ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 5, с. 729–731

УДК 512.643

# ЕЩЕ РАЗ ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ПРИВЕДЕНИИ ЮНИТОИДОВ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

© 2024 г. Х. Д. Икрамов[1,*]

[1] 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия
*e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 01.09.2023 г.
Переработанный вариант 01.09.2023 г.
Принята к публикации 06.02.2024 г.

Настоящая заметка представляет собой дополнение к статье, опубликованной автором на ту же тему ранее. Ее назначение в том, чтобы точнее охарактеризовать пары юнитоидов, допускающих одновременное приведение к диагональному виду. Библ. 15.

**Ключевые слова:** конгруэнция, юнитоид, коквадрат, канонические углы.

**DOI:** 10.31857/S0044466924050035, **EDN**: YDMURE

**1.** Квадратная матрица $A$ называется *юнитоидной*, или попросту *юнитоидом*, если она может быть приведена к диагональному виду *конгруэнцией*, которая здесь понимается как матричное преобразование вида

$$A \to P^* AP,$$

где $P$ — невырожденная матрица.

Если и сама матрица $A$ не вырождена, то все диагональные элементы в ее диагональной форме отличны от нуля. Их аргументы, отсчитываемые в интервале $[0, 2\pi)$, однозначно определены матрицей $A$ и называются ее *каноническими углами*.

Невырожденной матрице $A$ можно сопоставить произведение

$$\mathcal{C}_A = A^{-*}A,$$

называемое *коквадратом* этой матрицы. Если $A$ — юнитоид, то ее коквадрат диагонализуем подобием и имеет унимодулярный спектр. При этом аргументы собственных значений коквадрата равны удвоенным каноническим углам матрицы $A$.

Настоящая заметка представляет собой дополнение к статье [1]. Главным результатом последней является следующее утверждение.

**Предложение 1.** *Пусть $A$ и $B$ — невырожденные юнитоиды одинакового порядка $n$, причем канонические углы матрицы $B$ попарно различны по модулю $\pi$. Предположим, что матрицы $C = A^{-1}B$ и $D = A^{-1}B^*$ диагонализуемы одним и тем же подобием, т.е. найдется невырожденная матрица $R$ такая, что*

$$R^{-1}CR = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{1}$$

*и*

$$R^{-1}DR = M = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n). \tag{2}$$

*Тогда $A$ и $B$ могут быть приведены к диагональному виду посредством одной и той же конгруэнции.*

Наша цель здесь состоит в том, чтобы точнее охарактеризовать пары юнитоидов, допускающих одновременное приведение к диагональному виду.

**2.** Наряду с матрицами $C = A^{-1}B$ и $D = A^{-1}B^*$ будем рассматривать коквадрат $\mathcal{C}_B = B^{-*}B$.

**Теорема 1.** *Всякая матрица $R$, диагонализующая подобием любые две из матриц $C, D$ и $\mathcal{C}_B$, диагонализует и третью из этих матриц.*

**Доказательство.** Рассмотрим три возможных ситуации:

а) $R$ диагонализует $C$ и $D$, а значит, диагонализует и $D^{-1}$. Так как

$$B^{-*}B = (B^{-*}A)(A^{-1}B) = (A^{-1}B^*)^{-1}(A^{-1}B) = D^{-1}C, \tag{3}$$

то $R$ диагонализует и $\mathcal{C}_B$.

б) $R$ диагонализует $C$ и $\mathcal{C}_B$, а значит, и $\mathcal{C}_B^{-1}$. Имеем

$$A^{-1}B^* = (A^{-1}B)(B^{-1}B^*) = (A^{-1}B)(B^{-*}B)^{-1} = C(\mathcal{C}_B)^{-1}.$$

Следовательно, $R$ диагонализует и $D$.

в) $R$ диагонализует $D$ и $\mathcal{C}_B$, а потому и $C = A^{-1}B$, поскольку

$$A^{-1}B = (A^{-1}B^*)(B^{-*}B) = D\mathcal{C}_B.$$

(Это же сразу следует из (3).)

**3.** Покажем теперь, что в условиях предложения 1 обе матрицы $A$ и $B$ переводят подобием матрицу $F = BB^{-*}$ в $\mathcal{C}_B$. Будучи приводимы одновременным подобием, $C$ и $D$ должны быть перестановочны:

$$(A^{-1}B)(A^{-1}B^*) = (A^{-1}B^*)(A^{-1}B).$$

Отсюда выводим

$$BA^{-1}B^* = B^*A^{-1}B$$

и

$$A^{-1}(BB^{-*}) = (B^{-*}B)A^{-1},$$

$$A^{-1}FA = \mathcal{C}_B. \tag{4}$$

Аналогичное соотношение

$$B^{-1}FB = \mathcal{C}_B \tag{5}$$

очевидно, если подставить в него выражение для $F$.

