ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977.5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С УСЛОВИЯМИ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ[1)]

А. Ю. Чеботарев[1,*]

[1] 690922 Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10, ДВФУ, Региональный научно-образовательный математический центр ДЦМИ, Россия

**e-mail: chebotarev.ayu@dvfu.ru*

Поступила в редакцию 06.03.2023 г.
Переработанный вариант 22.06.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Рассматривается класс задач оптимального управления для нелинейной параболико-эллиптической системы, моделирующей радиационный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Получены новые оценки решения начально-краевой задачи, на основе которых доказана разрешимость задач оптимального управления. Представлен вывод невырожденных условий оптимальности первого порядка. В качестве примеров рассмотрены задачи управления с финальным, граничным и распределенным наблюдениями. Библ. 23.

Ключевые слова: квазистационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, задачи оптимального управления, система оптимальности.

DOI: 10.31857/S0044466923110091, **EDN:** AFCYHT

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ и оптимизация процессов радиационного теплообмена представляют интерес с теоретической точки зрения и важны для инженерных и медицинских приложений (см. [1–4]). Краевые и обратные задачи, задачи оптимального управления для уравнений радиационного теплообмена в однородной среде рассмотрены в [5–10]. В указанных работах использовалось P_1-приближение для уравнения переноса излучения. В [11–16] представлен анализ уравнений радиационного теплообмена без использования P_1-приближения.

Как показано в [17], существенное влияние на распределение температурных полей имеют эффекты отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления. В [17–21] представлены построение модели сложного теплообмена для многокомпонентной области с учетом эффектов отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления и анализ краевых и обратных задач.

Задачи оптимального управления для стационарных уравнений сложного теплообмена в многокомпонентной области рассмотрены в [22]. Настоящая работа посвящена анализу задач оптимального управления для квазистационарной модели сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 формулируется начально-краевая задача, моделирующая сложный теплообмен в многокомпонентной области. Далее определяются пространства и операторы, ставится задача оптимального управления. В разд. 3 выводятся новые априорные оценки решения начально-краевой задачи, на основе которых доказывается разрешимость задачи оптимального управления. Анализ производной отображения “управление $\mapsto$ $\mapsto$ состояние” и вывод условий оптимальности представлены в разд. 4. В разд. 5 приводятся примеры задач управления с финальным, граничным и распределенным наблюдениями.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 23-21-00087).

2. ПОСТАНОВКА И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для моделирования нестационарного процесса радиационного теплообмена в многокомпонентной среде рассмотрим, следуя [21], ограниченную липшицеву область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, содержащую конечное число липшицевых подобластей Ω_j, $j = 1,2,\ldots,p$, замыкания которых не пересекаются и принадлежат Ω. При этом будем предполагать, что область, в которой изучается процесс, окружена непрозрачным для излучения материалом, имеющим заданную температуру на границе области.

Пусть $\Omega_0 = \Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{p} \bar{\Omega}_j \right)$ – внешняя подобласть, $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$, $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$, $j = 1,\ldots,p$; $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$.

Сложный теплообмен моделируется в каждой из областей Ω_j, $j = 0,1,\ldots,p$, уравнениями

$$r\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b(\theta^3|\theta| - \varphi) = u, \quad -\alpha\Delta\varphi + \beta(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{1}$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные кусочно-постоянные параметры r, a, b, α и β, описывающие свойства среды, определены в [17], [18], [20]. Функция u описывает тепловые источники.

На границе $\Gamma = \partial\Omega$ заданы краевые условия (через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе)

$$a\partial_n\theta + c(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где θ_b – заданная граничная температура, c – коэффициент теплопередачи, $0 < \gamma \le 1/2$ – параметр, зависящий от коэффициента излучения поверхности Γ.

В [17] выведены следующие условия сопряжения на внутренних границах $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, $j = 1,2,\ldots,p$ для температуры $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$ и интенсивности излучения $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$ (через ∂_n также обозначаем производную по внешней нормали к $\partial\Omega_j$):

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0\partial_n\theta_0 = a_j\partial_n\theta_j, \tag{3}$$

$$n_0^2\alpha_0\partial_n\varphi_0 = n_j^2\alpha_j\partial_n\varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0\partial_n\varphi_0. \tag{4}$$

Здесь $a_j, \alpha_j, n_j = a, \alpha, n|_{\Omega_j}$, $h_j > 0$ – параметры, зависящие от коэффициентов отражения на внутренних границах. Отметим, что вывод условий (4) основан на френелевских условиях сопряжения на Γ_j для интенсивности излучения. При этом в рамках P_1 приближения для уравнения переноса излучения не учитывалось, что вблизи границы решение уравнения переноса имеет пограничный слой.

