

УДК 519.65

О ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ ПАРАМЕТРОВ НЕЛОКАЛЬНОСТИ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ¹⁾

© 2024 г. Н. С. Аркашов^{1,*}, В. А. Селезнев^{2,**}

¹630090 Новосибирск, пр-т акад. Коптюга, 4, ИМ СО РАН, Россия

²630076 Новосибирск, пр-т Карла Маркса, 20, НГТУ, Россия

*e-mail: nicky1978@mail.ru

**e-mail: selvad46@mail.ru

Поступила в редакцию 20.12.2022 г.

Переработанный вариант 18.10.2023 г.

Принята к публикации 20.11.2023 г.

В работе исследуется выборка значений плотности плазмы термоядерной установки. Получена методология обработки экспериментальных данных, позволяющая установить соответствие между упомянутой выборкой и моделью нестационарного шума. Эта модель формируется как свертка стационарной последовательности и функции памяти и позволяет моделировать конкуренцию пространственной и временной нелокальности. Представлена физическая интерпретация параметров нелокальности. Библ. 26. Фиг. 2. Табл. 5.

Ключевые слова: нелокальность по времени и пространству, спектральный анализ, временные ряды физических величин, плотность плазмы.

DOI: 10.31857/S0044466924030086, **EDN:** XGSHNV

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается модель нестационарного шума, полученная в [1]. Нестационарный шум в [1] определяется как результат (интегральной) свертки стационарной последовательности и функции памяти. Основной задачей работы является оценка адекватности этой модели по соответствию выборке значений плотности низкочастотной турбулентной плазмы, измеренной в периферийной области удержания плазмы термоядерной установки Токамак Т-10 (выборка предоставлена В. П. Будаевым). В частности, уровень адекватности модели определяется реально достигнутым уровнем значимости представленного в данной работе статистического критерия. Этот критерий базируется на непараметрическом критерии проверки стационарности, полученном в [2].

Представленная модель нестационарного шума не случайно выбрана для анализа временного ряда плотностей плазмы. Последовательность, реализуемая сверткой стационарной последовательности и функции памяти, позволяет моделировать эффекты длинной зависимости и нестационарности (см. [1]). В то же время отметим, что значения выборки плотностей плазмы получены в зоне, где собственно наблюдается явление перемежаемости с признаками дальних корреляций (см. [3]).

Следующим основанием для выбора такой модели является определяемая ею структура нелокальности. Упомянутые стационарная последовательность и функция памяти позволяют моделировать пространственную и временную нелокальность, а также их соотношение, называемое в литературе конкуренцией пространственной и временной нелокальности (см., например, [4]). Здесь следует отметить, что согласно [5] аномальный перенос плотности в плазме имеет конкурентную структуру и определяется диссипативными процессами нагревания плазмы и идеальными процессами фоновой теплопроводности.

В работе [6] исследовались аналогичная модель и выборка. Существенным недостатком методологии проверки адекватности этой модели в [6] является использование параметрического критерия проверки стационарности, основанного на предположении о степенном поведении дисперсии частичных сумм соответствующей стационарной последовательности. Это предположение сужает возможность применения

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2024-0001.

рассматриваемой модели нестационарного шума к анализу реальных данных. Скажем, в [7] рассматривается ситуация, когда дисперсия частичных сумм стационарной последовательности и функция памяти имеют правильное поведение по времени, отличное от степенного. Отметим, что в настоящей работе, в частности, исправляется этот недостаток, при этом вместо параметрического критерия используется упомянутый выше непараметрический критерий стационарности. Кроме того, следует отметить, что представленная методология может быть применена к анализу не только выборки значений плотности плазмы. Например, одним из перспективных направлений здесь является анализ динамических закономерностей движения частиц в биологических клетках, обусловленных сложной комбинацией факторов пространственной неоднородности и пространственно-временной нелокальности (см., например, [8, 9]).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И СХЕМА ОЦЕНКИ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

Пусть $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ — стационарная (в широком смысле) последовательность случайных величин. Такую последовательность $\{x_i\}$ будем называть *стационарным шумом*. Через M обозначим некоторую неубывающую на неотрицательной полуоси функцию, такую что $M(0)=0$ и $M(1)=1$. Такую функцию M будем называть *функцией памяти*. Определим нестационарный шум по $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ через M :

$$\rho_k := \sum_{i=0}^{k-1} x_{k-i} \Delta M(i), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\Delta M(i) := M(i+1) - M(i)$. Правая часть (1) является сверткой $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ и M .

Пусть $a := \mathbf{E}x_1$. Выполняется очевидное равенство

$$\rho_k = aM(k) + \sum_{i=0}^{k-1} (x_{k-i} - a) \Delta M(i), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Стало быть, последовательность $\{\rho_k\}$ обладает возрастающим трендом.

В дальнейшем в качестве функции памяти мы будем рассматривать степенную функцию: $p_\nu(t) := t^\nu$, $0 \leq \nu \leq 1$ (считаем, что $p_0(0) := 0$). Отметим, что параметр ν отвечает за *уровень нестационарности* шума (в случае $\nu = 0$ последовательность $\{\rho_k\}$ совпадает с $\{x_k\}$) (см., также [7], замечание 6).

Будем рассматривать экспериментально полученную выборку временного ряда значений плотности низкочастотной турбулентной плазмы, единица измерения времени $\tau = 1$ мкс: $\rho = (\rho_k, k = 1, \dots, N)$, где $N = 500001$. На фиг. 1 приведен график упомянутого временного ряда. Заметим, что предварительное (визуальное) наблюдение этого графика позволяет предположить наличие слабо возрастающего тренда (сравните с (2)).

В дальнейшем проверка адекватности модели нестационарного шума (1) на соответствие этим выборочным данным будет реализована по следующей схеме.

Схема оценки адекватности модели. 1. Формируем множество исследуемых значений параметра ν : $\Upsilon = \{k / 10^3 : k = 0, 1, \dots, 500\}$ (мы заранее предполагаем, что $\nu \leq 0.5$).

