

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 539.3

ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО
ТЕРМОУПРУГОГО ОПЕРАТОРА В ДЕКАРТОВОЙ,
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ
СИСТЕМАХ КООРДИНАТ¹⁾

© 2024 г. А. В. Земсков^{1,2,*}, Д. В. Тарлаковский^{2,1,**}

¹125993 Москва, Волоколамское ш., 4, МАИ, Россия

²119192 Москва, Мичуринский пр-т, 1, НИИ механики МГУ, Россия

*e-mail: azemskov1975@mail.ru

**e-mail: tdvhome@mail.ru

Поступила в редакцию 23.10.2023 г.

Переработанный вариант 14.11.2023 г.

Принята к публикации 17.11.2023 г.

Рассматривается вопрос о построении собственных функций одномерного термоупругого оператора в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Для постановки соответствующей задачи Штурма–Лиувилля используется метод разделения переменных Фурье, примененный к связанной системе уравнений термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепловых потоков. Показано, что собственные функции одномерного термоупругого оператора выражаются через известные тригонометрические, цилиндрические и сферические функции. Но при этом задачи связанной термоупругости решаются аналитически только при определенных граничных условиях, вид которых определяется свойствами собственных функций. Библ. 40. Табл. 1.

Ключевые слова: термоупругость, задача Штурма–Лиувилля, собственные функции, метод Фурье, цилиндрические функции, сферические функции.

DOI: 10.31857/S0044466924030051, **EDN:** XHGHS

1. ВВЕДЕНИЕ

За последнее время опубликовано очень большое количество работ, так или иначе связанных с исследованием эффектов взаимодействия полей различной физической природы: механических, температурных, диффузионных и пр. В частности, можно утверждать, что сформирована достаточно строгая математическая теория термоупругости, основанная на феноменологических подходах и моделях термодинамики и механики сплошной среды (см. [1–4]).

Несмотря на то, что первые модели термоупругости появились еще в середине XIX в., тема не перестает быть актуальной и в настоящее время. Это связано как с развитием научно-экспериментальной базы, так и с тем, что математический аппарат, описывающий связанные термоупругие процессы в сплошных средах постоянно совершенствуется.

При этом большое развитие получили теории, учитывающие конечную скорость распространения тепловых потоков, среди которых можно отметить модели Каттанео, Лорда–Шульмана, Грина–Линси, Грина–Нагди и т.д. (см. [5–12]). Это обусловлено тем, что классический закон теплопроводности Фурье дает очень большую погрешность при описании высокоскоростных, и в частности, импульсных процессов. Кроме того, можно отметить статьи, где для описания релаксационных эффектов используется аппарат дробного дифференцирования (см. [13–16]) и модели нелокального континуума Эрингена (см. [17–19]), которые позволяют, в известной мере, преодолеть локальность классических линейных моделей.

Однако на сегодняшний день остается немало нерешенных вопросов, связанных с аналитическим решением задач нестационарной связанной термоупругости. Анализ существующих публикаций

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 23-21-00189), <https://rscf.ru/project/23-21-00189/>.

показывает, что в плане решения соответствующих начально-краевых задач наиболее полно изучены модели в прямоугольной декартовой системе координат. Достаточно подробный обзор работ (правда, применительно к задачам термоупругой диффузии) дан в монографии [20]. Работ, посвященных решению задач термоупругости (в том числе, задач термоупругости с учетом других физических полей) в цилиндрической и сферической системах координат сравнительно немного и среди них можно выделить [21–31].

В этой связи отметим, что при решении задач в криволинейных системах координат очень важной проблемой является нахождение системы собственных функций, являющихся решением соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Этот вопрос достаточно хорошо изучен для начально-краевых задач теории упругости, теплопроводности и несвязанной термоупругости (см. [32–34]). Применительно к связанным задачам термоупругости данный вопрос в известных научных работах не обсуждался.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Для постановки задачи Штурма–Лиувилля рассмотрим однородную систему уравнений, с однородными граничными условиями, описывающую одномерные термоупругие процессы в сплошных средах (см. [2], [3], [32], [35]):

$$\ddot{u} = \Delta_\alpha u - \frac{\alpha}{\xi^2} u - \Lambda \vartheta'; \quad (1.1)$$

$$\sum_{k=0}^M \frac{(\tau_0)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left[\dot{\vartheta} - b \left(\dot{u}' + \frac{\alpha \dot{u}}{\xi} \right) \right] = \kappa \Delta_\alpha \vartheta; \quad (1.2)$$

$$u|_{\Pi_u} = 0, \quad \vartheta|_{\Pi_T} = 0, \quad \sigma|_{\Pi_\sigma} = 0, \quad \vartheta'|_{\Pi_q} = 0; \quad (1.3)$$

$$u|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial^k \vartheta}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (k = \overline{0, M-1}). \quad (1.4)$$

Здесь граница $\Pi = \partial G$ – граница области, занятой телом $G \subset \mathbb{R}^3$. Она разбита на участки $\Pi = \Pi_u \cup \Pi_\sigma = \Pi_T \cup \Pi_q$, $\Pi_u \cap \Pi_\sigma = \emptyset$, $\Pi_T \cap \Pi_q = \emptyset$ в соответствии с видом приложенной нагрузки. Точки означают производную по времени τ , штрих – производную по криволинейной координате ξ .

Все величины в (1.1)–(1.4) являются безразмерными. Их связь с размерными аналогами дается следующими равенствами:

$$u = \frac{u_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \tau_0 = \frac{C\tau_T}{L}, \quad c_{12} = \frac{C_{1122}}{C_{1111}}, \quad c_{11} = \frac{C_{1111}}{C_{1111}} = 1, \\ \xi = \frac{\xi_1}{L}, \quad \Lambda = \frac{b_{11}T_0}{C_{1111}}, \quad b = \frac{b_{11}}{\rho c_0}, \quad \kappa = \frac{\kappa_{11}}{\rho c_0 CL}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{11}}{C_{1111}}, \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_0},$$

где t – время; ξ_1 – криволинейная координата ($\xi_1 = x_1$ в декартовой системе координат и $\xi_1 = r$ – радиальная координата в цилиндрической и сферической системах координат); L – линейный масштаб задачи; u_1 – компонента вектора перемещений $\mathbf{u} = \{u_1(\xi_1, t), 0, 0\}$; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность среды; b_{ij} – температурные коэффициенты, характеризующие деформации за счет нагрева; κ_{ij} – компоненты тензора теплопроводности; c_0 – удельная теплоемкость; T_0 – начальная температура сплошной среды; T – актуальная температура сплошной среды; величина ϑ характеризует относительное приращение температуры; Λ – безразмерный коэффициент, характеризующий деформации за счет изменения температуры; τ_T – время релаксации тепловых потоков; параметр $\alpha = 0$ соответствует декартовой системе координат, $\alpha = 1$ – цилиндрической системе координат и $\alpha = 2$ – сферической системе координат; Δ_α – одномерный оператор Лапласа, имеющий вид

$$\Delta_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Компонента тензора напряжений σ_{11} (и ее безразмерный аналог σ) соответствует напряжениям, нормальным к поверхности тела, и определяются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{1111} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \alpha C_{1122} \frac{u_1}{\xi_1} - b_{11}(T - T_0), \\ \sigma &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha c_{12} \frac{u}{\xi} - \Lambda \vartheta.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Уравнение теплопроводности (1.2) учитывает релаксацию тепловых потоков, предполагающую конечную скорость распространения тепловых возмущений. Полагая верхний предел суммирования $M = 0$, приходим к классической модели с бесконечной скоростью распространения тепла; $M = 1$ соответствует модифицированному закону Фурье в форме Максвелла–Каттанео.