Также задаются начальные условия для температуры

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{5}$$

Далее через L^s, $1 \le s \le \infty$, обозначаем пространства Лебега s-интегрируемых функций и, соответственно, через $H^s = W_2^s$ – пространства Соболева; $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$,

$$W = \{w \in H,\ w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j),\ j = 0,1,\ldots,p\}.$$

Пространство H отождествляем с сопряженным пространством H', $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$. Будем использовать следующие обозначения: (f,v) – значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в H, если $f, v \in H$;

$$\|v\|^2 = (v,v); \quad (v,w)_j = (v,w)_{L^2(\Omega_j)}, \quad \|v\|_j^2 = (v,v)_j; \quad (v,w)_W = \sum_{j=0}^{p}(v,w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Через $L^p(0,T;X)$ (соответственно $C([0,T],X)$) обозначаем пространство строго измеримых функций класса L^p (соответственно непрерывных), определенных на $[0,T]$, со значениями в банаховом пространстве X.

Предполагаем, что исходные данные удовлетворяют условиям:

(i) $c,\gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $c \ge c_0 > 0$, $\gamma \ge \gamma_0 > 0$, $c_0,\gamma_0 = \text{const}$;

(ii) $\{a,b,r,\alpha,\beta,n\}|_{\Omega_j} = \{a_j,b_j,r_j,\alpha_j,\beta_j,n_j\} > 0$, $b = \sigma\beta n^2$, $\sigma = \text{Const} > 0$;

(iii) $0 \le \theta_0 \in L^\infty(\Omega)$; $0 \le \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$; $u \in L^2(0,T;H)$.

Определим операторы $A_1 : V \to V'$, $A_2 : W \to W'$ и функции $f_b \in L^2(0,T;V')$, $g_b \in L^2(0,T;W')$, используя следующие равенства, справедливые для $\theta,\eta \in V$, $\varphi, w \in W$:

$$(A_1\theta,\eta) = (a\nabla\theta,\nabla\eta) + \int_\Gamma c\theta\eta d\Gamma,$$

$$\frac{1}{\sigma}(A_2\varphi,w) = \sum_{j=0}^{p}\alpha_j n_j^2(\nabla\varphi,\nabla w)_j + n_0^2\int_\Gamma \gamma\varphi w d\Gamma + n_0^2\sum_{j=1}^{p} h_j\int_{\Gamma_j}(\varphi_0 - \varphi_j)(w_0 - w_j)d\Gamma,$$

$$(f_b,\eta) = \int_\Gamma c\theta_b\eta d\Gamma, \quad (g_b,w) = \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma\theta_b^4 w d\Gamma.$$

Здесь $\{\varphi_j,w_j\} = \{\varphi,w\}|_{\Omega_j}$.

Скалярное произведение в пространстве V и норму, эквивалентную стандартной норме пространства V, определим, используя оператор A_1, $(u,v)_V = (A_1u,v)$, $\|v\|_V^2 = (A_1v,v)$.

Пусть $Y = \{y \in L^2(0,T;V),\ ry' \in L^2(0,T;V')\}$. Здесь $ry' = d(ry)/dt$. Справедливо следующее утверждение (см. [21]).

Лемма 1. *Пусть $y \in Y$. Тогда функция y равна почти всюду некоторой непрерывной функции из $[0,T]$ в H и в смысле скалярных распределений на $(0,T)$ имеет место равенство*

$$\frac{d}{dt}(ry,y) = 2(ry',y). \tag{6}$$

Определение. Пара $\{\theta,\varphi\} \in Y \times L^2(0,T;W)$ называется слабым решением задачи (1)–(5), если

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + u, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b, \quad t \in (0,T); \quad \theta(0) = \theta_0. \tag{7}$$

Здесь через $[s]^q = |s|^q \operatorname{sign} s$, $q > 0$, $s \in \mathbb{R}$, обозначаем возрастающую степенную функцию.

В [21] доказано, что при выполнении условий (i)–(iii) существует единственное решение $\{\theta,\varphi\}$ задачи (7) такое, что $\theta \in L^2(0,T;V) \cap L^5(0,T;L^5(\Omega))$, $r\theta' \in L^2(0,T;V') + L^{5/4}(0,T;L^{5/4}(\Omega))$, $\varphi \in L^{5/4}(0,T;W)$. Ниже покажем, что если $u \in L^\infty(Q)$, то решение начально-краевой задачи также ограничено, и поэтому $\{\theta,\varphi\} \in Y \times L^2(0,T;W)$.

