

УДК 519.633.6+517.956.45

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ КРАЕВОМ РЕЖИМЕ, ЗАДАННОМ НА ПОДВИЖНОМ МНОГООБРАЗИИ

© 2024 г. А. Л. Казаков^{1,*}, О. А. Нефедова^{2,**}, Л. Ф. Слевак^{2,***}

¹664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, ИДСТУ СО РАН, Россия

²620049 Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34, ИМАШ УрО РАН, Россия

*e-mail: kazakov@icc.ru;

**e-mail: nefedova@imach.uran.ru;

***e-mail: lfs@imach.uran.ru

Поступила в редакцию 07.08.2023 г.

Переработанный вариант 20.09.2023 г.

Принята к публикации 14.10.2023 г.

Статья посвящена исследованию вырождающегося параболического уравнения теплопроводности с нелинейностями общего вида при наличии источника (стока) в случае двух пространственных переменных. Рассмотрена задача об инициировании тепловой волны, распространяющейся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью, краевым режимом, заданным на подвижном многообразии — замкнутой линии. Для нее доказана новая теорема существования и единственности и предложен численный алгоритм построения решения, основанный на методе граничных элементов, методе коллокаций и разностной аппроксимации по времени, при этом использована специальная замена переменных типа преобразования годографа. Найдены новые точные решения рассматриваемого уравнения в случае нелинейностей степенного вида. Численный алгоритм реализован в виде программы, проведен комплексный вычислительный эксперимент. Сравнение построенных численных решений с точными (как найденными в работе, так и ранее известными) показало хорошее соответствие, установлена численная сходимость относительно шага по времени и числа точек коллокации. Библ. 28. Фиг. 3. Табл. 4.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение теплопроводности, вырождение, теорема существования и единственности, точное решение, численное решение, метод граничных элементов, метод коллокаций, радиальные базисные функции.

DOI: 10.31857/S0044466924020081, EDN: YJLXMI

ВВЕДЕНИЕ

Для процессов высокотемпературной теплопроводности [1] и фильтрации жидкостей и газов в пористых средах [2] характерно распространение возмущений по покоящемуся фону с конечной скоростью, описать которые в рамках традиционных линейных параболических моделей [3], [4] не представляется возможным. В качестве альтернативы иногда используют гиперболические уравнения [5], [6], однако они, зачастую, не обеспечивают достаточной точности моделирования. Другим возможным способом решения указанной проблемы является применение нелинейных параболических уравнений с вырождением [4], которые обладают решениями с требуемыми свойствами. Впервые последние, по-видимому, были предложены в работе [7] в связи с математическим описанием процессов, происходящих после ядерного взрыва (сами авторы указывают, что “с такими задачами мы встречаемся в теории распространения пламени и теории звезд”). Почти одновременно аналогичные решения были получены при моделировании фильтрации газов в пористых пластах [8]. В дальнейшем в научной литературе появился термин “тепловая” [9] или “фильтрационная волна” [10], под которой понимается решение, состоящее из двух частей: положительной и нулевой, состыкованных между собой вдоль некоторой поверхности (линии), именуемой фронтом волны (нулевым фронтом). Причиной появления решений с подобными нелинейными свойствами у параболических уравнений является, по-видимому, вырождение последних на фронте волны, вследствие чего у них появляются некие “локально-гиперболические” свойства. Вырождающиеся параболические уравнения являются в последние годы предметом активного изучения, однако обычно речь идет о доказательстве существования решений и изучении их свойств в различных функциональных пространствах без построения решения в явном виде [11], [12], хотя встречаются и исключения [13].

Авторы данной работы исследуют решения нелинейного уравнения теплопроводности (the porous medium equation [14]), имеющие тип тепловой волны, уже более 10 лет [15]. Дать полное описание работ, опубликованных за эти годы, не представляется возможным, тем более, что в них в основном рассматривались уравнения с одной пространственной переменной. Отметим здесь наиболее релевантные статьи: [16], в которой впервые построено аналитическое решение задачи об иницировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности (без источника) с двумя пространственными переменными в полярных координатах; [17], в которой были построены новые классы точных решений нелинейного уравнения теплопроводности с источником.

Выше обсуждались аналитические результаты, однако численному решению нелинейных параболических уравнений также посвящено большое количество работ. Дать их обзор в рамках настоящей статьи невозможно, отметим лишь то, что особое место здесь занимает метод граничных элементов (МГЭ) и его модификации, в частности, с применением метода двойственной взаимности (МДВ) [18]. В основе МДВ лежит использование разложений по радиальным базисным функциям (РБФ) [19], [20] при решении неоднородных, нелинейных и нестационарных уравнений. Альтернативой МДВ может быть применение метода коллокаций (МК) на основе РБФ [21]. В большинстве работ при этом по РБФ раскладывается искомая функция, что затруднительно использовать в случае вырождающегося нелинейного уравнения. В работах авторов РБФ применяются для аппроксимации неоднородностей уравнений. Численные алгоритмы решения задач для двумерного вырождающегося параболического уравнения были построены в работах [22]–[24]. Непосредственным предшественником представляемого исследования является работа [22], в которой были предложены новые граничноэлементные алгоритмы решения одно- и двумерной задач об иницировании тепловой волны краевым режимом, заданным на неподвижном многообразии. При этом рассматривалось нелинейное уравнение теплопроводности со степенной нелинейностью без источника.

В настоящей статье исследуется двумерное вырождающееся параболическое уравнение с источником при нелинейностях общего вида, для которого рассматривается задача об иницировании тепловой волны краевым режимом, заданным на подвижном многообразии. Принятые обобщения уравнения и краевого режима потребовали вывода новых дополнительных краевых условий на заданном многообразии, необходимых для корректного численного решения. Кроме этого, поскольку заданное многообразие лежит внутри области решения, на каждом шаге по времени в новом алгоритме (в отличие от построенных нами ранее) последовательно решаются две связанные задачи для областей по обе стороны от него. Также для рассмотренной задачи доказана оригинальная теорема существования и единственности кусочно-аналитического решения, и построено новое точное решение, которое используется в вычислительном эксперименте для верификации результатов расчетов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение второго порядка

$$T_t = \operatorname{div}(k(T) \nabla T) + h(T), \quad (1.1)$$

которое описывает процесс распространения тепла в случае общего вида нелинейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры при наличии распределенного источника (стока) тепла. Здесь T — температура, зависящая от времени t и пространственных координат; div и ∇ — операторы дивергенции и градиента по пространственным переменным; $k(T)$ — зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, $k(0) = 0$; $h(T)$ — функция источника (стока), $h(0) = 0$.

Пусть функция $k(T)$ является монотонной, достаточно гладкой и обратная к ней функция имеет ненулевую производную. Тогда заменой $u = k(T)$ уравнение (1.1) приводится к виду

$$u_t = u \Delta u + F(u)(\nabla u)^2 + H(u). \quad (1.2)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа;

$$F(u) = \frac{u \psi''(u)}{\psi'(u)} + 1, \quad H(u) = \frac{h(\psi(u))}{\psi'(u)},$$

где $T = \psi(u)$ — функция, обратная к $u = k(T)$. Будем считать, что $F(u) > 0$. Можно легко убедиться в том, что, если $\psi(0) = 0$ (это следует из равенства $k(0) = 0$), то $H(0) = 0$ и уравнение (1.2) имеет тривиальное решение $u \equiv 0$.

Рассмотрим уравнение (1.2) при краевом режиме

$$u|_{b(t,\mathbf{x})=0} = f(t, \mathbf{x}), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{x}$ — вектор декартовых координат точки, $f(0, \mathbf{x}) \equiv 0$, а уравнение $b(t, \mathbf{x}) = 0$ задает в каждый момент времени гладкую замкнутую гиперповерхность $S^{(t)}$, ограничивающую область $V^{(t)}$, содержащую начало координат. Предполагается, что если $t_1 < t_2$, то $V^{(t_1)} \subset V^{(t_2)}$.

Будем искать для (1.2), (1.3) нетривиальные решения, для которых справедливо условие

$$u|_{a(t,\mathbf{x})=0} = 0, \quad (1.4)$$

где неизвестное априори уравнение $a(t, \mathbf{x}) = 0$ задает в каждый момент времени нулевой фронт тепловой волны $C^{(t)}$ — замкнутую поверхность, ограничивающую область $W^{(t)}$, содержащую начало координат. При этом $a(0, \mathbf{x}) = b(0, \mathbf{x})$, т.е. $S^{(0)} = C^{(0)}$, и при $t > 0$ $V^{(t)} \subset W^{(t)}$. И тогда за пределами области $W^{(t)}$ можно будет заменить отрицательные значения u нулевыми (напомним, что функция $u \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (1.2)), и, тем самым, получить искомую тепловую волну. Существование подобных решений обеспечивает теорема, которая будет сформулирована и доказана в следующем разделе.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Будем далее для простоты и наглядности предполагать, что $\mathbf{x} = (x, y)$. В полярной системе координат, если область $V^{(t)}$ является звездной относительно точки $O(0, 0)$, задача (1.2), (1.3) имеет следующий вид:

$$u_t = uu_{\rho\rho} + F(u)u_{\rho}^2 + \frac{uu_{\rho}}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} [F(u)u_{\phi}^2 + uu_{\phi\phi}] + H(u), \quad (2.1)$$

$$u|_{\rho=g(t,\phi)} = f(t, \phi), \quad (2.2)$$

где $t \geq 0$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$, уравнение $\rho = g(t, \phi)$ задает линию $S^{(t)}$; для удобства обозначений мы сохранили обозначение f для функции в правой части краевого условия.

Здесь и далее будем считать, что $f(t, \pi) = f(t, -\pi)$, $g(t, \pi) = g(t, -\pi)$, $f_{\phi}(t, \pi) = f_{\phi}(t, -\pi)$, $g_{\phi}(t, \pi) = g_{\phi}(t, -\pi)$ при всех $t \geq 0$; $f(0, \phi) = 0$, $f_t(0, \phi) > 0$, $g(0, \phi) > 0$ при всех $-\pi \leq \phi \leq \pi$; $F(0) > 0$, $H(0) = 0$.

Под “аналитической” далее понимается функция, совпадающая на некотором множестве со своим тейлоровским разложением.

