УДК 517.911.5+517.927

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1)]

© 2024 г. **О. В. Басков**[1], **Д. К. Потапов**[1,*]

[1] 199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9,
Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

*e-mail: d.potapov@spbu.ru

Поступила в редакцию 20.12.2023 г.
Переработанный вариант 20.12.2023 г.
Принята к публикации 06.03.2024 г.

Рассматривается проблема существования решений задачи Штурма–Лиувилля с несамосопряженным дифференциальным оператором и разрывной по фазовой переменной нелинейностью. Для исследуемой задачи устанавливаются теоремы о существовании нетривиальных (положительных и отрицательных) решений при положительных значениях спектрального параметра. Приводятся примеры, иллюстрирующие полученные теоремы. Библ. 12. Фиг. 8.

Ключевые слова: задача Штурма–Лиувилля, несамосопряженный дифференциальный оператор, разрывная нелинейность, нетривиальные решения.

DOI: 10.31857/S0044466924060096, **EDN:** XYMHHG

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблема существования решений задачи Штурма–Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными нелинейностями изучалась в [1]–[9]. Отметим также работу [10], посвященную решениям модельной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром и разрывной правой частью, в которой решения выписываются в явном виде.

По сравнению с [1]–[3], [6] в настоящей статье ослаблены ограничения на множество точек разрыва и рост нелинейности на бесконечности, изучаются полуправильные решения, а в отличие от предыдущих работ авторов (см. [4], [5], [8]–[10]) дифференциальный оператор является несамосопряженным.

Рассматривается вопрос существования решений задачи Штурма–Лиувилля

$$Lu(x) \equiv -\big(p(x)u'(x)\big)' + r(x)u'(x) + q(x)u(x) = \lambda g\big(x, u(x)\big), \quad x \in (a, b), \tag{1}$$

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{2}$$

при положительных значениях спектрального параметра λ. Здесь $p \in C_{1,\alpha}\big([a, b]\big)$, r, $q \in C_{0,\alpha}\big([a, b]\big)$, $r(x) \not\equiv 0$, $0 < \alpha < 1$, $-\infty < a < b < +\infty$. Предполагается, что $g(x, 0) = 0$ почти всюду на (a, b) и нелинейность $g(x, u)$ разрывна по фазовой переменной u.

В силу наличия у линейного дифференциального оператора L в уравнении (1) ненулевого слагаемого $r(x)u'(x)$ с производной первого порядка оператор L не является самосопряженным. Значит, вариационный метод (основной аппарат исследования задач с разрывными нелинейностями) не может

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (№ 23-21-00069). https://rscf.ru/project/23-21-00069.

быть применен к изучению задачи (1), (2). Поэтому в настоящей статье используется метод верхних и нижних решений, позволяющий исследовать задачи без условия формальной самосопряженности дифференциального оператора.

Для дальнейших рассуждений потребуются следующие определения.

Определение 1. *Сильным решением* задачи (1), (2) называется функция $u \in W_1^2\big((a,b)\big) \cap \mathring{W}_2^1\big((a,b)\big)$, удовлетворяющая уравнению (1) для почти всех $x \in (a,b)$.

Определение 2. *Полуправильным решением* задачи (1), (2) называется такое сильное ее решение u, значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in (a,b)$ является точкой непрерывности функции $g(x,\cdot)$.

Поскольку $g(x,0) = 0$ почти всюду на (a,b), то при любом значении параметра λ функция $u(x) \equiv 0$ на (a,b) является сильным решением задачи (1), (2). Нулевое (тривиальное) решение является полуправильным тогда и только тогда, когда нуль является точкой непрерывности функции $g(x,\cdot)$ для почти всех $x \in (a,b)$.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть нелинейность $g(x,u)$ в уравнении (1) равна разности функций $g_2(x,u)$ и $g_1(x,u)$, неубывающих по переменной u для почти всех $x \in (a,b)$, причем функция $g_2(x,u)$ суперпозиционно измерима, а функция $g_1(x,u)$ каратеодориева. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть λ_1 — минимальное собственное значение дифференциального оператора L в уравнении* (1) *с граничным условием* (2) *и $\lambda_1 > 0$. Предположим также, что*

