

УДК 620.193.013

СХОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДА ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ПОВТОРНЫХ РОТАЦИОННЫХ ОПЕРАЦИЙ

© 2024 г. Ю. А. Повещенко^{1,*}, А. Ю. Круковский¹, В. О. Подрыга^{1,**}, П. И. Рагимли¹

¹125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

*e-mail: hecon@mail.ru

**e-mail: PVictoria@list.ru

Поступила в редакцию 21.03.2023 г.

Переработанный вариант 18.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

В настоящей работе предложен подход к описанию метрических свойств разностной сетки для дискретизации повторных ротационных операций векторного анализа применительно к моделированию электромагнитных полей. На основе метода опорных операторов в данной работе построены интегрально-согласованные операции (градиент, дивергенция и ротор), которые необходимы для получения оценок сходимости разностных схем для повторных ротационных операций, для решения конкретных задач магнитной гидродинамики. На гладких решениях модельной магнитостатической задачи с первым порядком точности доказана сходимость построенных в работе разностных схем с нулевым собственным значением спектральной задачи. На разностную тетраэдрическую сетку не накладывается при этом никаких ограничений, кроме ее невырожденности. В настоящей работе приводится расчет электромагнитных полей для трехмерной задачи магнитной гидродинамики в двухтемпературном приближении с полной конфигурацией скорости и электромагнитных полей. Динамика электромагнитных полей развивается на фоне ротационной диффузии вектора магнитного поля. Библ. 16. Фиг. 7.

Ключевые слова: нерегулярные разностные сетки, метод опорных операторов, повторные ротационные операции, вычислительный эксперимент.

DOI: 10.31857/S0044466924010049 EDN: ZKCDXD

1. ВВЕДЕНИЕ

Повторные ротационные операции тензорного анализа используются для моделирования широкого класса практических задач (таких как физика плазмы, астрофизика, лазерный термоядерный синтез и др.) [1–6]. Метод опорных операторов (МОО) (см., например, [7–9]) при построении разностных схем используется для согласованной в смысле ряда интегральных тождеств аппроксимации сопряженных операций векторного анализа (таких как градиент, дивергенция, ротор и их комбинации и др.), необходимых для проведения широкомасштабного вычислительного эксперимента. Данный метод позволил построить разностные схемы на нерегулярных разностных сетках для некоторых уравнений из этого класса, включая нелинейные, с выполнением принципа полной консервативности [10]. В настоящей работе на классических решениях модельной магнитостатической задачи приводится доказательство сходимости разностных схем МОО для повторных ротационных операций векторного анализа с нулевым собственным значением спектральной задачи. Все эти уравнения линейны, причем с постоянными коэффициентами. Данный выбор объясняется стремлением выделить проблемы, связанные исключительно с нерегулярностью разностной сетки, и показать подходы к их численному моделированию. Сходимость доказывается на геометрическом уровне. Предполагается, что решение исходной задачи обладает достаточной необходимой гладкостью.

Рассматриваемые разностные схемы на нерегулярных сетках не аппроксимируют уравнений в локальном смысле, следовательно, доказательство сходимости возможно только после анализа структуры погрешности аппроксимации. Исследование данного вопроса приводит к расщеплению пространства векторных сеточных функций в ортогональную прямую сумму подпространств — как потенциальных, так и вихревых. Применительно к разностной схеме МОО для магнитостатической задачи разностный ротор ошибки вычисления циркуляций отсутствует (т.е. равен нулю). Поэтому данная ошибка является градиентом некоторой сеточной функции ($\text{grad}\xi$). Норма циркуляционной ошибки $\text{grad}\xi$ определяется энергией метрического оператора разностной сетки G [11]. Действие данного оператора на площади

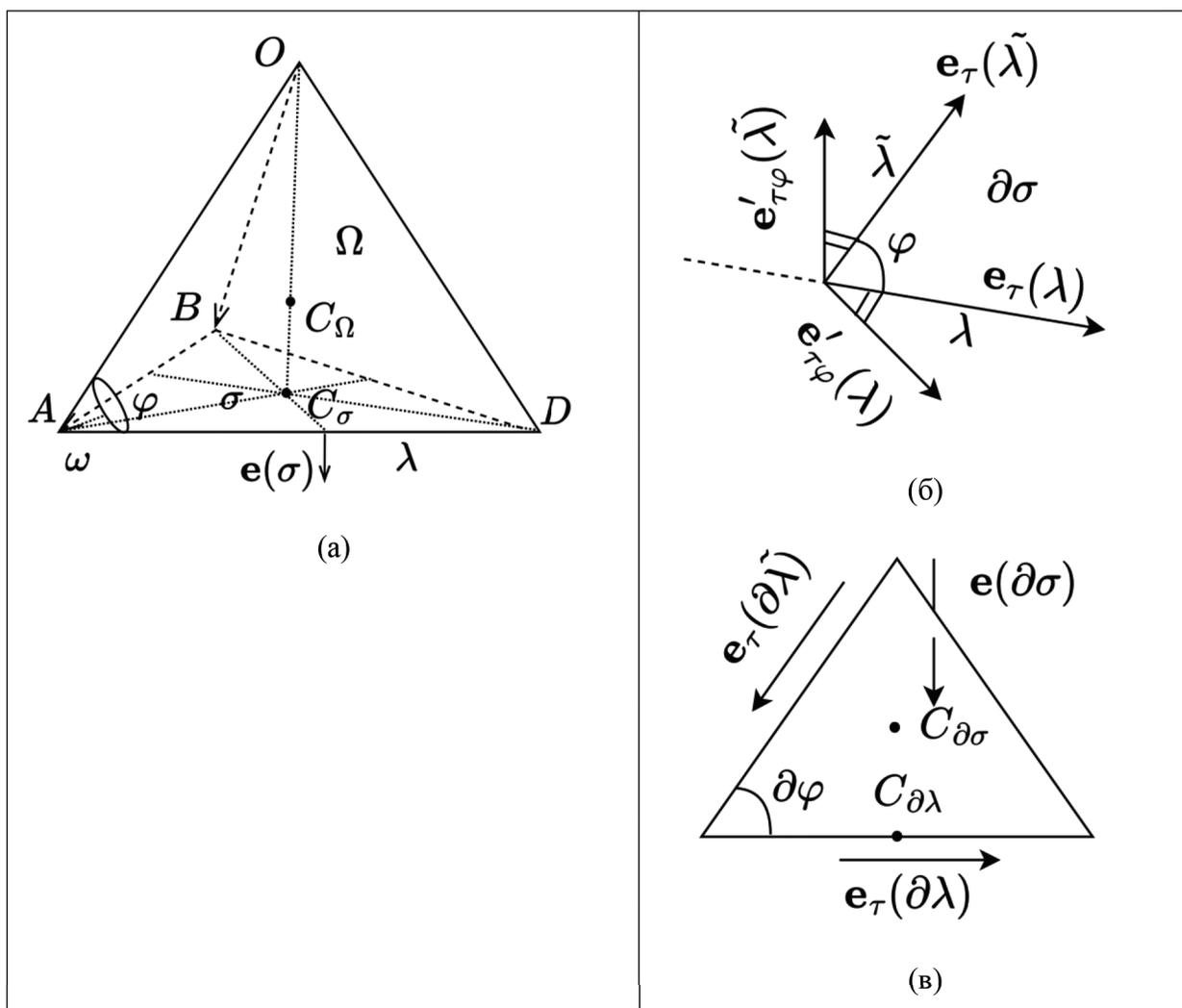
граней ячеек S разностной сетки согласовано с размерами этих ячеек (т.е. расположением центров тяжести ячеек, граней и ребер). Разложение пространства векторных функций в ортогональную прямую сумму подпространств потенциальных и вихревых полей вводится таким образом, чтобы ошибка вычисления циркуляций являлась потенциальной функцией.