Для постановки задачи оптимального управления системой (7) рассмотрим пространство управлений $U = L^2(Q)$, множество допустимых управлений U_{ad}, пространство состояний $Z = Y \times L^2(0,T;W)$ и целевой функционал $J : Y \times L^2(0,T;W) \times U_{ad} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

(j) $U_{ad} \subset U$ непустое, выпуклое и замкнутое множество; $\exists C_0 > 0\ \forall v \in U_{ad} : 0 \le v \le C_0$;

(jj) J слабо полунепрерывен снизу.

Определим оператор ограничений $F : Y \times L^2(0,T;W) \times U \to L^2(0,T;V') \times L^2(0,T;W') \times H$, полагая

$$F(\theta,\varphi,u) = \{r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b - u,\ A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) - g_b, \theta(0) - \theta_0\}.$$

Задача (ОС). Найти $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\} \in Y \times L^2(0,T;W) \times U_{ad}$ такие, что $F(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}) = 0$,

$$J(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}) = \inf\{J(\theta, \varphi, u) : u \in U_{ad}, F(\theta, \varphi, u) = 0\}. \tag{8}$$

Примером задачи оптимального управления, которая возникает при моделировании процессов лазерной абляции, является задача нахождения интенсивности тепловых источников, локализованных в Ω_1 при условиях

$$J = \int\limits_{\Omega_2} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \to \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0, \quad u \in U_{ad},$$

$$U_{ad} = \{u \in U,\ 0 \le u \le P,\ \operatorname{supp} u \subset \Omega_1\}.$$

Здесь θ_d — требуемое распределение температуры в подобласти Ω_2 в финальный момент времени, P — ограничение на мощность источников.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

3.1. Оценки решения задачи (7) *в* L^∞

Покажем, что если $u \in U_{ad}$, то решение начально-краевой задачи также ограничено, и поэтому $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^2(0,T;W)$.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii), $u \in U_{ad}$. *Тогда существует единственное решение* $\{\theta, \varphi\}$ *задачи* (7) *такое, что*

$$0 \le \theta \le w(t), \quad 0 \le \varphi \le w^4(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{9}$$

Здесь $w(t) = M_0 + M_1 t$, $M_0 = \max\left\{\|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}\right\}$, $M_1 = C_0/\min r$.

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (7) такого, что $\theta \in L^2(0,T;V) \cap L^5(0,T;L^5(\Omega))$, $r\theta' \in L^2(0,T;V') + L^{5/4}(0,T;L^{5/4}(\Omega))$, $\varphi \in L^{5/4}(0,T;W)$ доказаны в [21]. Получим оценки (9). Пусть $\tilde{\theta} = \theta - w$, $\eta_0 = \max\{\tilde{\theta}, 0\} \ge 0$, $\eta_0(0) = 0$, $\psi_0 = \max\{[\varphi]^{1/4} - w, 0\}$. Отметим, что $\eta_0 \in L^2(0,T;V)$, $\psi_0 \in L^2(0,T;W)$.

Перепишем первое уравнение в (7) в виде

$$r\tilde{\theta}' + A_1\theta - f_b + b([\tilde{\theta} + w]^4 - \varphi) = u - rM_1 \le 0. \tag{10}$$

Умножим скалярно уравнение (10) на η_0 и учтем, что значение правой части неположительно, а также

$$(r\tilde{\theta}', \eta_0) = (r\eta_0', \eta_0) = \frac{d}{2dt}(r\eta_0, \eta_0), \quad (A_1\theta - f_b, \eta_0) = (a\nabla\eta_0, \nabla\eta_0) + \int\limits_\Gamma c(\tilde{\theta} + w - \theta_b)\eta_0 d\Gamma \ge 0.$$

Тогда

$$\frac{d}{2dt}(r\eta_0, \eta_0) + (A_1\theta - f_b, \eta_0) + (b([\tilde{\theta} + w]^4 - \varphi), \eta_0) \le 0. \tag{11}$$

Далее, умножим скалярно второе уравнение в (7) на ψ_0 и результат сложим с (11):

$$\begin{gathered}\frac{d}{2dt}(r\eta_0, \eta_0) + (A_1\theta - f_b, \eta_0) + (A_2\varphi - g_b, \psi_0) + \\ + (b([\tilde{\theta} + w]^4 - \varphi), \max\{\tilde{\theta}, 0\} - \max\{[\varphi]^{1/4} - w, 0\}) \le 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Заметим, что последние три слагаемые в левой части (12) неотрицательны и поэтому,

$$\frac{d}{dt}(r\eta_0, \eta_0) \le 0, \quad \eta_0|_{t=0} = 0.$$

Следовательно, $\eta_0 = 0$, $\tilde{\theta} \le 0$, $\theta \le w$, а также $(A_2\varphi - g_b, \psi_0) = 0$ п.в. на $(0,T)$. Отсюда следует, что $\psi_0 = 0$, т.е. $\varphi \le w^4$. Аналогично устанавливается, что $\theta \ge 0$, $\varphi \ge 0$.

