ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 11, с. 1817–1828

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 512.643.8

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О σ-КОММУТИРОВАНИИ (σ ≠ 0, ±1) ТЁПЛИЦЕВОЙ И ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦ[1)]

В. Н. Чугунов[1,*], Х. Д. Икрамов[2,]**

[1] 119333 Москва, ул. Губкина, 8, ИВМ им. Г.И. Марчука РАН, Россия

[2] 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

**e-mail: chugunov.vadim@gmail.com*

***e-mail: ikramov@cs.msu.su*

Поступила в редакцию 21.02.2023 г.
Переработанный вариант 29.06.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Предлагается единый подход к конструированию пар матриц (T, H), решающих задачу о σ-коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц. Строится семейство решений для некоторого частного случая. Библ. 7.

Ключевые слова: тёплицева матрица, ганкелева матрица, σ-коммутирование, φ-циркулянт.

DOI: 10.31857/S0044466923110108, **EDN:** AGKHZR

1. ВВЕДЕНИЕ

Тёплицевой называется комплексная $n \times n$-матрица T, имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

а *ганкелевой* называется комплексная $n \times n$-матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Переставив столбцы тёплицевой матрицы в обратном порядке, получим ганкелеву матрицу. Напротив, всякая ганкелева матрица H может быть получена указанным способом из соответствующей тёплицевой матрицы T. Эту связь между H и T можно описать матричным соотношением

$$H = T\mathcal{P}_n,$$

[1)]Работа выполнена при поддержке Чугунова Московским центром фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (Соглашение № 075-15-2022-286 с Минобрнауки РФ).

где $\mathcal{P}_n$ есть так называемая перъединичная матрица:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Тёплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

косым циркулянтом при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

φ-*циркулянтом*, когда

$$t_{-j} = \varphi t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $\varphi \in \mathbf{C}$.

Матрицы K и M σ-коммутируют (или квази-коммутируют), если найдется такое число σ, что $KM = \sigma MK$ (см. [1]). В этой же работе [1] отмечается, что квази-коммутативность является важным соотношением в квантовой физике (см. [2, 3]), а также в теории представлений аффинных алгебр Гекке (Hecke) (см. [4]).

Задача о σ-коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц заключается в описании пар ненулевых матриц (T, H) таких, что T — тёплицева, H — ганкелева и выполняется соотношение

$$TH = \sigma HT. \tag{3}$$

Необходимо сказать несколько слов о параметре σ. Произвольный выбор σ возможен лишь в случае, когда хотя бы одна из матриц T или H вырождена. Если же обе матрицы не вырождены, то σ является одним из корней n-й степени из единицы. В настоящей работе от параметра σ мы требуем, чтобы $\sigma \neq 0, \pm 1$.

Заметим, так как след произведения двух матриц не меняется при перестановке сомножителей и $\sigma \neq 1$, то матрицы TH и HT имеют нулевой след.

В работе [5] сформулирована и доказана следующая

Теорема 1. *Ненулевые тёплицева матрица T и ганкелева матрица H σ-коммутируют* ($\sigma \neq 0, \pm 1$), *если T и H входят хотя бы в один из описываемых ниже классов:*

Класс 1. *Матрица T является циркулянтом*

$$T = F_n^* D_1 F_n,$$

а H — ганкелевым циркулянтом

$$H = F_n^* D_2 F_n \mathcal{P}_n.$$

Здесь F_n — (*нормированная*) *матрица дискретного преобразования Фурье*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\epsilon = \exp(2\pi i/n)$ — *первообразный корень n-й степени из единицы*; $D_1 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2 = \operatorname{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}\right)$ — *диагональные матрицы*; *при этом*

$$d_1^{(2)} d_1^{(1)} = 0,$$

$$d_j^{(2)}\left(d_j^{(1)}-\sigma d_{n+2-j}^{(1)}\right)=0,\quad j=2,3,\ldots,n.$$

