодических краевых задач, функционал собственных значений, расслоение многообразия потенциалов.

DOI: 10.31857/S0044466924060105, EDN: XYGYZU

## ВВЕДЕНИЕ

В работах [1] и [2] рассмотрено семейство стационарных операторов Шрёдингера с непрерывным периодическим потенциалом. Замечено, во-первых, что указанное семейство порождает многообразие соответствующих периодических собственных функций выбранной осцилляции, во-вторых, по собственной функции возможно восстановление потенциала с точностью до константы. Там же предложена параметризация многообразия периодических собственных функций выбранной осцилляции и согласованная с ней параметризация семейства операторов, получена формула соответствующих собственных значений.

В настоящей статье рассмотрено семейство операторов с периодическими потенциалами из  $L_2$ . В предварительных леммах и теореме 1 сформулированы и в некоторых случаях по-новому доказаны основные утверждения, полученные ранее для операторов с периодическими непрерывными потенциалами. В теореме 2 полностью описаны аналитические и топологические свойства функционала собственных значений. Гильбертовость семейства потенциалов позволяет доказать морсовость функционала и посчитать его индекс. Обнаружено, возможно впервые, специфическое поведение функционала собственного значения с ростом спектральной лакуны.

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим семейство периодических самосопряженных краевых задач

$$-y'' + p(x)y = \lambda y, \quad (1)$$

$$y(0) - y(2\pi) = y'(0) - y'(2\pi) = 0 \quad (2)$$

на собственные значения  $\lambda$  и собственные функции  $y$ . Параметром семейства является потенциал  $p$  из гильбертова пространства  $L_2(2\pi)$   $2\pi$ -периодических функций, суммируемых на периоде с квадратом. Поскольку изменение потенциала на константу не влияет на собственные функции, а лишь сдвигает все собственные значения на ту же константу, целесообразно использовать в качестве пространства параметров подпространство

$$P := \left\{ p \in L_2(2\pi) : \int_0^{2\pi} p(x) dx = 0 \right\} \quad (3)$$

потенциалов с нулевым средним. В дальнейшем под пространством краевых задач мы понимаем пространство  $P$ .

Напомним свойства спектра краевой задачи (1), (2) для фиксированного потенциала  $p \in P$  (см. [3]). Спектр состоит из вещественных собственных значений, которые не более чем двукратны:

$$\lambda_0(p) < \lambda_1^-(p) \leq \lambda_1^+(p) < \dots < \lambda_n^-(p) \leq \lambda_n^+(p) < \dots$$

Соответствующие собственные функции принадлежат соболевскому пространству  $W_2^2(2\pi)$   $2\pi$ -периодических функций, которые суммируемы с квадратом и их производные вплоть до второго порядка суммируемы с квадратом на периоде (см. [4]). Заметим, что, в силу теоремы вложения, собственные функции принадлежат классу гладкости  $C^1$ . Собственные функции, отвечающие собственным значениям с нижним индексом  $n$ , имеют на полуинтервале  $[0, 2\pi)$  в точности  $2n$  невырожденных нулей. Отрезок  $[\lambda_n^-, \lambda_n^+]$  называется  $n$ -й лакуной. Собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, попарно ортогональны в пространстве  $L_2(2\pi)$ . В случае совпадения собственных значений  $\lambda_n^-(p) = \lambda_n^+(p) = \lambda_n^0(p)$  (вырожденная лакуна) возникает плоскость  $\Pi_n(p)$  собственных функций. Нули линейно независимых собственных функций, отвечающих общему собственному значению, перемежаются.

Таким образом, на  $P$  определен функционал  $\lambda_0$ , а для каждого  $n \in \mathbb{N}$  и каждого выбранного знака “ $\pm$ ” на пространстве параметров определен функционал  $\lambda_n^\pm : P \rightarrow \mathbb{R}$ . Очевидно, что совпадают сужения  $\lambda_n^-|_{P_n^0} = \lambda_n^+|_{P_n^0} = \lambda_n^0$ . Цель работы описать свойства этих функционалов.

Мы будем рассматривать собственные функции  $y$  задачи (1), (2) как элементы проективного пространства, порожденного функциональным пространством  $W_2^2(2\pi)$ . Введем множество всех собственных функций, отвечающих собственным значениям с натуральным нижним индексом  $n$ :

$$Y_n := \{ y \in W_2^2(2\pi) : \int_0^{2\pi} y^2 dx = 1, y \sim -y, \exists p \in P : (1), (2) \text{ верно с } \lambda = \lambda_n^\pm(p) \}.$$

Очевидно, что множество  $Y_n$  допускает аналитическое описание:

**Лемма 1.** *Множество  $Y_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) состоит из всех таких функций  $y \in W_2^2(2\pi)$ , нормированных в  $L_2(2\pi)$ , что:*

- 1)  $y(0) - y(2\pi) = y'(0) - y'(2\pi) = 0$ ;
- 2) существуют в точности  $2n$  точек  $x_i \in [0, 2\pi)$ , в которых  $y(x_i) = 0$ ;
- 3)  $y'(x_i) \neq 0$  ( $i = 1, \dots, 2n$ );
- 4)

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{y''}{y} \right)^2 dx < \infty \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \left( \frac{y''}{(x - x_1) \dots (x - x_{2n})} \right)^2 dx < \infty.$$

Исследуемое семейство краевых задач настолько узкое, что по собственной функции  $y \in Y_n$  однозначно восстанавливается собственное значение и потенциал, т.е. определены отображения

$$\lambda_n : Y_n \rightarrow \mathbb{R}, \lambda_n(y) = \lambda := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{y''}{y} dx; \quad (4)$$

$$\Phi_n : Y_n \rightarrow P, \Phi_n(y) = p := \frac{y''}{y} + \lambda_n(y). \quad (5)$$

Далее, по потенциалу  $p$  и собственному значению  $\lambda$  (которое, в силу определения, имеет нижний индекс  $n$ ) можно определить, какой из верхних индексов  $\pm$  соответствует числу  $\lambda$  или же это число имеет кратность два. Значит,  $\lambda_n(y) = \lambda_n^\pm(\Phi_n(y))$ .

