

УДК 517.977.1; 517.977.56

## ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2024 г. В. К. Толстых<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> 283001 Донецк, ул. Университетская, 24, Донецкий государственный университет, Россия

\*e-mail: mail@tolstykh.com

Поступила в редакцию 09.09.2023 г.

Переработанный вариант 14.02.2024 г.

Принята к публикации 06.03.2024 г.

Рассматривается проблема управляемости для задач оптимального управления, оптимизации системами с распределенными параметрами в частных производных. Вводится понятие управляемости как корректности по А. Н. Тихонову для решения задач оптимизации. Приводится теорема с условиями управляемости для прямого решения (непосредственной минимизации целевого функционала) задач оптимизации экстремальными алгоритмами. Рассматривается тестовой пример численного решения задачи оптимизации нелинейной гиперболической системы, описывающей нестационарное течение воды в открытом русле. Демонстрируется анализ управляемости, который обеспечивает корректность решения задачи и высокую точность оптимизации распределенного коэффициента трения в уравнениях течения. Библ. 13. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** управляемость, система с распределенными параметрами, оптимизация, оптимальное управление, идентификация, градиент, экстремальные методы.

**DOI:** 10.31857/S0044466924060067, **EDN:** XYULVG

### 1. ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день для произвольных бесконечномерных распределенных систем (систем с распределенными параметрами) не выработано единого понятия и подхода к анализу управляемости.

В самом общем понимании управляемость — это возможность перевода системы из одного состояния в другое. В рассматриваемом случае управляемость — это совокупность условий, определяющих принципиальную возможность управления состоянием  $v(\tau) \in V(\bar{\Omega})$  распределенной системы с помощью распределенного параметра  $u(\tau) \in U(S)$ ,  $S \subset \bar{\Omega}$ . Здесь  $\tau$  — пространственно-временная переменная,  $\bar{\Omega}$  — замкнутая область функционирования системы,  $V$  — пространство (допустимое множество) состояний,  $S$  — область определения управления,  $U$  — пространство или допустимое множество управлений. Если система не управляема в принципе, то нет смысла искать оптимальное управление, оптимизировать систему.

При рассмотрении задач оптимизации систем с распределенными параметрами преобладают попытки обобщения ранее полученных результатов управляемости для систем с сосредоточенными параметрами. Но обычно, как отмечается в [1], “вопрос о существовании решения поставленной задачи для бесконечномерной системы зачастую даже не рассматривается”. Если управляемость рассматривается, то она трактуется как возможность перевода системы из заданного начального в заданное финальное состояние. Такое понятие управляемости для широкого круга задач оптимизации распределенных систем зачастую оказывается бесполезным, поскольку управляемость по заданному финальному состоянию не гарантирует управляемость по условиям, накладываемым на неизвестное финальное состояние (почти всегда заданное не на всей пространственной области системы) в целевом функционале.

Традиционное понятие и условия управляемости всегда связывают только с видом уравнений исходной задачи и не связывают с видом целевого функционала. Но такая управляемость не является достаточной для обеспечения принципиальной возможности решения задач оптимизации систем с распределенными параметрами на основе весьма разнообразных, пространственно-распределенных форм управления и целевого функционала (см. [2]).

Кроме того, существующие условия управляемости жестко связаны с предлагаемыми конкретными методами решения задач оптимального управления, например, с методом проблемы моментов, принципа максимума Понтрягина, динамического программирования. Это означает, что если задача оптимизации решается каким-либо иным методом, то для ответа на вопрос управляемости необходимо дублировать ее решение соответствующим методом оптимизации на котором основаны те или иные условия управляемости.

Представляется целесообразным, в частности, для систем с распределенными параметрами расширить понятие управляемости от “перевода системы в финальное состояние” до более практичного понятия “возможности управления системой на основе заданной цели управления”. Описываемое далее понятие управляемости основано на теории некорректных задач и связывает управляемость системы с целевым функционалом. Новое понятие управляемости не зависит от методов оптимизации, а для демонстрации его возможного применения мы выберем прямой экстремальный подход (см. [3]–[5]). Такой подход можно считать наиболее универсальным для численного решения задач оптимального управления, оптимизации с уравнениями в частных производных, где точные аналитические решения удается получить лишь в исключительных случаях.

Суть подхода заключается в прямой минимизации экстремальными алгоритмами целевого функционала

$$J(u) = \int_{\omega} I(v, u) d\omega \rightarrow \min, \quad \omega \subset \bar{\Omega}, \quad (1)$$

при условии  $\mathbb{D}(\tau, v, u)v = 0, \quad \tau \in \bar{\Omega}.$

Здесь оператор  $\mathbb{D}$  включает в себя не только конкретный вид дифференциальных уравнений распределенной системы на множестве  $\Omega$ , но и краевые условия где-либо на границе  $\partial\Omega$ . Функция цели  $I(v(\tau), u(\tau))$  определена на множестве  $\omega$ , а ее значение зависит от параметра  $v$  и, возможно,  $u$ . В прямом подходе не используются какие-либо промежуточные (например, необходимые) условия оптимальности, а непосредственно решается задача

$$u_* = \arg \min J(u), \quad (2)$$

где  $u_*(\tau)$  — оптимальное управление (оптимум, оптималь, оптимальный параметр), доставляющий глобальный минимум функционалу  $J(u)$ . Все эти названия аргумента  $u_*$  в прямом экстремальном подходе являются синонимами.

Сами уравнения  $\mathbb{D}v = 0$  распределенной системы в задаче (2) используются для определения направлений пошаговой минимизации  $J(u)$ . В подавляющем большинстве экстремальных методов направления минимизации формируются с использованием градиента  $\nabla J(u)$ . Чтобы найти  $\nabla J$  можно, например (см. [3], [6]), взять первую вариацию задачи (1) относительно  $\delta v$  и  $\delta u$ . При этом задача линеаризуется:

$$\delta J = \langle I'_v, \delta v \rangle_{V^*(\omega)} + \langle I'_u, \delta u \rangle_{U^*(\omega)},$$

$$\delta \mathbb{D}v = \mathbb{V}\delta v + \mathbb{U}\delta u = 0 \in V(\bar{\Omega}),$$

где  $V^*, U^*$  — линейные сопряженные пространства состояний и управлений,  $I'_v \in V^*(\omega)$ ,  $I'_u \in U^*(\omega)$  — производные функции цели,  $\mathbb{V}, \mathbb{U}$  — линейные операторы исходной задачи. Верхний индекс  $*$  здесь и далее означает сопряженность. После перевода вариации системы  $\delta \mathbb{D}v$  в сопряженное пространство с помощью сопряженных переменных  $f \in V^*(\bar{\Omega})$  и объединения ее с  $\delta J$  получаем сопряженную задачу и градиент:

$$\mathbb{V}^* f + I'_v|_{\omega} = 0 \in V^*(\bar{\Omega}), \quad (3)$$

$$\nabla J(u) = \mathbb{U}^* f + I'_u \Big|_{\omega} \equiv \mathbb{U}_{\emptyset}^* f \in U^*(S), \quad (4)$$

где  $\mathbb{V}^*$ ,  $\mathbb{U}^*$ ,  $\mathbb{U}_{\emptyset}^*$  — линейные сопряженные операторы. Индекс  $\emptyset$  означает отсутствие нулевого ядра у неоднородного оператора  $\mathbb{U}_{\emptyset}^*$ , в отличие от  $\mathbb{U}^*$ .