Класс 2. *Матрица T является косым циркулянтом*

$$T=G_{-1}F_n^*D_1F_nG_{-1}^*,$$

а H — ганкелевым косым циркулянтом

$$H=G_{-1}F_n^*D_2F_nG_{-1}^*\mathcal{P}_n,$$

где

$$G_{-1}=\operatorname{diag}(1,\psi,\psi^2,\ldots,\psi^{n-1}),$$

$\psi=e^{i\pi/n}$ *есть корень n-й степени из* (-1). *Диагональные матрицы* $D_1=\operatorname{diag}\left(d_1^{(1)},d_2^{(1)},\ldots,d_n^{(1)}\right)$ *и* $D_2=$ $=\operatorname{diag}\left(d_1^{(2)},d_2^{(2)},\ldots,d_n^{(2)}\right)$ *должны удовлетворять соотношениям*

$$d_1^{(2)}\left(d_1^{(1)}-\sigma d_2^{(1)}\right)=0,\quad d_2^{(2)}\left(d_2^{(1)}-\sigma d_1^{(1)}\right)=0,$$
$$d_j^{(2)}\left(d_j^{(1)}-\sigma d_{n+3-j}^{(1)}\right)=0,\quad j=3,4,\ldots,n.$$

Класс 3. *Пусть $n=2r$, матрицы T и H имеют вид*

$$T=\alpha\begin{pmatrix}0_{r,r} & I_r\\ 0_{r,r} & 0_{r,r}\end{pmatrix},\quad H=\beta\begin{pmatrix}\mathcal{P}_r & 0_{r,r}\\ 0_{r,r} & \sigma\mathcal{P}_r\end{pmatrix}.$$

Класс 4. *Пусть $n=2r$, матрицы T и H имеют вид*

$$T=\alpha\begin{pmatrix}0_{r,r} & 0_{r,r}\\ I_r & 0_{r,r}\end{pmatrix},\quad H=\beta\begin{pmatrix}\sigma\mathcal{P}_r & 0_{r,r}\\ 0_{r,r} & \mathcal{P}_r\end{pmatrix}.$$

Приведенные классы найдены из разных соображений, а именно, благодаря искусственно придуманным ограничениям на форму тёплицевой и ганкелевой матриц. Они соответствуют наиболее простым множествам решений.

Целью настоящей работы является описание единого подхода к получению полного решения. Сущность предлагаемого метода состоит в сужении множества всех пар матриц (T,H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи, после чего задача о σ-коммутировании исследуется на каждой конкретной более узкой комбинации наборов (T,H). Хотя теорема 2, называемая в работе главным результатом, описывает множество, являющееся частным случаем объединения классов 3 и 4 теоремы 1, указываемая в теореме 2 совокупность пар тёплицевой и ганкелевой матриц как раз и представляет собой решение рассматриваемой задачи на предварительно ограниченной части наборов (T,H). Описываемый класс является результатом применения разработанного подхода.

Структура статьи следующая. В разд. 2 кратко изложен прием сужения множества всех пар матриц (T,H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи; далее в разд. 3 формулируется теорема, являющаяся главным результатом статьи и содержащая описание частного класса пар σ-коммутирующих матриц (T,H). Доказательство теоремы проводится в разд. 4.

Прежде напомним важные факты.

Лемма 1 (см. [6]). *Две нескалярные тёплицевы матрицы $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$ коммутируют тогда и только тогда, когда $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$ принадлежат хотя бы одному из следующих классов:*

Класс 1'. *Обе матрицы $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$ верхнетреугольные или же обе нижнетреугольные.*

Класс 2'. *Матрицы $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$ суть φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi\neq 0$.*

Класс 3'. *Одна из матриц $\widetilde{T}_1$ или $\widetilde{T}_2$ является линейной функцией от другой.*

Лемма 2 (см. [7]). *Матрица T является φ-циркулянтом тогда и только тогда, когда она перестановочна с матрицей Q_φ:*

$$TQ_\varphi=Q_\varphi T,$$

где

$$Q_\varphi = \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{\varphi} \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $0_{k,k}$ нулевую $k \times k$-матрицу.

2. СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАР МАТРИЦ (T, H)

Прежде чем формулировать главный результат, опишем сужение наборов пар матриц (T, H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи. Поможет в этом следующее утверждение.

Лемма 3. *Всякую пару* (T, H), *решающую задачу о* σ*-коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц, можно представить в виде*

$$\begin{gathered} T = \alpha\left(A - \sigma A^\top\right), \\ H = \beta B \mathcal{P}_n, \end{gathered} \tag{4}$$

где A *и* B — *нескалярные тёплицевы матрицы, удовлетворяющие условиям*

$$\begin{gathered} AB = BA, \\ A^\top B + BA^\top = \mu AB, \\ \mu = \frac{1+\sigma^2}{\sigma}, \\ \mu \neq \pm 2, \end{gathered} \tag{5}$$

α, β — *некоторые числа*.