Теорема 1. Пусть функции $f(t, \phi)$, $g(t, \phi)$ являются аналитическими в некоторой окрестности начального момента времени $t = 0$ при $-\pi \leq \phi \leq \pi$, функции $F(u)$, $H(u)$ являются аналитическими в окрестности $u = 0$. Тогда задача (2.1), (2.2) имеет единственное (с точностью до выбора направления движения тепловой волны) аналитическое решение.

Доказательство. Ранее авторами была сформулирована и подробно доказана теорема существования и единственности аналитического решения задачи (2.1), (2.2) в случае, когда $F(u) = 1/\sigma > 0$, $H(u) = 0$, что соответствует степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры (наиболее распространенной в приложениях) при отсутствии источников (стоков) тепла [16]. Как показывают ранее выполненные авторами исследования подобных задач для одномерного случая (см., например, [17]), обобщение теоремы существования и единственности со случая степенной нелинейности на случай нелинейности более общего вида с добавлением источника осуществляется достаточно естественно, поэтому ограничимся кратким обоснованием сформулированного выше утверждения. Доказательство разбивается на два этапа: вначале строится формальное решение в виде кратного степенного ряда, затем доказывается его сходимость методом мажорант.

Этап 1. Прежде всего, необходимо сделать замену независимой переменной в уравнении (2.1), $r = \rho - g(t, \phi)$, в результате которой оно примет вид

$$\begin{aligned} u_t - g_t u_r = & \left(1 + \frac{g_{\phi}^2}{(g+r)^2} \right) uu_{rr} + F(u) \left(1 + \frac{g_{\phi}^2}{(g+r)^2} \right) u_r^2 + \left(\frac{1}{g+r} - \frac{g_{\phi\phi}}{(g+r)^2} \right) uu_r + \\ & + \frac{uu_{\phi\phi}}{(g+r)^2} - \frac{2g_{\phi}uu_{r\phi}}{(g+r)^2} - \frac{2F(u)g_{\phi}u_ru_{\phi}}{(g+r)^2} + \frac{F(u)u_{\phi}^2}{(g+r)^2} + H(u). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Граничное условие (2.2) тогда преобразуется к виду

$$u|_{r=0} = f(t, \varphi). \quad (2.4)$$

Задачи (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) эквивалентны вследствие очевидной невырожденности сделанной замены.

Решение задачи (2.3), (2.4) будем строить в виде кратного степенного ряда

$$u = \sum_{m,l=0}^{\infty} u_{m,l}(\varphi) \frac{t^m r^l}{m!l!} = \sum_{m,l=0}^{\infty} u_{m,l}(\varphi) \frac{t^m [\rho - g(t, \varphi)]^l}{m!l!},$$

$$u_{m,l} = \left. \frac{\partial^{m+l} u}{\partial t^m \partial r^l} \right|_{t=0, r=0}. \quad (2.5)$$

При этом из условия (2.4) имеем, что коэффициенты $u_{0,0} = f(0,0) = 0$, $u_{m,0} = f_m = f^{(m)}(0, \varphi)$, $m = 1, 2, \dots$, известны. Для нахождения $u_{0,1}$ получаем квадратное уравнение

$$F_0 \left(1 + \frac{g_{0,1}^2}{g_{0,0}^2} \right) u_{0,1}^2 + g_{1,0} u_{0,1} - f_1 = 0, \quad (2.6)$$

где $F_0 = F(0)$, $g_{0,0} = g(0, \varphi)$, $g_{1,0} = g_t(0, \varphi)$, $g_{0,1} = g_\phi(0, \varphi)$. Уравнение (2.6) при $F_0 f_1 > 0$ имеет два действительных ненулевых корня (выполнение неравенств $f_t(0, \varphi) > 0$, $g(0, \varphi) > 0$, $F(0) > 0$ оговорено ранее). Выбор одного из них и определяет направление движения тепловой волны, упомянутое в условии теоремы. Отметим, что $u_{0,1} \neq 0$, $u_{1,0} \neq 0$.

Дальнейшее построение производится индукцией по суммарному порядку дифференцирования. Пусть известны коэффициенты $u_{m,l}(\varphi)$ при $n \geq m + l$. На $n + 1$ -м шаге решается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$u_{k+1,n-k} - a_{n-k} u_{k,n-k+1} - b_k u_{k-1,n-k+2} = p_{k,n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

где $a_m(\varphi) = g_{1,0} + (m + 2F_0) \left(1 + g_{0,1}^2 / g_{0,0}^2 \right) u_{0,1}$, $b_l(\varphi) = l \left(1 + g_{0,1}^2 / g_{0,0}^2 \right) f_1$, а значения $p_{k,n-k}$ известны в силу предположения индукции.

СЛАУ (2.7) имеет квадратную матрицу (напомним, что $u_{n+1,0} = f_{n+1}$ — известно; считаем, что $u_{-1,n+2} = 0$), которая, начиная с $n = 2$, является трехдиагональной. Хотя условие диагонального преобладания в данном случае, очевидно, не выполняется, используя ранее доказанную лемму [16], можно показать, что СЛАУ (2.7) — крамеровская (при всех $-\pi \leq \phi \leq \pi$). Таким образом, все коэффициенты ряда (2.5) определяются однозначно. Первый этап доказательства теоремы завершен.

Этап 2. При изложении доказательства сходимости построенного ряда также будем кратки. В результате серии невырожденных замен, ключевая из которых состоит в том, что в качестве новой искомой функции рассматривается $w = r + g(t, \varphi) - a(t, \varphi)$ — отклонение от фронта (пока неизвестного) тепловой волны, а u становится независимой переменной, задача (2.3), (2.4) преобразуется к эквивалентному виду

$$\begin{aligned} & 2[1 + F(u)]W + [4 + F(u)]uW_u + u^2W_{uu} + \\ & + \Phi_0(\tau, \varphi)(W|_{\tau=0}) + \Phi_1(\tau, \varphi)u(W_u|_{\tau=0}) + \\ & + \Phi_2(\tau, \varphi)\left(u^2W_{uu}|_{\tau=0}\right) = \\ & = \Psi_0(\tau, \varphi) + u\Psi_1 + u^2\Psi_2 + u^3\Psi_3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $\tau = u - f$, $w = uw_1(\tau, \varphi) + u^2W$; w_1 , Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 , Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 — известные аналитические функции своих аргументов, формулы для которых не приводятся из-за громоздкости. При этом Ψ_i , $i = 1, 2, 3$, зависят от производных искомой функции W по переменной u порядка не выше $i - 1$; по $u_{0,1}(\tau, \varphi)$ однозначно определяется $w_1(\tau, \varphi)$. Условия Коши для уравнения (2.8) при $u = 0$ получаются из требования его совместности (см. [16]) и имеют вид

$$W|_{u=0} = \frac{\Psi_0(\tau, \varphi) - w_0(\varphi)\Phi_0(\tau, \varphi)}{2[1 + F(u)]}, \quad W_u|_{u=0} = \frac{\Psi_1(\tau, \varphi) - w_1(\varphi)\Phi_1(\tau, \varphi)}{4 + F(u)}, \quad (2.9)$$

где $w_0(\varphi)$, $w_1(\varphi)$ — известные функции. Условия (2.9) не нуждаются в специальном обсуждении, поскольку условие (2.2) уже было учтено в ходе выполненных замен.

Уравнение (2.8) подпадает под действие леммы 2 из работы [16], которая обеспечивает существование и единственность у него аналитического решения в некоторой окрестности координатной плоскости $u = 0$. Это (по построению уравнения (2.8)), во-первых, гарантирует сходимость ряда (2.5), во-вторых, означает существование фронта тепловой волны (это прямо следует из того, что $u_{0,0} = 0$, $u_{1,0} > 0$, $u_{0,1} \neq 0$), т.е. подвижной линии $\rho = a(t, \varphi)$ такой, что выполняется условие

$$u|_{\rho=a(t, \varphi)} = 0.$$

Доказательство теоремы завершено.

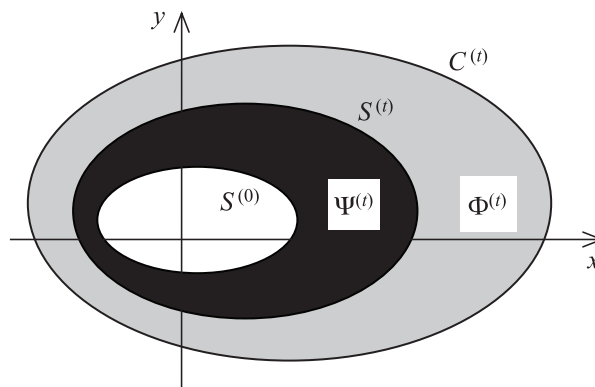
3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Построение численного решения задачи (1.2), (1.3) на основе МГЭ в случае степенной нелинейности, когда $H(u) \equiv 0$ и функция $b(t, x)$ не зависит от времени, рассмотрено авторами в работе [22]. Также ранее были построены численные алгоритмы решения задачи (1.2), (1.4), см. [23], [24]. Решение задачи (1.2), (1.3) в двумерном случае ранее нами не рассматривалось. В доступных источниках таких решений также не обнаружено. Принципиальное отличие рассматриваемой в настоящей статье задачи, кроме произвольного вида нелинейности уравнения, заключается в том, что с течением времени две границы области определения искомой функции движутся, тогда как в рассмотренных ранее задачах одна из границ была неподвижной.

Далее в этом разделе предложен алгоритм решения задачи (1.2), (1.3). При этом используется постановка в полярной системе координат (2.1), (2.2). Пошаговое решение строится итерационно с использованием метода граничных элементов, радиальных базисных функций и метода коллокаций.

Задача состоит в определении функции u в каждый момент времени $t \in (0, T]$ в области $\Omega^{(t)}$, ограниченной линией $S^{(0)}$ и неизвестным фронтом $C^{(t)}$, который имеет уравнение $\rho = a(t, \varphi)$ (фиг. 1). Таким образом, область решения задачи нам неизвестна. Кроме этого, следует отметить, что краевой режим (2.2), как и (1.3), не является в классическом смысле краевым условием, поскольку он определяет значение функции не на границе области рассмотрения, а на некотором внутреннем многообразии. В связи с этим, будем строить решение в два этапа (последовательно с двух сторон от заданного многообразия), используя на первом из них специальную замену переменных.