В работе на достаточно гладких решениях дифференциальной задачи с первым порядком точности доказана сходимость разностных схем МОО для повторных ротационных операций с нулевым собственным значением спектральной задачи. На разностную тетраэдрическую сетку не накладывается никаких ограничений, кроме ее невырожденности.

В данной работе приведены результаты численного расчета динамики электромагнитных полей для трехмерной задачи магнитной гидродинамики в двухтемпературном приближении с учетом излучения реального уравнения вещества, замагниченности коэффициентов теплопроводности и электропроводности. Скорость и электромагнитные поля имеют полную конфигурацию. Развитие динамики магнитных полей разворачивается при их ротационной диффузии.

2. МЕТРИЧЕСКИЕ РАЗНОСТНЫЕ СЕТКИ МЕТОДА ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Сетки данного типа [7, 11] состоят из ячеек (Ω), которые образуются узлами (ω) и гранями (σ) (см. фиг. 1а). Узлам $\omega(\Omega)$ соответствуют базисы $\varphi(\Omega)$ в ячейке Ω , состоящие из единичных нормалей



Фиг. 1. Ячейки разностной сетки: а) тетраэдрическая ячейка; б) к расчету поверхностной аппроксимации вектора Пойнтинга; в) расчет циркуляции магнитного поля на элементе контура граничной грани $C_{\partial\sigma}C_{\partial\lambda}$, $S_{\sigma}(\lambda) = -1$, $S_{\partial\sigma} = -1$, ячейка $\partial\Omega$ находится под гранью $\partial\sigma$.

$\mathbf{e}(\sigma)$ к граням σ , которые образуют базис. Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов $V_\varphi > 0$ при следующей нормировке $\sum_{\varphi(\Omega)} V_\varphi = V_\Omega$. Компоненты напряженности магнитного поля относятся к сетке $(\sigma), (\varphi)$, которая состоит из грани σ с нормальными к ним $\mathbf{e}(\sigma)$.

Введем сеточное скалярное произведение $(u_1, u_2)_\sigma = \sum_{\sigma} V_\sigma u_1(\sigma) u_2(\sigma)$ с весом $V_\sigma = \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi > 0$. Скалярное произведение $\int_O (\mathbf{u}, \mathbf{g}) dV$ в области O аппроксимируется на сетке $(\sigma), (\varphi)$ ковариантным представлением скалярного сеточного произведения

$$(\bar{u}, g')_\sigma = \sum_{\varphi} V_\varphi \sum_{\sigma(\varphi), \tilde{\sigma}(\varphi)} \text{Gr}'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) u'(\tilde{\sigma}) g'(\sigma).$$

Здесь $\bar{u}(\sigma) = 1/V_\sigma \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} \text{Gr}'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) u'(\tilde{\sigma})$ (в операторной форме $\bar{u} = Gu'$). Следовательно, на сетке $(\sigma), (\varphi)$ введен самосопряженный положительно-определенный метрический оператор $G : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, $G = G^* > 0$, который задается семейством базисных матриц Грама $\text{Gr}'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) = (\mathbf{e}'_\varphi(\sigma), \mathbf{e}'_\varphi(\tilde{\sigma}))$. В этих матрицах $\mathbf{e}'_\varphi(\sigma)$ — взаимные (контравариантные) в локальных базисах φ векторы по отношению к исходным (ковариантным) нормальным $\mathbf{e}(\sigma)$ к граням σ . Данный оператор переводит сеточный аналог ковариантного представления $u'(\sigma)$, называемый сопряженным представлением векторного поля \mathbf{u} , в сеточное контравариантное представление $u(\sigma)$. Базисы φ создаются системой ковариантных ортов \mathbf{e} .

Базисный объем задается формулой $V_\varphi = \frac{1}{6} |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|$ (см. [7]) для треугольных (двумерный случай) ячеек Ω (\mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — стороны треугольника, образующие базис φ). Аналогично для четырехугольной ячейки Ω базисный объем задается формулой $V_\varphi = \frac{1}{4} |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|$. В случае трехмерных призм эти значения V_φ умножаются на половины толщин призматических ячеек Ω , содержащих соответствующие трехмерные базисы φ . Для тетраэдрических разностных ячеек Ω выбирается $V_\varphi = \frac{1}{4} V_\Omega$, где $\varphi \in \Omega$. Для гексаэдрических ячеек Ω , близких к объемным параллелепипедам, $V_\varphi = \frac{1}{8} V_\Omega$, где $\varphi \in \Omega$.

Все результаты разд. 2 обобщаются на случай неединичных нормалей $\mathbf{e}(\sigma)$ к граням σ .

Разностную дивергенцию определим по следующей формуле:

$$\text{DIV} \mathbf{g} = \frac{1}{V_\Omega} \sum_{\sigma(\Omega)} s_\sigma(\Omega) g'(\sigma) S(\sigma). \tag{2.1}$$

Здесь $S(\sigma)$ — удельная площадь грани, т.е. площадь грани σ , деленная на длину орта $\mathbf{e}(\sigma)$, равную $\sqrt{(\mathbf{e}(\sigma), \mathbf{e}(\sigma))}$; $s_\sigma(\Omega)$ — знаковая функция, которая равна единице, если нормаль $\mathbf{e}(\sigma)$ для ячейки Ω внешняя, и минус единице — если нормаль $\mathbf{e}(\sigma)$ внутренняя.

Введем скалярное произведение в ячейках следующим образом:

$$(F_1, F_2)_\Omega = \sum_{\Omega} V_\Omega F_{1\Omega} F_{2\Omega}.$$

Смоделируем интегральное соотношение

$$\int_O \text{grad} F \mathbf{u} dV + \int_O F \text{div} \mathbf{u} dV = \int_\Sigma F \mathbf{u} d\mathbf{S}$$

для области O , ограниченной поверхностью Σ .

Определим оператор $\text{GRAD} : (\Omega) \rightarrow (\sigma)$

$$\overline{(\text{GRAD} F, u')}_\sigma + (F, \text{DIV} \mathbf{u})_\Omega = \sum_{\partial\sigma} s_{\partial\sigma} F_{\partial\sigma} u'(\partial\sigma) S(\partial\sigma). \tag{2.2}$$

Для граничной грани $\partial\sigma$: $S(\partial\sigma)$ — ее удельная площадь; $s_{\partial\sigma}$ — единица, если нормаль $\mathbf{e}(\partial\sigma)$ — внешняя к области O ; $F_{\partial\sigma}$ — сеточная функция F на граничной грани $\partial\sigma$. Заметим, что F и $\bar{u} = Gu'$ — любые сеточные функции. Поэтому на грани σ имеем

$$\overline{\text{GRAD} F} = \frac{\Delta F}{h'}, \quad h' = \frac{V_\sigma}{S(\sigma)},$$