Теперь могут применяться градиентные алгоритмы. Для распределенных управлений целесообразно использовать метод с регулируемым направлением спуска (см. [3], [7]):

$$u^{k+1}(\tau) = u^k(\tau) - b^k \alpha(\tau) \nabla J(u^k; \tau), \quad \tau \in S, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где  $b^k$  — шаговый множитель, задающий глубину спуска вдоль антиградиента на каждой итерации  $k$ ,  $\alpha$  — параметр регулирования направления спуска для обеспечения равномерной сходимости к функции  $u_*(\tau)$  и компенсации некоторого типа помех.

Традиционные понятия управляемости связывают всегда с видом оператора  $\mathbb{D}$  исходной прямой задачи и не связывают с видом критерия оптимизации  $J$ , т.е. не связывают ни с видом функции цели оптимизации  $I$ , ни с пространственно-временным множеством задания цели  $\omega$  (всегда предполагают, что  $\omega$  — область терминального состояния).

Мы изложим новую точку зрения на проблему управляемости распределенных систем. За основу возьмем подход к анализу идентифицируемости (см. [8]), который здесь существенно разовьем.

## 2. ПОНЯТИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Задачи оптимального управления являются обратными задачами. Характер отображений исходной прямой задачи с оператором  $\mathbb{D}$  имеет вид

$$U(S) \rightarrow V(\bar{\Omega}), \quad S \subset \bar{\Omega}.$$

В задаче же оптимизации отображение — обратное, с условием  $\min J$ :

$$V(\omega) \xrightarrow{\min J} u_*(\tau) \in U(S), \quad \omega \subset \bar{\Omega}.$$

Для решения обратных задач А. Н. Тихонов ввел отличное от классического понятие корректности (см. [9]), заключающееся в требовании ограничения пространства решений  $U$  до компактного множества  $\mathcal{U}$  существования, единственности и устойчивости управлений. Для сужения  $U$  до компакта  $\mathcal{U}$  используют регуляризирующие, в том числе, и экстремальные алгоритмы (см. [7]).

Предлагается трактовка управляемости как корректности по Тихонову обратной задачи условного отображения. Такое отождествление управляемости с указанной корректностью позволяет унифицировать схему выявления условий гарантирующих, либо напротив, указывающих на принципиальную невозможность определения оптимального управления той или иной системы по заданному целевому функционалу. Подытожим сказанное следующим определением.

**Определение 1.** Математическая модель распределенной системы  $\mathbb{D}(\tau, v, u)v = 0$ ,  $\tau \in \bar{\Omega}$  в задаче (1), характеризуемая прямым отображением

$$U(S) \rightarrow V(\bar{\Omega}), \quad S \subset \bar{\Omega},$$

управляема посредством  $u(\tau) \in U(S)$  относительно целевого функционала  $J$ , когда обратная задача

$$V(\omega) \xrightarrow{\min J} u_* \in U(S), \quad \omega \subset \bar{\Omega},$$

отображения элементов пространства  $V(\omega)$  состояний модели в элемент  $u_*$  множества допустимых управлений  $U$  при условии  $\min J$  является корректной по Тихонову.

Прямой подход состоит из двух практически самостоятельных подзадач. Первая — это минимизация целевого функционала  $J$  на основе  $\nabla J$ , вторая — определение  $\nabla J$ . При этом проблема управляемости также разбивается на две подзадачи:

- 1) регуляризация в алгоритмах прямой минимизации типа (5), использующих градиент  $\nabla J$ ;
- 2) корректность нахождения градиента  $\nabla J$  из выражения вида (4).

Первое требование выполняется автоматически (см. [7]), если начальное приближение управления  $u^0$  принадлежит компакту корректности  $\mathcal{U}$ , а последующие коррекции алгоритмом (5) осуществляются с удовлетворительными параметрами регуляризации  $b^k \alpha$ .

**Определение 2.** Параметры  $b^k \alpha$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , являются *удовлетворительными* параметрами регуляризации в экстремальных алгоритмах, если при  $u^0 \in \mathcal{U}$  последующие управления  $u^{k+1} \in \mathcal{U}$ , т.е. не выходят из компакта корректности  $\mathcal{U}$ .

Второе требование о корректности  $\nabla J(u)$ , как это видно из (3) и (4), распадается еще на три подзадачи:

- 1) обоснование корректности решения сопряженной задачи;
- 2) выявление области определения  $V^*(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \bar{\Omega}$  оператора  $\mathbb{U}^*$  для отображения в область значений  $U^*(S)$  градиента  $\nabla J$ ;
- 3) оценка корректности отображения линейного оператора  $\mathbb{U}^*: V^*(\Omega) \rightarrow U^*(S)$  и линейного неоднородного оператора  $\mathbb{U}_{\varnothing}^* = \mathbb{U}^* \cdot + I_u'|_{\omega}$ .

Начнем с сопряженной задачи. Ее тип и алгоритм решения определяется оператором  $\mathbb{V}^*$ . Она является прямой, линейной, ее дифференциальные уравнения будут того же типа и с теми же характеристиками, что и исходная задача, которая определяется оператором  $\mathbb{D}$  (см. [6]). Поэтому анализ корректности решения сопряженной задачи не будет сложнее аналогичного анализа исходной задачи.

Согласно (3), возмущения сопряженного состояния  $f$ , порожденные производной  $I_v'$ , должны из области  $\omega$  распространяться на такую часть  $\Omega \subset \bar{\Omega}$ , где оператор  $\mathbb{U}^*$  может реализовать требуемое отображение  $V^*(\Omega) \rightarrow U^*(S)$ .