1) $\liminf\limits_{u\to 0} u^{-1}g(x,u) \geqslant k_1$ *(k_1 — положительная константа или $+\infty$) равномерно по $x \in (a,b)$;*
2) $\limsup\limits_{|u|\to +\infty} u^{-1}g(x,u) = 0$ *равномерно по $x \in (a,b)$;*
3) $g(x,0) \equiv 0$ *на (a,b);*
4) *функции $g_i(x,\cdot)$, $i = 1,2$, ограничены на отрезках числовой прямой $\mathbb{R}$ равномерно по $x \in (a,b)$.*

Тогда существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda \geqslant \lambda_0$ и произвольного $q > 1$ задача (1), (2) *имеет сильное положительное и сильное отрицательное решения на (a,b) из соболевского пространства $W_q^2\big((a,b)\big)$.*

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1*, кроме условия* 2). *Вместо него выполняется условие* 2′) $\limsup\limits_{|u|\to +\infty} u^{-1}g(x,u) \leqslant \gamma$ *равномерно по $x \in (a,b)$, где $\gamma \in (0,k_1)$ — постоянная, k_1 — константа из условия* 1) *теоремы* 1.

Тогда для любого $\lambda \in (\lambda_1 k_1^{-1}, \lambda_1\gamma^{-1})$ и произвольного $q > 1$ задача (1), (2) *имеет сильное положительное и сильное отрицательное решения на (a,b) из соболевского пространства $W_q^2\big((a,b)\big)$.*

Пусть теперь нелинейность $g(x,u)$ в уравнении (1) суперпозиционно измерима и для некоторой положительной константы M функция $g(x,u) + Mu$ неубывающая по u на $\mathbb{R}$ для почти всех $x \in (a,b)$. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *(условие* 4) *для функции $g(x,\cdot)$). Тогда существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda \geqslant \lambda_0$ и произвольного $q > 1$ задача* (1), (2) *имеет полуправильное положительное и полуправильное отрицательное решения на (a,b) из соболевского пространства $W_q^2\big((a,b)\big)$.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для любого $\lambda \in \big(\lambda_1 k_1^{-1}, \lambda_1\gamma^{-1}\big)$ и произвольного $q > 1$ задача* (1), (2) *имеет полуправильное положительное и полуправильное отрицательное решения на (a,b) из соболевского пространства $W_q^2\big((a,b)\big)$.*

Результаты, аналогичные теоремам 1–4, для эллиптических краевых задач с параметром и разрывными нелинейностями были получены в [11], [12]. В настоящей статье осуществлен перенос результатов для уравнений эллиптического типа на обыкновенные дифференциальные уравнения.

Доказательство теорем 1–4 проводится методом верхних и нижних решений аналогично доказательству следствий 4, 7 из [11] и теорем 9, 12 из [12].

3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Приведем примеры разрывных нелинейностей $g(x,u)$, удовлетворяющих условиям теорем 1–4.

Пример 1. Пусть

$$g(x,u) \equiv g(u) = \begin{cases} -\sqrt[3]{u} - 3, & \text{если } u < -1, \\ \operatorname{sgn}(u), & \text{если } |u| \leqslant 1, \\ \sqrt{u} + 1, & \text{если } u > 1. \end{cases} \tag{3}$$

С одной стороны, нелинейность $g(u)$ равна разности двух неубывающих на $\mathbb{R}$ функций

$$g_2(u) = \begin{cases} -4 & \text{при } u < -1, \\ g(u) - 2 & \text{при } u \geqslant -1 \end{cases}$$

и

$$g_1(u) = \begin{cases} -g(u) - 4 & \text{при } u < -1, \\ -2 & \text{при } u \geqslant -1, \end{cases}$$

причем $g_1(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а у функции $g_2(u)$ три точки разрыва. Функция $g(u)$ неограниченная на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы 1.