2. Для каждого $\nu \in \Upsilon$ решаем систему (1), где $(\rho_k, k = 1, \dots, N)$ — исследуемая выборка плотностей плазмы и в качестве функции M рассматривается степенная функция p_ν . В итоге получаем выборку $(x_k, k = 1, \dots, N)$, зависящую от ν .

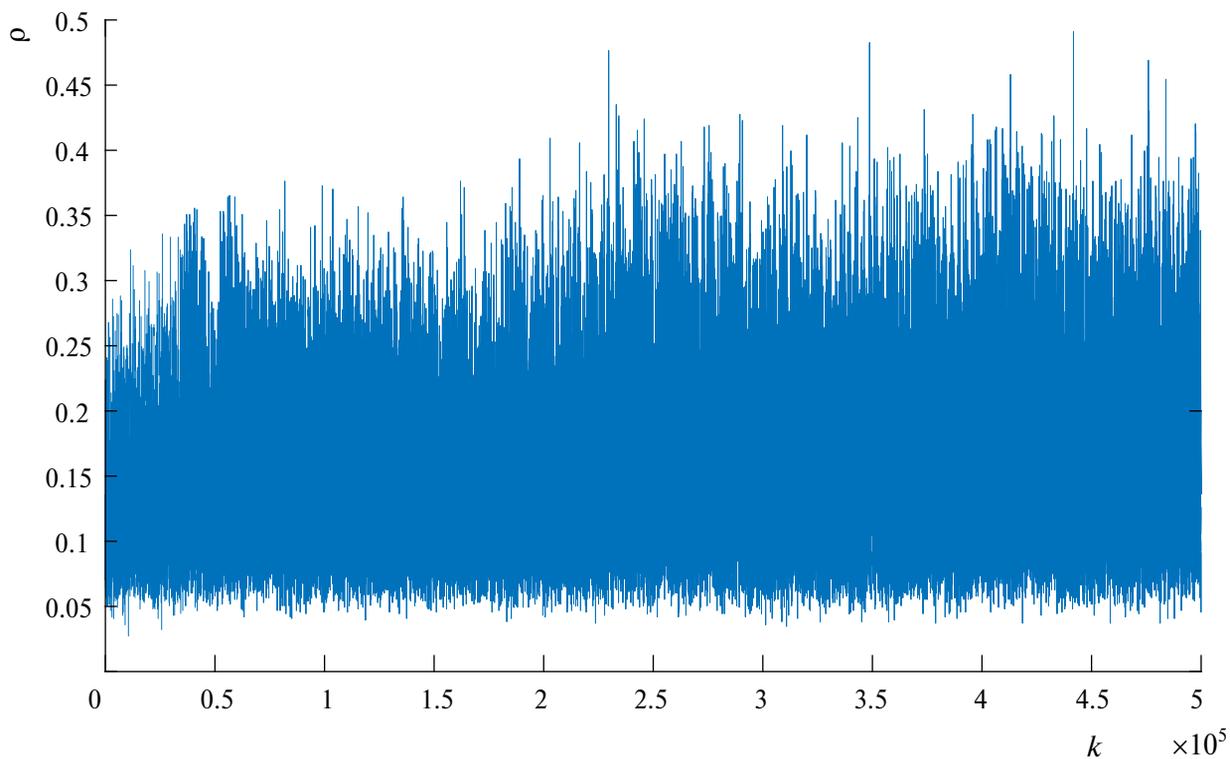
3. На выборке $(x_k, k = 1, \dots, N)$ определяем реально достигнутый уровень значимости $\varepsilon(\nu)$ статистического критерия по соответствию основной гипотезе о стационарности.

4. Выбираем ν_* , для которого $\varepsilon(\nu)$ принимает максимальное значение. Значение $\varepsilon(\nu_*)$ определяет уровень адекватности модели (1) по ее соответствию экспериментальным данным. Кроме того, на этом шаге мы находим выборку $(x_k, k = 1, \dots, N)$, удовлетворяющую основной гипотезе о стационарности на уровне значимости $\varepsilon(\nu_*)$.