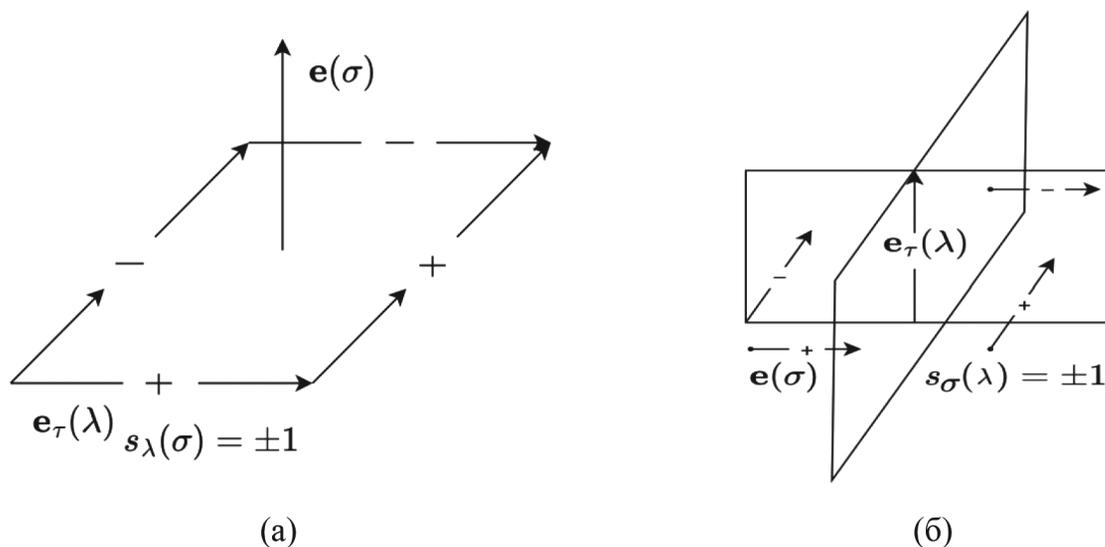
где

$$\Delta F = - \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma}(\Omega) F_{\Omega} + s_{\partial\sigma} F_{\partial\Omega}.$$

Последнее слагаемое в приращении ΔF через грань σ существует только при условии, что эта грань является граничной.

3. ДИСКРЕТНАЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ МАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

3.1. Разностные сетки метода опорных операторов для моделирования электромагнитных процессов



Фиг. 2. Согласование граней и ребер сетки.

Любому ориентированному ребру λ с ортом $\mathbf{e}_{\tau}(\lambda)$ ставится в соответствие его удельная длина $h_{\tau}(\lambda) > 0$ (длина ребра λ , деленная на длину орта $\mathbf{e}_{\tau}(\lambda)$). Каждому поверхностному базису $\partial\varphi$ ставится в соответствие его часть площади грани $S_{\partial\varphi}$ с нормировкой $S_{\partial\sigma} = \sum_{\partial\varphi(\partial\sigma)} S_{\partial\varphi}$. На граничных ребрах $\partial\lambda$ определим также величины $S_{\partial\lambda} = \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)} S_{\partial\varphi}$ и $h_{\Sigma}(\partial\lambda) = S_{\partial\lambda} / h_{\tau}(\partial\lambda)$. Рассмотрим сетку $(\lambda).(\varphi)$, которая состоит из ребер λ с направленными вдоль них векторами $\mathbf{e}_{\tau}(\lambda)$, упорядоченными в систему локальных базисов (φ) . К данной разностной сетке с метрическим оператором G_{τ} отнесем компоненты напряженности электрического поля \mathbf{w} . Для сетки $(\lambda).(\varphi)$ вводится скалярное произведение: $(w_1, w_2)_{\lambda} = \sum_{\lambda} V_{\lambda} w_1(\lambda) w_2(\lambda)$ с весом $V_{\lambda} = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} > 0$ (приреберный объем). Скалярное произведение $\int_O (\mathbf{w}, \mathbf{b}) dV$ в области O аппроксимируется следующим образом:

$$(\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{b}')_{\lambda} = \sum_{\varphi} V_{\varphi} \sum_{\tilde{\lambda}(\varphi), \lambda(\varphi)} G_{\tau\varphi}'(\lambda, \tilde{\lambda}) w'(\tilde{\lambda}) b'(\lambda).$$

Здесь $\bar{\mathbf{w}}(\lambda) = 1/V_{\lambda} \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} \sum_{\tilde{\lambda}(\varphi)} G_{\tau\varphi}'(\lambda, \tilde{\lambda}) w'(\tilde{\lambda})$ (в операторной форме $\bar{\mathbf{w}} = G_{\tau} w'$). Следовательно, на сетке $(\lambda).(\varphi)$ вводится самосопряженный положительно-определенный метрический сеточный оператор $G_{\tau} : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$, $G_{\tau} = G_{\tau}^* > 0$, задается семейством базисных матриц Грама $G_{\tau\varphi}'(\lambda, \tilde{\lambda}) = (\mathbf{e}'_{\tau\varphi}(\lambda), \mathbf{e}'_{\tau\varphi}(\tilde{\lambda}))$.

В данных матрицах $\mathbf{e}'_{\tau\varphi}(\lambda)$ — контравариантные в локальных базисах φ орты по отношению к ковариантным векторам $\mathbf{e}_\tau(\lambda)$, направленным вдоль ребер λ . Индексом τ помечаются величины, которые отнесены к сетке $(\lambda) \cdot (\varphi)$.

Определим разностный оператор, моделирующий ротор, который действует на компоненты напряженности электрического поля \mathbf{w} , как $\text{ROD} : (\lambda) \rightarrow (\sigma)$ по формуле (см. фиг. 2а), аппроксимирующей теорему Стокса:

$$(\text{ROD } \mathbf{w})' = 1/S(\sigma) \sum_{\lambda(\sigma)} s_\lambda(\sigma) w'(\lambda) h_\tau(\lambda). \tag{3.1}$$

Здесь $S(\sigma)$ — удельная площадь грани σ , знаковые функции $s_\lambda(\sigma) = \pm 1$ и $s_\sigma(\lambda) = \pm 1$ ($s_\lambda(\sigma) = s_\sigma(\lambda)$) определены, как указано на фиг. 2. Определим граничную знаковую функцию $s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} = +1$, при условии что вращение в направлении от орта $\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda)$ к его дополняющему (в базисе $\partial\varphi(\partial\sigma)$) дает направление внешней нормали к области O . Если же вращение в направлении от орта $\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda)$ к его дополняющему в этом поверхностном базисе дает направление внутренней нормали к этой области, то $s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} = -1$.

Вместе с сеточными компонентами магнитного поля $u'(\sigma)$ и $\bar{u}(\sigma)$ на гранях разностной сетки $(\sigma) \cdot (\varphi)$ в области O определим поверхностное тангенциальное магнитное поле \mathbf{u}_τ с компонентами $u'_\tau(\partial\lambda)$, которое задано на граничных ребрах $\partial\lambda$.