С целью уменьшения объема выкладок постановку и решение задачи Штурма–Лиувилля изложим для случая $M = 0$ с последующим обобщением для произвольного M . Будем искать решение задачи (1.1)–(1.4) в виде

$$u(\xi, \tau) = V(\xi)W(\tau), \quad \vartheta(\xi, \tau) = \Phi(\xi)\Psi(\tau). \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.1) и (1.2), получаем

$$\begin{aligned}V(\xi)\ddot{W}(\tau) &= W(\tau)\left[\Delta_\alpha V(\xi) - \frac{\alpha}{\xi^2}V(\xi)\right] - \Lambda\Psi(\tau)\Phi'(\xi), \\ \dot{\Psi}(\tau)\Phi(\xi) &= \kappa\Psi(\tau)\Delta_\alpha\Phi(\xi) - b\dot{W}(\tau)\left[V'(\xi) + \frac{\alpha V(\xi)}{\xi}\right].\end{aligned}\quad (1.7)$$

Теперь уравнение движения в (1.7) поделим на $V(\xi)W(\tau)$, а уравнение теплопереноса – на $\Psi(\tau)\Phi(\xi)$. Получаем (суммирование по повторяющимся греческим индексам не проводится)

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{W}(\tau)}{W(\tau)} &= \frac{\Delta_\alpha V(\xi)}{V(\xi)} - \frac{\alpha}{\xi^2} - \Lambda \frac{\Psi(\tau)}{W(\tau)} \frac{\Phi'(\xi)}{V(\xi)}, \\ \frac{\dot{\Psi}(\tau)}{\Psi(\tau)} &= \kappa \frac{\Delta_\alpha \Phi(\xi)}{\Phi(\xi)} - b \frac{\dot{W}(\tau)}{\Psi(\tau)} \left[\frac{V'(\xi)}{\Phi(\xi)} + \frac{\alpha V(\xi)}{\xi \Phi(\xi)} \right].\end{aligned}$$

В полученных равенствах левые части зависят от переменной τ , а правые – от переменных τ и ξ . Для обеспечения равенства потребуем, чтобы обе части этих уравнений не зависели от τ и ξ . В этом случае

$$\frac{\ddot{W}(t)}{W(t)} = -\gamma^2 = \text{const}, \quad \frac{\dot{\Psi}(t)}{\Psi(t)} = -\gamma^2 \omega = \text{const}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\Psi(t)}{W(t)} = q = \text{const}, \quad \frac{\dot{W}(t)}{\Psi(t)} = \frac{p}{q} = \text{const}. \quad (1.9)$$

В результате приходим к следующей системе уравнений относительно функций $V(\tau)$ и $\Phi(\xi)$:

$$\begin{aligned}-\gamma^2 &= \frac{1}{V(\xi)} \left[\Delta_\alpha V(\xi) - \frac{\alpha V(\xi)}{\xi^2} \right] - q\Lambda \frac{\Phi'(\xi)}{V(\xi)}, \\ -\gamma^2 \omega &= \frac{\kappa \Delta_\alpha \Phi(\xi)}{\Phi(\xi)} - \frac{pb}{q\Phi(\xi)} \left[V'(\xi) + \frac{\alpha V(\xi)}{\xi} \right].\end{aligned}\quad (1.10)$$

Для формулировки задачи Штурма–Лиувилля эти уравнения дополняются однородными краевыми условиями, которые будут получены далее.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В декартовой системе координат уравнения (1.10) запишутся так ($\xi = x$)

$$\begin{aligned} -\gamma^2 &= \frac{V''(x)}{V(x)} - q \frac{\Lambda \Phi'(x)}{V(x)}, \\ -\gamma^2 \omega &= \frac{\kappa \Phi''(x)}{\Phi(x)} - \frac{p}{q} \frac{b V'(x)}{\Phi(x)}. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к следующей системе уравнений относительно функций $V(x)$ и $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned} -\gamma^2 V(x) &= V''(x) - q \Lambda \Phi'(x), \\ -\gamma^2 \omega \Phi(x) &= \kappa \Phi''(x) - \frac{p}{q} b V'(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Будем искать решение системы (2.1) в форме

$$V = V^* e^{\lambda x}, \quad \Phi = \Phi^* e^{\lambda x}. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + \gamma^2) V^* - q \Lambda \Phi^* &= 0, \\ -\frac{p}{q} b \lambda V^* + (\kappa \lambda^2 + \gamma^2 \omega) \Phi^* &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для существования нетривиального решения необходимо потребовать, чтобы определитель этой системы равнялся нулю. Имеем

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda^2 + \gamma^2 & -q \Lambda \\ -\frac{p}{q} b \lambda & \kappa \lambda^2 + \gamma^2 \omega \end{vmatrix} &= \\ = (\lambda^2 + \gamma^2)(\kappa \lambda^2 + \gamma^2 \omega) - p b \Lambda \lambda^2 &= \\ = \kappa \lambda^4 + (\gamma^2 \kappa + \gamma^2 \omega - p b \Lambda) \lambda^2 + \gamma^4 \omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Как видно, введенный ранее параметр q не входит в уравнение (2.4) и, следовательно, его корни также не будут зависеть от q . Поэтому, без ограничения общности, полагаем $q = 1$. Решение уравнения (2.4) имеет вид

$$\lambda_l = \gamma A_l, \quad A_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\left(\kappa + \omega - p b \Lambda / \gamma^2\right) \pm \sqrt{\left(\kappa + \omega - p b \Lambda / \gamma^2\right)^2 - 4 \omega \kappa}}{2 \kappa}}. \quad (2.5)$$

Далее, из равенств (1.8) имеем

$$\ddot{W}(\tau) + \gamma^2 W(\tau) = 0, \quad \ddot{\Psi}(\tau) + \gamma^2 \omega \Psi(\tau) = 0. \quad (2.6)$$