3.2. Разрешимость задачи оптимального управления

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii), (j)–(jj). *Тогда существует решение задачи* (*OC*).

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\theta_j, \varphi_j, u_j\} \in Y \times L^2(0,T;W) \times U_{ad}$,

$$
\begin{gathered}
J\theta_j, \varphi_j, u_j) \to \hat{J} = \inf\{J(\theta,\varphi,u) : u \in U_{ad}, F(\theta,\varphi,u) = 0\},\\
r\theta_{j'} + A_1\theta_j + b([\theta_j]^4 - \varphi_j) = f_b + u_j, \quad A_2\varphi_j + b(\varphi_j - [\theta_j]^4) = g_b, \quad t \in (0,T); \quad \theta_j(0) = \theta_0.
\end{gathered} \tag{13}
$$

Из условия (j) следует, что последовательность $\{u_j\}$ ограничена в $L^\infty(Q)$, и поэтому в силу оценок решения задачи (13), полученных в [21], заключаем, что последовательность $\{\theta_j\}$ ограничена в $L^2(0,T;V)$, $\{\varphi_j\}$ ограничена в $L^2(0,T;W)$ и при этом

$$
\int_0^T \|\theta_j(t+h) - \theta_j(t)\|^2 dt \le Ch,
$$

где $C > 0$ не зависит от h, j. Переходя при необходимости к подпоследовательностям, получаем сходимости

$$
u_j \to \hat{u} \ \text{ слабо в } \ L^2(Q), \quad \theta_j \to \hat{\theta} \ \text{ слабо в } L^2(0,T;V), \ \text{ сильно в } \ L^2(0,T;H), \tag{14}
$$

$$
\varphi_j \to \hat{\varphi} \ \text{ слабо в } \ L^2(0,T;W), \quad \varphi_j|_{\Sigma_k} \to \hat{\varphi}|_{\Sigma_k}, \quad k = 0,1,\ldots,p, \quad \Sigma_k = \Gamma_k \times (0,T). \tag{15}
$$

Результатов о сходимости (14), (15) достаточно для предельного перехода в (13), причем переход в нелинейных членах гарантируется оценкой

$$
\|\theta_j - \hat{\theta}\|^4_{L^4(Q)} \le \|\theta_j - \hat{\theta}\|^{2/3}_{L^2(Q)} \|\theta_j - \hat{\theta}\|^{10/3}_{L^5(Q)}.
$$

Следовательно, $F(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}) = 0$. В силу условий (j), (jj) $\hat{u} \in U_{ad}$ и

$$
\hat{J} \le J(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}) \le \underline{\lim} J(\theta_j, \varphi_j, u_j) = \hat{J}.
$$

Поэтому $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ будет оптимальной тройкой – решением задачи (ОС).

4. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Вывод системы оптимальности задачи (ОС) с применением классического принципа Лагранжа затруднителен, так как оператор ограничений, действующий на функции из пространства $Y \times L^2(0,T;W) \times U$, не определен в окрестности оптимальной пары за счет нелинейности $[\theta]^4$. Поэтому получение условий оптимальности основано на оценках производной отображения “управление $\mapsto$ состояние”.

Пусть $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ – оптимальная тройка. Выберем произвольный элемент $u \in U_{ad}$ и для любого $\varepsilon \in (0,1)$ положим

$$
u_\varepsilon = \hat{u} + \varepsilon(u - \hat{u}), \quad g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\theta_\varepsilon - \hat{\theta}), \quad \eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\varphi_\varepsilon - \hat{\varphi}), \quad z_\varepsilon = \frac{\theta_\varepsilon^4 - \hat{\theta}^4}{\theta_\varepsilon - \hat{\theta}} = (\theta_\varepsilon^2 + \hat{\theta}^2)(\theta_\varepsilon + \hat{\theta}).
$$