**Определение 3.** Множество сопряженных состояний  $V^*(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \bar{\Omega}$ , корректно решенной сопряженной задачи, будем называть *областью определения* линейного оператора  $\mathbb{U}^*$ , если  $f \in V^*(\Omega)$  однозначно зависит от управления  $u$  на  $S$ , и при этом *областью значений* оператора  $\mathbb{U}^*$  будет множество градиентов  $U^*(S)$ , т.е.

$$U(S) \ni u \xrightarrow{\text{однозначно}} I_v'|_{\omega} I_u'|_{\omega} \xrightarrow{\text{однозначно}} f|_{\Omega} \in V^*(\Omega) \xrightarrow{\mathbb{U}^*} U^*(S).$$

При оптимизации распределенных систем почти всегда множество  $\Omega$  не совпадает со всей областью функционирования системы  $\bar{\Omega}$ . Множество  $\Omega$  существенным образом зависят от определения  $\omega$  в целевом функционале  $J$ . Если  $\omega$  задано не в том месте  $\bar{\Omega}$ , не тех размеров, то ожидать корректного действия оператора  $\mathbb{U}^*$  не стоит. Кроме “правильного”  $\omega$  необходимо учитывать вычислительные и другие помехи, включая возможную диссипацию в системе управления, которые могут нарушать однозначность указанных отображений.

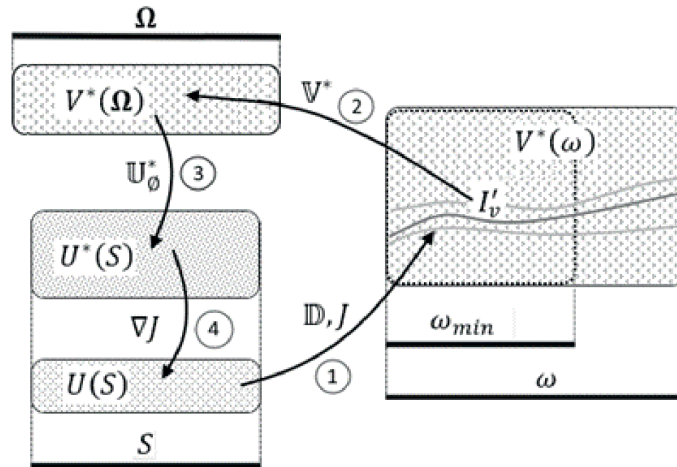
Рассмотрим корректность отображения оператора  $\mathbb{U}^*: V^*(\Omega) \rightarrow U^*(S)$ . В задаче оптимизации без ограничений и при  $I_u' = 0$  (функция цели не зависит явно от управления  $u$ ), значение оператора  $\mathbb{U}^* f = \nabla J$  должно обращаться в нуль (необходимое условие оптимальности) только при оптимальном управлении  $u_*$ . Это возможно, если линейный оператор  $\mathbb{U}^*$  невырожденный, т.е. он имеет только нулевое ядро  $\text{Ker } \mathbb{U}^* \equiv f_{\text{Ker}} = 0$ . При оптимальном управлении с невырожденным  $\mathbb{U}^*$  сопряженное состояние  $f$  должно быть нулевым. Наличие ненулевого ядра, когда  $\mathbb{U}^*(f \neq 0) = 0$ , не позволит корректно находить градиент, а следовательно, и оптимальное управление  $u_*$ .

С практической точки зрения важно не знание непосредственно множества особых решений  $\{f\}_{\text{Ker}}$  ненулевого ядра оператора  $\mathbb{U}^*$ , а знание конкретных условий, приводящих к появлению такого ядра. Возможно, придется изменить или функцию  $I$ , или множество  $\omega$  так, чтобы наблюдаемое ядро исчезло (обнулилось). Только тогда можно говорить о корректном определении градиента целевого функционала.

Если целевая функция  $I$  зависит явно и от управления  $u$ , то соответствующий линейный оператор  $\mathbb{U}_{\varnothing}^* = \mathbb{U}^* \cdot + I_u'|_{\omega}$  уже не будет однородным. Очевидно, что если  $\mathbb{U}^*$  был невырожденным, то и оператор

$\mathbb{U}_\emptyset^*$  будет невырожденным. При этом произойдет всего лишь смещение ранее нулевого ядра  $f_{\text{Ker}} = 0$  к новому значению в новом оптимуме  $u_*$ , где градиент  $\nabla J = \mathbb{U}_\emptyset^* f$  обратится в нуль. Такой оптимум не будет сопровождаться нулевым сопряженным состоянием  $f$ . Новое ядро  $f_{\text{Ker}} \neq 0$  неоднородного оператора  $\mathbb{U}_\emptyset^*$  не делает оператор вырожденным.

На фиг. 1 символически представлены обсуждаемые отображения. Шаг 1 — это прямое отображение управления  $u \in U(S)$  уравнениями  $\mathbb{D}$  в состояние  $v \in V^*(\Omega)$  и далее, с использованием  $J$ , в сопряженное пространство функций  $I'_v \in V^*(\omega)$ . Примеры таких функций изображены линиями  $I'_v$  на множестве  $\omega$ .



Фиг. 1. Отображения пространств.

Шаг 2 представляет собой отображение функций  $I'_v$  (через состояние  $f$ ) с помощью оператора  $\mathbb{V}^*$  из множества  $\omega$  в  $\Omega$ . Заметим, что для однозначного отображения из  $\omega$  во все точки  $\Omega$  может потребоваться не все множество  $\omega$ , а лишь его часть  $\omega_{\min} \subset \omega$ . Эта ситуация соответствует *избыточности*  $\omega$ . Попытка учета всего  $\omega$  может приводить к неоправданным помехам в вычислении градиента и, соответственно, к помехам в управлении. Если же отображение  $I'_v$  из  $\omega$  попадает на  $\Omega$  так, что область значений  $\mathbb{U}^*$  оказывается определенной не на всем  $S$ , то это свидетельствует о *недостаточности*  $\omega$  для формирования полноценной области определения  $\mathbb{U}^*$  и, как следствие, невозможности управления на  $S$ .

Шаг 3 — это отображение пространства сопряженного состояния  $V^*(\Omega)$  в пространство градиентов  $U^*(S)$  с помощью оператора  $\mathbb{U}_\emptyset^*$ .

Шаг 4 — это отображение градиентов из  $U^*(S)$  в множество управлений  $U(S)$ . Последний шаг реализуется экстремальными алгоритмами, и мы его уже обсудили.

Подытожим сказанное следующим утверждением для практического анализа управляемости в прямом экстремальном подходе.

**Теорема.** Математическая модель  $\mathbb{D}(\tau, v, u)v = 0$ ,  $\tau \in \overline{\Omega}$  в задаче (1) управляема посредством  $u(\tau)$  на  $S \subset \overline{\Omega}$  по функционалу  $J$ , если

- существует область  $V^*(\Omega)$  определения оператора  $\mathbb{U}^*$  с его однозначными значениями в области  $U^*(S)$ ;
- оператор  $\mathbb{U}^*$  невырожденный;
- прямой экстремальный подход (2) при  $u^0 \in U$  использует удовлетворительные параметры регуляризации в алгоритме (5).