Для области O с поверхностью Σ используем следующее интегральное соотношение:

$$\int_O \mathbf{w} \text{rot } \mathbf{u} \, dV - \int_O \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{w} \, dV = \int_\Sigma [\mathbf{u}_\tau \times \mathbf{w}] \, ds \tag{3.2}$$

и определим оператор, моделирующий ротор, который действует на компоненты напряженности магнитного поля \mathbf{u} , как $\text{ROG} : ((\sigma) \cup (\partial\lambda)) \rightarrow (\lambda)$ из разностного аналога этого соотношения

$$\left(w', \overline{\text{ROGu}} \right)_\lambda - \left(\bar{u}, (\text{RODw})' \right)_\sigma = \sum_{\partial\lambda} w'(\partial\lambda) h_\tau(\partial\lambda) (\mathbf{u} \, d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda). \tag{3.3}$$

Элемент поверхностной магнитной циркуляции, поперечной к ребру $\partial\lambda$ (между центрами тяжести поверхностных треугольных граней $\partial\sigma$ через середину их смежного ребра $\partial\lambda$), определим из аппроксимации произведения векторов $[\mathbf{u}_\tau \times \mathbf{w}] ds$:

$$(\mathbf{u} \, d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda) = -1 / h_\tau(\partial\lambda) \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)} \frac{s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \cdot S_{\partial\varphi}}{\sqrt{\det \| \text{Gr}_{\tau\partial\varphi} \|}} u'_\tau(\partial\tilde{\lambda}) \Big|_{\partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi) \neq \partial\lambda}. \tag{3.4}$$

Определитель матрицы Грама $\text{Gr}_{\tau\partial\varphi}$ в поверхностном базисе $\partial\varphi$, который состоит из ортов $\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda)$ и $\mathbf{e}_\tau(\partial\tilde{\lambda})$, определяется следующим образом:

$$\det \| \text{Gr}_{\tau\partial\varphi} \| = (\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda), \mathbf{e}_\tau(\partial\lambda)) \cdot (\mathbf{e}_\tau(\partial\tilde{\lambda}), \mathbf{e}_\tau(\partial\tilde{\lambda})) \cdot \sin^2 \widehat{\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda) \mathbf{e}_\tau(\partial\tilde{\lambda})} \Big|_{\partial\lambda(\partial\varphi) \neq \partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi)}. \tag{3.5}$$

Здесь используется

$$\left[\left[\mathbf{e}'_{\tau\varphi}(\lambda) \times \mathbf{e}'_{\tau\varphi}(\tilde{\lambda}) \right] \right] = \sin(\pi - \varphi) / \left\{ \left| \mathbf{e}_\tau(\lambda) \right| \cdot \left| \mathbf{e}_\tau(\tilde{\lambda}) \right| \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right\} = 1 / \sqrt{\det \| \text{Gr}_{\tau\partial\varphi} \|}$$

при $\varphi = \widehat{\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda) \mathbf{e}_\tau(\partial\tilde{\lambda})}$.

Искомый оператор ROG , который сопряжен базовому оператору ROD , определяется из приведенного выше разностного аналога интегрального соотношения следующим образом:

$$\overline{\text{ROGu}} = 1/S'_\tau \times \left[\sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \bar{u}(\sigma) h'(\sigma) + (\mathbf{u} \, d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda) \right], \tag{3.6}$$

$$S'_\tau = V_\lambda / h_\tau.$$

На граничных ребрах $\partial\lambda = \{ \partial_1 \lambda \mid \partial_0 \lambda \}$ зададим поверхностную магнитную циркуляцию $(\mathbf{u} \, d\mathbf{L})_\Sigma(\partial_1 \lambda)$, замыкающую контур вокруг ребра $\partial_1 \lambda$ в операторе ROG , — первая краевая задача, или поверхностную

электрическую циркуляцию $w'(\partial_0\lambda) \cdot h_\tau(\partial_0\lambda)$ вдоль ребра $\partial_0\lambda$, замыкающую соответствующий граничный контур в операторе ROD. Оператор $ROD\,ROG : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, такой, что $ROD\,ROG = (ROD\,ROG)^* \geq 0$, является самосопряженным и неотрицательным (см. (3.3)). Самосопряженным и неотрицательным оказывается и оператор $ROG\,ROD : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$. Очевидны свойства операторов $DIV\,ROD\,w = 0$ в ячейках разностной сетки Ω , аппроксимирующих континуальные операции векторного анализа $div\,rot\,w = 0$.

3.2. Обоснование аппроксимаций интегрально-согласованных операций rot

Исследуем аппроксимацию формулы (3.6) для оператора \overline{ROGu} , которая получена из интегрального тождества (3.3).

На тетраэдрических сетках определяется вид магнитного циркуляционного контура вокруг ребра λ и его замкнутость. Рассмотрим контур магнитной циркуляции вокруг ребра λ с примыкающими к нему тетраэдрами. Центры ячеек, граней и ребер обозначим как

$$c_\Omega = \frac{1}{4} \sum_{\omega(\Omega)} r_\omega, \quad c_\sigma = \frac{1}{3} \sum_{\omega(\sigma)} r_\omega \quad \text{и} \quad c_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\lambda)} r_\omega.$$

Здесь r_ω — радиус-векторы узлов сетки соответствующих вершин тетраэдра. Выбрав начало координат в вершине O (см. фиг. 1a), имеем

$$OC_\Omega = \frac{1}{4}(OA + OB + OD), \quad OC_\sigma = \frac{1}{3}(OA + OB + OD),$$

$$OC_\lambda = \frac{1}{2}(OA + OD), \quad C_\Omega C_\sigma = OC_\sigma - OC_\Omega.$$

Кроме того

$$S'_\tau \overline{ROGu} - (u\,dL)_\Sigma(\partial\lambda) = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \bar{u}(\sigma) h'(\sigma) = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) (Gu')(\sigma) h'(\sigma) =$$

$$= \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \frac{1}{V_\sigma} \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} Gr'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) u'(\tilde{\sigma}) \frac{V_\sigma}{S(\sigma)} = \sum_{\sigma(\lambda)} \frac{s_\sigma(\lambda)}{S(\sigma)} \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} V_\varphi e'_\varphi(\sigma) \cdot u_\varphi =$$

$$= \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} h_{\Omega\perp\sigma} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} e'_{1\varphi}(\sigma) \cdot u_\varphi.$$

Здесь $u_\varphi = \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} u'(\tilde{\sigma}) e'_\varphi(\tilde{\sigma})$; $h_{\Omega\perp\sigma}$ — высота в тетраэдрической ячейке Ω , опущенная на грань σ . Под $e'_{1\varphi}(\sigma)$ понимается контравариантный в локальном базисе φ вектор по отношению к ковариантной единичной нормали к грани $e_1(\sigma)$. Кроме того, имеет место следующее тождество:

$$\frac{1}{12} h_{\Omega\perp\sigma} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} e'_{1\varphi}(\sigma) = s_\sigma(\Omega) C_\Omega C_\sigma.$$

Поэтому, введя аппроксимацию циркуляции магнитного поля на элементе контура, соединяющего центры тяжести ячейки Ω и грани σ ,

$$s_\sigma(\Omega) \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} u\,dL \right)_\Delta = \frac{1}{12} h_{\Omega\perp\sigma} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} e'_{1\varphi}(\sigma) u_\varphi,$$

получим

$$S'_\tau \overline{ROGu} - (u\,dL)_\Sigma(\partial\lambda) = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \cdot \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} u\,dL \right)_\Delta.$$

Рассмотрим согласованную с вектором Пойнтинга аппроксимацию циркуляции магнитного поля на элементе контура поверхностной грани $\partial\sigma$, который соединяет центры тяжести этой грани и середины ребра $\partial\lambda(\partial\sigma)$. Будет иметь место тождество

$$s_{\sigma}(\lambda)s_{\partial\sigma}\mathbf{C}_{\partial\sigma}\mathbf{C}_{\partial\lambda} = -1/h_{\tau}(\partial\lambda) \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)\in\partial\sigma} \frac{s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \cdot S_{\partial\varphi}}{\sqrt{\det \|\text{Gr}_{\tau\partial\varphi}\|}} \mathbf{e}_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}) \Big|_{\partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi)\neq\partial\lambda}.$$

Вектор $\mathbf{C}_{\partial\sigma}\mathbf{C}_{\partial\lambda}$ отложен от центра тяжести $C_{\partial\sigma}$ треугольной граничной грани $\partial\sigma$ к середине $C_{\partial\lambda}$ граничного ребра $\partial\lambda(\partial\sigma)$; $\partial\varphi$ — поверхностные базисы внутри грани $\partial\sigma$; $S_{\partial\varphi} = \frac{1}{3}S_{\partial\sigma\supset\partial\varphi}$; $S_{\partial\sigma\supset\partial\varphi}$ — площадь треугольной грани $\partial\sigma$, содержащей поверхностный базис $\partial\varphi$. Аналогично $s_{\sigma}(\Omega)$ введена граничная знаковая функция $s_{\partial\sigma}$, равная единице, когда нормаль $\mathbf{e}(\partial\sigma)$ — внешняя к аппроксимации области O , и минус единице, если нормаль $\mathbf{e}(\partial\sigma)$ — внутренняя к аппроксимации данной области.