Общее решение этих уравнений

$$W(\tau) = C_1 e^{i \gamma \tau} + C_2 e^{-i \gamma \tau}, \quad \Psi(\tau) = C e^{-\omega \gamma^2 \tau}.$$

Подставляя $W(\tau)$ в первое равенство (1.9), при $q = 1$ получаем

$$C_1 e^{i \gamma \tau} + C_2 e^{-i \gamma \tau} = C e^{-\omega \gamma^2 \tau}.$$

Это равенство возможно, если $\omega = \pm i / \gamma$. При этом одна из констант C_1 или C_2 должна быть равна нулю, т.е.

$$\omega = \frac{i}{\gamma} \Rightarrow C_1 = 0, \quad C = C_2 \quad (2.7)$$

или

$$\omega = -\frac{i}{\gamma} \Rightarrow C_2 = 0, \quad C = C_1. \quad (2.8)$$

Воспользуемся для определенности равенствами (2.7). Тогда из второго равенства (1.9) при $q = 1$ получаем

$$-i\gamma C e^{-i\gamma\tau} = p C e^{-i\gamma\tau} \Rightarrow p = -i\gamma. \quad (2.9)$$

Подставляя полученные для p и ω равенства (2.8) и (2.9) в (2.5), получаем

$$\lambda_l = \gamma A_l, \quad A_{1,2} = \sqrt{\frac{-(\gamma\kappa + i + i\gamma b\Lambda) \pm \sqrt{(\gamma\kappa + i + i\gamma b\Lambda)^2 - 4i\gamma\kappa}}{2\kappa\gamma}} \quad (l = 1, 2), \quad (2.10)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2.$$

В результате решение задачи (2.1) с учетом (2.2) записывается в форме

$$V(x) = V_1 \cos(\lambda_1 x) + V_2 \sin(\lambda_1 x) + V_3 \cos(\lambda_2 x) + V_4 \sin(\lambda_2 x), \quad (2.11)$$

а выражение для $\Phi(x)$ получается из первого уравнения в (2.1):

$$\begin{aligned} \Phi'(x) = & -V_1 \frac{\lambda_1^2 - \gamma^2}{\Lambda} \cos(\lambda_1 x) - \\ & -V_2 \frac{\lambda_1^2 - \gamma^2}{\Lambda} \sin(\lambda_1 x) - V_3 \frac{\lambda_2^2 - \gamma^2}{\Lambda} \cos(\lambda_2 x) + \\ & + V_4 \frac{\lambda_2^2 - \gamma^2}{\Lambda} \sin(\lambda_2 x). \end{aligned}$$

Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & V_1 \omega_1 \sin(\lambda_1 x) - V_2 \omega_1 \cos(\lambda_1 x) + \\ & + V_3 \omega_2 \sin(\lambda_2 x) - V_4 \omega_2 \cos(\lambda_2 x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\omega_1 = \frac{\gamma^2 - \lambda_1^2}{\Lambda \lambda_1}, \quad \omega_2 = \frac{\gamma^2 - \lambda_2^2}{\Lambda \lambda_2}. \quad (2.13)$$

Постоянные V_l находятся из граничных условий. Вначале рассмотрим граничные условия (фиксируются граничное поле перемещений и температурный поток):

$$V|_{x=0} = 0, \quad V|_{x=1} = 0, \quad \Phi'|_{x=0} = 0, \quad \Phi'|_{x=1} = 0. \quad (2.14)$$

Подстановкой (2.11) и (2.12) в (2.14) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} V_1 + V_3 &= 0, \quad V_1 \omega_1 \lambda_1 + V_3 \omega_2 \lambda_2 = 0, \\ V_1 \cos \lambda_1 + V_2 \sin \lambda_1 + V_3 \cos \lambda_2 + V_4 \sin \lambda_2 &= 0, \\ V_1 \lambda_1 \omega_1 \cos \lambda_1 + V_2 \lambda_1 \omega_1 \sin \lambda_1 + V_3 \lambda_2 \omega_2 \cos \lambda_2 + V_4 \lambda_2 \omega_2 \sin \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая ее, получаем либо

$$V_1 = V_3 = V_4 = 0, \quad \lambda_{1n} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

либо

$$V_1 = V_3 = V_2 = 0, \quad \lambda_{2n} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

И в том, и в другом случаях приходим к одному и тому же набору собственных функций $\{\sin \lambda_n x, \cos \lambda_n x\}$, $\lambda_n = \pi n$, с помощью которых решение задачи (2.1) с краевыми условиями (2.14) запишется так:

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \lambda_n x, \\ \Phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos \lambda_n x \quad (\lambda_n = \pi n). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Аналогичным образом доказывается, что в случае граничных условий, где фиксируется нормальное напряжение и температурное поле,

$$(V' - \Lambda \Phi)|_{x=0} = 0, \quad (V' - \Lambda \Phi)|_{x=1} = 0, \quad \Phi|_{x=0} = 0, \quad \Phi|_{x=1} = 0, \quad (2.16)$$

решение имеет вид

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos \lambda_n x, \\ \Phi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \lambda_n x \quad (\lambda_n = \pi n). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Еще одни краевые условия, для которых аналогичным образом можно найти систему собственных функций, имеют вид

$$\begin{aligned} V|_{x=0} &= 0, \quad (V' - \Lambda \Phi)|_{x=1} = 0, \\ \Phi'|_{x=0} &= 0, \quad \Phi|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \lambda_n x, \\ \Phi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos \lambda_n x \quad \left(\lambda_n = \pi \frac{2n-1}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Если в (2.18) поменять границы местами, то получим соответственно

$$(V' - \Lambda \Phi)|_{x=0} = 0, \quad V|_{x=1} = 0, \quad \Phi|_{x=0} = 0, \quad \Phi'|_{x=1} = 0; \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos \lambda_n x, \\ \Phi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \lambda_n x \quad \left(\lambda_n = \pi \frac{2n-1}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Вид рассмотренных здесь граничных условий целиком и полностью определяется свойствами производных тригонометрических функций, согласно которым параметр λ_n может удовлетворять одной из пар уравнений

$$(\sin \lambda_n)' = 0, \quad \cos \lambda_n = 0,$$

либо

$$(\cos \lambda_n)' = 0, \quad \sin \lambda_n = 0.$$

С учетом физического смысла это позволяет составить четыре вида граничных условий (2.14), (2.16), (2.18) и (2.20), которые и рассмотрены здесь.