До конца раздела зафиксируем нижний индекс  $n \in \mathbb{N}$ . Обозначим через  $Y_n^\pm \subset Y_n$  множество всех собственных функций семейства (1)–(3), которым соответствуют простые собственные значения  $\lambda_n^\pm$ , а через  $Y_n^0 \subset Y_n$  — множество всех собственных функций семейства (1)–(3), которым соответствуют двукратные собственные значения  $\lambda_n^0$ . Объединение  $Y_n^+ \cup Y_n^- \cup Y_n^0 = Y_n$ . Из определения следует, что множества  $Y_n^\pm$ ,  $Y_n^0$  с разными номерами или разными верхними индексами попарно не пересекаются.

**Определение 1.1)** Пару  $(y, y_r) \in Y_n^\pm \times Y_n^\mp$  собственных функций мы назовем взаимной (reciprocal), если эти функции порождены одним и тем же потенциалом  $p$ .

2) Пару  $(y, y_r) \in Y_n^0 \times Y_n^0$  собственных функций мы назовем взаимной, если они порождены одним и тем же потенциалом  $p$  и ортогональны в  $L_2$ . (В первом случае взаимные функции ортогональны автоматически.)

Из предыдущих рассуждений следует, что по функции  $y \in Y_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) взаимная функция  $y_r \in Y_n$  восстанавливается однозначно и отношение взаимности симметрично. Значит, на множестве  $Y_n$  определена инволюция  $I_n(y) := y_r$ , у которой нет неподвижных точек. Обозначим сужение  $I_n^0 := I_n|_{Y_n^0}$ .

Через  $\Delta\lambda(y) := \Lambda_n(y) - \Lambda_n(y_r)$ , где  $y \in Y_n$ , обозначим ориентированную длину лакуны; следовательно,  $\text{sign}(\Delta\lambda(y)) = \pm 1$ , если  $y \in Y_n^\pm$ , и  $\Delta\lambda(y) = 0$ , если  $y \in Y_n^0$ . Нас интересуют подмножества собственных функций постоянной ориентированной длины  $n$ -й лакуны:

$$Y_n(\Delta\lambda) := \{y \in Y_n : \Lambda(y) - \Lambda(y_r) = \Delta\lambda\}. \quad (6)$$

Очевидно, что  $I_n(Y_n(\Delta\lambda)) = Y_n(-\Delta\lambda)$ . Из определения следует, что

$$Y_n^\pm = \bigcup_{\Delta\lambda > 0 (< 0)} Y_n(\Delta\lambda), \quad Y_n^0 = Y_n(0), \quad Y_n = \bigcup_{\Delta\lambda \in \mathbb{R}} Y_n(\Delta\lambda). \quad (7)$$

Аналогично, нас интересуют подмножества потенциалов постоянной неориентированной длины  $n$ -й лакуны. По определению:

$$P_n(|\Delta\lambda|) := \{p \in P : \lambda_n^+(p) - \lambda_n^-(p) = |\Delta\lambda| \geq 0\} \subset P, \quad (8)$$

$$P_{\setminus n} = \bigcup_{|\Delta\lambda| > 0} P_n(|\Delta\lambda|), \quad P = \bigcup_{|\Delta\lambda| \geq 0} P_n(|\Delta\lambda|) = P_n(0) \cup P_{\setminus n}. \quad (9)$$

Если потенциал  $p \in P_n^0 := P_n(0)$ , то сам потенциал, собственное значение  $\lambda_n^0(p)$  и соответствующую собственную функцию  $y \in Y_n^0$  мы назовем  $n$ -вырожденными или просто вырожденными, когда индекс  $n$  известен из контекста.

Введем в рассмотрение вспомогательные функции. Пусть  $y \in Y_n$ . Определим вронскиан

$$W(y, y_r)(x) := \begin{vmatrix} y(x) & y_r(x) \\ y'(x) & y'_r(x) \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Отметим, во-первых, что знак вронскиана (10) зависит от выбора представителей элементов  $y$ ,  $y_r$  и, во-вторых, только для вырожденного случая  $p \in P_n(0)$  он порожден решениями одного и того же дифференциального уравнения и только в этом случае постоянен.

Далее, рассмотрим векторную функцию  $\bar{y}(x) := (y(x), y_r(x))$ , значения которой принадлежат плоскости  $\Omega_n$  с координатами  $(y, y_r)$ ; ее образом является некоторая замкнутая кривая  $\Upsilon$ . Введем на плоскости  $\Omega_n$  полярные координаты  $(\rho, \theta)$ . Тогда

$$y(x) = \rho(x) \cos \theta(x), \quad y_r(x) = \rho(x) \sin \theta(x), \quad (11)$$

где значения непрерывной ветви угловой функции  $\theta = \theta(x)$  выбираются с точностью до кратного  $\pi$ , поскольку мы отождествили собственные функции отличающиеся знаком. (Ниже мы определим вронскиан и угловую функцию однозначно.) Наконец, нам понадобится угловая скорость  $\eta(x) := \theta'(x)$  и начальное значение  $\varphi := \theta(0)$  угловой функции. Таким образом, по собственной функции  $y$  на-

ми определены пара чисел  $(\varphi, \Delta\lambda)$  и шесть функций:  $p, y_r, W, \rho, \theta, \eta$ . Оказывается, пара чисел  $(\varphi, \Delta\lambda)$  и функция  $\eta$  полностью определяют остальные шесть функций:  $y, y_r, p, W, \rho, \theta$ .

Леммы ниже дают описания свойств введенных функций.