С другой стороны, нелинейность $g(u)$ суперпозиционно измерима, функция $g(u)+u$ неубывающая на $\mathbb{R}$, $g(0) = 0$. У функции $g(u)$ три точки разрыва, она не ограничена на $\mathbb{R}$, и для нее выполняются условия теоремы 3.

Отметим, что для задачи (1), (2) с такой нелинейностью функция $u(x) \equiv 0$ является сильным решением, но не является полуправильным решением.

Пример 2. Пусть

$$g(x,u) \equiv g(u) = \begin{cases} -\gamma_1 u - 3, & \text{если } u < -1, \\ \operatorname{sgn}(u), & \text{если } |u| \leqslant 1, \\ \gamma u + 1, & \text{если } u > 1, \end{cases}$$

$\gamma > 0$ — постоянная, $\gamma_1 \in (0, 2]$.

Нелинейность $g(u)$ равна разности двух неубывающих на $\mathbb{R}$ функций

$$g_2(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u < -1, \\ g(u) + 3 - \gamma_1 & \text{при } u \geqslant -1 \end{cases}$$

и

$$g_1(u) = \begin{cases} -g(u) & \text{при } u < -1, \\ 3 - \gamma_1 & \text{при } u \geqslant -1, \end{cases}$$

причем $g_1(u)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а у функции $g_2(u)$ три точки разрыва, если $\gamma_1 \in (0, 2)$, и две, если $\gamma_1 = 2$. Отметим, что $g(u)$ имеет линейный рост на бесконечности и удовлетворяет условиям теоремы 2 и не удовлетворяет условию 2) теоремы 1.

Нелинейность $g(u)$ суперпозиционно измерима, функция $g(u) + \gamma_1 u$ неубывающая на $\mathbb{R}$, $g(0) = 0$. При $\gamma_1 \in (0, 2)$ у функции $g(u)$ три точки разрыва, и для нее выполняются условия теоремы 4.

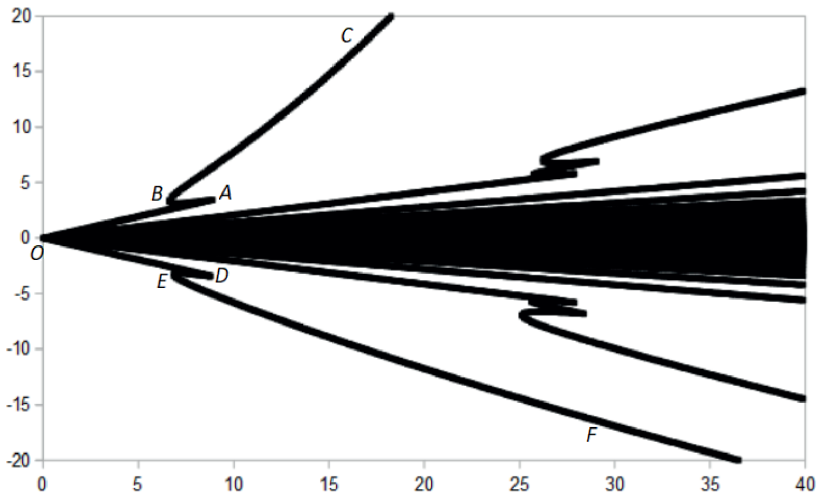
Далее (не ограничивая общности) положим в задаче (1), (2)

$$p(x) = r(x) = q(x) \equiv 1, \quad a = 0, \quad b = 1$$

и рассмотрим нелинейности $g(x,u)$ из примеров 1, 2.