Этап 1. Рассмотрим сначала задачу (2.1), (2.2) в произвольный момент времени t в области $\Phi^{(t)}$, ограниченной линиями $S^{(t)}$ и $C^{(t)}$ (см. фиг. 1). Будем предполагать при этом, что при произвольных значениях t , φ функция u в этой области монотонно зависит от ρ . Поменяем ролями в задаче (2.1), (2.2) искомую функцию u и координату ρ . Задача (2.1), (2.2) в новых обозначениях может быть записана в виде



Фиг. 1. Область $\Omega^{(t)} = \Phi^{(t)} \cup \Psi^{(t)}$

$$\begin{aligned} \rho_t \rho_u^2 = & u \left(\rho_{uu} - \frac{\rho_u^2}{\rho} - \frac{\rho_u (\rho_{u\varphi} \rho_\varphi - \rho_{\varphi\varphi} \rho_u)}{\rho^2} \right) - \\ & - \frac{F(u) \rho_u (\rho^2 + \rho_\varphi^2)}{\rho^2} - H(u) \rho_u^3, \quad \rho|_{u=f(t,\varphi)} = g(t,\varphi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вдоль фронта $C^{(t)}$, где $u = 0$, из (3.1) следует соотношение

$$\rho_u|_{u=0} = - \frac{F(0)(\rho^2 + \rho_\varphi^2)}{\rho_t \rho^2}. \quad (3.2)$$

Замечание 1. Уравнение (3.2) справедливо при условии ограниченности множителя при u в правой части (3.1). Последнее условие, как и монотонность функции u , справедливо вблизи носителя краевого условия (локально по t, r), что следует из доказательства теоремы 1, в частности, из того, что $u_{0,1} \neq 0$. Априори обеспечить выполнение этих предположений в заданной области затруднительно. Отметим, однако, что аналитически доказать сходимость какого-либо приближенного метода решения применительно к рассматриваемому нелинейному вырождающемуся уравнению в настоящее время не представляется возможным, по крайней мере, нам подобные результаты не известны. В связи с этим, описанный ниже алгоритм является эвристическим, и вопрос о корректности численного решения, включая выдвинутые предположения, решается эмпирически. Во всех рассмотренных ниже примерах монотонность u следует, в частности, из возрастания по t функций $f(t, \varphi)$ и $g(t, \varphi)$, задающих краевое условие при $\rho = R$, и наблюдается ограниченность входящих в (3.1) производных в рассмотренных областях.

Сделаем далее замену независимой переменной $v = u + 1$, и будем рассматривать переменные v, φ как полярные координаты в плоскости декартовых координат ξ, η : $\xi = v \cos \varphi$, $\eta = v \sin \varphi$. В результате, выделив в (3.1) лапласиан искомой функции, получим следующую краевую задачу:

$$\Delta \rho = G(v, \rho), \quad (3.3)$$

$$\rho|_{v=1+f(t,\varphi)} = g(t,\varphi). \quad (3.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G(v, \rho) = & \frac{\rho_v}{v-1} \left(\rho_t \rho_v + \frac{F(v-1)(\rho^2 + \rho_\varphi^2)}{\rho^2} + H(v-1) \rho_v^2 \right) + \\ & + \frac{\rho_v}{v} + \frac{\rho_{\varphi\varphi}}{v^2} + \frac{\rho_v^2}{\rho} + \frac{\rho_v (\rho_{v\varphi} \rho_\varphi - \rho_{\varphi\varphi} \rho_v)}{\rho^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнение $v = 1 + f(t, \varphi)$ задает в момент времени t замкнутую линию $P^{(t)}$, ограничивающую область $U^{(t)}$, содержащую начало координат, при этом $P^{(0)}$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Решению задачи (2.1), (2.2) на этапе 1 в новых переменных соответствует задача (3.3), (3.4), состоящая в определении функции $\rho = \rho(t, v, \varphi)$ в области $t \in (0, T]$, $(v, \varphi) \in Y^{(t)}$, где $Y^{(t)}$ — известная в каждый момент область, ограниченная линиями $P^{(0)}$ и $P^{(t)}$. Отметим, что корректное задание области $Y^{(t)}$ стало возможным благодаря переходу к переменной v , поскольку при аналогичных рассуждениях для переменной u линия $P^{(0)}$ вырождается в точку, приводя к неопределенности.

Поскольку, как уже отмечено, $P^{(0)}$ — окружность, из (3.2) следует условие для потока вдоль этой границы:

$$q^{(\rho)}|_{v=1} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}}|_{v=1} = \frac{F(0)(\rho^2 + \rho_\varphi^2)}{\rho_t \rho^2}, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе области $Y^{(t)}$.

Итак, в каждый момент времени мы имеем краевую задачу (3.3), (3.4), (3.6). Решение будем строить по шагам по времени. На шаге $t = t_k = kh$, h — размер шага, представим его в виде

$$\rho(t_k, v, \varphi) = \mu(v, \varphi) + \lambda(v, \varphi),$$

где $\mu(v, \varphi)$ — частное решение уравнения (3.3) в момент t_k , $\lambda(v, \varphi)$ — решение соответствующей однородной задачи

$$\Delta \lambda = 0,$$

$$\lambda|_{v=1+f(t_k, \varphi)} = g(t_k, \varphi) - \mu(1+f(t_k, \varphi), \varphi),$$

$$\hat{q}\lambda|_{v=1} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{n}}|_{v=1} = \frac{F(0)(\rho^2 + \rho_\varphi^2)}{\rho_t \rho^2} - \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{n}}|_{v=1}.$$

Решение строится итерационно, по следующей процедуре:

$$\mu^{(0)} \equiv 0, \quad (3.7)$$

$$\Delta \lambda^{(n)} = 0, \quad (3.8)$$

$$\lambda^{(n)}|_{v=1+f(t_k, \varphi)} = g(t_k, \varphi) - \mu^{(n)}(1+f(t_k, \varphi), \varphi), \quad (3.9)$$

$$\widehat{q}\lambda^{(n)}|_{v=1} = \frac{F(0)\left(\left(\rho^{(n)}\right)^2 + \left(\rho_\varphi^{(n)}\right)^2\right)}{\rho_t^{(n)}\left(\rho^{(n)}\right)^2} - \frac{\partial \mu^{(n)}}{\partial \mathbf{n}}|_{v=1}, \quad (3.10)$$

$$\Delta \mu^{(n+1)} = G(v, \rho^{(n)}). \quad (3.11)$$

Здесь $\mu^{(n)}$, $\lambda^{(n)}$, $\rho^{(n)} = \mu^{(n)} + \lambda^{(n)}$ суть n -е итерации решений.

Задача (3.8)–(3.10) на каждой итерации решается с помощью МГЭ. Для этого граница области $Y^{(t_k)}$ разбивается на $2N$ прямолинейных граничных элементов: $e_{1k}, e_{2k}, \dots, e_{Nk}$ — на границе $P^{(0)}$, $e_{(N+1)k}, e_{(N+2)k}, \dots, e_{(2N)k}$ — на границе $P^{(t_k)}$. Равное количество элементов на границах $P^{(0)}$ и $P^{(t_k)}$ необходимо для однозначной разрешимости задачи. Будем использовать постоянную аппроксимацию искомой функции и потока на элементе. Тогда решение задачи методом граничных элементов имеет следующий вид [25]:

$$\lambda^{(n)}(\xi) = \sum_{i=1}^{2N} \left(q_{ik}^{(\lambda)(n)} \int_{e_{ik}} u^*(\xi, \mathbf{z}) dS(\mathbf{z}) - \lambda_{ik}^{(n)} \int_{e_{ik}} q^*(\xi, \mathbf{z}) dS(\mathbf{z}) \right), \quad (3.12)$$

где $\xi(v, \varphi)$ — внутренняя точка области $Y^{(t_k)}$, $\lambda_{ik}^{(n)}$ и $q_{ik}^{(\lambda)(n)}$ — итерации значений искомой функции и потока в момент t_k на элементе e_{ik} , $u^*(\xi, \mathbf{z})$ — фундаментальное решение для двумерной задачи теории потенциала, $q^*(\xi, \mathbf{z}) = \frac{\partial u^*(\xi, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{n}}$. В узлах граничных элементов $\mathbf{z}_{ik}$, расположенных в средних точках элементов, справедливо

$$\frac{1}{2} \lambda_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{2N} \left(q_{jk}^{(\lambda)(n)} \int_{e_{jk}} u^*(\mathbf{z}_{ik}, \mathbf{z}) dS(\mathbf{z}) - \lambda_{jk}^{(n)} \int_{e_{jk}} q^*(\mathbf{z}_{ik}, \mathbf{z}) dS(\mathbf{z}) \right), \quad i = 1, 2, \dots, 2N. \quad (3.13)$$

В соотношениях (3.12) и (3.13) значения $\lambda_{ik}^{(n)}$, $i = N + 1, \dots, 2N$, заданы граничным условием (3.9). Значения $\lambda_{ik}^{(n)}$, $i = 1, \dots, N$, и $q_{ik}^{(\lambda)(n)}$, $i = 1, \dots, 2N$, составляют $3N$ неизвестных, которые должны быть определены при решении задачи. Для этого к $2N$ граничным интегральным уравнениям (3.13) добавим N уравнений, полученных с помощью разностного представления производных в уравнении (3.10)

$$\begin{aligned} q_{1k}^{(\lambda)(n)} &= \frac{F(0)h \left[4h_\phi^2 \left(\lambda_{1k}^{(n)} \right)^2 + \left(\lambda_{2k}^{(n)} - \lambda_{Nk}^{(n)} \right)^2 \right]}{4h_\phi^2 \left(\lambda_{1k}^{(n)} \right)^2 \left(\lambda_{1k}^{(n)} - \lambda_{1(k-1)}^{(n)} \right)}, \\ q_{ik}^{(\lambda)(n)} &= \frac{F(0)h \left[4h_\phi^2 \left(\lambda_{ik}^{(n)} \right)^2 + \left(\lambda_{(i+1)k}^{(n)} - \lambda_{(i-1)k}^{(n)} \right)^2 \right]}{4h_\phi^2 \left(\lambda_{ik}^{(n)} \right)^2 \left(\lambda_{ik}^{(n)} - \lambda_{i(k-1)}^{(n)} \right)}, \quad i = 2, \dots, N-1, \\ q_{Nk}^{(\lambda)(n)} &= \frac{F(0)h \left[4h_\phi^2 \left(\lambda_{Nk}^{(n)} \right)^2 + \left(\lambda_{1k}^{(n)} - \lambda_{(N-1)k}^{(n)} \right)^2 \right]}{4h_\phi^2 \left(\lambda_{Nk}^{(n)} \right)^2 \left(\lambda_{Nk}^{(n)} - \lambda_{N(k-1)}^{(n)} \right)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь $h_\phi = 2\pi/N$ — шаг по переменной ϕ . Уравнения (3.13), (3.14) образуют систему $3N$ уравнений для $3N$ неизвестных.