Доказательство. От пары (T, H) перейдем к паре (T_1, T_2), где $T_1 = T$, а T_2 — тёплицева матрица, соответствующая ганкелевой матрице H, т.е. $H = T_2\mathcal{P}_n$. Нижний индекс этих тёплицевых матриц показывает, какой из матриц исходной пары они соответствуют. Из формулировки задачи следует, что матрицы T_1 и T_2 определены с точностью до скалярного множителя. Условие σ-коммутирования приобретает вид

$$T_1 T_2 \mathcal{P}_n - \sigma T_2 \mathcal{P}_n T_1 = 0.$$

После умножения справа на $\mathcal{P}_n$ получаем

$$T_1 T_2 - \sigma T_2 \mathcal{P}_n T_1 \mathcal{P}_n = 0.$$

Матрица T_1, будучи персимметричной, удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{P}_n T_1 \mathcal{P}_n = T_1^\top.$$

Используя его, находим

$$T_1 T_2 - \sigma T_2 T_1^\top = 0. \tag{6}$$

Полное описание решений уравнения (6) содержит все требуемые пары σ-коммутирующих тёплицевой и ганкелевой матриц.

В случае скалярной матрицы T_1 имеем соотношение

$$T_2 - \sigma T_2 = 0,$$

из которого в силу условия $\sigma \neq 1$ получаем, что матрица $T_2 = 0$.

Если скалярна матрица T_2, то T_1 должна подчиняться условию

$$T_1 = \sigma T_1^\top,$$

транспонирование которого дает равенство

$$T_1^\top = \sigma T_1.$$

Из последних двух соотношений имеем

$$T_1 = \sigma T_1^\top = \sigma^2 T_1,$$

или

$$(1 - \sigma^2)T_1 = 0.$$

Так как $\sigma \neq \pm 1$, то $T_1 = 0$.

Пусть теперь ни одна из матриц T_1 и T_2 не является диагональной. Протранспонируем уравнение (6), умножим его слева и справа на $\mathcal{P}_n$ и используем соотношение $\mathcal{P}_n T_j \mathcal{P}_n = T_j^\top$:

$$T_2 T_1 - \sigma T_1^\top T_2 = 0.$$

Разность (6) и последнего условия дает соотношение

$$\left(T_1 + \sigma T_1^\top\right) T_2 = T_2 \left(T_1 + \sigma T_1^\top\right).$$

Введем две дополнительные тёплицевы матрицы

$$A = T_1 + \sigma T_1^\top, \quad B = T_2.$$

Из формулы

$$T_1 + \sigma T_1^\top = A$$

и ее транспонированного варианта

$$T_1^\top + \sigma T_1 = A^\top$$

выводим

$$\left(1 - \sigma^2\right) T_1 = A - \sigma A^\top,$$

или

$$T_1 = \frac{1}{1 - \sigma^2}\left(A - \sigma A^\top\right).$$

Так как матрицы T_1 и T_2 определены с точностью до скалярных множителей, то без ограничения общности можно считать, что

$$\begin{gathered} T_1 = \alpha\left(A - \sigma A^\top\right), \\ T_2 = \beta B, \\ AB = BA, \\ T_1 T_2 - \sigma T_2 T_1^\top = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Подставляя выражения для T_1 и T_2 в последнее уравнение этой системы, получаем

$$\left(A - \sigma A^\top\right) B - \sigma B \left(A^\top - \sigma A\right) = 0,$$

или

$$\sigma\left(A^\top B + B A^\top\right) = \left(1 + \sigma^2\right) AB.$$

Введем дополнительный параметр

$$\mu = \frac{1 + \sigma^2}{\sigma},$$

который в силу условия $\sigma \neq \pm 1$ удовлетворяет ограничению $\mu \neq \pm 2$. Последнее уравнение перепишется в виде

$$A^\top B + BA^\top = \mu AB.$$

Таким образом, решения задачи о σ-коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц можно искать в виде

$$T_1 = \alpha\left(A - \sigma A^\top\right),$$
$$T_2 = \beta B,$$

при условиях

$$AB = BA,$$
$$A^\top B + BA^\top = \mu AB,$$
$$\mu = \frac{1+\sigma^2}{\sigma},$$
$$\mu \neq \pm 2.$$

При этом матрицы A и B не являются скалярными в силу нескалярности T_1 и T_2. Лемма 3 доказана.