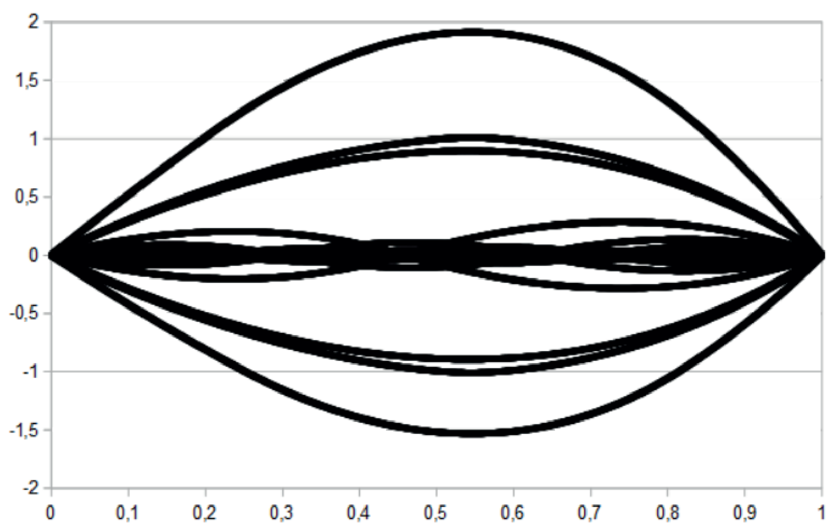
Прежде всего отметим, что если при некотором значении $\lambda = \bar{\lambda}$ задача (1), (2) с нелинейностью (3) имеет решение $u = \bar{u}(x)$, целиком лежащее в полосе $-1 \leqslant u \leqslant 1$, то для любого $\beta \in (0, 1)$ задача (1), (2) будет иметь и решение $u = \beta\bar{u}(x)$ при значении параметра $\lambda = \beta\bar{\lambda}$. Другими словами, существование хотя бы одного решения, лежащего в полосе $-1 \leqslant u \leqslant 1$ при некотором $\lambda = \bar{\lambda}$, гарантирует существование решений при любых $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$. Это связано с линейностью левой части и следующим свойством правой части: $g(x, \beta u) = g(x, u) = \operatorname{sgn}(u)$ при $-1 \leqslant u \leqslant 1$.

На фиг. 1 представлена зависимость начальных данных $u'(0)$ решений задачи из примера 1 от значений параметра λ. Каждая точка на этом графике отвечает некоторому решению, поэтому он удобен для отслеживания количества решений при различных значениях λ. Проведенные рассуждения обосновывают наличие отрезков, исходящих из начала координат, которые соответствуют решениям, не выходящим за пределы полосы $-1 \leqslant u \leqslant 1$.



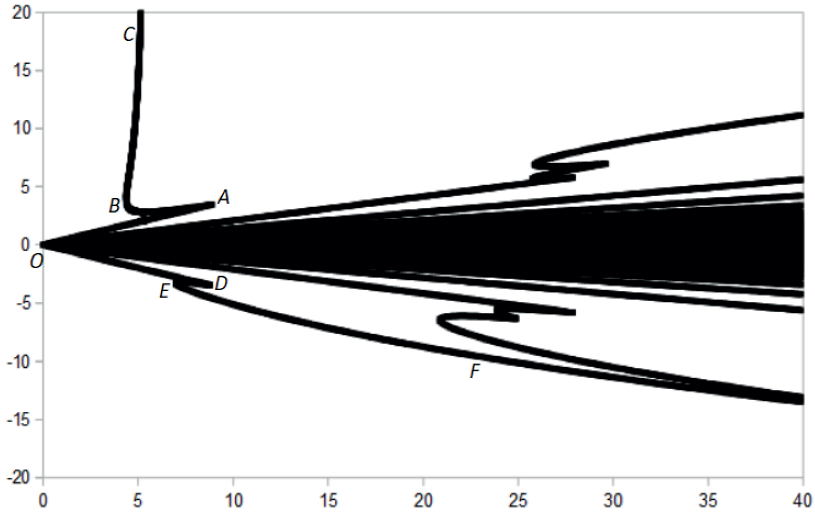
Фиг. 1. Зависимость $u'(0)$ от λ в примере 1.