Поскольку эта система нелинейная, она решается методом Ньютона, и большое значение имеет выбор начального приближения. Выбор случайных, например, нулевых, начальных приближений не позволил гарантированно решить полученную систему. Если в качестве начальных приближений (на нулевой итерации) принять значения на предыдущем шаге по времени (при $k > 1$), то наблюдается стабильная сходимость. На первом шаге ($k = 1$) начальные значения искомой функции могут быть взяты из условия (3.4) при $t = 0$, тогда как начальные значения потока необходимо найти дополнительно.

Возьмем полную производную по времени в граничном условии (3.4):

$$\left(\rho_t + \rho_v v_t + \rho_\phi \Phi_t \right) \Big|_{v=1+f(t,\phi)} = \left(\rho_t + \rho_v f_t \right) \Big|_{v=1+f(t,\phi)} = g_t.$$

Отсюда $\rho_t = g_t - \rho_v f_t$ при $v = 1 + f(t, \phi)$. Подставляя полученное в уравнение (3.1), при $t = 0$, и, соответственно, при $v = 1$, имеем

$$\rho_v^2 f_t - \rho_v g_t - \frac{F(0)(\rho^2 + \rho_\phi^2)}{\rho^2} = 0.$$

Из принятых ранее предположений (если $t_1 < t_2$, то $V^{(t_1)} \subset V^{(t_2)}$) движение тепловой волны направлено от начала координат, тогда производная ρ_v должна быть отрицательной. Отсюда

$$\rho_v(0, 1, \phi) = \frac{g_t(0, \phi) - \sqrt{\left(g_t(0, \phi) \right)^4 + 4F(0)f_t(0, \phi) \left(\left(g(0, \phi) \right)^2 + \left(g_\phi(0, \phi) \right)^2 \right)}}{2f_t(0, \phi)g(0, \phi)}. \quad (3.15)$$

Поскольку $P^{(0)}$ — окружность с центром в начале координат, то в качестве начального приближения на первом шаге по времени можно принять значения потока $q^{(\lambda)}(\phi) = -\rho_v(0, 1, \phi)$ на границе $P^{(0)}$ и $q^{(\lambda)}(\phi) = \rho_v(0, 1, \phi)$ на границе $P^{(t_1)}$. Использование полученного соотношения (3.15) обеспечивает сходимость метода Ньютона и позволяет раскрыть неопределенность в начальный момент времени.

Найденные из решения системы значения $\lambda_{ik}^{(n)}$, $i = 1, \dots, N$, и $q_{ik}^{(\lambda)(n)}$, $i = 1, \dots, 2N$, определяют решение (3.12) задачи (3.8)–(3.10). Интегралы по граничным элементам от функций $u^*(\xi, \mathbf{z})$ и $q^*(\xi, \mathbf{z})$ в соотношениях (3.12) и (3.13) вычисляются точно с помощью аналитических формул [26, 27]. Отметим, что при найденном частном решении $\mu^{(n)}$ функция $\lambda^{(n)}$ определяется однозначно.

Для решения уравнения (3.11) на каждой итерации применим метод коллокаций [21]. Разложим правую часть уравнения по некоторой системе РБФ

$$G(v, \rho^{(n)}) = \sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n)} f_i(\xi), \quad (3.16)$$

где $f_i(\xi) = f_i(|\xi - \xi_i|)$ — РБФ, значения которых зависят от расстояния между текущей точкой и заданными в области $Y^{(t_k)}$ точками коллокации $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$; для каждой функции f_i существует такая функция $\hat{u}_i$, что $f_i = \Delta \hat{u}_i$. Коэффициенты $\alpha_i^{(n)}$ определяются из решения системы линейных уравнений

$$G(v, \rho^{(n)}) \Big|_{\xi=\xi_j} = \sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n)} f_i(\xi_j), \quad j = 1, \dots, M. \quad (3.17)$$

Тогда решение уравнения (3.11) имеет вид

$$\mu^{(n+1)}(\xi) = \sum_{i=1}^M \alpha_i^{(n)} \hat{u}_i(\xi). \quad (3.18)$$

Производная по времени в (3.17) (см. (3.5)) вычисляется разностно, с использованием решения на предыдущем шаге

$$\rho_t^{(n)}(\xi_j) = \begin{cases} \frac{\rho^{(n)}(\xi_j) - \rho(t_{k-1}, \xi_j)}{h}, & \xi_j \in Y^{(t_{k-1})}; \\ \frac{\rho^{(n)}(\xi_j)}{h_{k,j}}, & \xi_j \notin Y^{(t_{k-1})}. \end{cases}$$

Здесь $h_{k,j} = t_k - \tau_j$, τ_j — момент времени, в который точка ξ_j принадлежит границе $P^{(t_k)}$.

Итерационный процесс (3.8)–(3.18) заканчивается на n -й итерации при ее достаточной близости к $(n-1)$ -й. Тогда в качестве решения задачи (3.3), (3.4), (3.6) в момент t_k принимается непрерывная по пространственным переменным функция

$$\rho(t_k, v, \varphi) = \mu^{(n)}(v, \varphi) + \lambda^{(n)}(v, \varphi).$$

При этом уравнение $\rho = \rho(t_k, 1, \varphi)$ определит нулевой фронт тепловой волны $C^{(t_k)}$. Решение исходной задачи (2.1), (2.2) в области $\Phi^{(t_k)}$ в момент $t = t_k$, $u = u_1(t_k, \rho, \varphi)$, получается из $\rho(t_k, v, \varphi)$ без потери точности. Отметим, что применение в итерационной процедуре (3.8)–(3.18) для решения неоднородной задачи метода коллокаций приводит к повышению точности расчетов и скорости сходимости (уменьшению числа итераций) по сравнению с методом двойственной взаимности, используемым в [22]. Это является следствием того, что применение МГЭ с МДВ приводит на каждой итерации к решению системы, состоящей из линейных и нелинейных алгебраических уравнений, а при использовании МК их основная линейная часть вынесена в отдельную систему линейных уравнений, что упрощает задачу.

Этап 2. Напомним, что конечной целью является построение решения задачи (2.1), (2.2) в каждый момент времени $t \in (0, T]$ в области $\Omega^{(t)}$, ограниченной линией $S^{(t)}$ и нулевым фронтом $C^{(t)}$. При этом $\Omega^{(t)} = \Phi^{(t)} \cup \Psi^{(t)}$; область $\Psi^{(t)}$ ограничена линиями $S^{(0)}$ и $S^{(t)}$; $\Phi^{(t)}$ и $\Psi^{(t)}$ имеют общую границу $S^{(t)}$ (см. фиг. 1). Учитывая результаты Этапа 1, чтобы достроить решение в момент $t = t_k$ в области $\Omega^{(t_k)}$, нужно решить в области $\Psi^{(t_k)}$ следующую задачу:

$$\Delta u = \frac{1}{u} \left(u_t - F(u)(\nabla u)^2 - H(u) \right), \quad (3.19)$$

$$u|_{\rho=g(t_k, \varphi)} = f(t_k, \varphi), \quad (3.20)$$

$$q|_{\rho=g(t_k, \varphi)} = \frac{\partial u_1(t_k, g(t_k, \varphi), \varphi)}{\partial \mathbf{n}} = q^*(\varphi), \quad (3.21)$$

где u_1 — решение, найденное на этапе 1, $\mathbf{n}$ — вектор внешней относительно $\Psi^{(t)}$ нормали к границе $S^{(t)}$. Аналогично этапу 1, решение (3.19)–(3.21) будем строить в виде

$$u(t_k, \rho, \varphi) = u_p(\rho, \varphi) + u_h(\rho, \varphi),$$

где u_p — частное решение уравнения (3.19) в момент t_k , u_h — решение соответствующей однородной задачи

$$\Delta u_h = 0,$$

$$u_h|_{\rho=g(t_k, \varphi)} = f(t_k, \varphi) - u_p(g(t_k, \varphi), \varphi),$$

$$q_h|_{\rho=g(t_k, \varphi)} = \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}}|_{\rho=g(t_k, \varphi)} = q^*(\varphi) - \frac{\partial u_p(g(t_k, \varphi), \varphi)}{\partial \mathbf{n}}.$$

Итерационная процедура выглядит следующим образом:

$$u_p^{(0)} \equiv 0, \quad (3.22)$$

$$\Delta u_h^{(n)} = 0, \quad (3.23)$$

$$u_h^{(n)}|_{\rho=g(t_k, \varphi)} = f(t_k, \varphi) - u_p^{(n)}(g(t_k, \varphi), \varphi), \quad (3.24)$$

$$q_h^{(n)}|_{\rho=g(t_k, \varphi)} = q^*(\varphi) - \frac{\partial u_p^{(n)}(g(t_k, \varphi), \varphi)}{\partial \mathbf{n}}, \quad (3.25)$$

$$\Delta u_p^{(n+1)} = \frac{1}{u^{(n)}} \left(u_t^{(n)} - F(u^{(n)}) \left(\nabla u^{(n)} \right)^2 - H(u^{(n)}) \right). \quad (3.26)$$

Здесь $u_p^{(n)}$, $u_h^{(n)}$, $u^{(n)} = u_p^{(n)} + u_h^{(n)}$ суть n -е итерации решений.

Задача (3.23)–(3.25) на каждой итерации решается методом граничных элементов. При этом наличие двух граничных условий классического вида позволяет найти недостающие граничные значения искомой функции и потока решением системы линейных граничных интегральных уравнений. Для этого требуется, как и на первом этапе, взять равное количество граничных элементов на границах $S^{(0)}$ и $S^{(t_k)}$.