На основании доказанной леммы можно считать, что основным уравнением является соотношение

$$A^\top B + BA^\top = \mu AB. \tag{8}$$

Обозначим элементы первой строки матрицы A через $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, а элементы ее первого столбца – через $a_0, a_{-1}, \ldots, a_{-(n-1)}$. Аналогично элементы первой строки матрицы B обозначим через $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, а элементы первого столбца – через $b_0, b_{-1}, \ldots, b_{-(n-1)}$.

Согласно лемме 1, для коммутирующих тёплицевых матриц A и B возможны лишь следующие четыре случая: 1) обе матрицы A и B являются верхними треугольными; 2) обе матрицы A и B – нижние треугольные; 3) обе матрицы A и B суть φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$; 4) $B = \theta A + \xi I_n$.

В настоящей работе мы уделим особое внимание третьему случаю. Если $\varphi = 1$, то получаем класс 1 теоремы 1, а при $\varphi = -1$ – класс 2 этой же теоремы. Поэтому далее считаем, что $\varphi \neq \pm 1$. Кроме того, мы ограничимся случаем $\mu = 0$.

3. ГЛАВНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 2. *Ненулевые тёплицева матрица T и ганкелева матрица H σ-коммутируют при $\sigma = i\kappa$, $\kappa = \pm 1$, если эти матрицы имеют четный порядок $n = 2r$ и следующий вид*:

$$T = \alpha\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1+\kappa\nu)I_r \\ i(\nu-\kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta\begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & i\nu\mathcal{P}_r \end{pmatrix},$$

где $\nu = \pm 1$, а α и β – некоторые числа.

4. ОБОСНОВАНИЕ ГЛАВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим уравнение (8) в случае, когда A и B – φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0, \pm 1$. Матрица в правой части является тёплицевой, значит, и матрица в левой части должна быть тёплицевой.

Лемма 4. *Пусть A и B – φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0, \pm 1$. Матрица $A^\top B + BA^\top$ является тёплицевой тогда и только тогда, когда A и B представимы в виде*

$$A = \gamma\left(a_0 I_n + U^c + \varphi U^\top\right), \quad B = \delta\left(b_0 I_n + U + \varphi U^{c\top}\right), \tag{9}$$

где U и U^c — строго верхние треугольные тёплицевы матрицы с элементами первых строк $0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ *и* $0, u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_1$ *соответственно, а γ и δ — произвольные числа.*

Доказательство. Запишем условие тёплицевости матрицы $A^\top B + BA^\top$ в виде

$$\left\{A^\top B + BA^\top\right\}_{k,m} = \left\{A^\top B + BA^\top\right\}_{k+1,m+1}, \quad k,m = 1,2,\ldots,n-1,$$

подробная запись которого

$$\sum_{l=1}^{n}\left\{A^\top\right\}_{k,l}\{B\}_{l,m} + \sum_{l=1}^{n}\{B\}_{k,l}\left\{A^\top\right\}_{l,m} - \sum_{l=1}^{n}\left\{A^\top\right\}_{k+1,l}\{B\}_{l,m+1} - \sum_{l=1}^{n}\{B\}_{k+1,l}\left\{A^\top\right\}_{l,m+1} = 0$$

в силу тёплицевости A и B эквивалентна условию

$$\sum_{l=1}^{n} a_{k-l}b_{m-l} + \sum_{l=1}^{n} b_{l-k}a_{l-m} - \sum_{l=1}^{n} a_{k+1-l}b_{m+1-l} - \sum_{l=1}^{n} b_{l-k-1}a_{l-m-1} = 0.$$

Заменим индекс суммирования l на p, полагая $p = l$ в первой и второй суммах и $p = l-1$ в третьей и четвертой:

$$\sum_{p=1}^{n} a_{k-p}b_{m-p} + \sum_{p=1}^{n} b_{p-k}a_{p-m} - \sum_{p=0}^{n-1} a_{k-p}b_{m-p} - \sum_{p=0}^{n-1} b_{p-k}a_{p-m} = 0.$$