В остальных случаях нахождение собственных функций не представляется возможным (см. [20]). Причем, под «остальными» краевыми условиями подразумеваются не просто другие условия, а условия, не являющиеся подобными по отношению к рассмотренным. Например, краевые условия, содержащие линейные комбинации величин

$$V^{(2k-2)}(x), \quad \Phi^{(2l-1)}(x) \quad (k, l \in \mathbb{N}),$$

являются подобными условиям (2.13) в том смысле, что решение соответствующей краевой задачи тоже будет иметь вид (2.14). Следовательно, краевые условия, представляющие собой линейные комбинации величин

$$V^{(2k-1)}(x), \quad \Phi^{(2l-2)}(x) \quad (k, l \in \mathbb{N}),$$

подобны (2.16) и т.д.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Уравнения (1.10) для одномерного термоупругого дифференциального оператора в цилиндрической и сферической системах координат записывается так:

$$\begin{aligned} -\gamma^2 V(r) &= V''(r) + \frac{\alpha V'(r)}{r} - \frac{\alpha V(r)}{r^2} - \Lambda \Phi'(r), \\ -i\gamma \Phi(r) &= \kappa \left[\Phi''(r) + \frac{\alpha \Phi'(r)}{r} \right] + i\gamma b \left[V'(r) + \frac{\alpha V(r)}{r} \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь сразу положено $p = -i\gamma$, $\omega = i\gamma^{-1}$ и $q = 1$.

Учитывая вид дифференциальных операторов второго порядка в уравнениях (3.1), решение в кольце $R_1 \leq r \leq R_2$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} V(r) &= V^* J_1^{(\alpha)}(\lambda r) + V^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda r), \\ \Phi(r) &= \Phi^* J_0^{(\alpha)}(\lambda r) + \Phi^{**} Y_0^{(\alpha)}(\lambda r), \\ J_\mu^{(\alpha)}(z) &= \begin{cases} J_\mu(z), & \alpha = 1, \\ j_\mu(z), & \alpha = 2, \end{cases} \quad Y_\mu^{(\alpha)}(z) = \begin{cases} Y_\mu(z), & \alpha = 1, \\ y_\mu(z), & \alpha = 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $J_\mu(z)$ – цилиндрическая функция Бесселя 1-го рода порядка μ ; $Y_\mu(z)$ – цилиндрическая функция Бесселя 2-го рода (функция Неймана) порядка μ . Соответственно $j_\mu(z)$ – сферическая функция Бесселя 1-го рода порядка μ ; $y_\mu(z)$ – сферическая функция Бесселя 2-го рода (функция Неймана) порядка μ .

Подставляя (3.2) в (3.1), с учетом свойств производных бесселевых функций (см. [33], [36]), получаем

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - \gamma^2) V^* + \lambda \Lambda \Phi^* &= 0, \quad -i\gamma \lambda b V^* + (\kappa \lambda^2 - i\gamma) \Phi^* = 0, \\ (\lambda^2 - \gamma^2) V^{**} + \lambda \Lambda \Phi^{**} &= 0, \quad -i\gamma \lambda b V^{**} + (\kappa \lambda^2 - i\gamma) \Phi^{**} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Как видно, уравнения (3.3) аналогичны уравнениям (2.3). Соответственно их решения будут иметь вид, сходный с (2.10):

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \gamma A_l, \quad A_{1,2} = \sqrt{\frac{\gamma \kappa + i + i\gamma b \Lambda \pm \sqrt{(\gamma \kappa + i + i\gamma b \Lambda)^2 - 4i\gamma \kappa}}{2\kappa \gamma}} \quad (l = 1, 2), \\ \lambda_3 &= -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом,

$$V(r) = \sum_{l=1}^4 \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l r) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l r) \right],$$

$$\Phi(r) = \sum_{l=1}^4 \left[\Phi_l^* J_0^{(\alpha)}(\lambda_l r) + \Phi_l^{**} Y_0^{(\alpha)}(\lambda_l r) \right].$$

Так как $J_1^{(\alpha)}(z)$ и $Y_1^{(\alpha)}(z)$ – нечетные функции, а $J_0^{(\alpha)}(z)$ и $Y_0^{(\alpha)}(z)$ – четные функции, то

$$J_1^{(\alpha)}(\lambda_3 r) = -J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 r), \quad J_1^{(\alpha)}(\lambda_4 r) = -J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 r),$$

$$J_0^{(\alpha)}(\lambda_3 r) = J_0^{(\alpha)}(\lambda_1 r), \quad J_0^{(\alpha)}(\lambda_4 r) = J_0^{(\alpha)}(\lambda_2 r),$$

$$Y_1^{(\alpha)}(\lambda_3 r) = -Y_1^{(\alpha)}(\lambda_1 r), \quad Y_1^{(\alpha)}(\lambda_4 r) = -Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 r),$$

$$Y_0^{(\alpha)}(\lambda_3 r) = Y_0^{(\alpha)}(\lambda_1 r), \quad Y_0^{(\alpha)}(\lambda_4 r) = Y_0^{(\alpha)}(\lambda_2 r).$$

Поэтому общее решение задачи Штурма–Лиувилля (3.1) запишется так:

$$V(r) = \sum_{l=1}^2 \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l r) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l r) \right],$$

$$\Phi(r) = \sum_{l=1}^2 \left[\Phi_l^* J_0^{(\alpha)}(\lambda_l r) + \Phi_l^{**} Y_0^{(\alpha)}(\lambda_l r) \right]. \quad (3.5)$$

Оставшиеся постоянные V_l^* , V_l^{**} , Φ_l^* и Φ_l^{**} определяются из граничных условий, при этом с учетом равенств (3.3)

$$\Phi_l^* = V_l^* \omega_l, \quad \Phi_l^{**} = V_l^{**} \omega_l,$$

где ω_l находятся по формулам (2.13).

Рассмотрим вначале случай, когда областью решения является круг радиуса R , $0 \leq r \leq R$. Функции Неймана не ограничены в нуле, поэтому константы V_l^{**} и Φ_l^{**} следует положить равными нулю. Тогда

$$V(r) = \sum_{l=1}^2 V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l r),$$

$$\Phi(r) = \sum_{l=1}^2 \Phi_l^* J_0^{(\alpha)}(\lambda_l r). \quad (3.6)$$

Исходя из свойств производных цилиндрических и сферических функций Бесселя (см. [33], [36]),

$$J_0^{(\alpha)'}(z) = J_1^{(\alpha)}(z),$$

$$J_0^{(\alpha)}(z) = z J_1^{(\alpha)'}(z) + \alpha J_1^{(\alpha)}(z), \quad (3.7)$$

параметр z может одновременно удовлетворять либо паре уравнений

$$J_1^{(\alpha)}(z) = 0, \quad J_0^{(\alpha)'}(z) = 0,$$

либо

$$J_0^{(\alpha)}(z) = 0, \quad z J_1^{(\alpha)'}(z) + \alpha J_1^{(\alpha)}(z) = 0.$$