Здесь $\{\theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\}$ – решение задачи (7), соответствующее управлению $u_\varepsilon \in U_{ad}$. Отметим сразу, что в силу леммы 2 справедливы оценки

$$
0 \le \hat{\theta},\ \theta_\varepsilon \le M_2, \quad 0 \le \hat{\varphi},\ \varphi_\varepsilon \le M_2^4, \quad 0 \le z_\varepsilon \le 4M_2^3, \quad M_2 = M_0 + M_1T. \tag{16}
$$

Отметим также, что справедливы следующие равенства:

$$
rg'_\varepsilon + A_1 g_\varepsilon + b(z_\varepsilon g_\varepsilon - \eta_\varepsilon) = u - \hat{u}, \quad A_2\eta_\varepsilon + b(\eta_\varepsilon - z_\varepsilon g_\varepsilon) = 0, \quad t \in (0,T); \quad g_\varepsilon(0) = 0. \tag{17}
$$

Лемма 3. *Для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *справедлива оценка*

$$
\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|g_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} + \|g'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;W')} + \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;W)} \le C, \tag{18}
$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* ε.

Доказательство. Заметим, что билинейная форма $\{\varphi,\psi\} \to (A_2\varphi + b\varphi,\psi)$ является непрерывной, симметричной и положительно определенной в пространстве W. Поэтому из леммы Лакса–Мильграма следует, что для каждого $\eta \in W'$ существует единственное решение $\varphi \in W$ уравнения $A_2\varphi + b\varphi = \eta$, и оператор $(A_2 + bI)^{-1} : W' \to W$ непрерывен. Поэтому из второго уравнения в (17) следует, что $\eta_\varepsilon = (A_2 + bI)^{-1}(bz_\varepsilon g_\varepsilon)$. Тогда, учитывая (16), получаем

$$\|\eta_\varepsilon\|_W \le C\|bz_\varepsilon g_\varepsilon)\|_{W'} \le C\|g_\varepsilon\|. \tag{19}$$

Здесь и далее через $C > 0$ обозначаем различные постоянные, не зависящие от ε.

Умножим скалярно первое уравнение в (17) на g_ε. Тогда

$$\frac{d}{2dt}(rg_\varepsilon, g_\varepsilon) + \|g_\varepsilon\|_V^2 + (bz_\varepsilon g_\varepsilon, g_\varepsilon) = (u - \hat{u} + b\eta_\varepsilon, g_\varepsilon) \le \frac{1}{2}\|u - \hat{u}\|^2 + C\|g_\varepsilon\|^2.$$

Интегрируя полученное неравенство по t и применяя неравенство Гронуолла, получаем с учетом (19) оценки

$$\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)} \le C, \quad \|g_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} \le C, \quad \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;W)} \le C.$$

Тогда из первого уравнения в (17) следует, что $\|rg'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;W')} \le C$. Оценим $\|g'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;W')}$:

$$\|g'_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;W')} = \int_0^T \sup_{\|v\|_W=1}\left(rg'_\varepsilon, \frac{1}{r}v\right)^2 dt \le C\int_0^T \|rg'_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;W')} \le C.$$

Полученные неравенства дают оценку (18).

Сформулируем условия на целевой функционал, связанные с его дифференцируемостью, достаточные для вывода системы оптимальности:

(jjj) $\forall u \in U_{ad}$ отображение $\{\theta,\varphi\} \to J(\theta,\varphi,u)$ дифференцируемо по Фреше в точке $\{\hat\theta,\hat\varphi,u\}$ и при этом отображения $U_{ad} \ni u \to J'_\theta(\hat\theta,\hat\varphi,u) \in Y'$, $U_{ad} \ni u \to J'_\varphi(\hat\theta,\hat\varphi,u) \in L^2(0,T;W')$ непрерывны в точке $\hat{u}$; существует дифференциал Гато $\langle J'_u(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u), u - \hat u\rangle$ отображения $U_{ad} \ni u \to J(\hat\theta,\hat\varphi,u)$ в точке $\hat u$ в направлении $u - \hat u$.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii), (j)–(jjj). *Если* $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\}$ *– решение задачи* (*OC*), *то для каждого* $u \in U_{ad}$ *существует решение* $\{g,\eta\} \in Y \times L^2(0,T;W)$ *задачи*

$$rg' + A_1 g + b(4\hat\theta^3 g - \eta) = u - \hat u, \quad A_2\eta + b(\eta - 4\hat\theta^3 g) = 0, \quad t \in (0,T); \quad g(0) = 0 \tag{20}$$

такое, *что*

$$\langle J'_\theta(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u), g\rangle + \langle J'_\varphi(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u), \eta\rangle + \langle J'_u(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u), u - \hat u\rangle \ge 0. \tag{21}$$