Задача (3.26) на каждой итерации решается методом коллокаций, аналогично (3.16)–(3.18). При остановке итерационного процесса на n -й итерации мы имеем решение задачи (3.19)–(3.21) в области $\Psi^{(t_k)}$:

$$u_2(t_k, \rho, \varphi) = u_p^{(n)}(\rho, \varphi) + u_h^{(n)}(\rho, \varphi).$$

Тогда решение задачи (2.1), (2.2) в момент t_k в области $\Omega^{(t_k)}$ гладко “склеивается” из двух частей

$$u(t_k, \rho, \varphi) = \begin{cases} u_1(t_k, \rho, \varphi), & (\rho, \varphi) \in \Phi^{(t_k)}, \\ u_2(t_k, \rho, \varphi), & (\rho, \varphi) \in \Psi^{(t_k)}. \end{cases}$$

4. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Верификация разработанного алгоритма может быть проведена с помощью точных решений, нахождение которых само по себе является нетривиальной задачей.

Редукция к ОДУ. Пусть $F(u) = 1/\sigma$, $\sigma > 0$, $H(u) = \alpha u^\beta$, что соответствует степенному характеру нелинейностей в уравнении (2.1). Предположим также, что задача (2.1), (2.2) зависит только от одной пространственной координаты ρ . Тогда уравнение (2.1) примет следующий вид:

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2 + \frac{uu_\rho}{\rho} + \alpha u^\beta. \quad (4.1)$$

Следуя [17], выполним редукцию уравнения (4.1) к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ), используя анзац

$$u = \phi(t)v(z), \quad z = \frac{\rho}{a(t)} - 1,$$

где $\rho = a(t)$ — фронт тепловой волны. Тогда удастся выполнить разделение переменных и получить функции $a(t)$, $\phi(t)$ в явном виде:

$$\begin{aligned} a(t) &= c_1 e^{c_2 t}, \quad \phi(t) = c_1^2 e^{2c_2 t}, \quad \beta = 1; \\ a(t) &= (c_3 + c_4 t)^\omega, \quad \phi(t) = (c_3 + c_4 t)^{2\omega-1}, \\ \omega &= \frac{\beta-2}{2(\beta-1)}, \quad \beta \neq 1, 2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь c_i , $i = 1, \dots, 4$, — произвольные константы. Таким образом, фронт тепловой волны в каждом из случаев (4.2) известен (с точностью до выбора двух констант).

В свою очередь, функция $v(z)$ определяется из ОДУ

$$vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + \frac{vv'}{z+1} + \gamma_1(z+1)v' + \alpha v^\beta + \gamma_2 v = 0, \quad (4.3)$$

где $\gamma_1 = c_2$, $\gamma_2 = -2c_2$ при $a(t) = c_1 e^{c_2 t}$; $\gamma_1 = c_4 \omega$, $\gamma_2 = c_4/(\beta-1)$ при $a(t) = (c_3 + c_4 t)^\omega$. Отметим, что при $\alpha = 0$ в качестве β можно использовать любое положительное значение, за исключением $\beta = 1$.

Из условия на фронте тепловой волны

$$u|_{\rho=a(t)} = 0 \quad (4.4)$$

следуют начальные условия для уравнения (4.3)

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = -\gamma_1 \sigma, \quad (4.5)$$

где второе условие — единственное возможное ненулевое значение производной, которое обеспечивает совместность: как легко убедиться, задача Коши (4.3), (4.5) становится несовместной при любом другом задании $v'(0) \neq 0$.

Численное интегрирование ОДУ. Известно [13], что (4.3) относится к уравнениям Льева, которые, как правило, не интегрируются в квадратурах и решаются численно. При этом, чтобы построить удовлетворяющее условию (4.4) решение уравнения (4.1) на интервале времени $t \in [0, T]$, нужно найти решение задачи (4.3), (4.5) на отрезке $z \in [z^*, 0]$, где $z^* = a(0)/a(T) - 1 > -1$.

Особенность при старшей (второй) производной затрудняет применение классических разностных методов для решения (4.3), (4.5). Однако использование итерационного подхода, аналогичного предложенному в разд. 3 на каждом шаге по времени, позволяет преодолеть эти сложности. Разрешив ОДУ (4.3) относительно старшей производной, мы можем построить решение задачи Коши итерационно:

$$v(z) = r(z) + s(z), \quad r^{(0)} \equiv 0, \quad (4.6)$$

$$s^{(n)} = -\left(\gamma_1 \sigma + r^{(n)}(0)\right)z, \quad (4.7)$$

$$v^{(n)}(z) = r^{(n)}(z) + s^{(n)}(z), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r^{(n+1)}}{dz^2} = & -\frac{1}{v^{(n)}} \left(\frac{1}{\sigma} \left[\frac{dv^{(n)}}{dz} \right]^2 + \gamma_1(z+1) \frac{dv^{(n)}}{dz} \right) - \\ & - \frac{1}{z+1} \frac{dv^{(n)}}{dz} - \alpha v^{\beta-1} - \gamma_2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь $r(z)$ — частное решение уравнения (4.3), $s(z)$ — решение соответствующей задачи Коши для однородного уравнения $s'' = 0$, $v^{(n)}$, $r^{(n)}$ и $s^{(n)}$ суть n -е итерации решений. Уравнение (4.9) решается методом коллокаций с использованием РБФ. Итерационный процесс останавливается при выполнении условия

$$\left| \frac{v^{(n+1)}(z^*) - v^{(n)}(z^*)}{v^{(n)}(z^*)} \right| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — заданное число.

Вопросы сходимости предложенного итерационного метода и оценки точности получаемых с его помощью решений задачи (4.3), (4.5), как и верификация алгоритма, представленного в разд. 3, обсуждаются в разд. 5.

Решения ОДУ, представимые в явном виде. Большой интерес, в том числе и для верификации результатов расчетов, представляют те редкие случаи, в которых удастся получить решения в виде явных формул. Рассмотрим два из них.

Пусть в уравнении (4.1) $\alpha \neq 0$, $\beta = 1$. Будем искать его решение в виде

$$u(t, \rho) = \sum_{k=1}^n w_k(t) \rho^k,$$

т.е. в виде многочлена по степеням ρ с коэффициентами, зависящими от t . Индукцией по n можно показать, что $w_1(t) = w_3(t) = \dots = w_k(t) = \dots = 0$, $k > 3$. Отличными от нуля могут быть только коэффициенты w_0 и w_2 , которые определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$w_0'(t) = 4w_0(t)w_2(t) + \alpha w_0(t), \quad w_2'(t) = \left(4 + \frac{4}{\sigma} \right) w_2^2(t) + \alpha w_2(t). \quad (4.10)$$

Общее решение (4.10) имеет вид

$$w_0(t) = \frac{C_2 e^{\alpha t}}{(C - e^{\alpha t})^{\sigma/(\sigma+1)}}, \quad w_2(t) = \frac{\alpha \sigma e^{\alpha t}}{4(\sigma+1)(C - e^{\alpha t})}.$$

Отсюда имеем, что решение уравнения (4.1) искомого вида, удовлетворяющее условию $u(0, R) = 0$, таково:

$$u_1(t, \rho) = \frac{\alpha \sigma e^{\alpha t}}{4(\sigma+1)(C - e^{\alpha t})} \left[\rho^2 - R^2 \left(\frac{C - e^{\alpha t}}{C - 1} \right)^{1/(\sigma+1)} \right]. \quad (4.11)$$

Здесь $C > 1$, $R > 0$ — произвольные константы. Фронт тепловой волны решения (4.11) имеет следующий вид:

$$\rho = a_1(t) = R \left(\frac{C - e^{\alpha t}}{C - 1} \right)^{\delta}, \quad (4.12)$$

где $\delta = 1/(2\sigma + 2)$. Если $\alpha > 0$, то волна движется к началу координат, и при $t = (\ln C)/\alpha$, когда фронт достигает точки $\rho = 0$, происходит blow-up. Если $\alpha < 0$, то волна движется от начала координат, но не может пересечь окружность $\rho = R(C/(C-1))^\delta > R$, и волна быстро (экспоненциально по t) затухает.

Если принять $\alpha = 0$ (т.е. источник/сток отсутствует), то интегрирование системы (4.10) дает другие функции

$$w_0(t) = \frac{C_2}{(C + \eta t)^{\sigma/(\sigma+1)}}, \quad w_2(t) = -\frac{1}{C + \eta t},$$

где $\eta = 4 + 4/\sigma$. Отсюда получаем, что решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условию $u(0, R) = 0$, при $\alpha = 0$ имеет следующий вид:

$$u_2(t, \rho) = \frac{1}{C + \eta t} \left[R^2 \left(\frac{C + \eta t}{C} \right)^{2\delta} - \rho^2 \right]. \quad (4.13)$$

Можно видеть, что (4.13) не следует непосредственно из (4.11). Фронт тепловой волны здесь определяется уравнением

$$\rho = a_2(t) = R \left(1 + \frac{\eta t}{C} \right)^\delta. \quad (4.14)$$

Поскольку $0 < \delta < 0.5$, $0 < \sigma/(\sigma+1) < 1$, то указанный фронт движется достаточно медленно, но тем не менее обладает свойством $a_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$; решение $u_2(t, \rho)$ при всех $\rho > 0$ является ограниченным по t .

Замечание 2. Соотношение (4.13) соответствует следующему квадратичному решению задачи (4.3), (4.5):

$$v_1(z) = -\gamma_1 \sigma \left(\frac{z^2}{2} + z \right), \quad (4.15)$$

которое имеет место при $\alpha = 0$, $\beta = 2 + 1/\sigma$, $\omega = \delta = 1/(2\sigma + 2)$. Ранее решение близкого к (4.13) вида использовалось в работе [22] для верификации расчетов.

5. ПРИМЕРЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Пример 1. Для оценки точности решения задачи (4.3), (4.5) с помощью итерационной процедуры (4.6)–(4.9) в случае, когда фронт тепловой волны задан степенной функцией $a(t) = (c_3 + c_4 t)^\omega$ (см. (4.2)), используем решение (4.15). Для этого нужно, чтобы $a(t)$ имела вид (4.14), поэтому в (4.1)–(4.3) и (4.5) положим $c_3 = R^{1/\delta}$, $c_4 = R^{1/\delta} \eta/C$, $\alpha = 0$, $\beta = 2 + 1/\sigma$.