Поэтому будем рассматривать граничные условия двух типов:

$$V(R) = 0, \quad \Phi'(R) = 0 \quad (3.8)$$

или

$$\Phi(R) = 0, \quad V'(R) + \frac{\alpha V(R)}{R} - \Lambda \Phi(R) = 0. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.6) в (3.8), получаем

$$\sum_{l=1}^2 V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R) = 0,$$

$$\sum_{l=1}^2 \Phi_l^* \frac{dJ_0^{(\alpha)}(\lambda_l r)}{dr} \Big|_{r=R} = - \sum_{l=1}^2 \Phi_l^* \lambda_l J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R) = \sum_{l=1}^2 \frac{\gamma^2 - \lambda_l^2}{\lambda_l \Lambda} V_l^* \lambda_l J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R) = 0.$$

Определитель этой системы равен

$$\begin{vmatrix} J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R) & J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R) \\ \left(\gamma^2 - \lambda_1^2\right) J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R) & \left(\gamma^2 - \lambda_2^2\right) J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\gamma^2 - \lambda_2^2 - \gamma^2 + \lambda_1^2\right) J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R) J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R) =$$

$$= \left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right) J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R) J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R). \quad (3.10)$$

Приравнявая определитель нулю, получаем

$$J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R) = 0 \Rightarrow V_2^* = 0,$$

или

$$J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R) = 0 \Rightarrow V_1^* = 0.$$

Эти равенства эквивалентны. Поэтому, ограничиваясь одним из двух вышеперечисленных вариантов, получаем

$$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad \Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad (3.11)$$

где λ_n ($n \in \mathbb{N}$) — параметр, удовлетворяющий одновременно двум уравнениям:

$$J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0, \quad J_0^{(\alpha)'}(\lambda_n R) = 0. \quad (3.12)$$

Аналогичным образом для граничных условий (3.9) получаем решение в виде (3.11), где λ_n является корнем уравнений

$$J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0, \quad \lambda_n R J_1^{(\alpha)'}(\lambda_n R) + \alpha J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0. \quad (3.13)$$

Перейдем теперь к построению собственных функций для кольца $R_1 \leq r \leq R_2$. Здесь возможны следующие варианты граничных условий:

$$V(R_2) = 0, \quad \Phi'(R_2) = 0, \quad V(R_1) = 0, \quad \Phi'(R_1) = 0; \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\Phi(R_2) = 0, \quad V'(R_2) + \frac{\alpha V(R_2)}{R_2} - \Lambda \Phi(R_2) &= 0, \\ \Phi(R_1) = 0, \quad V'(R_1) + \frac{\alpha V(R_1)}{R_1} - \Lambda \Phi(R_1) &= 0;\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\Phi(R_2) = 0, \quad V'(R_2) + \frac{\alpha V(R_2)}{R_2} - \Lambda \Phi(R_2) &= 0, \\ V(R_1) = 0, \quad \Phi'(R_1) &= 0;\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\Phi(R_1) = 0, \quad V'(R_1) + \frac{\alpha V(R_1)}{R_1} - \Lambda \Phi(R_1) &= 0, \\ V(R_2) = 0, \quad \Phi'(R_2) &= 0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Подставляя (3.5) в (3.14), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^2 \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_2) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_2) \right] &= 0, \\ \sum_{l=1}^2 \delta_l \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_2) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_2) \right] &= 0, \\ \sum_{l=1}^2 \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_1) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_1) \right] &= 0, \\ \sum_{l=1}^2 \delta_l \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_1) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_1) \right] &= 0, \\ \delta_l &= \gamma^2 - \lambda_l^2.\end{aligned}$$

Запишем матрицу этой системы:

$$\begin{pmatrix} J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_2) & J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) & Y_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_2) & Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) \\ \delta_1 J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_2) & \delta_2 J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) & \delta_1 Y_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_2) & \delta_2 Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) \\ J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_1) & J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) & Y_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_1) & Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) \\ \delta_1 J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_1) & \delta_2 J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) & \delta_1 Y_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_1) & \delta_2 Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований она приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)}{J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1)}{J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1)} - \frac{Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)}{J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что необходимым условием существования ненулевого решения является выполнение следующего равенства:

$$J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) - Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) = 0.$$

При этом $V_1^* = 0$ и $V_1^{**} = 0$. Для остальных постоянных получаем

$$V_2^* = -\frac{Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)}{J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)} V_2^{**}, \quad V_2^{**} \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, приходим к следующему решению:

$$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad \Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n r) &= Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), \\ \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n r) &= Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n r), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где λ_n удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) &= J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) - \\ &- Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В остальных случаях по аналогии получаем:

– Для граничных условий (3.15)

$$\begin{aligned} V(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n r), \\ \Phi(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n r), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n r) &= Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r) - \\ &- J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), \\ \Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n r) &= Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r) - \\ &- J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n r). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь λ_n – корень уравнений

$$\begin{aligned} \Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) &= J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) - \\ &- Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

– Для граничных условий (3.16) решение имеет вид (3.18), а λ_n является корнем уравнения

$$\begin{aligned} \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) &= Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) - \\ &- J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

– Для граничных условий (3.17) решение имеет вид (3.21), а λ_n удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) &= J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) - \\ &- Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Как и для задач в прямоугольной декартовой системе координат, получить решение задачи Штурма–Лиувилля при условиях, отличных (3.8) (3.9), (3.14)–(3.17), не представляется возможным.

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ВИДЕ РЯДОВ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

В соответствии с результатами, полученными в предыдущем разделе, рассмотрим ряды ($\alpha = 1, 2$)

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r),$$

$$f_n = \frac{1}{\|\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r)\|^2} \int_{R_1}^{R_2} r^\alpha f(r) \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r) dr, \quad (4.1)$$

где величины $\|\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r)\|^2$ определяются так:

$$\|\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r)\|^2 = \int_{R_1}^1 r^\alpha \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r) dr.$$

Используя известное равенство (см. [33], [36])

$$\int z^\alpha Z_\nu(\lambda z) S_\nu(\mu z) dz =$$

$$= \frac{\mu z^\alpha Z_\nu(\lambda z) S_{\nu-1}(\mu z) - \lambda z^\alpha Z_{\nu-1}(\lambda z) S_\nu(\mu z)}{\lambda^2 - \mu^2},$$

где в качестве Z_ν и S_ν выступает любая из функций $J_\nu^{(\alpha)}$ или $Y_\nu^{(\alpha)}$, а λ и μ – произвольные числа, нетрудно получить аналогичное соотношение для введенных в предыдущем разделе функций $\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r)$:

$$\int r^\alpha \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\mu r) dr =$$

$$= \frac{\mu r^\alpha \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{k,l-1}^{(\alpha)}(\mu r) - \lambda r^\alpha \Psi_{k,l-1}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\mu r)}{\lambda^2 - \mu^2}. \quad (4.2)$$