Доказательство. Выполним предельный перехол в (17) при $\varepsilon \to +0$. Из оценки (18) следует, что существует пара $\{g,\eta\} \in Y \times L^2(0,T;W)$ такая, что (переходя при необходимости к подпоследовательностям)

$$g_\varepsilon \to g \ \text{ слабо в } \ L^2(0,T;V), \ \text{ сильно в } \ L^2(0,T;H); \quad \theta_\varepsilon \to \hat\theta \ \text{ сильно в } \ L^2(0,T;V); \tag{22}$$

$$\eta_\varepsilon \to \eta \ \text{ слабо в } \ L^2(0,T;W), \quad \eta_\varepsilon|_{\Sigma_k} \to \eta|_{\Sigma_k}, \quad k = 0,1,\ldots,p, \quad \Sigma_k = \Gamma_k \times (0,T). \tag{23}$$

Сходимости (22), (23) позволяют сделать предельный переход в (17), причем переход в нелинейных членах следует из оценки, справедливой для любой функции $v \in L^2(0,T;V)$, а именно,

$$\int_0^T (b((\theta_\varepsilon^2 + \hat\theta^2)(\theta_\varepsilon + \hat\theta) - 4\hat\theta^3 g), v)dt \le C\left(\|g_\varepsilon - g\|_{L^2(0,T;H)} + \|\theta_\varepsilon - \hat\theta\|_{L^2(0,T;V)}\right)\|v\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Следовательно, пара $\{g,\eta\}$ — решение задачи (20). Условий (jjj) на целевой функционал достаточно для предельного перехода в неравенстве

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big(J(\theta_\varepsilon,\varphi_\varepsilon,u_\varepsilon)-J(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u)\Big)\ge 0.$$

В результате получаем неравенство (21).

Для вывода сопряженной системы конкретизируем структуру производных целевого функционала в точке минимума $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\}$. Будем предполагать, что

$$\langle J'_\theta(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u),z\rangle=(q_T,z(T))+\int_0^T(q(t),z(t))dt\quad\forall z\in Y;$$

$$\langle J'_\varphi(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u),z\rangle=\int_0^T(\psi(t),z(t))dt\quad\forall z\in L^2(0,T;W);\tag{jv}$$

$$\langle J'_u(\hat\theta,\hat\varphi,\hat u),v\rangle=\int_0^T(\xi(t),v(t))dt\quad\forall v\in U_{ad}-\hat u.$$

Здесь $q_T\in H$, $q\in L^2(0,T;V')$, $\psi\in L^2(0,T;W')$, $\xi\in U$.

Лемма 5. *Пусть выполняются условия* (i)—(iii), (j)—(jv) *и* $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\}$ *— оптимальная тройка. Тогда существует единственное решение* $\{p_1,p_2\}\in Y\times L^2(0,T;W)$ *сопряженной системы*

$$-rp_1'+A_1p_1+4b\hat\theta^3(p_1-p_2)=-q,\quad A_2p_2+b(p_2-p_1)=-\psi,\quad t\in(0,T);\quad p_1(T)=-\frac{1}{r}q_T.\tag{24}$$

Доказательство. Сделаем замену

$$\tilde p_{1,2}(t)=p_{1,2}(T-t),\quad \theta_1(t)=\hat\theta(T-t),\quad q_1(t)=q(T-t),\quad \psi_1(t)=\psi(T-t).$$

Тогда получаем задачу

$$r\tilde p_1'+A_1\tilde p_1+4b\theta_1^3(\tilde p_1-\tilde p_2)=-q_1,\quad A_2\tilde p_2+b(\tilde p_2-\tilde p_1)=-\psi_1,\quad t\in(0,T);\quad \tilde p_1(0)=-\frac{1}{r}q_T.\tag{25}$$

Рассмотрим семейство операторов $\mathscr{A}(t):V\to V'$ такое, что

$$\mathscr{A}(t)z=A_1z+4b\theta_1^3(t)(z-(A_2+bI)^{-1}(bz)).$$

Выразив $\tilde p_2$ из второго уравнения в (25), получаем линейную задачу Коши для уравнения с операторным коэффициентом

$$r\tilde p_1'+\mathscr{A}\tilde p_1=\eta_1,\quad t\in(0,T);\quad \tilde p_1(0)=-\frac{1}{r}q_T.\tag{26}$$

Здесь $\eta_1=-q_1-4b\theta_1^3(A_2+bI)^{-1}\psi_1\in L^2(0,T;V')$.