Выполняя элементарные преобразования, приходим к равенству

$$a_{-(n-k)}b_{-(n-m)} - a_k b_m + b_{n-k}a_{n-m} - b_{-k}a_{-m} = 0.$$

Поскольку A, B — φ-циркулянты, то

$$\left(\varphi^2 - 1\right)a_k b_m + \left(1 - \varphi^2\right)b_{n-k}a_{n-m} = 0,$$

или

$$\left(\varphi^2 - 1\right)\left(a_k b_m - b_{n-k}a_{n-m}\right) = 0.$$

Так как $\varphi \neq \pm 1$, имеем

$$a_k b_m - b_{n-k}a_{n-m} = 0,$$

или, заменяя m на $n - m$,

$$a_k b_{n-m} - a_m b_{n-k} = 0. \tag{10}$$

Будем использовать вспомогательную $(n-1)\times 2$-матрицу

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} a_1 & b_{n-1} \\ a_2 & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & b_1 \end{bmatrix}.$$

Так как матрицы A и B не являются скалярными, то у матрицы $\mathcal{F}$ нет нулевых столбцов, поэтому $\operatorname{rank}\mathcal{F} \geq 1$. В силу (10) все миноры второго порядка у матрицы $\mathcal{F}$ равны нулю, значит, $\operatorname{rank}\mathcal{F} = 1$. По условию задачи, матрицы A и B могут быть определены с точностью до скалярного кратного, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что матрица $\mathcal{F}$ имеет одинаковые столбцы.

Если определить U и U^c как строго верхние треугольные тёплицевы матрицы с элементами первых строк $0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ и $0, u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_1$ соответственно, то получим формулы (9). Лемма 4 доказана.

Матрица в правой части соотношения (8) является φ-циркулянтом как произведение φ-циркулянтов, поэтому и в его левой части должен стоять φ-циркулянт.

Лемма 5. *Пусть A и B — φ-циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0, \pm 1$. Матрица $A^\top B + BA^\top$ является φ-циркулянтом тогда и только тогда, когда B — скалярное кратное инволютивного φ-циркулянта.*

Доказательство. Условие, что матрица $A^\top B + BA^\top$ является φ-циркулянтом, в силу леммы 2 можно записать как

$$Q_\varphi(BA^\top + A^\top B) = (BA^\top + A^\top B)Q_\varphi,$$

или

$$B\left(Q_\varphi A^\top - A^\top Q_\varphi\right) = \left(A^\top Q_\varphi - Q_\varphi A^\top\right)B.$$

Используя соотношение $Q_\varphi = Q_{1/\varphi} + (1/\varphi - \varphi)e_1e_1^\top \mathcal{P}_n$, получаем

$$B\left[\left(Q_{1/\varphi} + \left(\frac{1}{\varphi} - \varphi\right)e_1e_1^\top \mathcal{P}_n\right)A^\top - A^\top\left(Q_{1/\varphi} + \left(\frac{1}{\varphi} - \varphi\right)e_1e_1^\top \mathcal{P}_n\right)\right] =$$
$$= \left[A^\top\left(Q_{1/\varphi} + \left(\frac{1}{\varphi} - \varphi\right)e_1e_1^\top \mathcal{P}_n\right) - \left(Q_{1/\varphi} + \left(\frac{1}{\varphi} - \varphi\right)e_1e_1^\top \mathcal{P}_n\right)A^\top\right]B,$$

или, с учетом того, что $A^\top$ – $1/\varphi$-циркулянт и $\varphi \neq \pm 1$,

$$Be_1e_1^\top \mathcal{P}_nA^\top - BA^\top e_1e_1^\top \mathcal{P}_n = A^\top e_1e_1^\top \mathcal{P}_nB - e_1e_1^\top \mathcal{P}_nA^\top B.$$

Умножим данное соотношение справа на $\mathcal{P}_n$:

$$Be_1e_1^\top A - BA^\top e_1e_1^\top = A^\top e_1e_1^\top B^\top - e_1e_1^\top AB^\top,$$

или

$$Be_1\left(A^\top e_1\right)^\top - BA^\top e_1e_1^\top = A^\top e_1(Be_1)^\top - e_1\left(BA^\top e_1\right)^\top.$$