**Лемма 2.** Свойства вронскиана.

1. Производная вронскиана вычисляется по формуле

$$W(y, y_r)'(x) = \Delta\lambda(y) \cdot y(x) \cdot y_r(x). \quad (12)$$

2. Функция  $W(y, y_r) \in W_2^3(2\pi)$ .

3. Вронскиан нигде не обращается в нуль:  $\forall x$  справедливо  $W(y, y_r)(x) \neq 0$ .

4. Пусть  $y, y_r$  — произвольные представители соответствующих элементов из  $Y_n$ . Из четырех возможных пар  $(\pm y, \pm y_r)$ ,  $(\pm y, \mp y_r)$  только одна удовлетворяет условиям  $W(y, y_r)(x) > 0$  и  $\varphi = \theta(0) \in [0, \pi)$ .

**Доказательство.** Первое утверждение следует непосредственно из определения вронскиана и уравнения (1). Второе утверждение следует из первого.

Чтобы доказать третье утверждение, заметим, что вронскиан принадлежит классу  $C^2$ . Вырожденный случай  $\Delta\lambda = 0$  очевиден. Пусть  $\Delta\lambda < 0$ . Судя по формуле (12), точки экстремума вронскиана являются нулями собственных функций  $y$  и  $y_r$ . Но нули функций  $y$  и  $y_r$  перемежаются, иначе у функций  $y$  и  $y_r$ , согласно теореме Штурма, на периоде будет разное количество нулей. Пусть  $y(x_1) = y_r(x_2) = 0$  и между  $x_1$  и  $x_2$  нет нулей функций  $y$  и  $y_r$ . Пусть, для определенности,  $y'(x_1) > 0$  и  $y_r(x_1) > 0$ . Тогда  $y(x_2) > 0$  и  $y_r'(x_2) < 0$ . Теперь  $W(x_1) = -y_r(x_1)y'(x_1) < 0$  и  $W(x_2) = y(x_2)y_r'(x_2) < 0$ . Значит, в любых соседних нулях собственных функций  $y$  и  $y_r$  знак вронскиана не меняется. Следовательно, он не меняется нигде.

Последнее утверждение следует из предыдущего. Лемма доказана.

Впредь мы будем выбирать именно ту единственную пару  $(y, y_r)$ , для которой  $W(y, y_r) > 0$  и  $\varphi = \theta(0) \in [0, \pi)$ .

**Лемма 3.** Функция полярного радиуса  $\rho$  строго положительна,  $\rho \in W_2^2(2\pi)$  и справедливо тождество

$$\eta(x) := \theta'(x) \equiv \frac{W(x)}{\rho^2(x)}.$$

Первое утверждение следует из п. 3 леммы 2, второе — из определения (11) полярного радиуса и первого утверждения. Третье утверждение следует из формулы  $\operatorname{tg} \theta = y_r/y$  и второго утверждения.

Теперь очевидна

**Лемма 4.** Функция угловой скорости  $\eta \in W_2^2(2\pi)$ , она строго положительна и справедливо равенство

$$\theta(2\pi) - \theta(0) = \int_0^{2\pi} \eta(x) dx = 2\pi n. \quad (13)$$

Обозначим через  $\hat{H}_n \subset W_2^2(2\pi)$  подмножество функций  $\eta$ , удовлетворяющих утверждениям леммы 4, а через  $H_n \subset \hat{H}_n$  подмножество функций  $\eta$ , удовлетворяющих еще двум условиям:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2 \int_0^x \eta(t) dt}{\eta(x)} dx = 0, \quad (14)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2 \int_0^x \eta(t) dt}{\eta(x)} dx = 0. \quad (15)$$

**Лемма 5.** Множество  $\tilde{H}_n$  является выпуклым открытым подмножеством гиперплоскости  $H_{ip_n} = \left\{ \eta \in W_2^2(2\pi) : \int_0^{2\pi} \eta(x) dx = 2\pi n \right\}$ . Подмножество  $H_n \subset \tilde{H}_n$  является гомотопически тривиальным гладким (т.е. класса  $C^\infty$ ) гильбертовым подмногообразием коразмерности два.

Лемма 5 доказана в [1] для случая  $\eta \in C^2(2\pi)$  (см. там лемму 6 и п. 5.1 и 5.3). Без изменений доказательство переносится на случай  $\eta \in W_2^2(2\pi)$ .

## 2. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Оказывается расслоение (6), (7) многообразия  $Y_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) и стратификация (8), (9) пространства  $P$  согласованы через отображение  $\Phi_n$  (см. (4) и (5)). Для тривиализации расслоения мы привлекаем переменные  $(\eta, \varphi, \Delta\lambda) \in H_n \times \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}$ .

**Теорема 1.** *Отображение  $\Phi_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) дополняется до коммутативной диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} Y_n & \xrightarrow{\Phi_n} & P \\ G_n \downarrow & & \downarrow F_n \\ H_n \times \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi_n} & H_n \times \mathbb{R}^2, \end{array} \quad (16)$$

в которой:

1. *Отображение*

$$\pi_n(\eta, \varphi, \Delta\lambda) := (\eta, \Delta\lambda \cos 2\varphi, \Delta\lambda \sin 2\varphi). \quad (17)$$

2. *Отображение  $G_n$  является биекцией.*

*Обратное отображение, которое индуцирует в  $Y_n^0$  структуру гладкого банахова многообразия диффеоморфного  $H_n \times \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}$ , задается формулой*

$$G_n^{-1}(\eta, \varphi, \Delta\lambda) = y(x) := \frac{1}{\sqrt{\eta(x)}} \cdot \exp \left( \frac{\Delta\lambda}{4} \int_0^x \frac{\sin 2(\varphi + \int_0^t \eta(\tau) d\tau)}{\eta(t)} dt \right) \cos \left( \varphi + \int_0^x \eta(t) dt \right). \quad (18)$$