Пусть число λ удовлетворяет уравнению (3.20), т.е. $\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda R_1) = 0$ (граничные условия (3.14)). В этом случае из (3.20) следует, что $\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda R_2) = 0$. Тогда, используя равенство (4.2) и следуя [33], имеем

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu r) dr =$$

$$= R_2^\alpha \frac{\mu \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{10}^{(\alpha)}(\mu R_2) - \lambda \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_2)}{\lambda^2 - \mu^2} -$$

$$- R_1^\alpha \frac{\mu \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{10}^{(\alpha)}(\mu R_1) - \lambda \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_1)}{\lambda^2 - \mu^2} =$$

$$= \frac{\lambda R_2^\alpha \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_2) - \lambda R_1^\alpha \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_1)}{\mu^2 - \lambda^2}.$$

Для вычисления предела при $\mu \rightarrow \lambda$ воспользуемся правилом Лопиталя. Получаем

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu r) dr =$$

$$= \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda R_2^\alpha \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_2) - \lambda R_1^\alpha \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_1)}{\mu^2 - \lambda^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda R_2^{\alpha+1} \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{11}'^{(\alpha)}(\mu R_2) - \lambda R_1^{\alpha+1} \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{11}'^{(\alpha)}(\mu R_1)}{\mu} = \\
&= \frac{1}{2} \left[R_2^{\alpha+1} \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{11}'^{(\alpha)}(\lambda R_2) - R_1^{\alpha+1} \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{11}'^{(\alpha)}(\lambda R_1) \right].
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся следующими формулами, которые вытекают из свойств для производных функций Бесселя:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r)}{dr} &= \lambda \Psi_{11}'^{(\alpha)}(\lambda r) = \\
&= -\frac{\alpha}{r} \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r) + \lambda \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda r), \\
\frac{d\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda r)}{dr} &= \lambda \Psi_{10}'^{(\alpha)}(\lambda r) = -\lambda \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu r) dr = \\
&= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \right]^2.
\end{aligned}$$

Если же $\mu \neq \lambda$ и выполняется условие $\Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_1) = 0$, то

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu r) dr = 0.$$

Точно так же

$$\begin{aligned}
&\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_k r) dr = \\
&= \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2, & k = n, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \right\|^2 &= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \\
&- \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2.
\end{aligned}$$

В результате получаем ($j = 0, 1$)

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n), & k = n; \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_1^{(\alpha)}(\lambda_n) &= \left\| \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \right\|^2 = \\
&= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

В остальных случаях:

– Для граничных условий (3.15) λ_n удовлетворяют уравнению (3.23):

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \Psi_0^{(\alpha)}(\lambda_n), & k = n; \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(\alpha)}(\lambda_n) &= \left\| \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \right\|^2 = \\ &= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

– Для граничных условий (3.16) λ_n удовлетворяют уравнению (3.24):

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \tilde{\Psi}_1^{(\alpha)}(\lambda_n), & k = n; \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1^{(\alpha)}(\lambda_n) &= \left\| \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \right\|^2 = \\ &= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

– Для граничных условий (3.17) λ_n удовлетворяют уравнению (3.25):

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \tilde{\Psi}_0^{(\alpha)}(\lambda_n), & k = n; \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0^{(\alpha)}(\lambda_n) &= \left\| \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \right\|^2 = \\ &= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Таким образом, функции $\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r)$, взятые соответствующими парами, являются ортогональными на промежутке $R_1 \leq r \leq R_2$ в смысле скалярного произведения, определенного равенством ($\alpha = 1, 2$)

$$(f, g) = \int_{R_1}^{R_2} r^\alpha f(r) g(r) dr.$$

Покажем, что система функций $\Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n r)$ является полной, т.е. $(f(r), \Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n r)) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(r) \equiv 0$. Ограничимся случаем, когда $f(r)$ непрерывна в промежутке $[R_1, R_2]$. В силу (4.1) $(f(r), \Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n r)) = 0$ тогда и только тогда, когда $f_n = 0$. Тогда для функций $\Psi_{k0}^{(1)}(\lambda_n r)$ из первого равенства в (4.1) имеем

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^r \xi f(\xi) d\xi &= \int_{R_1}^r \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xi \Psi_{k0}^{(1)}(\lambda_n \xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_{R_1}^r \xi \Psi_{k0}^{(1)}(\lambda_n \xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \left[r \Psi_{k1}^{(1)}(\lambda_n r) - R_1 \Psi_{k1}^{(1)}(\lambda_n R_1) \right] = 0. \end{aligned}$$

В силу непрерывности функции $f(r)$ на промежутке $[R_1, R_2]$ получаем, что $f(r) \equiv 0$. Аналогично для функций $\Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n r)$ из первого равенства (4.1) находим

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^r f(\xi) d\xi &= \int_{R_1}^r \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n \xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_{R_1}^r \Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n \xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \left[\Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n R_1) - \Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n r) \right] = 0. \end{aligned}$$

И в этом случае $f(r) \equiv 0$ в силу ее непрерывности. Доказательство полноты системы функций $\Psi_{kl}^{(2)}(\lambda_n r)$ выполняется аналогичным образом. Приведенное рассуждение обобщается на случай пространства кусочно-непрерывных на отрезке $[R_1, R_2]$ функций. Доказательство полноты при более общих предположениях выходит за рамки настоящей работы. Отметим только, что доказательство полноты функций Бесселя в пространстве $L_2[0, R]$ приводится в монографии [37].

5. ОБОБЩЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доопределим функции $\Psi_{ij}^{(\alpha)}(\lambda_n r)$ следующим образом:

$$\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi) = \begin{cases} \sin \lambda_n x, & \alpha = 0, \quad \xi = x, \\ Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), & \alpha = 1, 2, \quad \xi = r; \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi) = \begin{cases} \cos \lambda_n x, & \alpha = 0, \quad \xi = x, \\ Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n r), & \alpha = 1, 2, \quad \xi = r; \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi) = \begin{cases} \cos \lambda_n x, & \alpha = 0, \quad \xi = x, \\ Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), & \alpha = 1, 2, \quad \xi = r; \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi) = \begin{cases} \sin \lambda_n x, & \alpha = 0, \quad \xi = x, \\ Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n r), & \alpha = 1, 2, \quad \xi = r. \end{cases} \quad (5.4)$$

Ортогональность этих функций, очевидно, имеет место и для задач в прямоугольной декартовой системе координат ($\alpha = 0$) на отрезке $[0, 1]$, при этом

$$\Psi_1^{(\alpha)}(\lambda_n) = \Psi_0^{(\alpha)}(\lambda_n) = \widetilde{\Psi}_1^{(\alpha)}(\lambda_n) = \widetilde{\Psi}_0^{(\alpha)}(\lambda_n) = 2.$$

Доказательство полноты тригонометрической системы приводится в работе [38].

Теперь все полученные ранее результаты объединим в табл. 1.