Так как матрицы A и B могут быть определены с точностью до скалярного кратного, то, учитывая (9) для $\gamma = \delta = 1$, можем записать, что $A^\top e_1 = a_0e_1 + x$, $Be_1 = b_0e_1 + \varphi x$, где $x = (0, u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_1)^\top$. Последнее равенство приобретает вид

$$(b_0e_1 + \varphi x)(a_0e_1 + x)^\top - B(a_0e_1 + x)e_1^\top = (a_0e_1 + x)(b_0e_1 + \varphi x)^\top - e_1(B(a_0e_1 + x))^\top,$$

или

$$(b_0e_1 + \varphi x)(a_0e_1 + x)^\top - a_0(b_0e_1 + \varphi x)e_1^\top - Bxe_1^\top = (a_0e_1 + x)(b_0e_1 + \varphi x)^\top - a_0e_1(b_0e_1 + \varphi x)^\top - e_1(Bx)^\top.$$

После раскрытия скобок имеем

$$a_0b_0e_1e_1^\top + a_0\varphi xe_1^\top + b_0e_1x^\top + \varphi xx^\top - a_0b_0e_1e_1^\top - a_0\varphi xe_1^\top - Bxe_1^\top =$$
$$= a_0b_0e_1e_1^\top + a_0\varphi e_1x^\top + b_0xe_1^\top + \varphi xx^\top - a_0b_0e_1e_1^\top - a_0\varphi e_1x^\top - e_1(Bx)^\top,$$

или

$$b_0e_1x^\top - Bxe_1^\top = b_0xe_1^\top - e_1(Bx)^\top,$$

или

$$e_1((b_0I_n + B)x)^\top = ((b_0I_n + B)x)e_1^\top.$$

Полученное равенство можно записать как

$$\{(b_0I_n + B)x\}_j = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

что эквивалентно векторному соотношению

$$(b_0I_n + B)x = \vartheta e_1.$$

Введем φ-циркулянт $\breve{B}$ с нулевой главной диагональю формулой $B = \breve{B} + b_0I_n$. Поскольку $x = \frac{1}{\varphi}(Be_1 - b_0e_1) = \frac{1}{\varphi}\breve{B}e_1$, приходим к матричному соотношению

$$\left(\breve{B} + 2b_0I_n\right)\breve{B} = \varphi\vartheta I_n,$$

из которого выводим

$$\breve{B}^2 + 2b_0\breve{B} + b_0^2 I_n = \left(\varphi\vartheta + b_0^2\right) I_n,$$

$$\left(\breve{B} + b_0 I_n\right)^2 = \left(\varphi\vartheta + b_0^2\right) I_n.$$

Полагая $\varphi\vartheta + b_0^2 = \chi^2$, получаем

$$B^2 = \chi^2 I_n.$$

Поскольку $B \neq 0$, то $\chi \neq 0$. Определяя матрицу $\widehat{B}$ формулой $B = \chi\widehat{B}$, имеем $\widehat{B}^2 = I_n$, т.е. $\widehat{B}$ – инволютивный φ-циркулянт. Лемма 5 доказана.

Так как матрица B может быть определена с точностью до скалярного кратного, то, не ограничивая общности, будем считать, что B – инволютивный φ-циркулянт.

Учитывая коммутирование матриц A и B, перепишем решаемое уравнение в виде

$$\left(A^\top - \frac{\mu}{2}A\right)B + B\left(A^\top - \frac{\mu}{2}A\right) = 0,$$

или, в силу инволютивности B,

$$B\left(A^\top - \frac{\mu}{2}A\right)B = -\left(A^\top - \frac{\mu}{2}A\right).$$

При преобразовании подобия след матрицы не меняется, поэтому матрица $A^\top - \frac{\mu}{2}A$ имеет нулевой след, а из ее тёплицевости следует, что $\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)a_0 = 0$ и, так как $\mu \neq 2$, то $a_0 = 0$. Теперь можем записать выражения для матриц A и B в виде

$$A = U^c + \varphi U^\top, \quad B = b_0 I_n + U + \varphi U^{c\top}. \tag{11}$$

Рассмотрим случай $\mu = 0$, что означает равенство $\sigma = i\kappa$, $\kappa = \pm 1$. Требуется решить уравнение

$$A^\top B + BA^\top = 0, \quad \text{где} \quad A = U^c + \varphi U^\top, \quad B = b_0 I_n + U + \varphi U^{c\top}, \tag{12}$$

относительно b_0 и матрицы U. Напомним, что U и U^c – строго верхние треугольные тёплицевы матрицы с элементами первых строк $0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ и $0, u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_1$ соответственно.