3. *По значению  $y$  отображения  $G_n^{-1}$*

(а): *мы находим вспомогательную функцию*

$$r(\eta, \varphi, \Delta\lambda) := \frac{y''(x)}{y(x)} = -\frac{\eta''}{2\eta} + \frac{3(\eta')^2}{4\eta^2} - \eta^2 - \frac{\Delta\lambda \eta' \sin(2\theta)}{2\eta^2} + \Delta\lambda \cos(2\theta) + \frac{\Delta\lambda^2 \sin^2(2\theta)}{16\eta^2} - \frac{1}{2}\Delta\lambda; \quad (19)$$

(б): *по формулам (4) и (19) находим собственное значение*

$$\lambda(\eta, \varphi, \Delta\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \eta^2 - \left( \frac{\eta'}{2\eta} \right)^2 - \left( \frac{\Delta\lambda \sin 2\theta}{4\eta} \right)^2 \right) dx + \frac{1}{2}\Delta\lambda. \quad (20)$$

4. *Отображение  $F_n$  является тривиализацией гладкого расслоения  $\beta : P \rightarrow P_n^0$  над подмногообразием  $n$ -вырожденных потенциалов; стандартным слоем расслоения является  $\mathbb{R}^2$ ; сужение  $F_n^0 : P_n^0 \rightarrow H_n$  является диффеоморфизмом на  $H_n$ , который индуцирует на  $P_n^0 \subset P$  структуру гомотопически тривиального и тривиально вложено в  $P$  гладкого подмногообразия коразмерности два.*

*Обратное отображение  $F_n^{-1}$  задается следующим образом:*

(а): *по точке  $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$  находим длину лакуны  $|\Delta\lambda| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \geq 0$ , если  $|\Delta\lambda| > 0$ , из системы уравнений*

$$\xi_1 = |\Delta\lambda| \cos 2\varphi, \quad \xi_2 = |\Delta\lambda| \sin 2\varphi \quad (21)$$

*определяется единственный угол  $\varphi \in [0, \pi)$ ;*

(б): *по формуле (18) находим собственную функцию  $y = y(\eta, \varphi, \Delta\lambda) \in Y_n^+ \cup Y_n^0$ , взяв  $\Delta\lambda = |\Delta\lambda|$ ;*

(в): по формуле (5) находим потенциал

$$p(\eta, \varphi, |\Delta\lambda|) = F_n^{-1}(\eta, \varphi, |\Delta\lambda|) = r(x) + \lambda(\eta, \varphi, |\Delta\lambda|) =$$

$$= -\frac{\eta''}{2\eta} + \frac{3(\eta')^2}{4\eta^2} - \eta^2 - \frac{|\Delta\lambda|\eta' \sin(2\theta)}{2\eta^2} + |\Delta\lambda| \cos(2\theta) + \frac{|\Delta\lambda|^2 \sin^2(2\theta)}{16\eta^2} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \eta^2 - \left( \frac{\eta'}{2\eta} \right)^2 - \left( \frac{|\Delta\lambda| \sin 2\theta}{4\eta} \right)^2 \right) dx. \quad (22)$$

5. Функции  $\lambda_n^\pm(p)$  зависимости собственных значений от потенциала в терминах переменных  $(\eta, \varphi, |\Delta\lambda|)$  (см. (21)) имеют вид

$$\lambda_n^\pm(p) = \lambda_n^\pm(\eta, \varphi, |\Delta\lambda|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \eta^2 - \left( \frac{\eta'}{2\eta} \right)^2 - \left( \frac{|\Delta\lambda| \sin 2(\varphi + \int_0^x \eta(t) dt)}{4\eta} \right)^2 \right) dx \pm \frac{|\Delta\lambda|}{2}. \quad (23)$$

6. Отображение  $\Phi_n$  является гладким и обладает следующими свойствами:

(а): действует послойно, т. е.  $\Phi_n(Y_n(\Delta\lambda)) = P_n(|\Delta\lambda|)$ ;

(б): сужение  $\Phi_n^0 := \Phi_n|_{Y_n^0} : Y_n^0 \rightarrow P_n^0$  является гладким тривиальным расслоением, слой которого есть проективная прямая; тривиализующая коммутативная диаграмма такова:

$$\begin{array}{ccc} Y_n^0 & \xrightarrow{\Phi_n^0} & P_n^0 \\ G_n^0 \downarrow & & \downarrow F_n^0 \\ H_n \times \mathbb{R}P^1 & \xrightarrow{\pi_n^0} & H_n \end{array} ;$$

(в): сужения  $\Phi_n^\pm := \Phi_n|_{Y_n^\pm} : Y_n^\pm \rightarrow P_n \subset R$  являются диффеоморфизмами, причем  $\Phi_n^\pm = \Phi_n^\mp \cdot I_n$ .

7. Инволюция  $I_n$  подобна инволюции  $J_n$ , которая действует в  $H_n \times \mathbb{R}P^1 \times R$ :

$$I_n = G_n^{-1} \circ J_n \circ G_n, \text{ где } J_n(\eta, \varphi, \Delta\lambda) = (\eta, \varphi + \frac{\pi}{2}, -\Delta\lambda).$$

Инволюция  $I_n$  является гладким автоморфизмом.

Доказательство всех утверждений теоремы приведено в работах [1], [2] для случая непрерывного  $2\pi$ -периодического потенциала  $p \in C(2\pi)$ . Без изменений доказательство переносится на случай  $p \in L_2(2\pi)$ .