Введя аппроксимации циркуляции магнитного поля на элементе контура $\mathbf{C}_{\partial\sigma}\mathbf{C}_{\partial\lambda}$ следующим образом:

$$s_{\sigma}(\lambda)s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{u} d\mathbf{L} \right)_{\Delta} = \frac{-1}{h_{\tau}(\partial\lambda)} \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)\in\partial\sigma} \frac{s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \cdot S_{\partial\varphi}}{\sqrt{\det \|\text{Gr}_{\tau\partial\varphi}\|}} u'_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}) \Big|_{\partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi)\neq\partial\lambda},$$

получим

$$S'_{\tau} \overline{\text{ROGu}} = \sum_{\sigma(\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma}(\Omega) \left(\int_{C_{\Omega}}^{C_{\sigma}} \mathbf{u} d\mathbf{L} \right)_{\Delta} + \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{u} d\mathbf{L} \right)_{\Delta}. \quad (3.7)$$

Таким образом, аппроксимация операции $S'_{\tau} \overline{\text{ROGu}}(\lambda)$ состоит из циркуляций магнитного поля на замкнутом контуре вокруг ребра λ , соединяющем центры тяжести ячеек и граней, или, когда грань $\partial\sigma$ оказывается граничной, то соединяющем центр тяжести такой грани с серединой ребра $\partial\lambda(\partial\sigma)$; $\text{ROGu} \equiv 0$ при $\mathbf{u} = \text{const}$ в силу замкнутости рассмотренного выше контура вокруг ребра λ .

4. СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДА ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим на достаточно гладких решениях аппроксимацию разностными схемами метода опорных операторов следующую задачу:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{E} \quad (4.2)$$

с соленоидальным магнитным полем, для которого существует некоторое поле \mathbf{E} и выполнено (4.2) (см. [12]). Предполагаем также явно заданными некоторое распределение плотностей токов $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ и граничные тангенциальные компоненты магнитного поля $\mathbf{H}_{\tau}|_{\Sigma}$. “Электрическое” поле \mathbf{E} определяется с точностью до константы, при этом однородная спектральная задача обладает нулевым собственным значением.

Для соленоидальности функции \mathbf{f} необходимо и достаточно [12] существование функции \mathbf{F} , такой что $\mathbf{f} = \text{rot}\mathbf{F}$. Рассмотрим для системы уравнений (4.1), (4.2) краевую задачу с заданными на границе Σ области O тангенциальными компонентами магнитного поля

$$\mathbf{H}_{\tau}|_{\Sigma} = \mathbf{F}_{\tau}|_{\Sigma}. \quad (4.3)$$

Для любого замкнутого контура Γ , ограничивающего поверхности Σ_{Γ} , выполняется

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{L} = \int_{\Sigma_{\Gamma}} \mathbf{f} d\mathbf{S}.$$

Разностная схема метода опорных операторов имеет вид

$$V_{\lambda} \overline{\text{ROGu}} = f_{\lambda}, \quad (4.4)$$

$$u' = (\text{ROD}\mathbf{w})'. \quad (4.5)$$

При исследовании сходимости разностной схемы (4.4), (4.5) удельные длины ребер $h_\tau(\lambda)$ и площадей граней $S(\sigma)$ считаем единичными.

Электрический поток f_λ через площадку $S_\lambda = \bigcup_{(\Omega(\lambda), \sigma(\lambda) \in \Omega)} S_{\Omega\sigma\lambda}$, которую пронизывает вектор $\mathbf{e}_\tau(\lambda)$, представим в следующем виде:

$$f_\lambda = \sum_{\Omega(\lambda)} \sum_{\sigma(\lambda) \in \Omega} \int_{S_{\Omega\sigma\lambda}} \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} \mathbf{F} d\mathbf{L} \right) + \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_\sigma(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{F} d\mathbf{L} \right). \quad (4.6)$$

Здесь $S_{\Omega\sigma\lambda}$ — вектор площади треугольника, соединяющего центры тяжести ячейки C_Ω , грани C_σ и ребра C_λ , который ориентирован в сторону вектора $\mathbf{e}_\tau(\lambda)$ (фиг. 1а). Равенство (4.6) получено с использованием теоремы Стокса для объединенного контура из треугольников S_λ вокруг ребра λ .

В силу рассуждений п. 3.2 считаем, что

$$f_\lambda = V_\lambda \overline{\text{ROGF}}, \quad (4.7)$$

полагая

$$\overline{F}(\sigma) h'(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} \mathbf{F} d\mathbf{L} \right), \quad (4.8)$$

$$(\mathbf{F}d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda) = \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_\sigma(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{F} d\mathbf{L} \right). \quad (4.9)$$

В силу (4.3) при исследовании сходимости разностной схемы (4.4), (4.5) считаем

$$(\mathbf{u}d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda) = \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_\sigma(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{H} d\mathbf{L} \right), \quad (4.10)$$

$$\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{H} d\mathbf{L} = \int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{F} d\mathbf{L}. \quad (4.11)$$

4.2. Разрешимость разностной задачи метода опорных операторов

Исследуем условия разрешимости задачи (4.4), (4.5), (4.11). Определим операцию внутренней ротации $\text{RNG} : (\sigma) \rightarrow (\lambda)$ как

$$S'_\tau \overline{\text{RNGu}} = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \overline{u}(\sigma) h'(\sigma) = S'_\tau \overline{\text{ROGu}} - (\mathbf{u}d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda),$$

$$S'_\tau(\lambda) = V_\lambda / h_\tau(\lambda), \quad h'(\sigma) = V_\sigma / S(\sigma).$$

Из (3.3) следует

$$(w', \overline{\text{RNGu}})_\lambda = (\overline{u}, (\text{ROD}w)')_\sigma.$$

Однородная система уравнений, которая соответствует задаче (4.4), (4.5), (4.11), имеет следующий вид:

$$V_\lambda \overline{\text{RNGu}} = 0, \quad u' = (\text{ROD}w)'. \quad (4.12)$$

$$(w', \overline{\text{RNGu}})_\lambda = (\overline{u}, (\text{ROD}w)')_\sigma = (G(\text{ROD}w)', (\text{ROD}w)')_\sigma \geq 0.$$

Таким образом, оператор однородной системы $\text{RNG ROD} : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$ самосопряжен и неотрицателен. Решение сопряженной однородной системы обладает свойством $(\text{ROD}w)' = 0$. Условие ортогональности с правой частью в (4.4) имеет следующий вид:

$$\sum_{\lambda} w'(\lambda)[f_{\lambda} - (\mathbf{u}d\mathbf{L})_{\Sigma}(\partial\lambda)] = 0,$$

или

$$(w', \overline{\text{RGNF}})_{\lambda} = (\overline{F}, (\text{ROD}\mathbf{w})')_{\sigma} = 0.$$

Поскольку $(\text{ROD}\mathbf{w})' = 0$, то для любого \mathbf{F} (в соленоидальном представлении $\mathbf{f} = \text{rot}\mathbf{F}$) выполнено условие ортогональности решения однородной сопряженной системы уравнений (4.12) и правой части (4.4) при условии (4.11). Данное условие и есть разрешимость задачи (4.4), (4.5), (4.11) по матричной теореме Фредгольма (см. [13]).