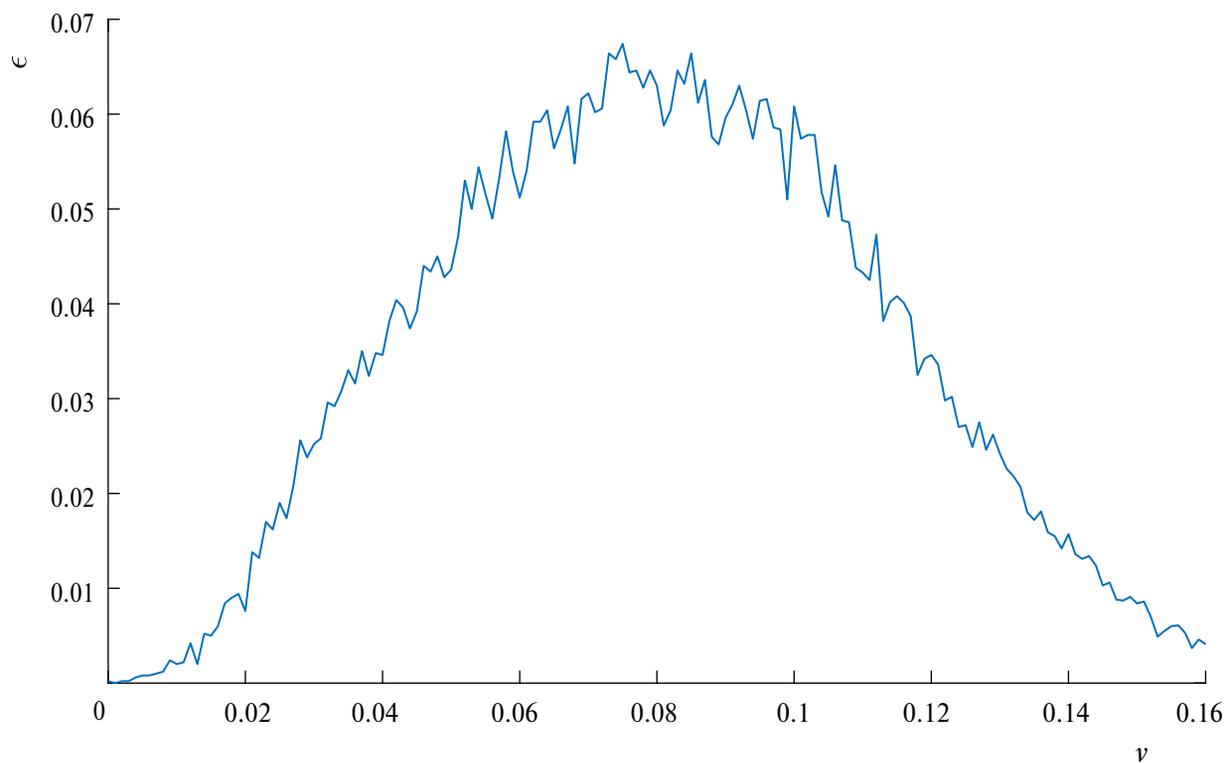
3. СТРУКТУРА РАБОТЫ

Приведем содержание основных этапов работы. В разд. 4 приводятся численные результаты оценки адекватности модели нестационарного шума по соответствию выборке значений плотности плазмы. В частности, в этом разделе находится оценка ν_* параметра ν . Отметим, что в этом разделе используется непараметрический критерий стационарности, который представлен в третьем пункте схемы оценки адекватности. Описание и обоснование этого критерия проводится в приложении А.

В разд. 5 проводится дополнительное исследование, устанавливающее близость конечномерных распределений нормированных частичных сумм выборки $(x_k, k = 1, \dots, N)$ (зависящей от ν_*) к соответствующему конечномерному распределению фрактального броуновского движения. В рамках этого исследования мы получаем оценку H_* параметра Хёрста H фрактального броуновского движения.



Фиг 1. График временного ряда значений плотности плазмы, $\rho = (\rho_k)$, $k = 1, \dots, 5 \cdot 10^5$.



Фиг 2. График реально достигнутых уровней значимости, $\varepsilon = \varepsilon(v)$, $0 \leq v \leq 0.16$.

Далее, устанавливается степенное поведение дисперсии частичных сумм нестационарного шума, соответствующего выборке $(\rho_k, k = 1, \dots, N)$.

В разд. 6 рассматривается физическая интерпретация представленной модели нестационарного шума. В частности, устанавливается интерпретация параметров ν и H как параметров нелокальности по времени и пространству соответственно.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНКИ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

В настоящем разделе мы реализуем схему проверки адекватности модели на выборке плотностей плазмы (см. разд. 3). При этом мы используем критерий стационарности (см. приложение А) для получения реально достигнутого уровня значимости $\varepsilon = \varepsilon(\nu)$ на выборке $(x_i, i = 1, \dots, N)$, зависящей от ν (см. фиг. 2).

Мы получаем, что $\nu_* = 0.075$ (точка максимума для $\varepsilon = \varepsilon(\nu)$) при этом $\varepsilon(\nu_*) = 0.067$. Отметим, что реально достигнутый уровень значимости $\varepsilon(\nu_*)$ достаточно высок, чтобы говорить об адекватности модели нестационарного шума по ее соответствию реальным данным. Таким образом, мы можем говорить о последовательности нестационарного шума $\{\rho_k\}$, которая реализуется выборкой $(\rho_k, k = 1, \dots, N)$.

Заметим, что в рамках этого раздела мы получаем выборку $(x_k, k = 1, \dots, N)$, удовлетворяющую основной гипотезе о стационарности на уровне значимости $\varepsilon(\nu_*)$.

5. ОЦЕНКА ПОВЕДЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ СУММ НЕСТАЦИОНАРНОГО ШУМА

5.1. Предварительные замечания

Через $B_H(t)$ обозначим фрактальное броуновское движение с параметром Хёрста H (см. [11, 12]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t, s) := \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \tag{3}$$

где $H \in (0, 1)$ (случай $H = 1/2$ соответствует стандартному винеровскому процессу). Определим гауссовский процесс:

$$Z_{\nu, H}(t) := \int_0^t B_H(t - s) dp_\nu(s), \tag{4}$$

где, напомним, $p_\nu(t) = t^\nu, 0 \leq \nu \leq 1$ ($p_0(0) = 0$). Ниже нам понадобится следующий результат из [7, следствие 1] (см. также [10, следствие 1]) для последовательности $\{\rho_k\}$ (см. (1)), где в качестве функции памяти M рассматривается p_ν .

Теорема 1. Пусть стационарная последовательность $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ обладает спектральной плотностью. Пусть, кроме того, дисперсия суммы $\sum_{i=1}^n x_i$ имеет следующее поведение: $\text{Var}(\sum_{i=1}^n x_i) \sim \sigma^2 n^{2H}, n \rightarrow +\infty$, где $H \in (0, 1)$ и $\sigma^2 > 0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\text{Var}(\sum_{i=1}^n \rho_i) \sim s_{\nu, H}^2 \sigma^2 n^{2H+2\nu}, \tag{5}$$

где $s_{\nu, H}^2 := \text{Var}(Z_{\nu, H}(1))$.

Из (3) и (4) сразу следует, что для константы $s_{\nu, H}^2$ имеет место представление

$$s_{\nu, H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dp_\nu(u) dp_\nu(v).$$

Центрированная гауссовская последовательность называется *фрактальным шумом* с параметром $H \in (0, 1)$ и дисперсией δ^2 (см., например, [13]), если ее ковариационная функция $q = q(j)$ имеет вид:

$$q(j) := \frac{\delta^2}{2} (|j+1|^{2H} + |j-1|^{2H} - 2|j|^{2H}), j \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

В дальнейшем для действительного числа x через $[x]$ будем обозначать наибольшее целое число, не превосходящее x .