Получение конкретных условий управляемости, обеспечивающих выполнение требований теоремы, осуществляется в процессе анализа на корректность решения исходной и сопряженной задач, в процессе выявления области определения  $V^*(\Omega)$  оператора  $\mathbb{U}^*$  и оценке его ядра.

Введенное понятие управляемости в виде определения 1 и следующая из него теорема позволяют сделать процедуру анализа управляемости в прямом экстремальном подходе оптимизации наглядной и универсальной.

### 3. ПРИМЕР АНАЛИЗА УПРАВЛЯЕМОСТИ

#### 3.1. Постановка задачи

Наиболее наглядным примером может служить волновая система с гиперболическими уравнениями. Рассмотрим задачу идентификации оптимального распределенного коэффициента шероховатости (см. [3], [10], [11]) по экспериментальным наблюдениям за уровнем открытого потока воды в нижнем створе канала.

Нестационарное течение воды в открытом канале можно описать нелинейной квазиодномерной распределенной системой Сен—Венана:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}v &= \frac{\partial v}{\partial t} + A \frac{\partial v}{\partial x} + F = 0, \quad \text{на } \Omega, \\ Z(x_a, t) &= Z_a(t) \text{ на } \Gamma_a = x_a \times (t_0, t_1), \\ Q(x_b, t) &= Q_b(t) \text{ на } \Gamma_b = x_b \times (t_0, t_1), \\ v(x, t_0) &= (Q_0(x), Z_0(x)) \text{ на } \Gamma_0 = [x_a, x_b] \times t_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2w & B(c^2 - w^2) \\ 1/B & 0 \end{pmatrix},$$

вектор-столбец

$$F = \left( F_{\text{fr}} - w^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Big|_z, \quad -\frac{q}{B} \right),$$

где  $\sigma(x, Z)$  — площадь живого сечения. Время  $t \in [t_0, t_1]$ , пространственная координата  $x \in [x_a, x_b]$  размещена вдоль потока воды. Состояние системы — вектор-столбец  $v = (Q, Z)$ , где  $Q(x, t)$  — расход воды в потоке от верхнего (левого) створа к правому (нижнему),  $Z(x, t)$  — уровень свободной поверхности потока относительно заданного горизонта,  $w = Q/\sigma$  — скорость потока, осредненная по живому поперечному сечению,  $B(x, Z)$  — ширина потока поверху,  $c = \sqrt{g\sigma/B}$  — скорость распространения малых возмущений в потоке, равная скорости звука в воде,  $g$  — ускорение свободного падения,  $q(x, t)$  — боковой распределенный приток. Граничные области  $\Gamma_a, \Gamma_b$ , а также начальная  $\Gamma_0$  и терминальная  $\Gamma_1 = [x_a, x_b] \cdot t_1$  образуют границу  $\partial\Omega$  прямоугольника  $\Omega$ .

Член трения

$$F_{\text{fr}} = \frac{qQ|Q|}{\sigma RC^2}, \quad C = \frac{1}{u} R^{1/6},$$

где  $R(x, Z) = \sigma/\chi$  — гидравлический радиус потока,  $\chi(x, Z)$  — смоченный поперечный периметр русла,  $C$  — эмпирический коэффициент Шези.

Управлением является коэффициент шероховатости  $u(x)$ ,  $x \in (x_a, x_b) = S$ , который присутствует в коэффициенте Шези и характеризует вязкое трение воды (диссипацию энергии) в пристеночной зоне русла. Можно сказать, что  $S = P_x(\Omega)$ , т.е. является проекцией области  $\Omega$  на ось  $x$ .

Задача оптимизации формулируется следующим образом. Необходимо найти управление  $u(x)$ , доставляющее минимум функционалу

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} I(v)|_{\omega} dt, \quad I(v; t)|_{\omega=\Gamma_b} = \left( Z(\tau)|_{\Gamma_b} - Z_e(t) \right)^2. \quad (7)$$

Функционал задается в нижнем створе канала на основе экспериментально наблюдаемого уровня воды  $Z_e(t)$ .

Сопряженная задача (3) формулируется относительно вектор-строки  $f = (f_1, f_2)^T$  (транспонированный вектор-столбец) и принимает вид

$$\begin{aligned}\mathbb{V}^* f &= -\frac{\partial f}{\partial t} - A^T \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbb{F}^* f = 0 \text{ на } \Omega, \\ 2wf_1 + \frac{1}{B}f_2 &= 0 \text{ на } \Gamma_a, \\ B(c^2 - w^2)f_1 + I'v|_{\omega} &= 2(Z - Z_e) \text{ на } \Gamma_b, \\ f_1 = f_2 &= 0 \text{ на } \Gamma_1.\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь

$$\mathbb{F}^* = \begin{pmatrix} \frac{2F_{\text{fr}}}{Q} & \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} \\ -F_{\text{fr}} \left( \frac{B}{\sigma} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial B}{\partial Z} \right) + w^2 \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_Z - g \frac{\partial \sigma}{\partial x} & \frac{1}{B^2} \left( q - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \frac{\partial B}{\partial Z} \end{pmatrix}.$$

Градиент целевого функционала  $\nabla J(u; x) = \mathbb{U}^* f \in U^*(S)$ . Здесь  $\mathbb{U}_{\mathcal{O}}^* = \mathbb{U}^*$ , т.е. сопряженный оператор градиента — линейный, однородный:

$$\mathbb{U}^* \cdot = \int_{t_0}^{t_1} F_u'^T \cdot dt : V^*(\Omega) \rightarrow U^*(S),$$

где вектор-строка  $F_u'^T = \left( \frac{\partial F_{\text{fr}}}{\partial u}, 0 \right)^T = \left( \frac{2F_{\text{fr}}}{u}, 0 \right)^T$ . Оператор  $\mathbb{U}^*$  реализует отображение из пространства сопряженных состояний, определенных на  $\Omega$ , в пространство сопряженных управлений, определенных на  $S$ , т.е. в своем отображении он осуществляет и проецирование  $P_x(\Omega)$ , которое реализуется интегрированием по времени.

Таким образом, градиент

$$\nabla J(u; x) = \mathbb{U}^* f = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2F_{\text{fr}}}{u} f_1 dt, \quad x \in (x_a, x_b). \quad (9)$$

При оптимальном управлении  $u = u_*$ , сопряженное состояние  $f$  будет нулевым, поскольку  $\mathbb{U}^*$  однородный.