Установим нужные свойства $\mathscr{A}$. Заметим сначала, что если $z_1=(A_2+bI)^{-1}z$, то $(A_2z_1,z_1)+(bz_1,z_1)=(bz_1,z)$. Поэтому $\|z_1\|\le\sqrt{\max b/\min b}\,\|z\|$. Следовательно, учитывая ограниченность θ_1, получаем

$$(\mathscr{A}z,z)=\|z\|_V^2+4(b\theta_1^3z,z)-4(b\theta_1^3(A_2+bI)^{-1}(bz),z)\ge\|z\|_V^2-4\max(b\theta_1^3)\sqrt{\frac{\max b}{\min b}}\|z\|^2.$$

Кроме того,

$$(\mathscr{A}y,z)\le K\|y\|_V\|z\|_V\quad\forall y,z\in V,$$

где постоянная $K>0$ не зависит от $t\in(0,T)$, y, z. Следовательно (см. [23], с. 426), решение задачи (26) существует и единственно.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii), (j)–(jv), *и* $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\}$ – *оптимальная тройка. Тогда существует сопряженное состояние* $\{p_1,p_2\}\in Y\times L^2(0,T;W)$, *удовлетворяющее* (24), *и при этом*

$$\int_0^T(\xi(t)-p_1(t),u(t)-\hat u(t))dt\ge 0\qquad\forall u\in U_{ad}. \tag{27}$$

Доказательство. Умножим скалярно первое уравнение в (20) на p_1, первое уравнение в (24) на g, вычтем одно из другого и проинтегрируем по t на $(0,T)$. Тогда

$$\int_0^T\left(\frac{d}{dt}(rg,p_1)+4(b\hat\theta^3g,p_2)-(b\eta,p_1)\right)dt=\int_0^T\big((p_1,u-\hat u)+(q,g)\big)dt. \tag{28}$$

Аналогично, умножая скалярно второе уравнение в (20) на p_2, второе уравнение в (24) на η, вычитая и интегрируя по t, получаем

$$-\int_0^T\left(4(b\hat\theta^3g,p_2)-(b\eta,p_1)\right)dt=\int_0^T(\psi,\eta)dt.$$

Поэтому, учитывая условия $g(0)=0$, $rp_1(T)=-q_T$, выводим из (28)

$$(q_T,g(T))+\int_0^T(\psi,\eta)dt=-\int_0^T\big((p_1,u-\hat u)+(q,g)\big)dt.$$

Из неравенства (21), в силу условия (jv) и последнего равенства, получаем (27):

$$(q_T,g(T))+\int_0^T\big((q,g)+(\psi,\eta)+(\xi,u-\hat u)\big)dt=\int_0^T(\xi-p_1,u-\hat u)\,dt\ge 0.$$

Таким образом, если $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\}$ – решение задачи (OC), и $\{p_1,p_2\}$ – соответствующее сопряженное состояние, то они являются решением следующей системы оптимальности:

$$r\hat\theta'+A_1\hat\theta+b([\hat\theta]^4-\hat\varphi)=f_b+\hat u,\quad A_2\hat\varphi+b(\hat\varphi-[\hat\theta]^4)=g_b,\quad t\in(0,T);\quad \hat\theta(0)=\theta_0.$$

$$-rp_1'+A_1p_1+4b\hat\theta^3(p_1-p_2)=-q,\quad A_2p_2+b(p_2-p_1)=-\psi,\quad t\in(0,T);\quad p_1(T)=-\frac{1}{r}q_T.$$

$$\int_0^T(\xi-p_1,u-\hat u)\,dt\ge 0\qquad\forall u\in U_{ad}.$$

5. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Финальное наблюдение

Рассмотрим задачу

$$J(\theta)=\frac12\|\theta|_{t=T}-\theta_d\|^2\to\inf,\quad u\in U_{ad}, \tag{29}$$

$$r\theta'+A_1\theta+b([\theta]^4-\varphi)=f_b+u,\quad A_2\varphi+b(\varphi-[\theta]^4)=g_b,\quad t\in(0,T);\quad \theta(0)=\theta_0, \tag{30}$$

$$U_{ad}=\{u\in U\colon f_1\le u\le f_2\}. \tag{31}$$

Здесь $f_1,f_2\in L^\infty(Q)$ – неотрицательные функции, $\theta_d\in H$.