Выполненные построения остаются справедливыми и для моделей с учетом эффектов релаксации ($\tau_0 \neq 0$). В этом случае изменяется только второе равенство в (2.6), которое записывается так:

$$\sum_{k=0}^K \frac{(\tau_0)^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \Psi(\tau)}{\partial \tau^{k+1}} + \gamma^2 \omega \Psi(\tau) = 0.$$

При этом системы (2.1) и (3.1) не изменятся, и представление их решения в форме (2.2) и (3.2) сохраняется. Поэтому далее аналогичным образом получается результат в виде (2.10) и (3.4), с той лишь разницей, что коэффициенты γA_j будут отличаться от тех, что получены при $\tau_0 = 0$. Таким образом, решение задачи Штурма–Лиувилля и в этом случае имеет вид, полученный в разд. 2 и 3.

Таблица 1. Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

Граничные условия	Решения задачи Штурма–Лиувилля
Задачи для круга $0 \leq r \leq R$ (цилиндр, сфера)	
$V(R) = 0, \quad \Phi'(R) = 0.$	$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad \Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r),$ $J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0, \quad J_0^{(\alpha)'}(\lambda_n R) = 0.$
$\Phi(R) = 0,$ $V'(R) + \frac{\alpha V(R)}{R} - \Lambda \Phi(R) = 0.$	$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad \Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n J_0^{(\alpha)'}(\lambda_n r),$ $J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0, \quad \lambda_n R J_1^{(\alpha)'}(\lambda_n R) + J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0.$
Задачи для отрезка $a \leq \xi \leq b$	
$V(a) = 0, \quad \Phi'(a) = 0,$ $V(b) = 0, \quad \Phi'(b) = 0.$	$V(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi), \quad \Phi(\xi) = \sum_{n=k}^{\infty} \varphi_n \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi),$ при $\alpha = 0, \quad k = 0, \quad [a, b] = [0, 1], \quad \lambda_n = \pi n;$ при $\alpha = 1, 2, \quad k = 1, \quad [a, b] = [R_1, R_2], \quad \lambda_n$ удовлетворяют уравнению $\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0.$
$\Phi(a) = 0, \quad \Phi(b) = 0,$ $V'(a) + \frac{\alpha V(a)}{a} - \Lambda \Phi(a) = 0,$ $V'(b) + \frac{\alpha V(b)}{b} - \Lambda \Phi(b) = 0.$	$V(\xi) = \sum_{n=k}^{\infty} v_n \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi), \quad \Phi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi),$ при $\alpha = 0, \quad k = 0, \quad [a, b] = [0, 1], \quad \lambda_n = \pi n;$ при $\alpha = 1, 2, \quad k = 1, \quad [a, b] = [R_1, R_2], \quad \lambda_n$ удовлетворяют уравнению $\Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0.$
$\Phi(b) = 0,$ $V'(b) + \frac{\alpha V(b)}{b} - \Lambda \Phi(b) = 0,$ $V(a) = 0, \quad \Phi'(a) = 0.$	$V(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi), \quad \Phi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi),$ при $\alpha = 0, \quad [a, b] = [0, 1], \quad \lambda_n = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right);$ при $\alpha = 1, 2, \quad [a, b] = [R_1, R_2], \quad \lambda_n$ удовлетворяют уравнению $\Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0.$
$\Phi(a) = 0,$ $V'(a) + \frac{\alpha V(a)}{a} - \Lambda \Phi(a) = 0,$ $V(b) = 0, \quad \Phi'(b) = 0.$	$V(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi), \quad \Phi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi),$ при $\alpha = 0, \quad [a, b] = [0, 1], \quad \lambda_n = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right);$ при $\alpha = 1, 2, \quad [a, b] = [R_1, R_2], \quad \lambda_n$ удовлетворяют уравнению $\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0.$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основываясь на методе разделения переменных, дана постановка задачи Штурма–Лиувилля и найдены собственные функции для одномерного термоупругого оператора в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Показано, что:

1. Собственные функции одномерного термоупругого оператора выражаются через известные тригонометрические, цилиндрические и сферические функции. В частности, следует отметить, что функции $\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi)$ при $\alpha = 1, 2$ подробно описаны в справочнике [36], и с помощью них достаточно успешно решаются нестационарные задачи теплопроводности, упругости и несвязанной термоупругости (см. [34]).
2. В отличие от задач теплопроводности (несвязанной термоупругости) задачи связанной термоупругости решаются аналитически только при определенных граничных условиях, вид которых определяется свойствами собственных функций, как например (3.7).

Последний пункт указывает на принципиальное различие в плане сложности решения начально-краевых задач для скалярных уравнений и начально-краевых задач для систем уравнений. Так, если задача Штурма–Лиувилля для волнового уравнения или уравнения теплопроводности (даже с учетом релаксации) свободно решается при краевых условиях 1-го, 2-го и 3-го рода (а также при их комбинациях) (см. [33], [34]), то уже одномерная задача термоупругости решается только для четырех определенных типов граничных условий (причем 3-е и 4-е граничное условие является комбинацией 1-го и 2-го), что существенно ограничивает класс задач, решаемых аналитически.

Отметим, что этот вопрос, на примере задач о дифракции цилиндрических и сферических волн, достаточно подробно обсуждался в работах [39], [40], где была доказана невозможность осуществления процедуры разделения пространственных переменных в многомерных задачах в цилиндрической системе координат в случае, когда на границе задаются нормальные напряжения. В настоящей статье показано, что в связанных задачах термоупругости этот эффект проявляется уже в одномерных задачах.

С другой стороны, выражение

$$\left(V'(\xi) + \frac{\alpha V(\xi)}{\xi} - \Lambda \Phi(\xi) \right) \Big|_{\xi \in \Pi} = 0$$

в граничных условиях (3.9), (3.15)–(3.17) можно интерпретировать, как нормальную нагрузку на поверхности несжимаемого тела ($c_{12} = 0$ в формуле (1.5)). Учитывая, что, ввиду малости упругих деформаций, относительное изменение объема упруго-деформируемого тела тоже невелико, можно использовать решения краевых задач с граничными условиями вида (3.9), (3.15)–(3.17) в качестве приближенных к решениям задач с заданной на поверхности нормальной нагрузкой вида (1.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. М.: Энергоатомиздат, 1984. 182 с.
2. Князева А.Г. Введение в термодинамику необратимых процессов. Томск: Иван Федоров, 2014. 172 с.
3. Nowacki W. Dynamical Problems of Thermodiffusion in Solids // Proc. Vib. Prob. 1974. V. 15. P. 105–128.
4. Келлер И.Э., Дудин Д.С. Механика сплошной среды. Законы сохранения: учеб. Пособие. Пермь: Изд-во Пермского нац. исслед. политех. ун-та, 2022. 142 с.
5. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
6. Шамровский А.Д., Меркотан Г.В. Динамическая задача обобщенной термоупругости для изотропного полупространства // Восточно-Европейский ж. передовых технологий. 2011. Т. 3. № 7(51). С. 56–59.
7. Карташов Э.М. Термодинамические аспекты термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепла // Изв. РАН. Энергетика. 2004. № 4. С. 146.
8. Ненахов Е.В., Карташов Э.М. Оценки температурных напряжений в моделях динамической термоупругости // Вестн. Московского гос. технического ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 1(100). С. 88–106.
9. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elast. 1993. V. 31. P. 189–208.
10. Quintanilla R. Moore–Gibson–Thompson thermoelasticity with two temperatures // Appl. Engng. Sci. 2020. V. 1. 100006. <https://doi.org/10.1016/j.apples.2020.100006>