В пространстве двумерных вещественных симметрических матриц рассмотрим плоскость из матриц с нулевым следом. Нас интересуют собственные значения  $\gamma \in \mathbb{R}$  и собственные векторы  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$  ( $\varphi \in \mathbb{R}P^1$ ):

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_2 & -\xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \gamma \cos 2\varphi, \\ \xi_2 = \gamma \sin 2\varphi. \end{cases} \quad (24)$$

Сравнивая отображение  $\pi_n$  (см. (16) и (17)) с отображением (24), мы видим, что при фиксации осцилляционного параметра  $n \in \mathbb{N}$  краевая задача отличается от двумерного случая на гомотопически тривиальный сомножитель  $H_n$ . Значит, в силу формул (21), переменные  $(|\Delta\lambda|, 2\varphi)$  являются полярными координатами в плоскости, которая указана в тривиализации многообразия  $P$  (см. (16)); эту плоскость мы интерпретируем как плоскость двумерных вещественных симметрических матриц с нулевым следом. Ниже в полярных координатах описаны свойства функционалов собственных значений.

Предварительно напомним, что критическая точка функционала называется невырожденной, если в ней второй дифференциал не вырожден. Коиндексом Морса невырожденной критической точки



называется точная верхняя грань размерностей линейных подпространств, на которых положительно определен второй дифференциал [6].

**Теорема 2.** Рассмотрим функционалы собственных значений

$$\lambda_0, \lambda_n^\pm : P \rightarrow \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Их свойства таковы:

1. Функционал  $\lambda_0$  имеет одну невырожденную критическую точку  $p = 0 \in P$ , это максимум  $\lambda_0(0) = 0$ .
2. Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  функционалы  $\lambda_n^\pm$  не вырождены на открытом подмногообразии  $P_n \subset P$ .
3. Сужение  $\lambda_n^0 : P_n^0 \rightarrow \mathbb{R}$  функционала  $\lambda_n^\pm$  на многообразии  $n$ -вырожденных потенциалов обладает свойствами:

(а) В параметризации  $p = (F_n^0)^{-1}(\eta)$  сужение задается интегральным функционалом

$$\lambda_n^0 : H_n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda_n^0(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \eta^2 - \left( \frac{\eta'}{2\eta} \right)^2 \right) dx. \quad (25)$$

(б) Сужение имеет единственную критическую точку  $p = 0 \in P_n^0$ .

(в) Касательное пространство  $T_0 P_n^0 \subset T_0 P = P \subset L_2(2\pi)$  определяется в  $L_2(2\pi)$  тремя условиями ортогональности

$$T_0 P_n^0 = \{q \in L_2(2\pi) : \int_0^{2\pi} q(x) dx = \int_0^{2\pi} q(x) \cdot \cos 2nx dx = \int_0^{2\pi} q(x) \cdot \sin 2nx dx = 0\}.$$

Обозначим через  $T_0 P_n^0 (\leq 2n-1) \subset T_0 P_n^0$  линейную оболочку конечной ортогональной системы функций  $\{\cos x, \sin x, \dots, \cos(2n-1)x, \sin(2n-1)x\}$ , а через  $T_0 P_n^0 (\geq 2n+1) \subset T_0 P_n^0$  — линейную оболочку бесконечной ортогональной системы функций  $\{\cos(2n+1)x, \sin(2n+1)x, \dots\}$ . Тогда касательное пространство есть прямая сумма  $T_0 P_n^0 = T_0 P_n^0 (\leq 2n-1) \oplus T_0 P_n^0 (\geq 2n+1)$  указанных ортогональных подпространств.

(г) Критическая точка  $p = 0 \in P_n^0$  является невырожденной. Коиндекс Морса критической точки  $0 \in P_n^0$  равен  $2(2n-1)$ . На подпространстве  $T_0 P_n^0 (\leq 2n-1)$  дифференциал  $d^2 \lambda_n^0(n)$  положительно определен, а на подпространстве  $T_0 P_n^0 (\geq 2n+1)$  — отрицательно определен.

4. Пусть зафиксирован вырожденный потенциал  $p \in P_n^0$ , пусть  $\Pi_p = \beta^{-1}(p) \cong \mathbb{R}^2$  — слой расслоения  $\beta$  (см. п. 4 теоремы 1), пусть  $\eta = F_n^0(p)$ . Тогда:

(а) На плоскости  $\Pi_p$  функции  $\lambda_n^\pm$  определяются в полярных координатах  $(|\Delta\lambda|, 2\varphi)$  (см. (21)) формулами (23), где  $\eta = F_n^0(p)$ .

(б) При фиксированном угле  $\varphi$  функции  $\lambda_n^\pm = \lambda_n^\pm(|\Delta\lambda|)$  изменяются по квадратичному закону  $\lambda_n^\pm = \lambda_n^0(\eta) - a|\Delta\lambda|^2 \pm \frac{1}{2}|\Delta\lambda|$ , где  $\lambda_n^0(\eta)$  определяется по формуле (25), а

$$a = a(\eta, 2\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin 2(\varphi + \int_0^x \eta(t) dt)}{4\eta} \right)^2 dx > 0;$$

функция  $\lambda_n^+ = \lambda_n^+(|\Delta\lambda|)$  имеет единственный максимум в точке

$$\Delta\lambda_n^+(\eta, \varphi) = \frac{\pi}{2} \left( \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin(2\varphi + 2 \int_0^x \eta(t) dt)}{4\eta} \right)^2 dx \right)^{-1} \quad (26)$$

(см. фиг. 1).

(в) Функционал  $\Delta\lambda_n^+(\eta, \varphi)$  вырождается относительно переменной  $\varphi$  (т.е. не зависит от  $\varphi$ ), если выполнены условия

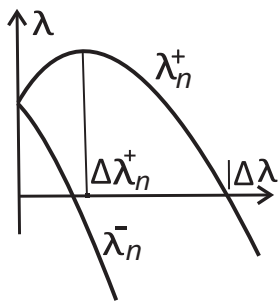
$$\eta \in H_n^* = \left\{ \eta \in H_n : \int_0^{2\pi} \frac{\cos 4 \int_0^x \eta(t) dt}{\eta^2(t)} dx = 0, \int_0^{2\pi} \frac{\sin 4 \int_0^x \eta(t) dt}{\eta^2(t)} dx = 0 \right\}. \quad (27)$$

Множество  $H_n^* \neq \emptyset$ ; в частности,  $\eta(x) \equiv n \in H_n^*$ , и в некоторой окрестности точки  $\eta(x) \equiv n$  условия (27) задают гладкое подмногообразие в  $H_n$  коразмерности два.