### 3.2. Анализ управляемости (идентифицируемости)

Для анализа идентифицируемости коэффициента шероховатости воспользуемся сформулированной ранее теоремой. Сначала обоснуем корректность решения исходной и сопряженной задач. Далее уточним области определения и значений оператора  $\mathbb{U}^*$ , сделаем оценку его возможной вырожденности.

Исходная гиперболическая задача (6) имеет две характеристики  $\xi_{1,2}(x, t)$ , вдоль которых распространяются волны в русле со скоростью

$$\xi_{1,2} = \frac{d\xi_{1,2}}{dt} = w \pm c.$$

Для докритических течений волны на характеристиках первого семейства  $\xi_1$  перемещаются вдоль потока к правому нижнему створу русла, а волны на характеристиках второго семейства  $\xi_2$  — против течения к левому верхнему створу. Поскольку характеристики определяются собственными числами матрицы  $A$ , то сопряженная задача с матрицей  $A^T$  имеет те же характеристики  $\xi_{1,2}$ , что и исходная. Здесь сопряженные волны движутся по тем же характеристикам  $\xi_{1,2}$ , но в обратном направлении.

Исходная задача (6) и сопряженная (8) обеспечивают корректное решение для двумерных вектор-функций  $v(\tau)$  и  $f(\tau)$ , поскольку в каждую точку  $\tau \in \Omega$  попадают обе характеристики  $\xi_1, \xi_2$ , выходящие из известных краевых условий на  $\partial\Omega$  (см. [12]).

К вопросу корректности следует сделать некоторые дополнения. В прямой задаче пространства существования состояния потока  $V$  и управления  $U$  определяются физически разумными, приемлемыми значениями управления. Например, при достаточно больших значениях  $u$  может быть получен уровень потока  $Z$ , идущий ниже линии дна  $Z_{\text{bot}}$ . Поэтому, ограничим  $U$  некоторым замкнутым множеством из условия

$$U = \{u : u(x) \geq 0 \quad \forall x \in S, \quad v \in V\}, \quad V = \{v : Z(\tau) > Z_{\text{bot}}(x) \quad \forall \tau \in \bar{\Omega}\}. \quad (10)$$

Будем контролировать данное условие разумным выбором значений управления  $u$ . Приведенное условие не является ограничением для задачи идентификации и не требует его реализации в алгоритмах оптимизации.

Условие 10 означает, что прямая задача физически условно корректна. Ее решение следует искать при ограниченном изменении коэффициента шероховатости  $u \in U$ . Множество таких допустимых управлений  $u$  представляет собой компакт корректности  $\mathcal{U}$  для решения обратной задачи идентификации

$$\mathcal{U} = U.$$

Все управления  $u^k$ , выходящие за пределы компакта  $\mathcal{U}$ , не позволят корректно найти ни градиент  $\nabla J^k$ , ни дальнейшее управление  $u^{k+1}$ .

Из корректности исходной задачи следует, что изменение шероховатости  $u(x)$  меняет уровень воды во всем канале. Поэтому, если волны, идущие вдоль  $\xi_1$ , от левого (верхнего) створа  $x_a$  доходят до правого (нижнего) створа  $x_b$ , то любые функции  $u(x) \in \mathcal{U}$  будут однозначно влиять на значение производной целевой функции  $I'_Z|_{\omega} = 2 \left( Z|_{\Gamma_b} - Z_e \right)$ . Другими словами имеет место левая ветка отображений в определении 3:

$$U(S) \ni u \xrightarrow{\text{однозначно}} I'_Z|_{\omega}.$$

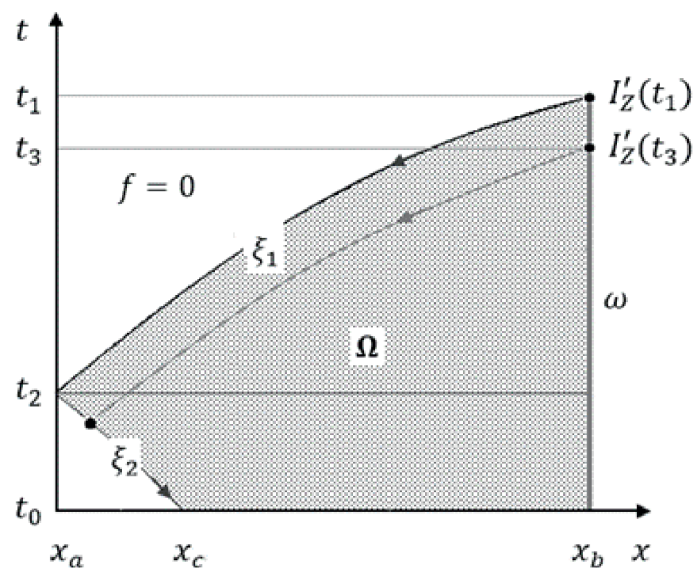
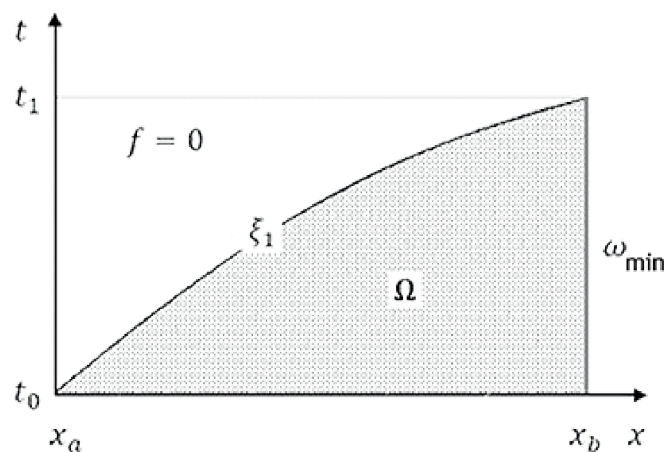
Производная  $I'_Z|_{\omega}$  является источником возмущений сопряженной задачи. Возмущения  $f$  при  $t \rightarrow t_0$  распространяются в виде сопряженных волн по характеристикам первого семейства  $\xi_1$  от правого створа  $x_b$  в сторону левого створа  $x_a$ . В левом (верхнем) створе сопряженные волны отражаются и переносятся обратно вправо по характеристикам второго семейства  $\xi_2$ . Распространение сопряженных волн и пример множества  $\Omega$  (все пространство под верхней характеристикой  $\xi_1$ ) для области определения  $V^*(\Omega)$  оператора  $\mathbb{U}^*$  показан на фиг. 2.