Поскольку наибольшее отклонение итерационных решений от решения (4.15) наблюдается в точке $z = z^*$, оценивать их точность будем с помощью относительной погрешности

$$D = \left| \frac{v(z^*) - v_1(z^*)}{v_1(z^*)} \right|. \quad (5.1)$$

В табл. 1 представлены погрешности численных решений при $R = 1$, $\varepsilon = 10^{-10}$, различных значениях параметров σ , C , z^* и числа точек коллокации M . Точки коллокации располагались равномерно на отрезке $[z^*, 0]$, за исключением крайней правой, которая была сдвинута из нуля внутрь отрезка ввиду особенности уравнения (4.3). В качестве РБФ здесь и далее использовались мультикватричные функции $f_i = \sqrt{1 + \vartheta^2(z - z_i)^2}$, где z_i , $i = 1, 2, \dots, M$, — точки коллокации, значение

Таблица 1. Погрешности численных решений задачи (4.3), (4.5) при степенном фронте волны

σ	C	z^*	M	D	d	σ	C	z^*	M	D	d
2	5	-0.5	11	$3.6 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-8}$	5	3	-0.5	11	$6.3 \cdot 10^{-9}$	$6.1 \cdot 10^{-8}$
			21	$6.9 \cdot 10^{-10}$	$9.2 \cdot 10^{-9}$				21	$1.2 \cdot 10^{-9}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
			51	$1.3 \cdot 10^{-10}$	$4.5 \cdot 10^{-9}$				51	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$
		-0.7	11	$7.0 \cdot 10^{-9}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$			-0.7	11	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$7.2 \cdot 10^{-8}$
			21	$1.1 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$				21	$2.3 \cdot 10^{-9}$	$3.1 \cdot 10^{-8}$
			51	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$5.7 \cdot 10^{-9}$				51	$3.8 \cdot 10^{-10}$	$1.5 \cdot 10^{-8}$
		-0.9	11	$1.5 \cdot 10^{-8}$	$2.9 \cdot 10^{-7}$			-0.9	11	$2.8 \cdot 10^{-8}$	$8.1 \cdot 10^{-8}$
			21	$2.3 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$				21	$5.1 \cdot 10^{-9}$	$3.2 \cdot 10^{-8}$
			51	$2.9 \cdot 10^{-10}$	$5.9 \cdot 10^{-9}$				51	$8.5 \cdot 10^{-10}$	$1.7 \cdot 10^{-8}$
		-0.99	51	$6.1 \cdot 10^{-10}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$			-0.99	51	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$8.0 \cdot 10^{-8}$
			101	$1.2 \cdot 10^{-10}$	$3.6 \cdot 10^{-9}$				101	$4.5 \cdot 10^{-10}$	$1.3 \cdot 10^{-8}$

параметра формы ϑ было выбрано, исходя из его влияния на скорость сходимости и точность решения. Лучшие результаты были получены при значениях, близких к $\vartheta = 0.8\sqrt{M}/z^*$, см.[28]. В последнем столбце табл. 1 представлены невязки уравнения (4.3) при подстановке в него численных решений,

$$d = \max_{z \in [z^*, 0]} \left| vv'' + \frac{(v')^2}{\sigma} + \frac{vv'}{z+1} + \gamma_1(z+1)v' + \alpha v^\beta + \gamma_2 v \right|.$$

(5.2)

Отметим, что решение получается непрерывным и дважды дифференцируемым.

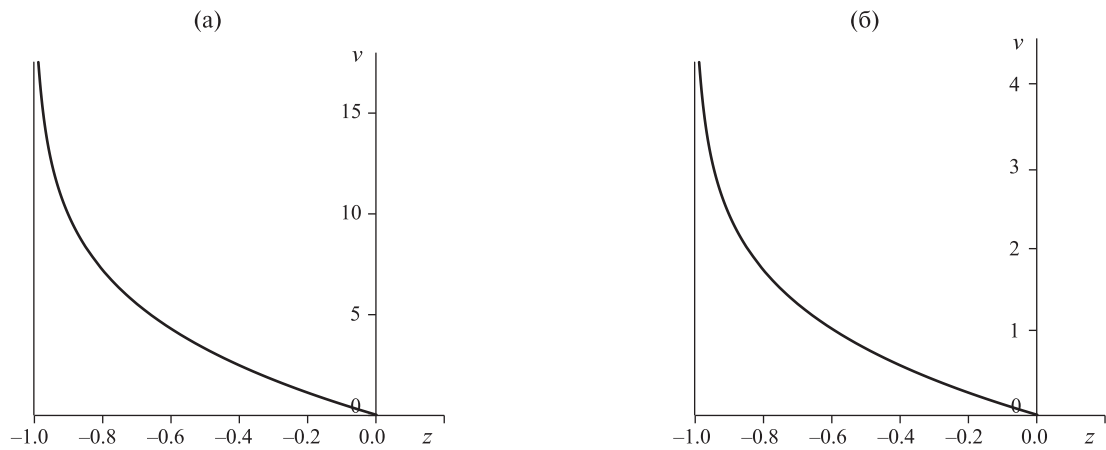
Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы. Погрешность численных решений относительно точного решения (4.15) достаточно мала. С увеличением числа точек коллокации точность повышается, что говорит о сходимости, при этом даже при небольшом их числе порядок погрешности довольно мал.

Числовые значения параметров σ , C незначительно влияют на точность расчетов. Значение z^* , определяющее область решения задачи, также слабо влияет на погрешность до тех пор, пока это значение не приблизится к значению минус один, в котором уравнение имеет особенность. Это происходит, когда интервал времени $t \in [0, T]$, на котором мы решаем уравнение (4.1), неограниченно возрастает. Для примера в табл. 1 был рассмотрен случай $z^* = -0.99$. Тогда, если $M = 11, 21$, итерационный процесс не сходится. Однако достигнуть сходимости и требуемой точности, соответствующей другим значениям z^* , можно, увеличив число точек коллокации.

Невязка (5.2) уменьшается с увеличением числа точек коллокации и коррелирует с относительной погрешностью (5.1). Это дает основание использовать невязку для оценки точности численного решения задачи (4.3), (4.5), когда аналитического тестового решения нет. Этот важный результат мы используем в следующем примере.

Пример 2. Рассмотрим теперь задачу Коши (4.3), (4.5) при $\alpha \neq 0$, $\beta = 1$, $a(t) = c_1 e^{c_2 t}$. Поскольку проинтегрировать ОДУ в квадратурах в этом случае не получается, точность алгоритма (4.6)–(4.9) будем оценивать по величине невязки (5.2). При равномерном расположении точек коллокации невязка в окрестностях концов отрезка $[z^*, 0]$ на несколько порядков больше, чем в остальной части. Особенно возрастает невязка при приближении к точке z^* . Это, очевидно, объясняется тем, что прямая $z = -1$ является вертикальной асимптотой решения (см. фиг. 2). В связи с этим, использовалось сгущение точек коллокации в окрестностях нуля и z^* .

В табл. 2 представлены невязки для решений при $\alpha = 1$, $\varepsilon = 10^{-10}$ и различных значениях параметров σ , c_2 , z^* , M . Вновь наблюдается сходимость относительно числа точек коллокации, но их требуется



Фиг. 2. Графики решений задачи (4.3), (4.5): (а) — для $\sigma = 5$, $c_2 = 1$, (б) — для $\sigma = 3$, $c_2 = 0.5$

Таблица 2. Невязки уравнения (4.3) для численных решений при показательном фронте волны

σ	c_2	z^*	M	d
5	1	-0.5	21	$5.5 \cdot 10^{-7}$
			51	$1.1 \cdot 10^{-7}$
			101	$6.7 \cdot 10^{-9}$
		-0.7	51	$2.3 \cdot 10^{-6}$
			101	$1.2 \cdot 10^{-7}$
			201	$1.2 \cdot 10^{-8}$
		-0.9	101	$5.2 \cdot 10^{-3}$
			151	$1.2 \cdot 10^{-4}$
			201	$7.2 \cdot 10^{-6}$
σ	c_2	z^*	M	d
3	0.5	-0.5	21	$9.2 \cdot 10^{-8}$
			51	$6.5 \cdot 10^{-9}$
			101	$4.3 \cdot 10^{-10}$
		-0.7	51	$7.1 \cdot 10^{-7}$
			101	$1.3 \cdot 10^{-8}$
			151	$1.7 \cdot 10^{-9}$
		-0.9	101	$2.9 \cdot 10^{-4}$
			151	$1.8 \cdot 10^{-5}$
			201	$4.0 \cdot 10^{-6}$

в разы больше для достижения значений, близких к полученным в предыдущем примере. Точность решения заметно падает с увеличением области решения, поскольку $\lim_{z \rightarrow -1} v(z) = +\infty$. Тем не менее, полученные результаты демонстрируют хорошую точность решения задачи (4.3), (4.5) и дают основание использовать его для построения решений задачи (2.1), (2.2). Решение, соответствующее выделенным жирным шрифтом строкам табл. 2, использовано ниже для тестирования алгоритма решения задачи (2.1), (2.2) (см. пример 4).

лученные результаты демонстрируют хорошую точность решения задачи (4.3), (4.5) и дают основание использовать его для построения решений задачи (2.1), (2.2). Решение, соответствующее выделенным жирным шрифтом строкам табл. 2, использовано ниже для тестирования алгоритма решения задачи (2.1), (2.2) (см. пример 4).

Пример 3. Для тестирования пошагового алгоритма решения задачи (2.1), (2.2), предложенного в разд. 3, используем сначала аналитическое решение (4.11). Пусть уравнение (2.1) имеет вид (4.1), краевое условие (2.2) зададим в виде

$$u|_{p=g(t)} = u_1(t, g(t)) \quad (5.3)$$

и рассмотрим три различных варианта функции $g(t)$, определяющей движение фронта в (5.3)

$$g_1(t) = a_1\left(\frac{t}{3}\right), \quad g_2(t) = a_1\left(\frac{t}{2}\right), \quad g_3(t) = a_1\left(\frac{2t}{3}\right), \quad (5.4)$$

где $a_1(t)$ — функция (4.12).