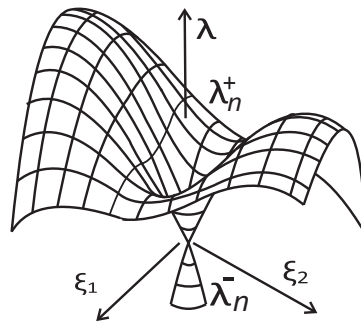
(г) На плоскости  $\Pi_p$  функции  $\lambda_n^\pm$  определяются в аффинных координатах  $(\xi_1, \xi_2)$  (см. (21)) формулами

$$\lambda_n^\pm(\xi_1, \xi_2) = \lambda_n^0(\eta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\xi_1 \sin 2 \int_0^x \eta(t) dt + \xi_2 \cos 2 \int_0^x \eta(t) dt}{4\eta} \right)^2 dx \pm \frac{1}{2} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \quad (28)$$

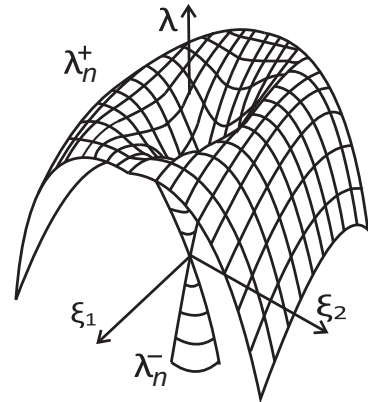
Функции  $\lambda_n^\pm(\xi_1, \xi_2)$  имеют в начале координат конические особенности. В невырожденном случае  $\eta \notin H_n^*$  функция  $\lambda_n^+ = \lambda_n^+(\xi_1, \xi_2)$  имеет два равных максимума и две седловых точки (см. Фиг. (2)). В вырожденном случае  $\eta \in H_n^*$  функция  $\lambda_n^+ = \lambda_n^+(\xi_1, \xi_2)$  имеет окружность максимумов  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = (\Delta\lambda_n^+(\eta))^2$  (см. Фиг. 3).



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

#### 3.1. Доказательство п. 1 теоремы 2

Поскольку собственное значение  $\lambda_0$  всегда простое, воспользуемся формулами теории возмущения спектра в случае простого собственного значения (см. [5], гл. 5, § 13). Рассмотрим краевые задачи (1), (2) в окрестности потенциала  $p$ : пусть  $\lambda = \lambda_0(p)$  — собственное значение, а  $y = y_0(x) > 0$  — отвечающая ему нормированная собственная функция. Рассмотрим возмущенную краевую задачу

$$-\bar{y}'' + (p(x) + \varepsilon q(x))\bar{y} = \bar{\lambda}\bar{y}, \quad \bar{y}(0) - \bar{y}(2\pi) = \bar{y}'(0) - \bar{y}'(2\pi) = 0,$$

где  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , а  $q \in L_2(2\pi)$  и  $\int_0^{2\pi} q dx = 0$ . Тогда локально возмущенное собственное значение и собственная функция допускают разложение в ряд по переменной  $\varepsilon$ :

$$\bar{\lambda} = \lambda + \varepsilon\mu + \varepsilon^2\sigma + \dots, \quad \bar{y} = y + \varepsilon u(x) + \varepsilon^2 v(x) + \dots$$

Известно, что  $\mu = \int_0^{2\pi} q y^2 dx$ . Возьмем  $q = (y y')' \in T_p P$ . Тогда

$$\mu = \int_0^{2\pi} (y y')' y^2 dx = -2 \int_0^{2\pi} (y y')^2 dx = 0 \Leftrightarrow y(x) \equiv \text{const} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$



Значит, если  $p$  — критическая точка функционала  $\lambda_0$ , то  $p(x) \equiv 0$ . В этом случае  $\lambda = 0$ .

Обратно, при  $p(x) \equiv 0$  собственная функция  $y = \text{const}$ , поэтому при любом допустимом возмущении  $q$  верно  $\mu = \int_0^{2\pi} q y^2 dx = 0$ .

В пространстве  $P$  тригонометрическая система  $\{\cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$  образует базис. Чтобы проверить невырожденность функционала  $\lambda_0$  в точке  $p = 0$  достаточно рассмотреть возмущения потенциала по элементам базиса. Возьмем  $q(x) = \cos kx$ . Приравнявая выражения при  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$ , и учитывая, что  $\lambda = \mu = 0$ , а  $y(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , получаем систему

$$\begin{aligned} -u'' + \cos kx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} &= 0, \quad -v'' + \cos kx \cdot u = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \\ u' &= \frac{\sin kx}{\sqrt{2\pi}k}, \quad \sigma = - \int_0^{2\pi} (u'(x))^2 dx \Rightarrow \sigma = -\frac{1}{2k^2}. \end{aligned}$$

### 3.2. Доказательство п. 2 теоремы 2

Теперь в краевой задаче (1), (2) число  $\lambda$  — простое собственное значение, номер которого  $n \in \mathbb{N}$ , а  $y$  — отвечающая ему нормированная знакопеременная собственная функция. Как и в предыдущем пункте, воспользуемся формулой теории возмущения:  $\mu = \int_0^{2\pi} q y^2 dx$  и возьмем  $q = (yy')' \in T_p P$ . Теперь

$$\mu = \int_0^{2\pi} (yy')' y^2 dx = -2 \int_0^{2\pi} (yy')^2 dx < 0,$$

поскольку в окрестности нуля  $x_i$  собственной функции  $y$  верна оценка

$$y(x)y'(x) = (y'(x_i)(x - x_i) + o(x - x_i))(y'(x_i) + o(1)) > 0.$$

### 3.3. Доказательство пп. 3 (а) и 3 (б) теоремы 2

Согласно пп. 4 и 5 теоремы 1, исследование функционала  $\lambda_n^0 = \lambda_n^0(p)$  равносильно его исследованию на многообразии  $H_n$ , т.е. сужению (25) функционала (20) при условии  $\Delta\lambda = 0$ .