4.3. Точность разностной схемы метода опорных операторов

Рассмотрим вопрос о точности разностной схемы (4.4), (4.5), (4.11).

Проинтегрировав (4.1) по площадке S_{λ} вокруг ребра λ , получим

$$V_{\lambda} \overline{\text{ROGH}} = f_{\lambda},$$

где

$$\overline{H}(\sigma)h'(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma}(\Omega) \left(\int_{C_{\Omega}} \mathbf{H}d\mathbf{L} \right), \tag{4.13}$$

$$(\mathbf{H}d\mathbf{L})_{\Sigma}(\partial\lambda) = \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}} \mathbf{H}d\mathbf{L} \right),$$

и, вычитая из этого уравнения (4.4), имеем

$$V_{\lambda} \overline{\text{RGN}(\mathbf{H} - \mathbf{u})} = 0. \tag{4.14}$$

Из (4.14) следует, что в ячейке Ω существует такая сеточная функция ξ_{Ω} , что

$$\overline{H} - \bar{u} = \overline{\text{GRAD}\xi} = \frac{\Delta\xi}{h'},$$

и она является постоянной на граничных гранях $\partial\sigma$, т.е. $\xi_{\partial\sigma} = \text{const}$. Эту константу можно считать равной нулю. Имеем уравнение, которому удовлетворяет функция ξ :

$$G^{-1} \overline{\text{GRAD}\xi} = H' - u', \quad G H' = \overline{H}.$$

Просуммировав данное равенство по граням ячейки Ω , и учитывая, что $\text{DIV}\mathbf{u} = 0$, имеем

$$\text{DIV}G\text{GRAD}\xi = \text{DIV}H,$$

в силу (2.2) с учетом $\xi_{\partial\sigma} = 0$ получим

$$(G(\text{GRAD}\xi)', (\text{GRAD}\xi)')_{\sigma} = (G(\text{GRAD}\xi)', H')_{\sigma} \geq 0.$$

Из (2.2) при $\xi_{\partial\sigma} = 0$ для любой разностной соленоидальной функции $\overline{\text{RODE}}$ в силу ее ортогональности к $\overline{\text{GRAD}\xi}$ имеем

$$\|\overline{\text{GRAD}\xi}\|_{\sigma}^2 = (G(\text{GRAD}\xi)', H' - (\text{RODE})')_{\sigma} \leq \|\overline{\text{GRAD}\xi}\|_{\sigma} \cdot \|H - \text{RODE}\|_{\sigma}.$$

Применительно к (3.1), определяющему $(\text{RODE})'$, получим

Из (4.14) следует, что в ячейке Ω существует такая сеточная функция ξ_{Ω} , что

$$\overline{H} - \bar{u} = \overline{\text{GRAD}\xi} = \frac{\Delta\xi}{h'},$$

и она является постоянной на граничных гранях $\partial\sigma$, т.е. $\xi_{\partial\sigma} = \text{const.}$. Эту константу можно считать равной нулю. Имеем уравнение, которому удовлетворяет функция ξ :

$$G^{-1}\overline{\text{GRAD}\xi} = H' - u', \quad G H' = \overline{H}.$$

Просуммировав данное равенство по граням ячейки Ω , и учитывая, что $\text{DIV}u = 0$, имеем

$$\text{DIV GRAD } \xi = \text{DIV}H,$$

в силу (2.2) с учетом $\xi_{\partial\sigma} = 0$ получим

$$(G(\text{GRAD}\xi)', (\text{GRAD}\xi)')_{\sigma} = (G(\text{GRAD}\xi)', H')_{\sigma} \geq 0.$$

Из (2.2) при $\xi_{\partial\sigma} = 0$ для любой разностной соленоидальной функции $\overline{\text{RODE}}$ в силу ее ортогональности к $\overline{\text{GRAD}\xi}$ имеем

$$\|\text{GRAD}\xi\|_{\sigma}^2 = (G(\text{GRAD}\xi)', H' - (\text{RODE})')_{\sigma} \leq \|\text{GRAD}\xi\|_{\sigma} \cdot \|H - \text{RODE}\|_{\sigma}.$$

Применительно к (3.1), определяющему $(\text{RODE})'$, получим

$$E'(\lambda)h_{\tau}(\lambda) = \int_{\lambda} \mathbf{E}d\mathbf{L}, \quad (4.15)$$

и интегралы от точного решения \mathbf{E} берутся вдоль ориентированных по $\mathbf{e}_{\tau}(\lambda)$ ребер λ . Под нормами сеточных векторов на гранях σ понимаются $\|X\|_{\sigma} = \sqrt{(GX', X')_{\sigma}}$ и $\|X\|_* = \sqrt{(X, X)_*}$, $(X, Y)_* = \sum_{\sigma} X(\sigma) \cdot Y(\sigma)$.

Границы спектра самосопряженного положительно-определенного оператора $V_{\sigma}G : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, состоящего из матриц Грама $G\mathbf{r}'_{\varphi}(\sigma, \tilde{\sigma})$ во взаимных базисах, при условии невырожденности разностной сетки оцениваются следующим образом:

$$0 < \frac{\gamma_1}{h}(X, X)_* \leq (V_{\sigma}GX, X)_* \leq \frac{\gamma_2}{h}(X, X)_*.$$

Аналогичная оценка для обратного оператора принимает вид

$$0 < \frac{h}{\gamma_2}(X, X)_* \leq ((V_{\sigma}G)^{-1}X, X)_* \leq \frac{h}{\gamma_1}(X, X)_*.$$

Здесь γ_1 и γ_2 являются ограниченными, не стремящимися к нулю величинами, которые не зависят от шага разностной сетки.

Сетку считают невырожденной в следующих случаях.

1. Существует параметр h , характеризующий подробность разбиения расчетной области O и имеющий смысл линейных размеров элементов разностной сетки.

2. Неудельные размеры элементов разностной сетки равномерно оцениваются для всего семейства разностных сеток:

$$a_1 h^3 \leq V_{\Omega} \leq a_2 h^3, \quad b_1 h^2 \leq S(\sigma) \leq b_2 h^2, \quad c_1 h \leq h_{\tau}(\lambda) \leq c_2 h.$$

3. Отношение неудельных площадей граней $S(\sigma)$ и длин ребер $h_{\tau}(\lambda)$, входящих в один базис φ , равномерно по h не стремится к нулю и ограничено сверху числом A .

4. Среди двухгранных и плоских углов ячеек Ω нет слишком острых и слишком тупых, все они равномерно по h заключены в пределах от Θ до $\pi - \Theta$ с не стремящимся к нулю углом Θ .