Таблица 3. Погрешности численного решения задачи (4.1), (5.3)

i	t	h	$2N$	M_{in}	Этап 1	Этап 2
1	0.5	0.1	200	50	$9.31 \cdot 10^{-6}$	$1.89 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$8.92 \cdot 10^{-6}$	$1.38 \cdot 10^{-5}$
			500	100	$8.86 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^{-5}$
		0.01	200	50	$5.44 \cdot 10^{-6}$	$9.71 \cdot 10^{-6}$
			350	75	$4.35 \cdot 10^{-6}$	$8.65 \cdot 10^{-6}$
			500	100	$3.69 \cdot 10^{-6}$	$8.22 \cdot 10^{-6}$
	1.0	0.1	200	50	$1.59 \cdot 10^{-5}$	$3.66 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$1.05 \cdot 10^{-5}$	$2.94 \cdot 10^{-5}$
			500	100	$9.94 \cdot 10^{-6}$	$2.87 \cdot 10^{-5}$
		0.01	200	50	$8.97 \cdot 10^{-6}$	$2.63 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$8.13 \cdot 10^{-6}$	$2.12 \cdot 10^{-5}$
			500	100	$7.75 \cdot 10^{-6}$	$1.98 \cdot 10^{-5}$
2	0.5	0.1	200	50	$1.64 \cdot 10^{-5}$	$3.31 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$1.32 \cdot 10^{-5}$	$2.87 \cdot 10^{-5}$
			500	100	$1.25 \cdot 10^{-5}$	$2.80 \cdot 10^{-5}$
		0.01	200	50	$8.65 \cdot 10^{-6}$	$1.66 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$7.53 \cdot 10^{-6}$	$9.53 \cdot 10^{-6}$
			500	100	$7.08 \cdot 10^{-6}$	$9.07 \cdot 10^{-6}$
	1.0	0.1	200	50	$2.35 \cdot 10^{-5}$	$5.59 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$1.87 \cdot 10^{-5}$	$4.85 \cdot 10^{-5}$
			500	100	$1.81 \cdot 10^{-5}$	$4.77 \cdot 10^{-5}$
		0.01	200	50	$1.38 \cdot 10^{-5}$	$4.64 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$9.72 \cdot 10^{-6}$	$4.28 \cdot 10^{-5}$
			500	100	$9.44 \cdot 10^{-6}$	$4.17 \cdot 10^{-5}$
3	0.5	0.1	200	50	$3.26 \cdot 10^{-5}$	$6.35 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$2.94 \cdot 10^{-5}$	$5.97 \cdot 10^{-5}$
			500	100	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$5.94 \cdot 10^{-5}$
		0.01	200	50	$1.73 \cdot 10^{-5}$	$3.82 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$1.42 \cdot 10^{-5}$	$3.56 \cdot 10^{-5}$
			500	100	$1.36 \cdot 10^{-5}$	$3.54 \cdot 10^{-5}$
	1.0	0.1	200	50	$3.84 \cdot 10^{-5}$	$8.26 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$3.47 \cdot 10^{-5}$	$7.94 \cdot 10^{-5}$
			500	100	$3.42 \cdot 10^{-5}$	$7.90 \cdot 10^{-5}$
		0.01	200	50	$2.96 \cdot 10^{-5}$	$7.22 \cdot 10^{-5}$
			350	75	$2.53 \cdot 10^{-5}$	$6.85 \cdot 10^{-5}$
			500	100	$2.48 \cdot 10^{-5}$	$6.84 \cdot 10^{-5}$

Во всех вариантах расчетов были получены симметричные относительно начала координат решения. Поскольку наибольшие отклонения численных решений от точного на этапе 1 наблюдались вдоль определяемого нулевого фронта, оценивать точность на этом этапе будем с помощью

Таблица 4. Погрешности численного решения задачи (4.1), (5.5) при степенном нулевом фронте

i	t	h	$2N$	M_{in}	Этап 1	Этап 2
1	0.5	0.1	200	25	$1.72 \cdot 10^{-4}$	$1.69 \cdot 10^{-3}$
			350	50	$1.61 \cdot 10^{-4}$	$1.36 \cdot 10^{-3}$
			500	75	$1.55 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$
		0.01	200	25	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$9.68 \cdot 10^{-4}$
			350	50	$9.9 \cdot 10^{-5}$	$9.36 \cdot 10^{-4}$
			500	75	$9.4 \cdot 10^{-5}$	$9.14 \cdot 10^{-4}$
	1.0	0.1	200	25	$2.28 \cdot 10^{-4}$	$2.01 \cdot 10^{-3}$
			350	50	$2.16 \cdot 10^{-4}$	$1.78 \cdot 10^{-3}$
			500	75	$2.13 \cdot 10^{-4}$	$1.63 \cdot 10^{-3}$
		0.01	200	25	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
			350	50	$1.43 \cdot 10^{-4}$	$1.42 \cdot 10^{-3}$
			500	75	$1.37 \cdot 10^{-4}$	$1.36 \cdot 10^{-3}$
2	0.5	0.1	200	25	$1.35 \cdot 10^{-4}$	$9.94 \cdot 10^{-4}$
			350	50	$1.26 \cdot 10^{-4}$	$9.13 \cdot 10^{-4}$
			500	75	$1.18 \cdot 10^{-4}$	$8.84 \cdot 10^{-4}$
		0.01	200	25	$6.9 \cdot 10^{-5}$	$7.97 \cdot 10^{-4}$
			350	50	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$6.82 \cdot 10^{-4}$
			500	75	$5.9 \cdot 10^{-5}$	$6.55 \cdot 10^{-4}$
	1.0	0.1	200	25	$1.88 \cdot 10^{-4}$	$1.19 \cdot 10^{-3}$
			350	50	$1.83 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-3}$
			500	75	$1.81 \cdot 10^{-4}$	$9.6 \cdot 10^{-4}$
		0.01	200	25	$1.13 \cdot 10^{-4}$	$8.73 \cdot 10^{-4}$
			350	50	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$8.45 \cdot 10^{-4}$
			500	75	$9.8 \cdot 10^{-5}$	$8.16 \cdot 10^{-4}$
3	0.5	0.1	200	25	$1.12 \cdot 10^{-4}$	$7.42 \cdot 10^{-4}$
			350	50	$9.9 \cdot 10^{-5}$	$7.13 \cdot 10^{-4}$
			500	75	$9.3 \cdot 10^{-5}$	$6.49 \cdot 10^{-4}$
		0.01	200	25	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$4.51 \cdot 10^{-4}$
			350	50	$4.8 \cdot 10^{-5}$	$3.81 \cdot 10^{-4}$
			500	75	$4.1 \cdot 10^{-5}$	$3.33 \cdot 10^{-4}$
	1.0	0.1	200	25	$1.65 \cdot 10^{-4}$	$8.73 \cdot 10^{-4}$
			350	50	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$8.45 \cdot 10^{-4}$
			500	75	$1.52 \cdot 10^{-4}$	$8.16 \cdot 10^{-4}$
		0.01	200	25	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$6.19 \cdot 10^{-4}$
			350	50	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$5.84 \cdot 10^{-4}$
			500	75	$9.1 \cdot 10^{-5}$	$5.52 \cdot 10^{-4}$

погрешности найденного фронта относительно $a_1(t)$. Точность решения на этапе 2 оценим погрешностью численного решения относительно точного (4.11) при $\rho = a_1(0)$, где также наблюдалось наибольшее расхождение.

Проиллюстрируем результаты расчетов при $\sigma = 2$, $R = 1$, $C = 2$, $\alpha = -1$. В качестве точек коллокации были приняты $2N$ узлов граничных элементов и M_{in} внутренних точек. В табл. 3 приведены оценки точности на обоих этапах решения в два момента времени при различных h , N и M_{in} . В первом столбце содержатся номера вариантов подвижного фронта $\rho = g(t)$ в соответствии с (5.4). Результаты расчетов показывают, что точность повышается с уменьшением шага по времени и увеличением числа точек коллокации (включая число граничных элементов). Таким образом, алгоритм сходится относительно этих параметров. Расположение подвижного фронта (5.4) относительно нулевого фронта (4.12) влияет на точность (чем эти фронты ближе, тем точнее), но в пределах одного порядка.

Пример 4. Оценим теперь точность численного решения при показательном фронте тепловой волны $a(t) = c_1 e^{c_2 t}$. Для этого используем решение, построенное в примере 2 при $\sigma = 3$, $c_1 = 0.5$, $c_2 = 0.5$. Отметим, что найденные решения задачи (4.3), (4.5) при $M = 51,101$ совпадали до десятого знака после запятой. Краевое условие (2.2) примем в виде

$$u|_{\rho=g_i(t)} = f_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.5)$$

где

$$g_1(t) = c_1 e^{\frac{c_2 t}{3}}, \quad g_2(t) = c_1 e^{\frac{c_2 t}{2}}, \quad g_3(t) = c_1 e^{\frac{2c_2 t}{3}},$$

а функции $f_i(t)$ зададим таблично с заданным шагом по времени h в соответствии с численным решением задачи (4.3), (4.5).

В табл. 4 приведены оценки точности в два момента времени при различных h , N и M_{in} , аналогично предыдущему примеру. Выводы также аналогичны примеру 3: наблюдается сходимость относительно шага по времени и числа точек коллокации, увеличение расстояния от заданного подвижного фронта до нулевого фронта незначительно снижает точность. Погрешности в примере 4 заметно больше, чем в примере 3. Очевидно, это связано с тем, что функция $f(t)$ в краевом условии задается в табличном виде. Тем не менее, результаты удовлетворительны для верификации алгоритма.

Пример 5. В завершение вычислительного эксперимента рассмотрим пример решения задачи вида (2.1), (2.2), зависящего от двух пространственных переменных. При этом продемонстрируем также эффективность алгоритма в случае отличного от степенного вида нелинейности уравнения.