Кривые $OABC$ и $ODEF$ соответствуют положительному и отрицательному решениям. Участки OA и OD суть отрезки, описывающие решения из полосы $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Участки ABC и DEF соответствуют решениям, выходящим за пределы этой полосы. Например, на приведенных на фиг. 2 графиков решений видно, что при $\lambda = 8$ имеются три положительных и три отрицательных решения, по два из которых пересекают линии $u = \pm 1$, вдоль которых нелинейность $g(x, u)$ терпит разрыв. Кривые ABC и DEF как раз предсказываются теоремой 1: существует такое положительное λ_0 (точка E на фиг. 1), что для всех $\lambda \geqslant \lambda_0$ задача имеет сильное положительное и сильное отрицательное решения. В соответствии с теоремой 3 эти решения будут и полуправильными.



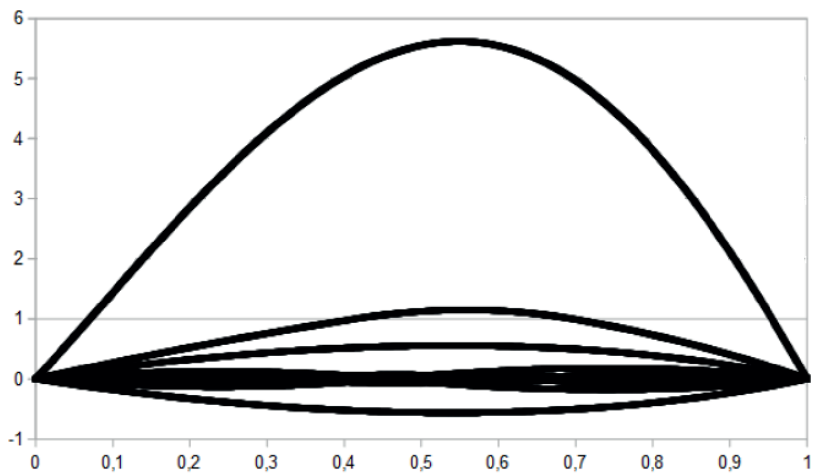
Фиг. 2. Графики решений примера 1 при $\lambda = 8$.

В примере 2 также $g(x,u) = \operatorname{sgn}(u)$ при $-1 \leqslant u \leqslant 1$, и на графике зависимости $u'(0)$ от λ, представленном на фиг. 3, вновь имеются отрезки, исходящие из начала координат. Однако теперь кривая $OABC$, соответствующая положительным решениям, уходит на бесконечность при значении $\lambda \to \pi^2/2 + 5/8$, предсказанном теоремой 2. Кривая $ODEF$ соответствует отрицательным решениям и качественно похожа на аналогичную кривую из примера 1. Таким образом, при $\lambda \in \left(0, \pi^2/2 + 5/8\right)$ имеются сильные положительное и отрицательное решения.



Фиг. 3. Зависимость $u'(0)$ от λ в примере 2 при $\gamma = 2$, $\gamma_1 = 1$.

Для иллюстрации решений было выбрано значение $\lambda = 5$. Полученные графики представлены на фиг. 4. Имеются три положительных решения, два из которых пересекают линию $u = 1$, вдоль которой правая часть $g(x,u)$ терпит разрыв. Также существует единственное отрицательное решение, лежащее в полосе $-1 \leqslant u \leqslant 0$, поскольку выбранное значение $\lambda = 5$ левее точки E на фиг. 3. Эти решения являются полуправильными в полном соответствии с теоремой 4.



Фиг. 4. Графики решений примера 2 при $\lambda = 5$, $\gamma = 2$, $\gamma_1 = 1$.