5.2. Степенное поведение частичных сумм стационарного шума

Прежде чем перейти к рассмотрению выборки $(x_j, j = 1, \dots, N)$ (зависящей от v_*), реализующей стационарную последовательность $\{x_j\}$ (эта выборка получена в разд. 4), сделаем предварительные замечания. Пусть $\{x_j\}$ — стационарная последовательность случайных величин с конечной дисперсией. Введем обозначение: $S_n := \sum_{j=1}^n (x_j - a)$, где $a = \mathbf{E}(x_1)$. Отметим, что сходимость при $n \rightarrow \infty$ конечномерных

распределений процессов $\frac{S_{[nt]}}{\sigma n^H}, t \in [0, 1]$, где $H \in (0, 1)$ и $\sigma > 0$, к конечномерному распределению $B_H(t), t \in [0, 1]$, равносильна следующей: распределения случайных векторов

$$\left(\frac{S_\theta}{\sigma \theta^H}, \frac{S_{2\theta} - S_\theta}{\sigma \theta^H}, \dots, \frac{S_{k\theta} - S_{(k-1)\theta}}{\sigma \theta^H} \right)$$

сходятся к распределению $(B_H(1), B_H(2) - B_H(1), \dots, B_H(k) - B_H(k - 1))$ при $\theta \rightarrow \infty$. При этом очевидно, что последовательность $\{B_H(k) - B_H(k - 1), k = 1, 2, \dots\}$ является стандартным фрактальным шумом (т. е. $\delta = 1$ в (6)). Далее заметим, что при условии существования спектральной плотности $\{x_j\}$ следствием упомянутой сходимости конечномерных распределений является эквивалентность (см. [14])

$$\mathbf{Var}(S_n) \sim \sigma^2 n^{2H}, n \rightarrow \infty. \tag{7}$$

Вернемся к рассмотрению выборки $(x_j, j = 1, \dots, N)$ (зависящей от v_*). Сформируем

$$(x_j^{(\theta)}, j = 1, \dots, [N / \theta]),$$

где

$$x_j^{(\theta)} := \sum_{i=(j-1)\theta+1}^{j\theta} (x_i - a_*) \quad (a_* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i).$$

Значение θ должно быть достаточно большим, чтобы «накопить нормальность», стало быть, это значение будем выбирать много больше, чем объем выборки $(x_j^{(\theta)})$, т. е. $\theta \gg [N / \theta]$. Заметим, что $x_j^{(\theta)}$ реализует $S_{j\theta} - S_{(j-1)\theta}, j = 1, \dots, k$, где $k = [N / \theta]$ (см. выше).

В дальнейшем будет проверяться гипотеза о том, что $(x_j^{(\theta)}, j = 1, \dots, [N / \theta])$ является фрактальным шумом с дисперсией $\sigma^2 \theta^{2H}$. Оценки для параметров σ и H можно получить, применяя известные методы, в частности, метод дисперсий (см. [15]). В приложении Б приводится этот метод.

Пусть Q — ковариационная матрица фрактального шума (см. (6)). Найдется ортогональная матрица C и диагональная D , такие что $C^T Q C = D$. Обозначим $B = \sqrt{D}$. Отметим, что произведение $(B^{-1} C^T)(x_j^{(\theta)})^T$ дает выборку, которая проверяется на стандартную нормальность (см., например, [16]). Естественно при этом использовать параметрический критерий χ^2 . Чтобы обеспечить корректность применения критерия χ^2 , значение $[N / \theta]$ должно быть велико, при этом (как выше отмечалось) значение θ должно быть много больше значения $[N / \theta]$, т. е.

$$\sqrt{N} \ll \theta \ll N. \tag{8}$$

Реально достигнутый уровень значимости этого критерия дает оценку близости распределения выборки $(x_j^{(\theta)})$ к распределению фрактального шума.

Уточним намеченные вычислительные процедуры в следующем методе.

- Метод.** 1. Используя метод дисперсий, по $(x_j, j = 1, \dots, N)$ находим оценки σ_* и H_* параметров σ и H соответственно.
2. Центрируем выборку $(x_j, j = 1, \dots, N)$ с помощью $a_* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$. Получаем $x'_j = x_j - a_*, j = 1, \dots, N$.
3. Формируем: $x_j^{(\theta)} = \sum_{i=(j-1)\theta+1}^{j\theta} x'_i, j = 1, \dots, [N / \theta]$.
4. Определяем ковариационную матрицу Q фрактального шума (см. (6)), где $\delta = \sigma_* \theta^{H_*}$.
5. Используя матрицу Q , находим матрицы B и C . Умножив $B^{-1} C^T$ на вектор $(x_j^{(\theta)}, j = 1, \dots, [N / \theta])^T$, получаем $(\eta_j, j = 1, \dots, [N / \theta])$.

6. На выборке $(\eta_j, j = 1, \dots, [N / \theta])$ находим реально достигнутый уровень критерия χ^2 при основной гипотезе, что эта выборка имеет стандартное нормальное распределение.

6.1. Пусть $m = [N / \theta]$. Разбиваем числовую ось на $l = [\sqrt{m}] + 1$ непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$, так что $m\Phi_{0,1}(\Delta_1) = m\Phi_{0,1}(\Delta_2) = \dots = m\Phi_{0,1}(\Delta_l) = m / l$. На выборке $(\eta_j, j = 1, \dots, m)$ находим значение $X^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(v_i - m / l)^2}{m / l}$, где v_i — число элементов (η_j) в $\Delta_i, i = 1, \dots, l$.

6.2. Имея в виду три оцениваемых параметра a, σ и H , находим реально достигнутый уровень значимости критерия χ^2 , а именно: $\varepsilon(\theta) = 1 - \chi_{l-4}^2(X^2)$.

В соответствии с (8) выберем в приведенном методе значение θ равным $r[\sqrt{N}]$, где r находится в целочисленном диапазоне $[5, 10]$. Для этих значений составим таблицу реально достигнутых уровней значимостей. Отметим, что $a_* = 0.068, \sigma_* = 0.067, H_* = 0.718$.

Таблица 1.

r	5	6	7	8	9	10
$\varepsilon(r[\sqrt{N}])$	0.082	0.045	0.110	0.048	0.140	0.696

Мы получили достаточно высокие уровни значимостей. Поэтому можно принять гипотезу о том, что выборка $(x_j^{(0)})$ ($\theta = r[\sqrt{N}], r = 5, \dots, 10$) является фрактальным шумом с дисперсией $\sigma_*^2 \theta^{2H_*}$.