Имеем

$$\|\text{GRAD}\xi\|_{\sigma}^2 \leq \|H - \text{RODE}\|_{\sigma}^2 = ((H' - (\text{RODE})'), (V_{\sigma}G)(H' - (\text{RODE})'))_* \leq \frac{h}{\gamma_1} \|(V_{\sigma}G)(H' - (\text{RODE})')\|_*^2.$$

На грани σ получим

$$[(V_{\sigma}G)H'](\sigma) = \overline{H}(\sigma)h'(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma}(\Omega) [\mathbf{H}'_{\sigma} \cdot \mathbf{C}_{\Omega} \mathbf{C}_{\sigma} + O(h^2)].$$

Здесь $\mathbf{H}_{c\sigma}$ — магнитное поле решения задачи (4.1), (4.2), (4.11) в центре тяжести C_σ грани σ (фиг. 1а). Согласно (3.1) и (4.15), на грани σ имеем

$$(\text{RODE})'(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{S(\tilde{\sigma})} \sum_{\lambda(\tilde{\sigma})} s_\lambda(\tilde{\sigma}) \int_{\lambda} \mathbf{E} d\mathbf{L} = \frac{1}{S(\tilde{\sigma})} \int_{\tilde{\sigma}} \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{S(\tilde{\sigma})} \int_{\tilde{\sigma}} \mathbf{H} d\mathbf{S} = [\mathbf{H}_{c\sigma} + O(h)] \mathbf{e}(\tilde{\sigma}).$$

Этот интеграл берется по ориентированной площади грани $S(\tilde{\sigma}) \mathbf{e}(\tilde{\sigma})$ из шаблона оператора $V_\sigma G$ на грани σ ; $S(\tilde{\sigma})$ — удельная площадь грани $\tilde{\sigma}$.

На грани σ получим

$$[(V_\sigma G) \mathbf{e}](\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} V_\varphi G r'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) \mathbf{e}(\tilde{\sigma}) = \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} V_\varphi \mathbf{e}'_\varphi(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \cdot \mathbf{C}_\Omega \mathbf{C}_\sigma.$$

Поэтому имеем

$$[(V_\sigma G)(\text{RODE})'](\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} V_\varphi G r'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) [\mathbf{H}_{c\sigma} + O(h)] \mathbf{e}(\tilde{\sigma}) = \mathbf{H}_{c\sigma} \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \mathbf{C}_\Omega \mathbf{C}_\sigma + O(h^2).$$

Тогда

$$[(V_\sigma G)(H' - (\text{RODE})')](\sigma) = O(h^2)$$

или

$$\|H - u\|_\sigma^2 \leq \frac{h}{\gamma_1} \sum_{\sigma} O(h^4) = O(h^2),$$

поскольку слагаемых в суммировании \sum_{σ} содержится $O(h^{-3})$.

Окончательная оценка имеет следующий вид:

$$\|H - u\|_\sigma = O(h).$$

Данная оценка показывает сходимость задачи (4.4), (4.5), (4.11) к континуальной задаче (4.1), (4.2) с граничным условием $\mathbf{H}_\tau|_\Sigma$ с первым порядком точности на гладких решениях. При наличии сеточной пространственной симметрии порядок точности может быть повышен до второго. Примером такой сетки могут быть ячеечные параллелепипеды, центры которых соединены с центрами граней так, что при каждой из них образуется по четыре тетраэдра внутри параллелепипедной ячейки. При этом центры прямоугольной грани параллелепипеда соединяются с ее вершинами ребрами.

5. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

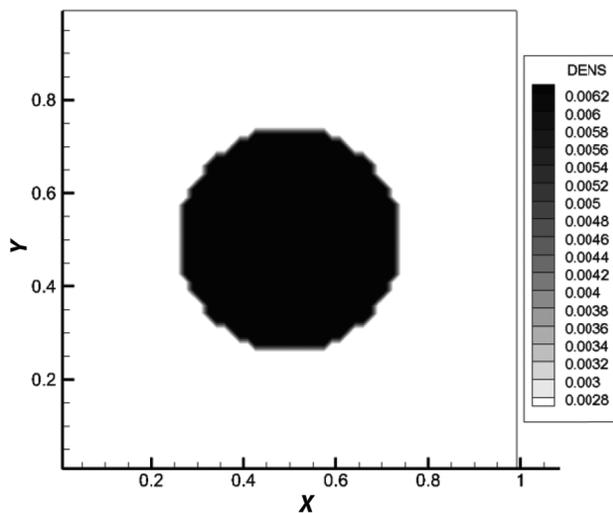
В данном разделе рассмотрим динамику электромагнитных полей, которая развивается на фоне ротационной диффузии вектора магнитного поля. Для данной задачи использовалась разностная схема на регулярной разностной сетке, подробно описанная в [7, 10, 14].

Исследуется сжатие вольфрамовой плазмы магнитными полями, заданными на границе области. В начальный момент времени неподвижная плазма с плотностью $\rho = \rho_0$ занимает цилиндр $\sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2} \leq 0.25$ см с осью $0 \leq z \leq 1$ см. Данный цилиндр вписан в куб с размерами $0 \leq x \leq 1$ см, $0 \leq y \leq 1$ см, $0 \leq z \leq 1$ см, внутри которого находится плазма с плотностью вне цилиндра $\rho = 0.4\rho_0$, где $\rho_0 = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\pi}$ г/см³. Во всей расчетной области начальная температура $T_e = T_i = 0.8$ эВ.

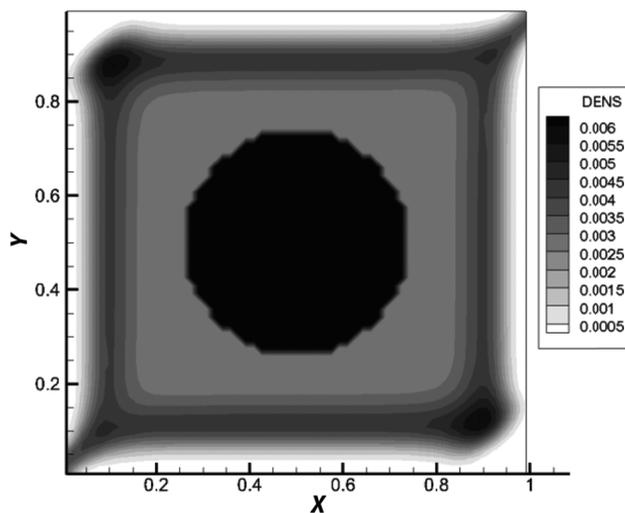
Профиль начальной плотности ($t = 0$) при $z = 0.5$ изображен на фиг. 3.

В работе исследуются компоненты вектора магнитного поля B_x, B_y, B_z , которые в начальный момент времени равны нулю: $B_x = 0, B_y = 0, B_z = 0$.