11. *Abbas A.I.* The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium // *J. of Measurements in Engng.* 2014. V. 2. No 4. P. 175–184.
12. *Abouelregal A.E., Marin M., Askar S.S.* Generalized MGT Heat Transfer Model for an Electro-Thermal Microbeam Lying on a Viscous-Pasternak Foundation with a Laser Excitation Heat Source // *Symmetry* 2023. V. 15. No 4. P. 814.
13. *Abouelregal A., Alesemi M., Alfadil H.* Thermoelastic reactions in a long and thin flexible viscoelastic cylinder due to non-uniform heat flow under the non-Fourier model with fractional derivative of two different orders // *AIMS Mathematics.* 2022. V. 7. № 5. P. 8510–8533.
14. *Bachher M., Sarkar N.* Nonlocal theory of thermoelastic materials with voids and fractional derivative heat transfer // *Waves in Random and Complex Media.* 2019. V. 29. № 4. P. 595–613.
15. *Patnaik S., Sidhardh S., Semperlotti F.* Nonlinear thermoelastic fractional-order model of nonlocal plates: Application to postbuckling and bending response // *Thin-Walled Structures.* 2021. V. 164. 107809. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107809>
16. *Peng W., Ma Y., He T.* Transient thermoelastic response of a size-dependent nanobeam under the fractional order thermoelasticity // *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik.* 2021. V. 101. No 10. e202000379. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000379>
17. *Eringen A.C.* Nonlocal Continuum Field Theories. New York: Springer, 2002.
18. *Das N., De S., Sarkar N.* Reflection of plane waves in generalized thermoelasticity of type III with nonlocal effect // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2020. V. 43. No 3. P. 1313–1336.
19. *Sarkar N., Mondal S., Othman M. I. A.* Effect of the laser pulse on transient waves in a non-local thermoelastic medium under Green-Naghdi theory // *Structur. Engineer. Mech.* 2020. V. 74. No 4. P. 471–479.
20. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами. М.: Физматлит, 2021. 288 с.
21. *Aouadi M.* A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *Inter. J. Math. and Math. Sci.* 2006. V. 2006. P. 1–15. <https://doi.org/10.1155/IJMMS/2006/25976>
22. *Aouadi M.* A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Inter. J. Solid. Structur.* 2007. V. 44. P. 5711–5722.
23. *Atwa S.Y., Egypt Z.* Generalized Thermoelastic Diffusion With Effect of Fractional Parameter on Plane Waves Temperature-Dependent Elastic Medium // *J. Material. Chemic. Engineer.* 2013. V. 1. Iss. 2. P. 55–74.
24. *Bhattacharya D., Kanoria M.* The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // *Inter. J. Engineer. Tech. Res. (IJETR).* 2014. V. 2. Iss. 5. P. 151–159.
25. *Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M.* Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect // *Inter. J. Comput. Sci. Engineer.* 2019. V. 7. Iss. 1. P. 148–156.
26. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mech.* 2011. V. 218. P. 205–215.
27. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite medium with a Spherical Cavity // *Int. J. Thermophys.* 2012. V. 33. P. 172–183.
28. *Kumar R., Devi S.* Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources // *CMST.* 2019. V. 25. No 4. P. 167–176.
29. *Olesiak Z.S., Pyryev Yu.A.* A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // *Inter. J. Engineer. Sci.* 1995. V. 33. No 6. P. 773–780.
30. *Shvets R.M.* On the deformability of anisotropic viscoelastic bodies in the presence of thermodiffusion // *J. Math. Sci.* 1999. V. 97. No 1. P. 3830–3839.
31. *Xia R.H., Tian X.G., Shen Y.P.* The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity // *Inter. J. Engineer. Sci.* 2009. V. 47. P. 669–679.
32. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
33. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Гос. изд-во физ.-мат. Литературы, 1962. 768 с.
34. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. Изд. 4, перераб. и сущ. доп. URSS, 2018. 1080 с.
35. *Вестяк В.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Математические основы термоупругости: Учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 2021. 92 с.

36. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы М.: Наука, 1964. 344 с.
37. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Физматлит, 1981. 512 с.
38. Бари Н.К. Тригонометрические ряды // При ред. участии П. Л. Ульянова. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
39. Ибраилов М.Ш. Сведение краевых задач динамической теории упругости к скалярным задачам для волновых потенциалов в криволинейных координатах // Изв. РАН МТТ. 2011. № 1. С. 131–136.
40. Ибраилов М.Ш. Разделение граничных условий для потенциалов на криволинейной границе в динамических задачах теории упругости // Докл. АН. 2010. Т. 435. № 6. С. 752–754.

STURM–LIOUVILLE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL THERMOELASTIC OPERATOR IN CARTESIAN, CYLINDRICAL, AND SPHERICAL COORDINATE SYSTEMS

A. V. Zemskov^{a,b,*}, D. V. Tarlakovskii^{b,a,**}

^a*Moscow Aviation Institute (National Research University),
Volokolamskoe sh. 4, Moscow, 125993 Russia*

^b*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University
Michurinsky prospect, 1, Moscow, 119192 Russia*

*e-mail: azemskov1975@mail.ru

**e-mail: tdvhome@mail.ru

Received 23 October, 2023

Revised 14 November, 2023

Accepted 17 November, 2023

Abstract. The problem of constructing eigenfunctions of a one-dimensional thermoelastic operator in Cartesian, cylindrical, and spherical coordinate systems is considered. The corresponding Sturm–Liouville problem is formulated using Fourier’s separation of variables applied to a coupled system of thermoelasticity equations, assuming that the heat transfer rate is finite. It is shown that the eigenfunctions of the one-dimensional thermoelastic operator are expressed in terms of well-known trigonometric, cylinder, and spherical functions. However, coupled thermoelasticity problems are solved analytically only under certain boundary conditions, whose form is determined by the properties of the eigenfunctions.

Keywords: thermoelasticity, Sturm–Liouville problem, eigenfunctions, Fourier method, cylindrical functions, spherical functions.