Можно выделить время  $t_2$  прихода верхней (замыкающей) характеристики  $\xi_1$  к левому створу русла. Ниже этого времени в области  $\Omega$ , под характеристикой  $\xi_2$ , начинает образовываться белый треугольник области неоднозначного влияния значений функции  $I'_Z$  на сопряженное состояние  $f$ . В каждую точку данной области будет приходить две сопряженные волны, вышедшие из разных точек  $\omega$  с разными значениями  $I'_Z$ , как это показано в качестве примера для возмущений  $I'_Z(t_1)$  и  $I'_Z(t_3)$ . При  $t_0 < t_2$  применение оператора  $\mathbb{U}^* f = \int_{t_0}^{t_1} F_u'^T f dt$  будет реализовываться в неоднозначной области определения  $V^*(\Omega)$  оператора  $\mathbb{U}^*$ . Это может создать неприемлемые помехи в значениях  $\mathbb{U}^* f$ , т.е. в градиенте  $\nabla J$ .

Чтобы такого не возникло, следует устранить избыточность области  $\omega$  задания целевого функционала до минимально достаточной  $\omega_{\min}$ , как это показано на фиг. 3.

Если вычислительные и диссипативные помехи в исходной и сопряженной задачах не существенны, то однозначность области определения  $\mathbb{U}^*$  обеспечивается при

$$t_1 = t_0 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{\lambda_1}. \quad (11)$$


 Фиг. 2. Пространственно-временная диаграмма области  $\Omega$  с избыточной областью  $\omega$ .

 Фиг. 3. Пространственно-временная диаграмма области  $\Omega$  с минимально достаточной областью  $\omega_{\min}$ .

Данное условие представляет собой условие *идентифицируемости (управляемости)*.

Следует отметить, что наличие вычислительных помех и характерных для данной задачи диссипативных помех, может приводить в расчетах к появлению существенного затухания волн как исходной, так и сопряженной гиперболических систем. Затухание волн уровня воды  $Z$  в исходной задаче при движении слева направо будет искажать невязку  $(Z|_{\Gamma_b} - Z_e)$ , на основании которой решается сопряженная задача. Решение сопряженной задачи будет добавлять свое затухание волн  $f$  от источника  $I'_Z$  при движении обратно справа налево.

Это означает, что возле левого верхнего створа русла точность идентификации шероховатости может ухудшаться, а при очень длинном русле или сильно выраженной диффузорной неоднородности потока (с ростом уклона русла возрастает диссипация в потоке) вообще может стать невозможной. Поэтому требование (11), полученное из анализа области влияния  $\omega$ , следует дополнить фразой “с помехами, не существенно искажающими волновые процессы в обеих задачах”.

В этих условиях выполняются оставшиеся ветки отображения в определении 3:

$$I'_Z|_{\omega} \xrightarrow{\text{однозначно}} f|_{\Omega} \xrightarrow{\mathbb{U}^*} U^*(S).$$

Таким образом, область определения  $V^*(\Omega)$  оператора  $\mathbb{U}^*$  задается корректно на треугольнике  $\Omega$  из фиг. 3.

Таким образом, первое условие теоремы “существует область  $V^*(\Omega)$  определения оператора  $\mathbb{U}^*$  с его однозначными значениями в области  $U^*(S)$ ” выполняется.

Теперь оценим наличие возможной вырожденности оператора  $\mathbb{U}^*$  в градиенте (9):

$$\nabla J = \mathbb{U}^* f = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2F_{\text{fr}}}{u} f_1 dt \in U^*(S).$$

Необходимо выяснить, имеет ли оператор  $\mathbb{U}^*$  при каких-либо условиях ядро  $\text{Ker } \mathbb{U}^* \neq 0$ , т.е. может ли градиент  $\nabla J$  при  $f_1 \neq 0$ , и соответственно при  $u \neq u_*$ , иметь нулевое значение на  $S$  или на значительной (ненулевой меры) части  $S$ .

Поскольку мы рассматриваем движущиеся потоки воды и только в одном направлении — вдоль русла к нижнему створу, то при  $u \in \mathcal{U}$  член, характеризующий трение воды о ложе русла, всегда будет положительным:  $F_{\text{fr}} = \frac{gQ|Q|}{\omega RC^2} > 0$  и  $\frac{2F_{\text{fr}}}{u} > 0$ . В то же время, в разные моменты времени волны от невязки  $(Z|_{\Gamma_b} - Z_e)$ , идущие вдоль характеристик первого семейства, могут быть как волнами повышения ( $f_1$  положительное), так и волнами понижения ( $f_1$  отрицательное). Как при всяком волновом движении суммарное по времени (интегральное в  $\nabla J$ ) значение таких волн (с положительным коэффициентом  $\frac{2F_{\text{fr}}}{u}$  в некоторых точках  $x \in S$  (только в точках, а не на всем  $S$  или на значительной части  $S$ ) может обращать в нуль значение  $\nabla J(u; x)$ . Однако такие волны не являются стоячими, и при изменении управления от  $u^k$  на  $u^{k+1}$  ранее точечные нулевые значения градиента будут исчезать. Устойчивое нулевое значение интеграла по времени в градиенте  $\nabla J(u; x)$  на всем  $S$  возможно только при оптимальном решении  $u = u_*$ , когда  $(Z|_{\Gamma_b} - Z_e) = 0$ , что соответствует  $f_1 = 0$ . Это означает, что оператор  $\mathbb{U}^*$  имеет только нулевое ядро. Выполняется второе условие теоремы “оператор  $\mathbb{U}^*$  невырожденный”.

Таким образом, согласно теореме, распределенная система (6) управляема (идентифицируема) посредством параметра  $u(x)$  на  $S = (x_a, x_b)$  по функционалу  $J$  (7) при условии (8) с помехами, не существенно искажающими волновые процессы в обеих задачах. Остается выбрать разумное начальное приближение  $u^0 \in \mathcal{U}$  и корректно применить экстремальные алгоритмы (последнее требование теоремы).

### 3.3. Тестовое решение

Рассмотрим течение в тестовом канале со следующими характеристиками (характерны для Северо-Крымского канала): длина канала  $[x_a, x_b] = 20$  км; трапецеидальная форма поперечного сечения с шириной по дну 30 м и откосом стенок 4 (котангенс угла наклона); ровное дно с уклоном  $i = \frac{\partial Z_{\text{bot}}}{\partial x} = 0.0001$ ; боковой приток в тестовых расчетах отсутствует, т.е.  $q = 0$ .