Пример 3. Рассмотрим задачу (1), (2) с $p(x) = r(x) = q(x) \equiv 1$, $a = 0$, $b = 1$ и нелинейностью

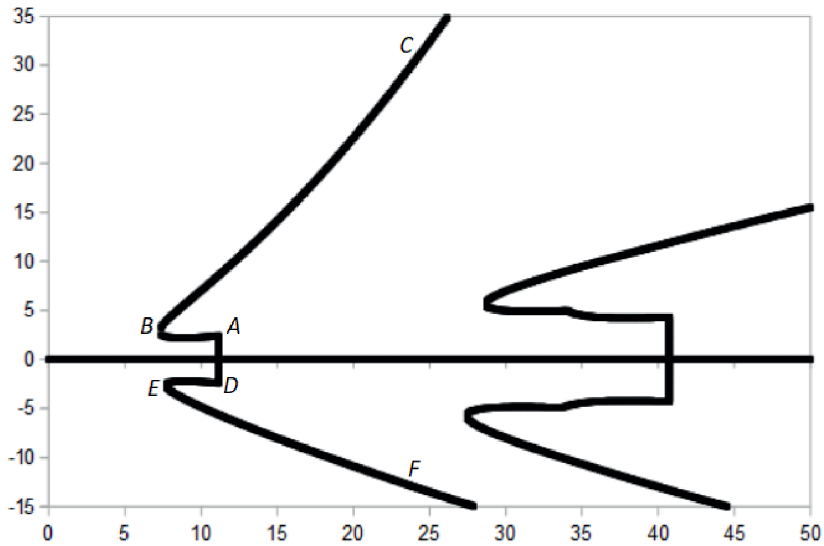
$$g(x,u) \equiv g(u) = \begin{cases} -\sqrt[3]{u} - 3, & \text{если } u < -1, \\ u, & \text{если } |u| \leqslant 1, \\ \sqrt{u} + 1, & \text{если } u > 1. \end{cases}$$

Как и в примере 1, она удовлетворяет теоремам 1 и 3, однако теперь $g(x, u)$ не имеет разрыва при $u = 0$. Вследствие этого тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ является сильным и полуправильным.

Вновь начнем с исследования ненулевых решений, не выходящих за пределы полосы $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Они будут существовать лишь при $\lambda = \lambda_k = \pi^2 k^2 + 5/4$, $k = 1, 2, \ldots$, и иметь вид

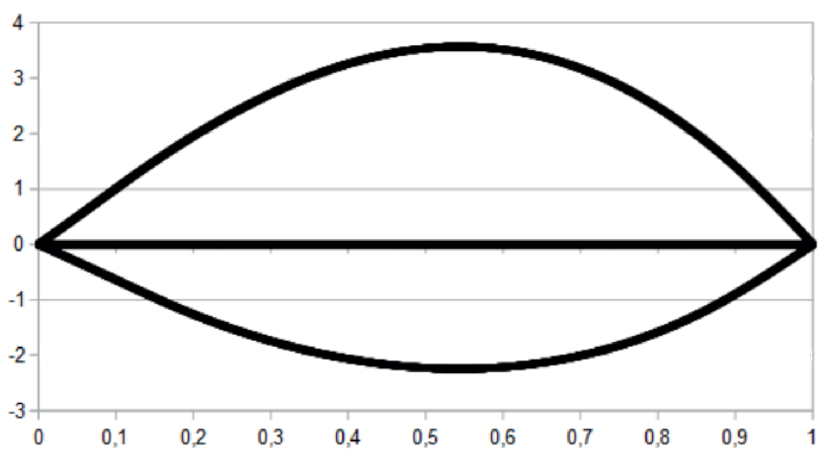
$$u = A_k e^{x/2} \sin \pi k x, \quad |A_k| \leqslant \frac{\sqrt{1+4\pi^2 k^2}}{2\pi k} e^{-1/2+\operatorname{arctg} 2\pi k/(2\pi k)}. \tag{4}$$

На графике зависимости $u'(0)$ от λ, приведенном на фиг. 5, этим решениям соответствуют вертикальные отрезки. Участки ABC и DEF соответствуют положительным и отрицательным решениям, выходящим за пределы полосы $-1 \leqslant u \leqslant 1$. По фиг. 5 можно сделать вывод, что существует такое значение $\lambda_0 > 0$ (точка E), начиная с которого при каждом $\lambda \geqslant \lambda_0$ существуют положительное и отрицательное решения поставленной задачи. Данный вывод полностью согласуется с теоремой 1.