5.3. Степенное поведение частичных сумм нестационарного шума

Стало быть, в соответствии с (7) и теоремой 1 мы выводим, что для последовательности нестационарного шума $\{\rho_j\}$, реализуемой выборкой $(\rho_j, j = 1, \dots, N)$, можно говорить о близости $\frac{\text{Var}(\sum_{j=1}^n \rho_j)}{\beta n^\alpha}$ к 1 при достаточно больших n , где $\alpha := 2H + 2\nu$ и $\beta := \sigma^2 \cdot s_{\nu, H}^2$. При этом соответствующие оценки параметров α и β имеют вид: $\alpha_* = 1.586, \beta_* = 0.003$ (заметим, что $s_{\nu_*, H_*}^2 = 0.776$, где, напомним, $\nu_* = 0.075, H_* = 0.718$).

6. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ШУМА

Соотношение (1) для плотности ρ_k в момент времени $k\tau$ (τ — единица измерения времени) позволяет определить скорость изменения этой плотности в момент $k\tau$

$$\frac{\Delta\rho_k}{\tau} = \sum_{i=0}^{k-1} f(k-i)\Delta M(i), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

где $\Delta\rho_k := \rho_k - \rho_{k-1}$ ($\rho_0 = 0$) и $f(k) := (x_k - x_{k-1}) / \tau$ ($x_0 = 0$). Полученное представление можно рассматривать как уравнение динамики плотности плазмы в периферийной области термоядерного реактора.

В представлении (9) скорость изменения плотности плазмы определяется фактором f в настоящий и предыдущие моменты времени (начиная с начального момента 0), при этом распределение этого фактора по времени задается с помощью функции памяти M . Таким образом, M определяет нелокальность по времени модели нестационарного шума.

Отметим, что в (9) правую часть можно интерпретировать как поток, возникающий при «действии» на физическую систему с памятью фактора f (см. [17–19]).

Поскольку $f(k) = (x_k - x_{k-1}) / \tau, k = 1, 2, \dots$, поэтому нелокальность действия f определяется $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$. Этой последовательности соответствует представление (15) в виде бесконечного двухстороннего скользящего среднего. Структура памяти такой последовательности определяет, вообще говоря, ее дальнюю зависимость (см., например, [20, разд. 2.1]). В этом случае мы будем говорить о том, что $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ формирует нелокальность по пространству модели нестационарного шума (см. также [7, замечание 7]).

Если $M(n)$ и $\text{Var}(\sum_{i=1}^n x_i)$ имеют степенное по n поведение, то о соответствующих показателях ν и H можно говорить как о параметрах нелокальности по времени и пространству.

Известно, что механизм аномального переноса основан на конкуренции, в которой нагрев плазмы и идеальные процессы фоновой теплопроводности приводят к аномальному переносу тепла и плотности

плазмы (см. [5]). Подчеркнем еще раз, что в представленной модели параметры ν и H являются параметрами нелокальности по времени и пространству, причем параметр ν определяет также и уровень нестационарности модели. В этом смысле мы можем предположить, что параметр ν связан с эффектами нелокальности по времени, возникающими в процессе нагрева плазмы (тепловое последствие) и, соответственно, параметр H связан с фоновой теплопроводностью.

Заметим, что конкуренция параметров нелокальности определяет в настоящем случае супердиффузионное поведение процесса частичных сумм, построенного по последовательности нестационарного шума (напомним оценку $\alpha_* = 1.586$ показателя степенного изменения дисперсии упомянутого процесса частичных сумм, см. (5) и разд. 5.3).

Рассматриваемый в настоящей работе подход к моделированию конкуренции пространственной и временной нелокальности принципиально отличается от более известного подхода, основанного на модели блуждания в непрерывном времени (STRW-модель). В таком подходе применяется техника устойчивых распределений, при этом суб- и супердиффузионный режим процесса определяется отношением параметров устойчивых распределений, соответствующих времени ожидания и величине скачка блуждающей частицы (см., например, [4]). В частности, это приводит к тому, что для моделирования супердиффузионного режима переноса используются устойчивые распределения с бесконечным вторым моментом. Следует отметить критику такого подхода, поскольку в большинстве приложений (как и в настоящем случае) нет оснований отказываться от предположения об ограниченности влияния каждого случайного фактора на регистрируемый процесс (см. [21]).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена модель нестационарного шума и проверена ее адекватность на соответствие экспериментальным данным, являющимся временным рядом значений плотности плазмы термоядерной установки. Установлено, что эта модель является состоятельной с реально достигнутым уровнем значимости 0.067. Для дисперсии процесса частичных сумм нестационарного шума, соответствующего временному ряду значений плотности плазмы, установлен степенной закон изменения по времени со следующими оценками показателя степенного изменения и масштабного коэффициента: $\alpha_* = 1.586$, $\beta_* = 0.003$; а также оценками $\nu_* = 0.075$, $H_* = 0.718$ параметров нелокальности по времени и пространству соответственно. Кроме того, для обозначенной модели и ее параметров нелокальности в разд. 6 приведена физическая интерпретация.

Следует отметить, что мы подтверждаем другими методами полученное в [6] соответствие (на определенном уровне значимости) модели нестационарного шума и выборки плотностей плазмы. Однако, хотелось бы подчеркнуть, что представленная модель нестационарного шума, вообще говоря, не предполагает степенное поведение функции памяти и дисперсии частичных сумм стационарной последовательности. Более того, в настоящей работе получена новая методология, позволяющая находить уровень адекватности такой модели по ее соответствию экспериментальным данным. Это связано с тем, что поиск адекватности модели основывается на непараметрическом критерии проверки стационарности.

Используя полученную функцию памяти и стационарную последовательность, можно численно имитировать выборку плотностей плазмы, применяя соотношение (1) и метод обратной функции распределения моделирования стационарных последовательностей. В [6] рассматривается пример такой имитации, а в [22, 23] приводится теоретическое обоснование упомянутого метода обратной функции.

Перспективным направлением для дальнейшего применения полученной методологии является анализ временных рядов плотности плазмы термоядерного реактора при разных режимах работы. В частности, эта методология позволяет оценивать уровень нестационарности плазмы в периферийной зоне реактора при этих режимах.