Расчеты проводились при следующих начальных условиях: расход воды  $Q_0(x) = 107$  м<sup>3</sup>/с; уровень воды рассчитывался из условия установившегося течения при начальном значении глубины слева 3.6 м, при тестовом оптимальном управлении

$$u_*(x) = 0.025 + 0.0075 \cos \left( \pi + \frac{2\pi x}{x_b - x_a} \right).$$

Дальнейшие предварительные расчеты показали, что при управлении  $u > 0.04$  уровень воды в конце русла опускается ниже линии дна, что недопустимо. Поэтому, исходя из условия (10) физической корректности решения исходной прямой задачи, будем считать компактом корректности, достаточным для решения рассматриваемой задачи оптимизации, следующее множество:

$$\mathcal{U} = [0.001, 0.04].$$

Перейдем к решению тестовой задачи оптимизации с нестационарным течением воды в канале. При оптимальной шероховатости  $u_*$  найдем уровень  $Z(x_b, t)$  на правой границе русла, который далее будем считать экспериментально наблюдаемым  $Z_e(t)$ . Зададим начальное приближение

$$u^0(x) = 0.04 \in \mathcal{U}.$$

Теперь можно решать обратную задачу о восстановлении оптимального управления  $u(x)$  по целевому функционалу (7).

Оптимизацию будем считать удовлетворительной и завершать итерационный процесс (5) при достижении точности

$$\Delta_{\max} Z = \max_t |Z(x_b, t) - Z_e(t)| \leq 0.01 \text{ м.}$$

Выбор шагового множителя  $b^k$  в алгоритме (5) осуществлялся по методу Носедала–Райта (см. [13]) с коэффициентами Вольфе  $c_1 = 10^{-4}$  и  $c_2 = 0.5$ , максимальным шагом  $0.1 \|u^0 - u_*\|$ . Если шаг увеличить, то можно ускорить сходимость к оптимуму, но изменения функции  $u^k(x)$  могут быть слишком большими и выводить управление из компакта корректности  $\mathbb{U}$ . При этом где-либо вдоль русла могут наблюдаться  $u^k < 0$  или уровень  $Z^k < Z_{\text{bot}}$ . Возможно даже появление сверхзвуковых течений при приближении уровня потока к линии дна, поскольку требование неразрывности потока в ситуации  $Z^k \rightarrow Z_{\text{bot}}$  (сечение потока  $\sigma \rightarrow 0$ ) значительно увеличивает расход воды  $Q^k$ , и в итоге оказывается скорость потока

$$w = \frac{Q}{\sigma} > c = \sqrt{g\sigma B}.$$

Параметр регулирования направления спуска в (5) задавался по формуле

$$\alpha(x) = \left| \frac{0.1u^0}{\nabla J(u^0; x)} \right|.$$

Описанный выбор  $b^k$  и  $\alpha$  обеспечил удовлетворительные значения параметров регуляризации итерационных приближений управления, все  $u^k \in \mathcal{U}$ ,  $k = 1, 2, \dots$

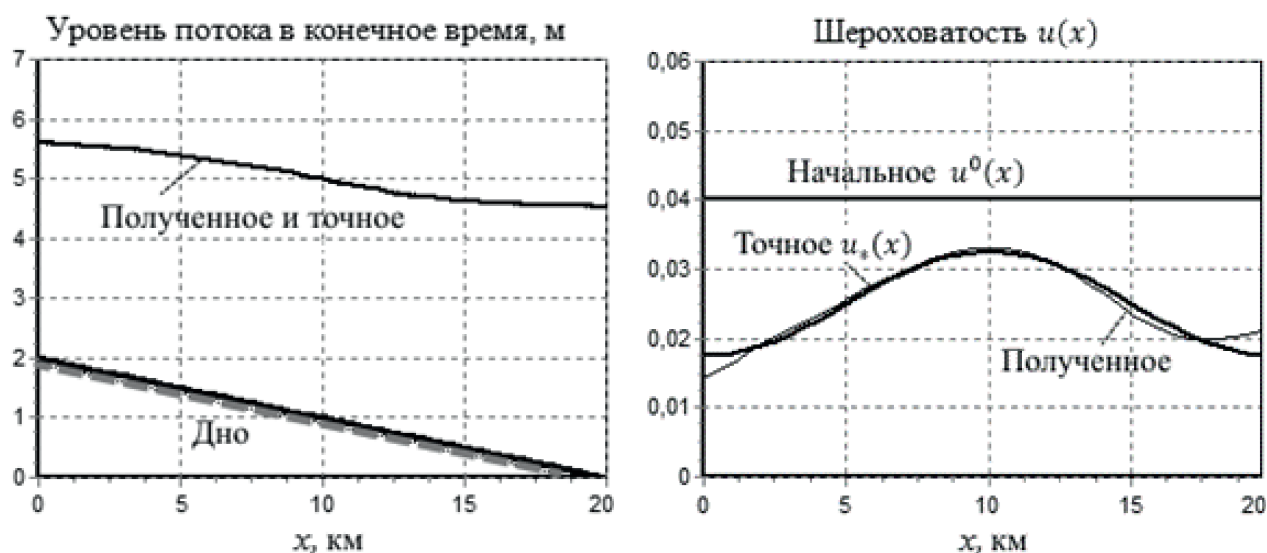
Общее время оптимизации  $t_1 - t_0$  выбиралось с учетом условия управляемости (11), соответствующее времени прохождения фронта начальной волны вдоль всего русла слева направо. Для рассматриваемого потока время прохода фронта волны по характеристике  $\xi_1$  составляет примерно 60 мин. Поскольку рассчитываемый фронт имеет некоторую протяженность (размазанность), то было выбрано множество  $\omega = x_b \times (t_0 = 0, t_1 = 73 \text{ мин})$ .

На фиг. 4 представлены результаты оптимизации функции  $u(x)$ . Заданная точность была достигнута за  $k = 60$  итераций с близостью к тестовому оптимальному значению