Напомним, что подмногообразие  $\tilde{H}_n \subset W_2^2(2\pi)$  содержит положительные функции  $\eta > 0$ , удовлетворяющие условию (13), а подмногообразие  $H_n \subset \tilde{H}_n$  определяется еще двумя условиями (14) и (15). Заметим, что формула (25) определена и на многообразии  $\tilde{H}_n$ . Оказывается, свойства функционала  $\lambda_n^0$  на  $H_n$  и на  $\tilde{H}_n$  совпадают, точнее справедлива

**Лемма 6.** *Существует тривиальное гладкое расслоение  $\chi : \tilde{H}_n \rightarrow H_n$ , слой которого диффеоморфен плоскости, и которое инвариантно относительно отображения  $(F_n^0)^{-1}$ , т.е. для любого  $\tilde{\eta} \in \tilde{H}_n$  вырожденный потенциал  $p = (F_n^0)^{-1}(\tilde{\eta}) = (F_n^0)^{-1}(\chi(\tilde{\eta}))$ . В частности, расслоение инвариантно относительно функционала  $\lambda_n^0$ , т.е. для любого  $\tilde{\eta} \in \tilde{H}_n$  верно  $\lambda_n^0(\tilde{\eta}) = \lambda_n^0(\chi(\tilde{\eta}))$ .*

Доказательство леммы приведено в [1] в Замечании 10 (там дана тривиализация расслоения  $\chi$ ).

Мы исследуем функционал  $\lambda_n^0$  на  $\tilde{H}_n$ , а затем переформулируем полученные результаты для многообразия  $H_n$ .

Итак, нас интересуют критические точки функционала (25) на открытом конусе положительных функций  $\eta(x) > 0$  из пространства  $W_2^2(2\pi)$  при условии  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\eta(x) - n) dx = 0$ . Функция Лагранжа такова:

$$L(\eta, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \eta^2 - \left( \frac{\eta'}{2\eta} \right)^2 + \gamma(\eta - n) \right) dx, \quad \text{где } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа

$$2\eta + \frac{\eta'^2}{2\eta^3} + \gamma + \frac{1}{2} \left( \frac{\eta'}{\eta^2} \right)' = 0 \quad (29)$$

имеет постоянное решение  $\eta(x) \equiv -(\gamma/2)$ . Значит, существует единственное постоянное решение  $\eta(x) \equiv n$ , а соответствующий множитель Лагранжа  $\gamma = -2n$ . Заметим, что мы получили решение, удовлетворяющее условиям (14) и (15), т.е.  $\eta(x) \equiv n \in H_n$ . Возвращаясь с помощью формулы (22), где  $\Delta\lambda = 0$ , к потенциалу, получаем нулевой потенциал  $p(x) \equiv 0$ .

Отыскивая непостоянные решения уравнения (29), замечаем, что интегрант не зависит от переменной интегрирования, поэтому уравнение Эйлера имеет интеграл:

$$\left(\eta^2 + \gamma\eta + \frac{1}{4}\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2\right)' = 0 \Leftrightarrow \eta^2 + \gamma\eta + \frac{1}{4}\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2 = C. \quad (30)$$

Уравнение (30) автономное, все решения которого гладкие; мы ищем замкнутые фазовые кривые в правой полуплоскости ( $\eta > 0$ ), отвечающие решениям с периодом  $2\pi$ , у которых на периоде  $2n$  нулей. Пусть  $M, m$  — максимум и минимум искомого решения; тогда  $M > n > m > 0$ . Для  $M, m$  из (30) при условии  $\eta' = 0$  получаем уравнение

$$\eta^2 + \gamma\eta - C = 0 \Leftrightarrow \gamma = -(m + M), C = -mM. \quad (31)$$

Поскольку уравнение (30) четное относительно производной  $\eta'$ , период  $2\pi$  содержит  $2ln$  полупериодов, где натуральный параметр  $l$  предстоит определить. Будем искать решение на максимальном симметричном отрезке  $[-\frac{\pi}{2ln}, \frac{\pi}{2ln}]$ , на котором  $\eta' > 0$  (остальные решения мы получим сдвигом аргумента), тогда

$$\begin{aligned} \eta' &= 2\eta\sqrt{-\eta^2 + (M + m)\eta - Mm} \Rightarrow \\ 2x &= \frac{1}{\sqrt{Mm}} \arcsin\left(\frac{M + m}{M - m} - \frac{2Mm}{M - m} \frac{1}{\eta}\right) \Rightarrow \\ \eta(x) &= \frac{2Mm}{(M + m) - (M - m) \sin\left(2\sqrt{Mm}x\right)}, \text{ где } -\frac{\pi}{4\sqrt{Mm}} \leq x \leq \frac{\pi}{4\sqrt{Mm}}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\frac{\pi}{4\sqrt{Mm}} = \frac{\pi}{2ln}$  и  $ln = 2\sqrt{Mm}$ .