Отметим также, что в [7] построена модель нестационарного шума, которая реализует более общую, чем в настоящей работе, структуру нелокальности по времени, что позволяет расширить спектр исследуемых статистических данных.

Критерий стационарности

В этом разделе мы будем следовать работе [2]. Сразу отметим, что критерий стационарности из [2] основывается на многошаговой оценке спектральной плотности стационарной последовательности (см. ниже (11)) и разложении стационарной последовательности, имеющей спектральную плотность, по белому шуму (см. (15)).

Рассмотрим выборку $x = (x_n, n = 1, \dots, N)$, полученную из случайной последовательности $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ с конечной дисперсией. Построим статистический критерий для проверки основной гипотезы о том, что последовательность $\{x_n\}$ является стационарной против альтернативы, что эта последовательность не является стационарной.

Разобьем целочисленный интервал $(1, \dots, N)$ на L последовательных, непересекающихся интервалов длины $K = \lfloor N/L \rfloor$. Эти интервалы определяют разбиение выборки x на L частей, а именно: $(x_{K(m-1)+1}, \dots, x_{Km})$, $m = 1, \dots, L$. Найдем дискретную вытянутую сфероидальную последовательность оконных функций $w = (w_r, r = 1, \dots, K)$ (см. [24]).

Заметим, что элементы w решают проблему спектральной концентрации. Эта проблема формулируется как задача поиска последовательности определенной длины, для которой ее дискретное преобразование Фурье максимально сосредоточено на заданном частотном интервале (см. [24]).

Для каждого упомянутого выше интервала (в этом случае $m = 1, \dots, L$) и каждой функции w_r из w определим дискретное преобразование Фурье

$$X_m^{w_r}(k) := \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{n=K(m-1)+1}^{Km} w_r(n - K(m-1)) \times \\ \times (x_n - a_*) e^{-i2\pi(k-1)(n-1)/K}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (10)$$

где $a_* := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. Используя (10), для каждого $m = 1, \dots, L$ найдем (при условии, что верна основная гипотеза) периодограмму

$$S_x^m(k) := \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R |X_m^{w_r}(k)|^2, \quad k = 1, \dots, K. \quad (11)$$

Оценку (11) называют *многошаговой оценкой* спектральной плотности последовательности $\{x_n\}$ (см., например, [25]).

Заметим, что обычно в качестве R выбирают значения 4, 5, 6 или 7. В дальнейшем мы обсудим проблему выбора параметра R в рамках применения критерия стационарности (см. также [25]).

Будем искать оценку спектральной плотности последовательности $\{x_n\}$ (при условии, что верна основная гипотеза) в виде

$$S_x(k) := \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L S_x^m(k). \quad (12)$$

Определим статистику критерия

$$V(x) := \frac{1}{LK} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^L \left(S_x^m(k) - \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L S_x^p(k) \right)^2. \quad (13)$$

Заметим, что относительно малое значение $V(x)$ будет говорить в пользу принятия основной гипотезы критерия (далее решается вопрос, с какими значениями сравнивать $V(x)$).

Отметим также, что поскольку заранее нет приоритета в выборе величин значений K и L , поэтому всюду в дальнейшем L мы будем полагать равным $L := \lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1$.

В дальнейшем нам понадобится следующий результат (см., например, [16]).

Предложение 1. Пусть существует преобразование Фурье некоторой функции h

$$H(t) := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t m} h(m), \quad t \in [0, 1].$$

Пусть, кроме того, $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — центрированная стационарная последовательность со спектральной плотностью $f_\xi(\cdot)$, такая что $\int_0^1 |H(t)|^2 f_\xi(t) dt < +\infty$. Тогда спектральная плотность последовательности

$$\eta_n := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)\xi_{n-m}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

имеет следующее представление:

$$f_\eta(t) := |H(t)|^2 f_\xi(t), \quad t \in [0, 1]. \tag{14}$$

Далее отметим, что в широких предположениях стационарную последовательность можно представить в виде скользящего среднего, сформированного по некоторой неслучайной квадратично суммируемой последовательности и белому шуму (см. [26]). А именно, пусть $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ — стационарная последовательность случайных величин, для которой существует спектральная плотность, тогда имеет место представление

$$x_n = a + \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\xi_{n-m}, \tag{15}$$

где $a = \mathbf{E}(x_1)$ и $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность некоррелированных случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями (белый шум), $\{h(m), m \in \mathbb{Z}\}$ — неслучайная, квадратично суммируемая последовательность действительных чисел.

Из (14) и (15) следует, что оценку для спектральной плотности последовательности $\{x_n\}$ (при условии, что верна основная гипотеза) можно искать в виде

$$Z_x^m(k) := S_x(k)S_\xi^m(k), \quad m = 1, \dots, L, \tag{16}$$

где $S_\xi^m(k)$ — периодограмма белого шума ($S_\xi^m(k) \approx 1$), построенная по выборке $(\xi_{(m-1)K+1}, \dots, \xi_{mK})$, $m = 1, \dots, L$ (периодограмма строится как в (11)), и $S_x(\cdot)$ определена в (12). Таким образом, мы по реализациям выборки (ξ_1, \dots, ξ_N) , используя (16), будем получать реализации оценки спектральной плотности $\{x_n\}$.

По (16) (действуя как в (13)) определим статистику

$$V(x, \xi) := \frac{1}{LK} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^L \left(Z_x^m(k) - \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L Z_x^p(k) \right)^2. \tag{17}$$

Подставляя (16) в (17), выводим

$$V(x, \xi) = \frac{1}{LK} \sum_{k=1}^K S_x^2(k) \sum_{m=1}^L \left(S_\xi^m(k) - \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L S_\xi^p(k) \right)^2. \tag{18}$$

При условии выполнения основной гипотезы мы получаем, что $V(x, \xi)$ формируется по стационарной последовательности, спектральная плотность которой совпадает со спектральной плотностью $\{x_n\}$. Стало быть, значения, реализующие $V(x, \xi)$ и превосходящие $V(x)$, будут говорить в пользу принятия этой гипотезы (см. выше замечание к (13)).