**4.** Выражая $F$ из (4) и подставляя полученное выражение в (5), получаем

$$(B^{-1}A)\mathcal{C}_B(A^{-1}B) = \mathcal{C}_B$$

или

$$\mathcal{C}_B(A^{-1}B) = (A^{-1}B)\mathcal{C}_B.$$

Напомним, что множество матриц, перестановочных с данной квадратной матрицей $M$, называется централизатором этой матрицы.

Итак, матрицы $A$ и $B$ в предложении 1 должны быть таковы, чтобы произведение $C = A^{-1}B$ принадлежало централизатору матрицы $\mathcal{C}_B = B^{-*}B$.

Пусть теперь невырожденная матрица $G$ является элементом централизатора матрицы $\mathcal{C}_B$. Определим матрицу $A$ соотношением

$$G = A^{-1}B,$$

т.е. $A = BG^{-1}$. Тогда

$$A^{-1}B^* = GB^{-1}B^* = G(B^{-*}B)^{-1} = G\mathcal{C}_B^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$(A^{-1}B)(A^{-1}B^*) = G^2\mathcal{C}_B^{-1}$$

и

$$(A^{-1}B^*)(A^{-1}B) = G\mathcal{C}_B^{-1}G.$$

Поскольку $G$ коммутирует с $\mathcal{C}_B$ и $\mathcal{C}_B^{-1}$, то оба произведения $(A^{-1}B)(A^{-1}B^*)$ и $(A^{-1}B^*)(A^{-1}B)$ равны, т.е. матрицы $C$ и $D$ перестановочны.

Тем самым из пп. 3 и 4 можно извлечь следующий вывод.

**Теорема 2.** *Пусть $n \times n$-матрицы $A$ и $B$ не вырождены. Матрицы $C = A^{-1}B$ и $D = A^{-1}B^*$ коммутируют тогда и только тогда, когда $C$ принадлежит централизатору матрицы $\mathcal{C}_B = B^{-*}B$.*

**5.** Вернемся к предложению 1. Оно требует от матриц $A$ и $B$ большего, чем просто перестановочность $C$ и $D$, а именно, эти последние должны быть диагонализуемы подобием и иметь общий базис из собственных векторов. В то же время в силу теоремы 1 этот базис состоит из собственных векторов матрицы $\mathcal{C}_B = B^{-*}B$. Линии действия этих векторов определены однозначно условием попарного различия канонических углов матрицы $B$. Поэтому централизатор $\mathcal{C}_B$ представляет собой $n$-мерную (комплексную) алгебру. В соответствии с теоремой 2 для выбора матриц $A$ годятся только невырожденные матрицы из этого централизатора. Таким образом, мощность множества матриц $A$, подходящих для заданного юнитоида $B$, не слишком велика. Этому не стоит удивляться, ведь похожая ситуация имеет место в классической теореме об одновременной приводимости к диагональному виду пары перестановочных эрмитовых матриц $(A, B)$. Если одна из этих матриц, скажем $B$, имеет простой спектр, то множество подходящих для нее матриц $A$ образует как раз алгебру размерности $n$. Есть, правда, и отличие: от $A$ и $B$ не требуется невырожденности.

**6.** Воспользуемся этой возможностью, чтобы прокомментировать доказательство утверждения б) в теореме 2 из [1]. Недостаток приведенного там рассуждения в том, что не показана отчетливо роль предположения о попарном различии канонических углов матрицы $B$. Между тем это предположение сильно упрощает доказательство. Объясним, почему.

Из равенств (1) и (2) прежним образом выводятся соотношения

$$R^*BR = R^*AR\Lambda \tag{6}$$

и

$$(R^*BR)\Lambda^{-1} = (R^*B^*R)M^{-1}. \tag{7}$$

Положим $S = R^*BR$. Будучи конгруэнтна $B$, матрица $S$ является юнитоидом. Теперь соотношение (7) можно переписать в виде

$$S^{-*}S = M^{-1}\Lambda \equiv \Gamma.$$

Тем самым диагональная матрица $\Gamma$ есть коквадрат юнитоида $S$, а потому все ее диагональные элементы унимодулярны. Более того, их аргументы попарно различны по модулю $2\pi$. Как следствие, диагональна и матрица $S$. (Аргументы ее диагональных элементов также попарно различны, но по модулю $\pi$, как это требуется предложением 1 от канонических углов матрицы $B$.) Из равенства (6) теперь следует, что

$$R^*AR = S\Lambda^{-1},$$

т.е. $R$ приводит (конгруэнцией) к диагональному виду не только $B$, но и матрицу $A$. Этим доказательство завершается.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Икрамов Х.Д.* Об одновременном приведении к диагональному виду пары юнитоидных матриц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 227–229.

# ON THE SIMULTANEOUS DIAGONALIZATION OF UNITOIDS

**H. D. Ikramov***

*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, 119992, Russia*
**e-mail: ikramov@cs.msu.su*
Received 01 September, 2023
Revised 01 September, 2023
Accepted 06 February, 2024

**Abstract.** This note serves as a supplement to a previous article by the author on the same topic. Its purpose is to more precisely characterize pairs of unitoids that allow simultaneous diagonalization.

**Keywords:** congruence, unitoid, cosquare, canonical angles.