С другой стороны, согласно условию (13), справедливо равенство

$$\int_{-\frac{\pi}{2ln}}^{\frac{\pi}{2ln}} \frac{2Mm dx}{(M + m) - (M - m) \sin\left(2\sqrt{Mm}x\right)} = \frac{2\pi n}{2ln}.$$

Исключая параметр  $n$ , получаем

$$\sqrt{Mm} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(M + m) - (M - m) \sin t} = \frac{\pi}{l} \Rightarrow l = 2 \Rightarrow Mm = n^2.$$

Таким образом, найдено однопараметрическое семейство (с параметром  $m \in (0, n)$ ) непостоянных решений на отрезке  $[-\frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{4n}]$ :

$$\eta(x) = \frac{2n^2}{\left(\frac{n^2}{m} + m\right) - \left(\frac{n^2}{m} - m\right) \sin(2nx)}.$$

По этой же формуле определяются решения уравнения (30) при условиях (31) на  $\mathbb{R}$  (проверяется прямой проверкой). Остальные решения получаются сдвигом аргумента. Наконец, прямой проверкой с помощью формулы (22), где  $\Delta\lambda = 0$ , убеждаемся, что полученное двухпараметрическое семейство решений порождает нулевой потенциал  $p(x) \equiv 0$ . Пункты 3 (а) и 3 (б) теоремы 2 доказаны.

### 3.4. Доказательство п. 3 (в) теоремы 2

Имея в виду, что критическая точка  $0 \in P_n^0$  отвечает точке  $n \in H_n$ , мы сначала найдем касательное пространство  $T_n H_n$ . С этой целью мы линеаризуем функционалы (13), (14), (15) в точке  $\eta(x) \equiv n$ . Получим

$$T_n H_n = \left\{ \nu \in W_2^2(2\pi) : \int_0^{2\pi} \nu(x) dx = \int_0^{2\pi} \nu(x) \cdot \cos 2nx dx = \int_0^{2\pi} \nu(x) \cdot \sin 2nx dx = 0 \right\}. \quad (32)$$

Теперь найдем производную отображения  $(F_n^0)^{-1}$  в точке  $n \in H_n$ , т.е. линеаризуем отображение (22) по переменной  $\eta$  в точке  $n \in H_n$  при условии  $\Delta\lambda = 0$ :

$$D(F_n^0)^{-1}(n)\nu = -\frac{\nu''}{2n} - 2n\nu. \quad (33)$$

Из п. 4 (в) и п. 6 теоремы 1 следует, что образ  $D(F_n^0)^{-1}(n)(T_n H_n) = T_0 P_n^0$ . Но, согласно (32) и (33),  $D(F_n^0)^{-1}(n)(T_n H_n) = T_n H_n$ , что доказывает п. 3 (в) теоремы.

### 3.5. Доказательство п. 3 (г) теоремы 2

Доказательство осуществим в терминах многообразия  $H_n$ . В силу леммы 6 и результатов п. 4.3 о критической точке  $\eta = n$ , достаточно рассмотреть функцию Лагранжа  $L(\eta, \gamma)$  при  $\gamma = -2n$ . В произвольной точке  $\eta \in H_n$  второй дифференциал функции Лагранжа совпадает со вторым дифференциалом функционала  $\lambda_n^0$ :

$$d^2 L(\eta, -2n)\nu = d^2 \lambda_n^0(\eta)\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( 2\nu^2 - \frac{\nu'^2}{2\eta^2} + \frac{2\eta'}{\eta^3} \nu\nu' - \frac{3\eta'^2}{2\eta^4} \nu^2 \right) dx.$$

В критической точке второй дифференциал равен

$$d^2 \lambda_n^0(n)\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( 2\nu^2 - \frac{\nu'^2}{2n^2} \right) dx.$$

В силу определения (32), произвольная функция  $\nu \in T_n(H_n)$  представима рядом Фурье

$$T_n(H_n) \ni \nu(x) = \sum_{k \neq 2n}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Подставляя предыдущее выражение в формулу второго дифференциала, получаем

$$d^2 \lambda_n^0(n)\nu = \frac{1}{4n^2} \sum_{k \neq 2n}^{\infty} ((2n)^2 - k^2) (a_k^2 + b_k^2), \quad k \in \mathbb{N},$$

что доказывает п. 3 (г).

### 3.6. Доказательство п. 4 теоремы 2

Пункты 4 (а) и 4 (б) очевидны.

Вырожденность функционала (26) определяется тождеством

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin(2\varphi + 2 \int_0^x \eta(t) dt)}{4\eta} \right)^2 dx \equiv 0,$$

которое равносильно системе (27). Принадлежность  $\eta(x) \equiv n \in H_n^*$  очевидна. Независимость в точке  $\eta(x) \equiv n \in H_n^*$  четырех интегральных функционалов, задающих условия (14), (15) и (27) проверяется их линеаризацией в этой точке.

Доказательство п. 4 (г) сводится к исследованию функционала (28) на плоскости с координатами  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Автор благодарен А.О. Ремизову за плодотворное обсуждение и многочисленные полезные советы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дымарский Я. М., Евтушенко Ю. А. Расслоение пространства периодических краевых задач на гиперповерхности постоянной длины  $n$ -й спектральной лакуны // Матем. сб. 2016. **207**-5. С. 43–68.
2. Дымарский Я. М., Бондарь А. А. Многообразие собственных функций семейства периодических краевых задач // Матем. сб. 2021. **212**-9. С. 18–39.
3. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1976.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Часть первая. М.-Л.: ГТТИ, 1933.
6. Илс Дж. Основания глобального анализа // Успехи матем. наук. 1969. Т. XXIV, Вып. 3(147). С. 157–210.

## EIGENVALUE FUNCTIONALS ON THE MANIFOLD OF POTENTIALS

Ya. M. Dymarsky\*

*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Institutsky Lane., 9, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141701 Russia*

*\*e-mail: dymarskii@mail.ru*

Received 12 December, 2023

Revised 20 February, 2024

Accepted 05 March, 2024

**Abstract.** The article gives an analytical and topological description of the eigenvalue functional on the manifold of periodic potentials.

**Keywords:** space of periodic boundary value problems, eigenvalue functional, bundle of potential manifolds.