Следствием теорем 1, 2 является следующий результат.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii). *Тогда существует* $\{\hat\theta,\hat\varphi,\hat u\}\in Y\times L^2(0,T;W)\times U_{ad}$ – *решение задачи* (29)–(31), *а также сопряженное состояние* $\{p_1,p_2\}\in Y\times L^2(0,T;W)$ *такое, что*

$$-rp_1'+A_1p_1+4b\hat\theta^3(p_1-p_2)=0,\quad A_2p_2+b(p_2-p_1)=0,\quad p_1(T)=-\frac1r(\hat\theta(T)-\theta_d) \tag{32}$$

и при этом

$$\int_0^T (p_1(t), u(t) - \hat{u}(t))dt \le 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \tag{33}$$

Заметим, что из (33) стандартным образом следует слабый принцип bang-bang:

$$\hat{u} = \begin{cases} f_1, & \text{если} \quad p_1 < 0, \\ f_2, & \text{если} \quad p_1 > 0. \end{cases}$$

5.2. Распределенное и граничное наблюдение

Рассмотрим задачу

$$J(\theta, \varphi, u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\|\theta\|^2 + \|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} + \lambda\|u - u_d\|^2\right)dt \to \inf, \quad u \in U_{ad}, \tag{34}$$

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + u, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b, \quad t \in (0,T); \quad \theta(0) = \theta_0, \tag{35}$$

$$U_{ad} = \{u \in U: 0 \le u \le u_{\max}\}. \tag{36}$$

Здесь $\lambda \ge 0$, $u_{\max} > 0$, $u_d \in L^2(Q)$.

Из теорем 1, 2 следуют разрешимость задачи (34)–(36) и условия оптимальности первого порядка.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii). *Тогда существует* $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\} \in Y \times L^2(0,T;W) \times U_{ad}$ – *решение задачи* (34)–(36), *а также сопряженное состояние* $\{p_1, p_2\} \in Y \times L^2(0,T;W)$ *такое, что*

$$-rp_1' + A_1p_1 + 4b\hat{\theta}^3(p_1 - p_2) = -\hat{\theta}, \quad A_2p_2 + b(p_2 - p_1) = -\psi, \quad p_1(T) = 0 \tag{37}$$

и при этом

$$\int_0^T (\lambda(\hat{u} - u_d) - p_1, u - \hat{u})dt \ge 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Здесь функционал ψ *такой, что* $(\psi, z) = \int_\Gamma \hat{\varphi} z d\Gamma \ \forall z \in W$.

Отметим, что неоднородность в правой части второго уравнения (37) означает выполнение (в слабом смысле) следующего краевого условия на Γ:

$$\alpha\partial_n p_2 + \gamma p_2 = -\frac{1}{\sigma n_0^2}\hat{\varphi}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1-system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
2. *Tse O., Pinnau R.* Optimal control of a simplified natural convection-radiation model // Commun. Math. Sci. 2013. V. 11. № 3. P. 679–707.
3. *Ковтанюк А.Е., Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Использование диффузионного приближения для моделирования радиационных и тепловых процессов в кожном покрове // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 123. № 2. С. 194–199.
4. *Kovtanyuk A., Chebotarev A., Astrakhantseva A.* Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29. № 3. P. 467–476.
5. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. № 1. P. 520–528.
6. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.

7. *Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. V. 289. P. 371–380.
8. *Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
9. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
10. *Chebotarev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.
11. *Amosov A.* Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative - Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies // Russian J. of Math. Phys. 2016. V. 23. 3. P. 309–334.
12. *Amosov A.A.* Unique Solvability of Stationary Radiative – Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies // J. of Math. Sc. 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.
13. *Amosov A.A.* Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation // J. Math. Sci. 2018. V. 233. № 6. P. 777–806.
14. *Amosov A.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies // Math. Meth. Appl. Sci. 2021. V. 44. № 13. P. 10703 –10733.
15. *Amosov A.A.* Unique solvability of the stationary complex heat transfer problem in a system of gray bodies with semitransparent inclusions // J. Math. Sci. (United States). 2021. V. 255. Iss. 4. P. 353–388.
16. *Amosov A.* Nonstationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a Semitransparent Body with Absolutely Black Inclusions // Mathematics. 2021. V. 9. № 13. P. 1471.
17. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions// Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat. 2018. V. 57. P. 290–298.
18. *Чеботарев А.Ю.* Неоднородная краевая задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 12. С. 1660–1665.
19. *Чеботарев А.Ю.* Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 303–311.
20. *Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E.* Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 507. P. 125745.
21. *Чеботарев А.Ю.* Неоднородная задача для квазистационарных уравнений сложного теплообмена с условиями отражения и преломления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 3. С. 118–126.
22. *Чеботарев А.Ю.* Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 3. С. 381–390.
23. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications. II/A: Linear monotone operators. Springer, 1990.