Будем моделировать I независимых выборок белого шума: $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_N^{(i)})$, $i = 1, \dots, I$, где каждая выборка состоит из независимых, равномерно распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией (для моделирования в данной работе используется функция `rand` математического пакета Matlab).

Найдем реально достигнутый уровень значимости исследуемого критерия (при основной гипотезе о стационарности исследуемой выборки). Определим множество $\{i : V(x, \xi^{(i)}) \geq V(x)\}$, обозначим число элементов этого множества через I_0 . Отношение I_0 / I определяет (приближенно) реально достигнутый уровень значимости критерия.

Уточним представленные выше процедуры, приводящие к критерию проверки основной гипотезы о стационарности, в следующем методе.

Метод. 1. Разобьем выборку x на L частей, а именно: $(x_{K(m-1)+1}, \dots, x_{Km})$, $m = 1, \dots, L$.

2. Найдем дискретную вытянутую сфероидальную последовательность $w = (w_r, r = 1, \dots, R)$ (поиск такой последовательности реализуется функцией `dpss` математического пакета Matlab). Для каждого $m = 1, \dots, L$ и для каждого элемента последовательности w определим дискретное преобразование Фурье (см. (10)).

3. В соответствии с (11) (используя п. 2) найдем для каждого $m = 1, \dots, L$ периодограмму (можно использовать функцию `periodogram` математического пакета Matlab).

4. Вычисляем статистику критерия $V(x)$ (см. (13)).

5. Смоделируем I независимых выборок белого шума: $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_N^{(i)})$, $i = 1, \dots, I$, где каждая выборка состоит из независимых, равномерно распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Вычислим $V(x, \xi^{(i)})$, $i = 1, \dots, I$ (в настоящей работе берется значение $I=5000$).

6. Сформируем множество $\{i : V(x, \xi^{(i)}) \geq V(x)\}$, обозначим число элементов этого множества через I_0 . Отношение I_0 / I определяет реально достигнутый уровень значимости критерия.

Проведем исследование полученного статистического критерия на нестационарной альтернативе, сформированной в соответствии с моделью нестационарного шума (1). Заметим, в [2] критерий исследуется на других альтернативах.

По стационарной последовательности $\xi = \{\xi_i, i = 1, 2, \dots\}$ с нулевым средним мы будем формировать нестационарный шум $\rho(\xi, \nu) = \{\rho_k(\xi, \nu), k = 1, 2, \dots\}$

$$\rho_k(\xi, \nu) = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_{k-i} \Delta p_\nu(i), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{19}$$

где $\Delta p_\nu(i) = p_\nu(i+1) - p_\nu(i)$ ($p_\nu(t) = t^\nu$, $0 \leq \nu \leq 1$ ($p_0(0) = 0$)).

Проведем моделирование 10 независимых друг от друга выборок белого шума $\xi^{(i)}$, $i = 1, \dots, 10$, так что каждая выборка состоит из N независимых стандартных нормальных случайных величин: $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_N^{(i)})$, где $i = 1, \dots, 10$, $N = 500001$. В соответствии с (19) построим выборки $\rho(\xi^{(i)}, 0.1)$, $i = 1, \dots, 10$.

Для формирования альтернативы мы выбрали достаточно малое значение $\nu = 0.1$. Ниже мы покажем, что для R , равного 6 и 7, критерий обладает высокой чувствительностью к распознаванию нестационарной альтернативы.

В третьей и четвертой строке следующих таблиц приведены реально достигнутые уровни значимостей критерия стационарности на выборках $\xi^{(i)}$ и $\rho(\xi^{(i)}, 0.1)$ (см. (19)) соответственно.

Будем принимать основную гипотезу о стационарности, если реально достигнутый уровень значимости критерия превосходит 0.05.

Таблица 2.

$R = 4$										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varepsilon(\xi^{(i)})$	0.128	0.168	0.021	0.221	0.341	0.088	0.515	0.013	0.030	0.430
$\varepsilon(\rho(\xi^{(i)}, 0.1))$	0.106	0.134	0.002	0.016	0.080	0.016	0.427	0.000	0.008	0.131

В случае $R=4$ критерий принимает альтернативу (при условии, что она верна) в 50% случаев (см. последнюю строку таблицы).

Таблица 3.

$R = 5$										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varepsilon(\xi^{(i)})$	0.100	0.128	0.014	0.137	0.312	0.034	0.402	0.006	0.016	0.289
$\varepsilon(\rho(\xi^{(i)}, 0.1))$	0.076	0.108	0.001	0.007	0.069	0.002	0.311	0.000	0.003	0.053

В случае $R=5$ критерий принимает альтернативу (при условии, что она верна) в 50 % случаев.

Таблица 4.

$R = 6$										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varepsilon(\xi^{(i)})$	0.077	0.095	0.018	0.161	0.172	0.011	0.313	0.002	0.016	0.215
$\varepsilon(\rho(\xi^{(i)}, 0.08))$	0.067	0.108	0.003	0.026	0.045	0.002	0.242	0.000	0.003	0.101
$\varepsilon(\rho(\xi^{(i)}, 0.1))$	0.046	0.082	0.001	0.006	0.017	0.001	0.169	0.000	0.002	0.050

В случае $R=6$ (при $\nu = 0.1$) критерий принимает альтернативу (при условии, что она верна) в 80 % случаев. Заметим, что уже в случае $\nu = 0.08$ чувствительность критерия к распознаванию нестационарной альтернативы уменьшается. В этом случае критерий принимает альтернативу (при условии, что она верна) в 60% случаев.

Таблица 5.

$R = 7$										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varepsilon(\xi^{(i)})$	0.051	0.077	0.008	0.072	0.201	0.003	0.310	0.000	0.011	0.154
$\varepsilon(\rho(\xi^{(i)}, 0.1))$	0.021	0.061	0.000	0.002	0.019	0.000	0.153	0.000	0.000	0.024

В случае $R=7$ критерий принимает альтернативу (при условии, что она верна) для 80% случаев.