Пусть в уравнении (2.1) $F(u) = (\sigma + u)/(\sigma - u)$, что соответствует дробно-линейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры вида $k(T) = \sigma T/(T + \theta)$, $H(u) = u$, и условие (2.2) имеет вид

$$u|_{\rho=1+c_1 t(1+c_2 \cos(\varphi))} = 0, \quad (5.6)$$

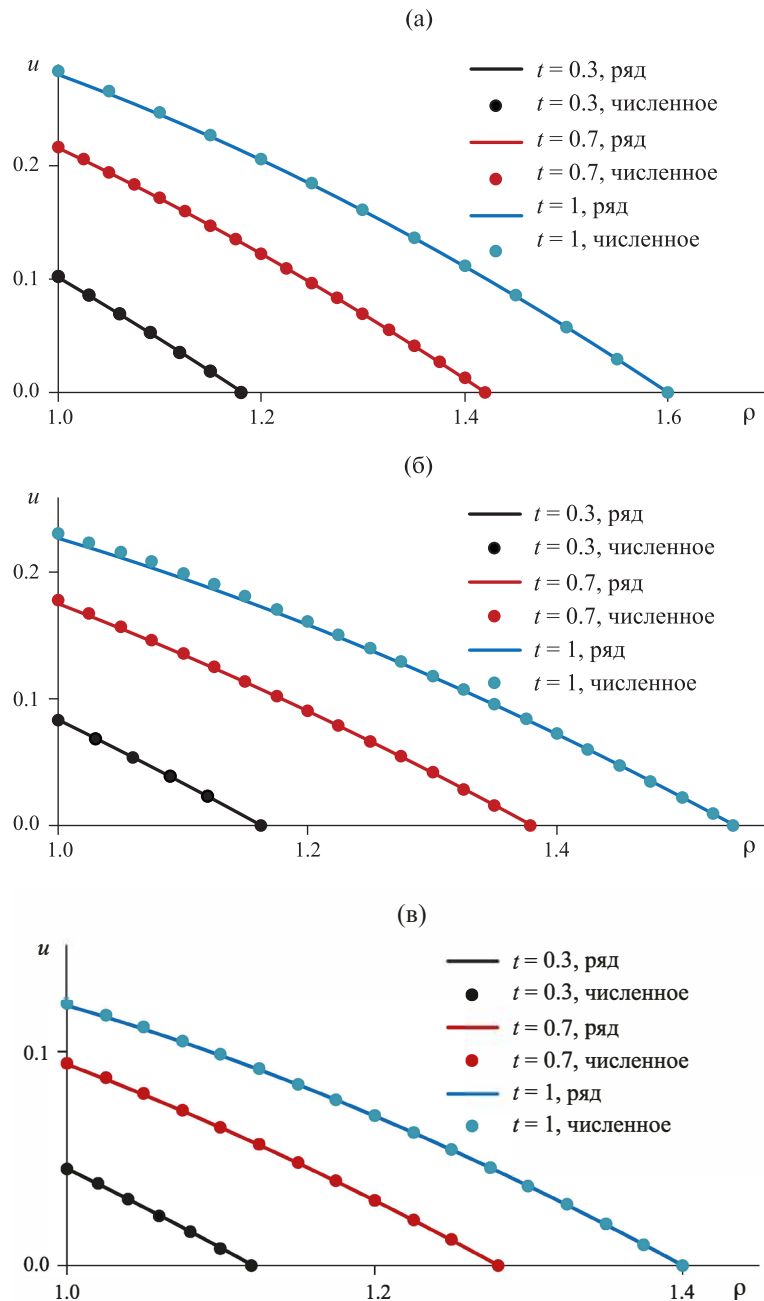
т.е. фронт тепловой волны известен и задан уравнением $\rho = 1 + c_1 t(1 + c_2 \cos(\varphi))$, где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ — константы. Тогда условие (2.4) в доказательстве теоремы становится однородным, и решение задачи (2.3), (2.4) (которая, напомним, эквивалентна исходной) может быть построено в виде степенного ряда

$$u(t, \rho, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t, \varphi) \frac{r^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t, \varphi) \frac{[\rho - a(t, \varphi)]^m}{m!}, \quad u_m(t, \varphi) = \left. \frac{\partial^m u}{\partial r^m} \right|_{\rho=a(t, \varphi)}. \quad (5.7)$$

Из условия (2.4) следует, что $u_0 \equiv 0$. Коэффициенты $u_m(t, \varphi)$, $m = 1, 2, \dots$, определяются рекуррентно путем подстановки ряда (5.7) в уравнение (2.3) и приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях r . При этом уравнение для $u_1(t, \varphi)$ будет квадратным, а для последующих коэффициентов — линейным. Локальная сходимость ряда следует из теоремы 1 (см. также [23]).

Отрезки ряда (5.7)

$$u_n(t, \rho, \varphi) = \sum_{m=0}^n u_m(t, \varphi) \frac{[\rho - a(t, \varphi)]^m}{m!} \quad (5.8)$$



Фиг. 3. Сравнение численного решения и отрезка ряда: (а) — вдоль луча $\phi = 0$; (б) — вдоль луча $\phi = \pi/4$; (в) — вдоль луча $\phi = \pi/2$

были использованы для верификации численного решения задачи (2.1), (2.2), когда краевое условие неоднородно. Именно, условие (2.2), соответствующее (5.8), было задано на подвижном фронте $g(t, \phi) = 1 + 0.5c_1t(1 + c_2 \cos(\phi))$

$$u|_{\rho=g(t,\phi)} = u_n(t, g(t, \phi), \phi).$$

На фиг. 3 приведены графики численного и аналитического решений вдоль лучей $\phi = 0$, $\phi = \pi/4$, $\phi = \pi/2$ при $\sigma = 3$, $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0.5$, $n = 4$, $h = 0.1$, $2N = 500$, $M_{\text{in}} = 100$. Результаты показывают, что разработанный в разд. 3 алгоритм позволяет успешно решать двумерные задачи вида (2.1), (2.2) и в случае нелинейности отличной от степенной.

В целом вычислительный эксперимент дал два основных результата: 1) верифицирован предложенный алгоритм решения задачи (2.1), (2.2); 2) обоснована возможность построения референсных решений с помощью численного решения задачи Коши для ОДУ (4.3), (4.5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе выполнено исследование двумерного вырождающегося нелинейного уравнения теплопроводности с источником при нелинейностях общего вида. Рассмотрена проблема отыскания решений, имеющих вид тепловой волны, порождаемой краевым режимом, заданным на движущейся линии, расположенной внутри области определения. Доказана оригинальная теорема существования и единственности таких решений.

Наиболее значимым результатом, по мнению авторов, является то, что формулировка и аппроксимация дополнительных условий на фронте тепловой волны позволили разработать новый пошаговый итерационный алгоритм, использующий совместно метод конечных разностей, метод граничных элементов и метод коллокации, превосходящий для исследуемого типа задач по точности расчетов и скорости сходимости метод двойственной взаимности, применявшийся авторами ранее. Применение радиальных базисных функций, а также специальных замен переменных позволили построить непрерывные по пространственным переменным решения на каждом шаге по времени. В качестве инструмента верификации расчетов были применены точные решения, часть из которых также обладает новизной.

Проведенный комплексный вычислительный эксперимент по сопоставлению результатов применения разработанного алгоритма с аналитическими решениями показал численную сходимость относительно шага по времени и числа точек коллокации, а также устойчивость относительно значений числовых параметров задачи. Это дает возможность использовать в будущем результаты расчетов для изучения свойств исследуемого уравнения.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на увеличение количества пространственных переменных до трех, а также на изучение подобных задач для других уравнений параболического типа и их систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
4. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
5. Лыков А. В. Теплообмен. М.: Энергия, 1972.
6. Ханхасаев В. Н., Дармаев Э. В. О некоторых применениях гиперболического уравнения теплопроводности и методах его решения // Матем. заметки СВФУ. 2018. Т. 25. № 1. С. 98–111.
7. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб., посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
8. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. матем. и механ. 1952. Т. 16. № 1. С. 67–78.
9. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
10. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
11. Степанова Е. В., Шишков А. Е. Начальная эволюция носителей решений квазилинейных параболических уравнений с вырождающимся абсорбционным потенциалом // Матем. сборник. 2013. № 3. С. 79–106.
12. Antontsev S. N., Shmarev S. I. Evolution PDEs with nonstandard growth conditions: Existence, uniqueness, localization, blow-up. Paris: Atlantis Press, 2015.
13. Кудряшов Н. А., Синельников Д. И. Аналитические решения нелинейного уравнения конвекции–диффузии с нелинейными источниками // Моделирование и анализ информ. систем. 2016. Т. 23. № 3. С. 309–316.
14. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.

15. Казаков А. Л., Сневак Л. Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Изв. ИГУ. Сер. математика. 2012. Т. 5. № 2. С. 2–17.
16. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сиб. ж. индустриальной матем. 2018. Т. 21. № 2 (74). С. 56–65.
17. Казаков А. Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. электронные матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1057–1068.
18. Partridge P. W., Brebbia C. A., Wrobel L. C. The dual reciprocity boundary element method. Southampton: Comp. Mech. Pub., 1992.
19. Golberg M. A., Chen C. S., Bowman H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM // Eng. Anal. Bound. Elem. 1999. V. 23. P. 285–296.
20. AL-Bayati S.A., Wrobel L. C. The dual reciprocity boundary element formulation for convection–diffusion–reaction problems with variable velocity field using different radial basis functions // Int. J. Mech. Sci. 2018. V. 145. P. 367–377.
21. Chen W., Fu Z. — J., Chen C. S. Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods. Berlin/Heidelberg: Springer, 2013.
22. Казаков А. Л., Неведова О. А., Сневак Л. Ф. Решение задач об инициировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 6. С. 1047–1062.
23. Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A., Lempert A. A. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term // Symmetry. 2020. V. 12. No 6. P. 921.
24. Сневак Л. Ф., Неведова О. А. Численное решение двумерного нелинейного уравнения теплопроводности с использованием радиальных базисных функций // Комп. иссл. и модел. 2022. Т. 14. № 1. С. 9–22.
25. Brebbia C. A., Telles J. C.F., Wrobel L. C. Boundary element techniques. Theory and applications in engineering. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2012.
26. Федотов В. П., Сневак Л. Ф. Аналитическое интегрирование функций влияния для решения задач упругости и теории потенциала методом граничных элементов // Матем. моделирование. 2007. Т. 19. № 2. С. 87–104.
27. Fedotov V. P., Spevak L. F. One approach to the derivation of exact integration formulae in the boundary element method // Eng. Anal. Bound. Elem. 2008. V. 32. No 10. P. 883–888.
28. Franke R. Scattered data interpolation: Tests of some methods // Math. Comput. 1982. V. 38. No 157. P. 181–200.