Фиг. 5. Зависимость $u'(0)$ от λ в примере 3.

Графики решений при $\lambda = 12$ имеют вид, представленный на фиг. 6. Оба нетривиальных решения пересекают линии $u = \pm 1$, вдоль которых правая часть терпит разрыв, по два раза. Таким образом, они являются полуправильными, что и предсказывается теоремой 3.

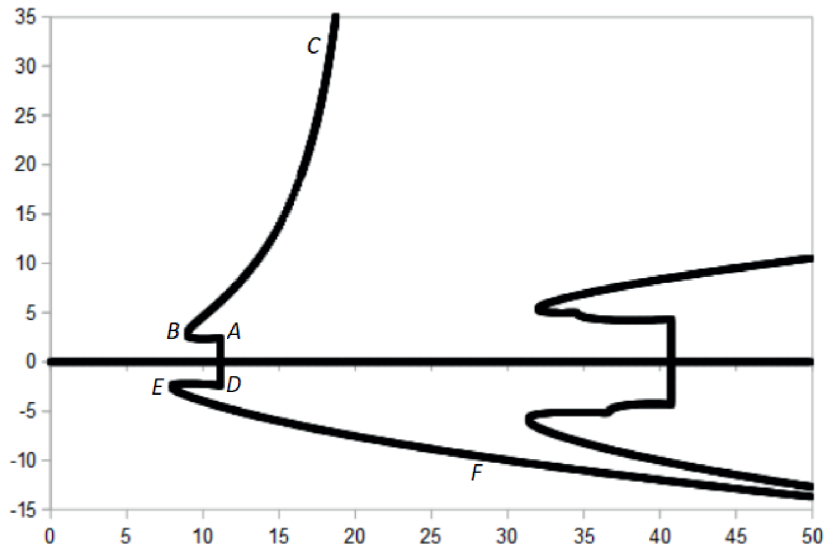


Фиг. 6. Графики решений примера 3 при $\lambda = 12$.

Пример 4. Рассмотрим задачу из примера 3 с нелинейностью

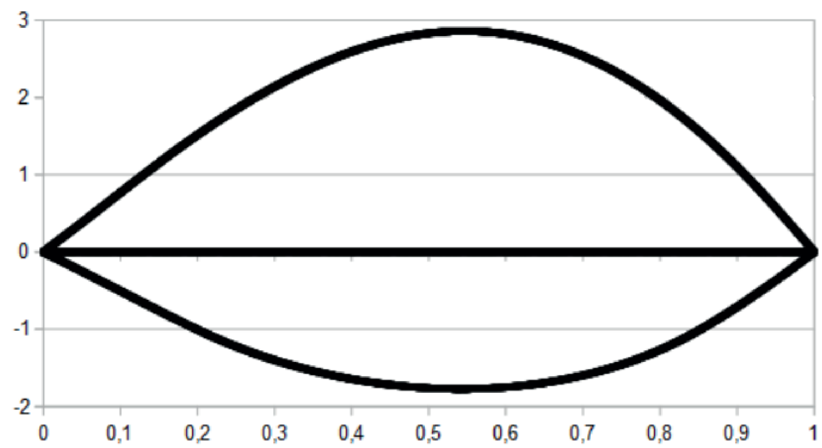
$$g(x,u) \equiv g(u) = \begin{cases} -u-3, & \text{если } u < -1, \\ u, & \text{если } |u| \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}u + 1, & \text{если } u > 1. \end{cases}$$