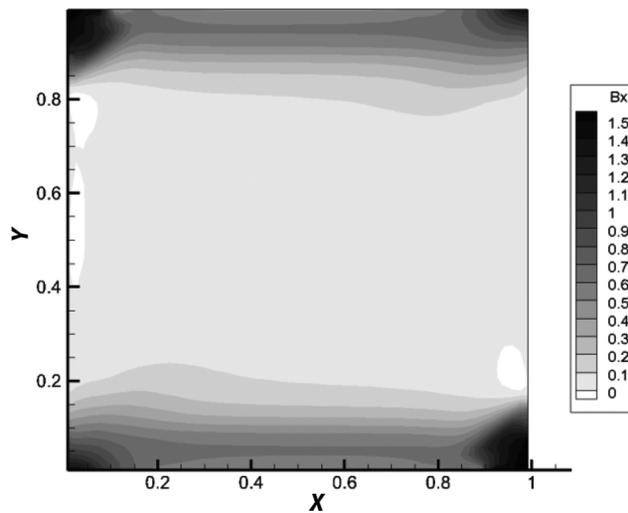
На внешней границе значения компонент вектора магнитного поля определены следующим образом:



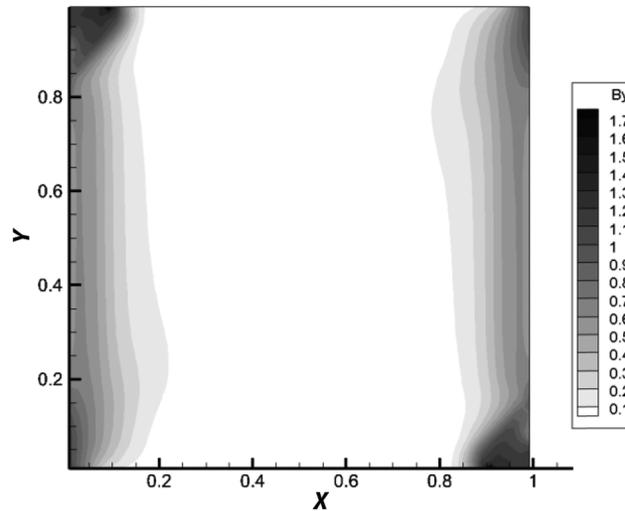
Фиг. 3. Начальное распределение плотности, $z = 0.5$.



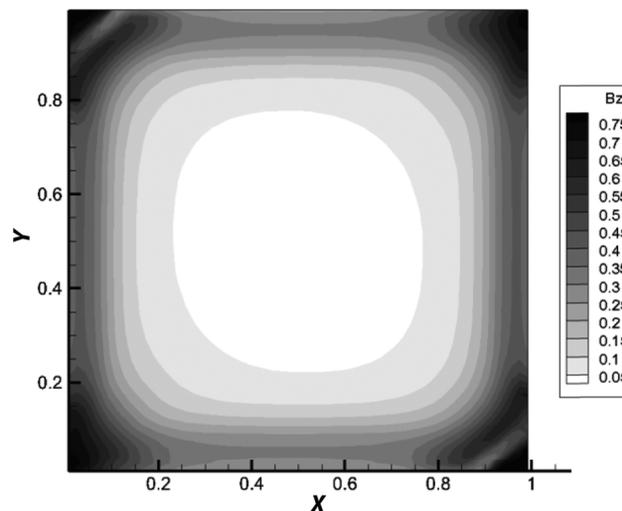
Фиг. 4. Распределение плотности на момент времени 0.05 мкс, $z = 0.5$.



Фиг. 5. Распределение компоненты магнитной индукции B_x на момент времени 0.05 мкс, $z = 0.5$.



Фиг. 6. Распределение компоненты магнитной индукции B_y на момент времени 0.05 мкс, $z = 0.5$.



Фиг. 7. Распределение компоненты магнитной индукции B_z на момент времени 0.05 мкс, $z = 0.5$.

$$B_{x_{zp}} = B_{x0} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{0.18}\right), \quad B_{y_{zp}} = B_{y0} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{0.18}\right), \quad B_{z_{zp}} = B_{z0} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{0.18}\right),$$

где $B_{x0} = 2$ МГц, $B_{y0} = 1.5$ МГц, $B_{z0} = 1$ МГц. Формулы справедливы при времени расчета $t \leq 0.18$ мкс. При $t > 0.18$ мкс все граничные поля равны нулю.

Уравнения состояния электронного и ионного газа, а также коэффициенты электронной и ионной теплопроводности, электропроводности и др. необходимые коэффициенты приводятся в работе [15].

Методика расчета была представлена в работе [16], теоретическое обоснование которой приведено в разд. 1–4 данной работы.

На фиг. 4–7 представлены результаты расчетов плотности и магнитных полей в момент времени 0.05 мкс. На фиг. 4 изображено распределение плотности, на котором можно увидеть, что под воздействием магнитных полей происходит сжатие плотности к центру расчетной области.

На фиг. 5–7 представлены компоненты магнитной индукции B_x, B_y, B_z . Асимметрия, которую можно увидеть на данных рисунках, возникла в результате определения различных значений констант B_{x0}, B_{y0}, B_{z0} . Как и следует из уравнений Максвелла, на фиг. 5 распределение компоненты магнитной

индукции B_y носит выраженный профильный характер, в то время как на фиг. 6 магнитная индукция B_y распределена латеральным образом.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на классических решениях модельной магнитостатической задачи с первым порядком точности доказана сходимость разностных схем метода опорных операторов для повторных ротационных операций векторного анализа с нулевым собственным значением спектральной задачи. Сходимость доказана в сеточно-зависимых нормах, которые связаны с энергией метрического разностного оператора нерегулярной тетраэдрической сетки. Единственным ограничением, которое накладывается на тетраэдрическую разностную сетку, является ее невырожденность. В данной работе также приведено численное моделирование динамики электромагнитных полей для трехмерной задачи магнитной гидродинамики в двухтемпературном приближении, которая развивается на фоне ротационной диффузии магнитных полей. Для данной задачи скорость движения вещества и электромагнитные поля имеют полную конфигурацию: $U = (u, w, v)$, $B = (B_x, B_y, B_z)$, $E = (E_x, E_y, E_z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галанин М. П., Савенков Е. Б. Методы численного анализа математических моделей. 2-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. 591 с.
2. Петров И. Б., Тормасов А. Г. О численном исследовании трехмерных задач обтекания волнами сжатия препятствия или полости в упругопластическом полупространстве // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 4. С. 817–820.
3. Бойков Д. С., Ольховская О. Г., Гасилов В. А. Моделирование газодинамических и упругопластических явлений при интенсивном энергокладе в твердый материал // Матем. моделирование. 2021. Т. 33. № 12. С. 82–102.
4. Кербер М. Л., Виноградов В. М., Головкин Г. С. и др. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология. Учеб. пособие. СПб.: Профессия, 2008. 560 с.
5. Linde P., Schulz A., Rust W. Influence of modelling and solution methods on the FE-simulation of the post-buckling behaviour of stiffened aircraft fuselage panels // Composite Structures. 2006. V. 73. No. 2. P. 229–236.
6. Буланов И. М., Воробей В. В. Технология ракетных и аэрокосмических конструкций из композиционных материалов. Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1998. 516 с.
7. Самарский А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО «Критерий», 1996. 276 с.
8. Shashkov M. Conservative finite-difference methods on general grids. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996. 359 p.
9. Lipnikov K., Manzini G., Shashkov M. Mimetic finite difference method // J. of Comput. Physics. 2013. V. 257. Part B. P. 1163–1227.
10. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 424 с.
11. Повещенко Ю. А., Подрыга В. О., Шарова Ю. С. Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 160. 21 с.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
13. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
14. Круковский А. Ю., Новиков В. Г., Цыгвинцев И. В. Численные алгоритмы для решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2014. № 6. 20 с.
15. Никифоров А. Ф., Новиков В. Г., Уваров В. Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физматлит, 2000. 400 с.
16. Poveshchenko Yu., Podryga V., Rahimly O. On some integral-consistent methods for calculating magnetohydrodynamic phenomena in problems of computational astrophysics // Math. Methods in the Appl. Sciences. 2020. V. 43. Issue 13. P. 7825–7833. DOI: 10.1002/mma.6349