В дальнейшем мы используем значение $R=6$, поскольку в этом случае имеет место достаточно высокая чувствительность критерия к распознаванию основной гипотезы (см. разд. 4). Более того, в этом случае критерий с высокой частотой отвергает основную гипотезу при условии, что верна альтернатива.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Метод дисперсий

Пусть $(x_k, k = 1, \dots, N)$ — выборка, реализующая стационарную последовательность $\{x_k\}$. Предполагается, что $\text{Var}(\sum_{k=1}^n x_k) \sim \sigma^2 n^{2H}$ при $n \rightarrow +\infty$. Следующий метод позволяет вычислять оценки параметров σ и H (см. [15]).

Метод. 1. Центрируем выборку $(x_k, k = 1, \dots, N)$, т. е. находим $x'_k = x_k - a_*, k = 1, \dots, N$, где $a_* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. В итоге получаем выборку $(x'_k, k = 1, \dots, N)$.

2. Вычисляем $m = \lceil \log_2(N) \rceil$. Для каждого $\tau = 2^L$, где $L = 0, \dots, m - 2$, масштабируем данные: $x_j^{(\tau)} = \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau} x'_i, j = 1, \dots, 2^{m-L}$.

3. Находим стандартное отклонение: $V_L := \sqrt{\frac{1}{2^{m-L}} \sum_{j=1}^{2^{m-L}} (x_j^{(2^L)})^2}$.

4. Составляем модель линейной регрессии $\ln V_L = HL \ln 2 + b + \varepsilon_L, L = 0, \dots, m - 2$, где $\{\varepsilon_L\}$ — ошибки модели.

5. Методом наименьших квадратов находим оценку H_* параметра H и свободный коэффициент b . Используя b , определяем оценку $\sigma_* = \exp(b)$ параметра σ .

Авторы признательны анонимным рецензентам за содержательные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аркашов Н.С., Селезнев В.А. О формировании соотношения нелокальностей в модели аномальной диффузии // ТМФ. 2017. Т. 193. 1. С. 115–132.

2. *Basu P., Rudoy D., Wolfe P.J.* A nonparametric test for stationarity based on local Fourier analysis // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2009. P. 3005–3008.
3. *Будаев В.П., Савин С.П., Зеленый Л.М.* Наблюдения перемежаемости и обобщённого самоподобия в турбулентных пограничных слоях лабораторной магнитосферной плазмы: на пути к определению количественных характеристик переноса // УФН. 2011. Т. 189. 9. С. 905–952.
4. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. 2000. V. 339. 1. P. 1–77.
5. *Пастухов В.П., Чудин Н.В.* Эффективная модель турбулентной конвекции плазмы центральной области токамака // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 90. 10. С. 722–729.
6. *Аркашов Н.С.* Об одном методе вероятностно-статистического анализа плотности низкочастотной турбулентной плазмы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. 3. С. 429–440.
7. *Arkashov N.S.* On the model of random walk with multiple memory structure // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2022. V. 603. P. 127795.
8. *Platani M., Goldberg I., Lamond A.I., and Swedlow J.R.* Cajal Body dynamics and association with chromatin are ATP-dependent // Nature Cell Biology. 2002. V. 4. 7. P. 502–508.
9. *Cherstvy A.G., Chechkin A.V., Metzler R.* Anomalous diffusion and ergodicity breaking in heterogeneous diffusion // New Journal of Physics. 2013. V. 15. 8. P. 083039.
10. *Аркашов Н.С.* Принцип инвариантности в форме Донскера для процессов частных сумм скользящих средних конечного порядка // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т.16. С. 1276–1288.
11. *Колмогоров А.Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26. 2. С. 115–118.
12. *Mandelbrot B., Van Ness J.* Fractional Brownian motions, fractional noise and applications // SIAM Review. 1968. V. 10. 4. P. 422–437.
13. *Samorodnitsky G. and Taqqu M.* Stable Non-Gaussian Random Processes. New York: Chapman & Hall, 1994.
14. *Konstantopoulos T., Sakhanenko A.* Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2004. V. 1. P. 47–63.
15. *Cannon M.J., Percival D.B., Caccia D.C., Raymond G.M., Bassingthwaite J.B.* Evaluating scaled window variance methods for estimating the Hurst coefficient of time series // Physica A. 1997. V. 241. P. 606–626.
16. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.
17. *Олемской А.И., Флат А.Я.* Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН. 1993. Т. 163. 12. С. 1–50.
18. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Т. 90. 3. С. 354–368.
19. *Владимирский В., Терлецкий Я.* Гидродинамическая теория поступательного броуновского движения // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. 6. С. 258–263.
20. *Beran J.* Statistics for Long-Memory Processes. New York: Chapman & Hall, 1994.
21. *Королев В.Ю.* Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. М.: ИПИ РАН, 2007.
22. *Пригарин С.М.* Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005.
23. *Prigarin S.M., Ogorodnikov V.A.* Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. Utrecht: VSP, 1996.
24. *Slepian D.* Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty-V: The Discrete Case // Bell System Technical Journal. 1978. V. 57. 5. P. 1371–1430.
25. *Haley C.L., Anitescu M.* Optimal Bandwidth for Multitaper Spectrum Estimation // IEEE Signal Processing Letters. 2017. V. 24. 11. P. 1696–1700.
26. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

ON THE PROBABILISTIC-STATISTICAL APPROACH TO THE ANALYSIS OF NONLOCALITY PARAMETERS OF PLASMA DENSITY**N. S. Arkashov^{a,*}, V. A. Seleznev^{b,**}***^aSobolev Institute of Mathematics,
Ave. Ac. Koptuyuga, 4, Novosibirsk, 630090 Russia**^bNovosibirsk State Technical University,
Karl Marx Avenue, 20, Novosibirsk, 630073 Russia***e-mail: nicky1978@mail.ru****e-mail: selvad46@mail.ru*

Received 20 December, 2022

Revised 18 October, 2023

Accepted 20 November, 2023

Abstract. A sample of values of plasma density in a thermonuclear facility is studied. A methodology for processing experimental data that makes it possible to establish correspondence between this sample and a model of nonstationary noise is proposed. This model is formed as convolution of a stationary sequence and a memory function, and it makes it possible to simulate the competition between space and time nonlocalities. A physical interpretation of the nonlocality parameters is described.

Keywords: nonlocality in time and space, spectral analysis, time series of physical quantities, plasma density.