Как и в примере 3, тривиальное решение является полуправильным, и при $\lambda = \lambda_k = \pi^2 k^2 + 5/4$, $k = 1, 2, \ldots$, существует семейство решений (4). Поэтому на графике зависимости $u'(0)$ для решений данной задачи от параметра λ, изображенном на фиг. 7, вновь видны вертикальные отрезки. Также есть кривая DEF, соответствующая отрицательным решениям. Однако теперь кривая ABC, отвечающая положительным решениям, выходящим за пределы полосы $-1 \leqslant u \leqslant 1$, уходит на бесконечность при $\lambda \to 2\pi^2 + 5/2$. Это согласуется с теоремой 2, утверждающей существование положительного и отрицательного решений в данном случае при $\lambda \in \left(\pi^2 + 5/4, 2\pi^2 + 5/2\right)$.



Фиг. 7. Зависимость $u'(0)$ от λ в примере 4.

Графики решений при $\lambda = 12$ приведены на фиг. 8. Как и в примере 3, нетривиальные решения дважды проходят через точки разрыва нелинейности, так что эти решения являются полуправильными в полном соответствии с теоремой 4.



Фиг. 8. Графики решений примера 4 при $\lambda = 12$.

Таким образом, полученные теоретические результаты проиллюстрированы примерами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carl S., Heikkila S.* On the existence of minimal and maximal solutions of discontinuous functional Sturm–Liouville boundary value problems // J. Inequal. Appl. 2005. N 4. P. 403–412.
2. *Bonanno G., Bisci G. M.* Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities // Bound. Value Probl. 2009. Art. ID 670675. 20 p.
3. *Bonanno G., Buccellato S. M.* Two point boundary value problems for the Sturm–Liouville equation with highly discontinuous nonlinearities // Taiwanese J. Math. 2010. V. 14. N 5. P. 2059–2072.
4. *Потапов Д. К.* Задача Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1284–1286.
5. *Потапов Д. К.* Существование решений, оценки дифференциального оператора и “разделяющее” множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 970–974.
6. *Bonanno G., D’Agui G., Winkert P.* Sturm–Liouville equations involving discontinuous nonlinearities // Minimax Theory Appl. 2016. V. 1. N 1. P. 125–143.
7. *Павленко В. Н., Постникова Е. Ю.* Задача Штурма–Лиувилля для уравнения с разрывной нелинейностью // Челяб. физ.-матем. журн. 2019. Т. 4. Вып. 2. С. 142–154.
8. *Басков О. В., Потапов Д. К.* Управление и возмущение в задаче Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикл. матем. Информ. Проц. управ. 2023. Т. 19. Вып. 2. С. 275–282.
9. *Потапов Д. К.* Аппроксимация задачи Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 9. С. 1191–1198.
10. *Басков О. В., Потапов Д. К.* О решениях краевой задачи для одного дифференциального уравнения второго порядка с параметром и разрывной правой частью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 8. С. 1296–1308.
11. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* Существование решений невариационной эллиптической краевой задачи с параметром и разрывной нелинейностью // Матем. тр. 2016. Т. 19. № 1. С. 91–105.
12. *Павленко В. Н., Потапов Д. К.* Существование полуправильных решений эллиптических спектральных задач с разрывными нелинейностями // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 9. С. 121–138.

EXISTENCE OF SOLUTIONS TO THE NON-SELF-ADJOINT STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH DISCONTINUOUS NONLINEARITY

O. V. Baskov, D. K. Potapov*

St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya Embankment, St. Petersburg, 199034 Russia

**e-mail: d.potapov@spbu.ru*

Received 20 December, 2023
Revised 20 December, 2023
Accepted 06 March, 2024

Abstract. The problem of existence of solutions of the Sturm-Liouville problem with a non-self-adjoint differential operator and non-linearity discontinuous in the phase variable is considered. Theorems on the existence of non-trivial (positive and negative) solutions for positive values of the spectral parameter are established for the problem under study. Examples illustrating the obtained theorems are given.

Keywords: Sturm-Liouville problem, non-self-adjoint differential operator, discontinuous non-linearity, non-trivial solutions.