$$\|u^{60} - u_*\|_{L_2(S)} = 0.18.$$

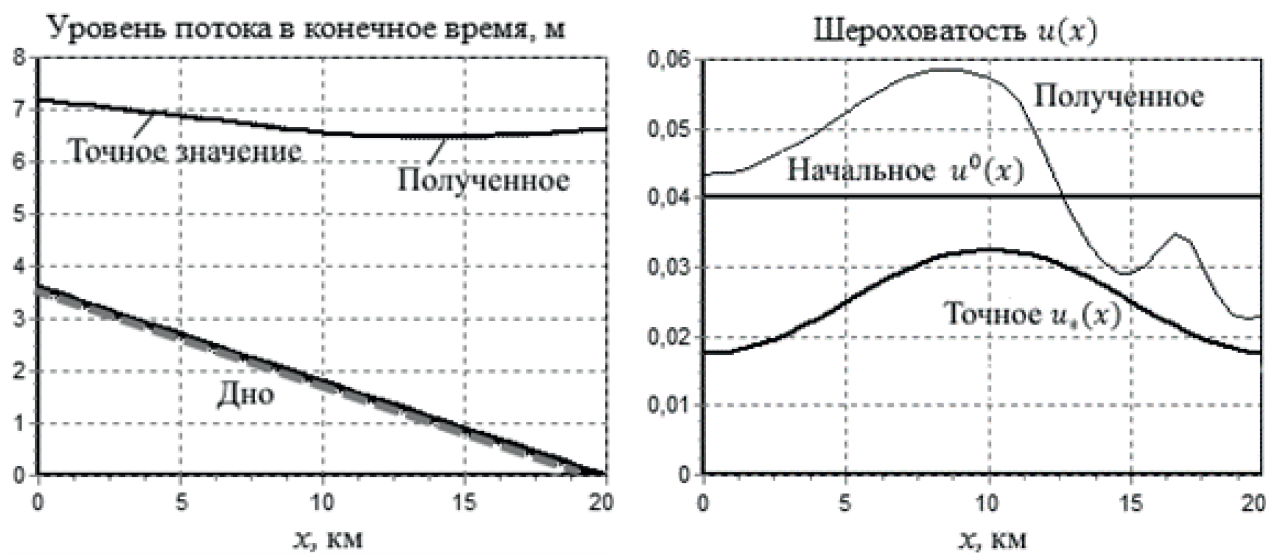
Это очень высокая точность. Заметим, что классический градиентный метод наискорейшего спуска ( $\alpha = 1$ ) обеспечил близость последней итерации управления  $\|u^{152} - u_*\|_{L_2(S)} = 0.45$ .

Уменьшение времени в  $\omega$ , например, до  $t_1 = 30$  мин не позволило сделать ни одной разумной коррекции управления  $u^k$ . Увеличение же времени до  $t_1 = 150$  мин заметно ухудшило качество восстановления оптимального управления, особенно в левой части канала, как это и предсказывалось при анализе управляемости. В обоих примерах множество  $\omega$  существенно не соответствовало условию управляемости, что сделало область определения  $V^*(\Omega)$  оператора  $\mathbb{U}^*$  некорректной для однозначного отображения в область значений  $U^*(S)$ . В первом случае множество  $\omega$  было недостаточным, во втором — избыточным (как на фиг. 2). Везде не было выполнено первое условие теоремы управляемости.



Фиг. 4. Результаты оптимизации.

Рассмотрим влияние диссипации на управляемость. На фиг. 5 показаны результаты оптимизации для русла с увеличенным уклоном дна  $i = 0.00018$ . На правой части рисунка видно, что искомая тестовая функция  $u_*(x)$  не восстанавливается.



Фиг. 5. Результаты оптимизации с увеличенным уклоном дна.

На левой части рисунка видно, что шероховатость  $u(x)$  практически не влияет на состояние потока, точное и полученное (при неправильном  $u$ ) значения уровня воды мало различимы. Появившаяся нечувствительность модели (6) к параметру  $u(x)$  объясняется тем, что диффузор потока (особенно в правой половине течения) существенно повышает диссипацию энергии волн. Площадь  $\sigma$  поперечного сечения потока в нижнем створе русла почти в 3 раза больше, чем в верхнем. При этом значение члена трения  $F_{\text{тр}} = \frac{g|Q|}{\sigma RC^2}$  в нижнем створе канала оказывается в 5 раз выше, чем в верхнем. По сути, от волн ничего не остается.

В последнем примере, согласно определению 3, мы полностью потеряли область определения  $V^*(\Omega)$  оператора  $\mathbb{U}^*$ . Наличие помех в виде существенной диссипации уничтожило зависимость целевого функционала от управления, т.е. отображение  $u \mapsto I'_v|_{\omega}$ , отображение исчезло. Не было выполнено первое условие теоремы управляемости.

## ВЫВОДЫ

Мы получили относительно простую и универсальную процедуру контроля управляемости как возможности управлять системой с распределенными параметрами по заданному целевому функционалу. Новое понятие управляемости в виде определения 1 и теорема управляемости позволяют в прямом экстремальном подходе сделать процедуру анализа управляемости наглядной и универсальной. Она состоит из выявления области определения линейного сопряженного оператора в градиенте целевого функционала, оценке его невырожденности и выборе удовлетворительных параметров регуляризации для приближений управления к оптимуму. Все это позволило корректно и с высокой точностью решить задачу оптимизации нелинейной гиперболической системы относительно распределенного коэффициента трения по функционалу, заданному на границе русла.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егоров А. И., Знаменская Л. Н.* Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. СПб: Лань, 2017.
2. *Glowinski R., Lions J.-L., He Jiwen.* Exact and approximate controllability for distributed parameter systems. Cambridge Univer. Press, 2008.
3. *Толстых В. К.* Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами. Донецк: Юго-Восток, 1997.
4. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. Т. 2. М.: МЦНМО, 2011.
5. *Сев Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973.
6. *Tolstykh V. K.* Optimization for systems governed by partial differential equations // *Adv. Model. Optim.* 2012. V. 14. N 3. P. 703–716.
7. *Толстых В. К.* О применении градиентного метода к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1986. № 1. С. 137–140.
8. *Толстых В. К.* Идентифицируемость систем с распределенными параметрами // *Автомат. и телемех.* 1989. № 10. С. 49–56.
9. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // *ДАН СССР.* 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
10. *Воронин С. Т., Толстых В. К.* Вариационный метод определения коэффициента шероховатости открытого русла // *Тр. Гидрометцентра СССР.* 1986. № 283. С. 54–59.
11. *Atanov G. A., Tolstykh V. K.* Optimization problems for nonstationary wave processes // *J. Math. Sci.* 1995. N 77. С. 3540–3542.
12. *Рождественский Я. Н., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1979.
13. *Nocedal J., Wright S.* Numerical optimization. New York: Springer-Verlag, 1999.

## ON THE CONTROLLABILITY OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

V. K. Tolstykh\*

*Donetsk State University, Universitetskaya st., 24, Donetsk, 283001 Russia**\*e-mail: mail@tolstykh.com*

Received 03 September, 2023

Revised 14 February, 2024

Accepted 06 March, 2024

**Abstract.** The problem of controllability for optimal control problems, optimization of systems with distributed parameters in partial derivatives is considered. The concept of controllability as correctness according to A. N. Tikhonov for solving optimization problems is introduced. A theorem with controllability conditions for direct solution (direct minimization of the objective functional) of optimization problems by extremal algorithms is given. A test example of numerical solution of the optimization problem for a nonlinear hyperbolic system describing non-stationary water flow in an open channel is considered. Controllability analysis is demonstrated, which ensures correctness of the solution of the problem and high accuracy of optimization of the distributed friction coefficient in the flow equations.

**Keywords:** controllability, distributed parameter system, optimization, optimal control, identification, gradient, extreme methods.