Введем циркулянт C_0 и косой циркулянт S_0 с одинаковой первой строкой

$$\frac{1}{2}(0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_{n-1}).$$

Используя эти матрицы, можем записать

$$U = C_0 + S_0, \quad U^c = C_0^\top - S_0^\top,$$

откуда

$$C_0 = \frac{1}{2}\left(U + U^{c\top}\right), \quad S_0 = \frac{1}{2}\left(U - U^{c\top}\right). \tag{13}$$

Теперь имеем

$$B = b_0 I_n + U + \varphi U^{c\top} = b_0 I_n + C_0 + S_0 + \varphi(C_0 - S_0) = b_0 I_n + (1+\varphi)C_0 + (1-\varphi)S_0,$$

$$A = U^c + \varphi U^\top = C_0^\top - S_0^\top + \varphi C_0^\top + \varphi S_0^\top = (1+\varphi)C_0^\top - (1-\varphi)S_0^\top.$$

Определим циркулянт C и косой циркулянт S формулами

$$C = \frac{1}{2}b_0 I_n + (1+\varphi)C_0, \quad S = \frac{1}{2}b_0 I_n + (1-\varphi)S_0, \tag{14}$$

тогда

$$B = C + S, \quad A = C^\top - S^\top.$$

Подставляя выражения для A и B в решаемое уравнение, имеем

$$(C - S)(C + S) + (C + S)(C - S) = 0,$$

что приводится к виду

$$C^2 = S^2.$$

Матрица, стоящая в левой части, является циркулянтом, а матрица в правой части – косым циркулянтом, поэтому последнее равенство возможно лишь в виде системы

$$C^2 = \xi I_n,$$
$$S^2 = \xi I_n.$$

Введем еще циркулянт C_1 и косой циркулянт S_1:

$$C_1 = \frac{2}{1+\varphi}C, \quad S_1 = \frac{2}{1-\varphi}S. \tag{15}$$

Матрицы C_1 и S_1 удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} C_1^2 &= \frac{4\xi}{(1+\varphi)^2}I_n, \\ S_1^2 &= \frac{4\xi}{(1-\varphi)^2}I_n. \end{aligned} \tag{16}$$

Из формул (13)–(15) имеем

$$C_1 = \frac{2}{1+\varphi}C = \frac{2}{1+\varphi}\left[\frac{1}{2}b_0 I_n + (1+\varphi)C_0\right] =$$
$$= \frac{2}{1+\varphi}\left[\frac{1}{2}b_0 I_n + (1+\varphi)\frac{1}{2}\left(U + U^{c\top}\right)\right] = \frac{b_0}{1+\varphi}I_n + U + U^{c\top},$$

$$S_1 = \frac{2}{1-\varphi}S = \frac{2}{1-\varphi}\left[\frac{1}{2}b_0 I_n + (1-\varphi)S_0\right] =$$
$$= \frac{2}{1-\varphi}\left[\frac{1}{2}b_0 I_n + (1-\varphi)\frac{1}{2}\left(U - U^{c\top}\right)\right] = \frac{b_0}{1-\varphi}I_n + U - U^{c\top}.$$

Поставляя выражения для C_1 и S_1 в систему (16), получаем

$$\frac{b_0^2}{(1+\varphi)^2}I_n + \frac{2b_0}{1+\varphi}U + \frac{2b_0}{1+\varphi}U^{c\top} + U^2 + \left(U^{c\top}\right)^2 + UU^{c\top} + U^{c\top}U = \frac{4\xi}{(1+\varphi)^2}I_n,$$
$$\frac{b_0^2}{(1-\varphi)^2}I_n + \frac{2b_0}{1-\varphi}U - \frac{2b_0}{1-\varphi}U^{c\top} + U^2 + \left(U^{c\top}\right)^2 - UU^{c\top} - U^{c\top}U = \frac{4\xi}{(1-\varphi)^2}I_n.$$

Сложим уравнения этой системы:

$$\frac{2b_0^2(1+\varphi^2)}{(1+\varphi)^2(1-\varphi)^2}I_n + \frac{4b_0}{(1+\varphi)(1-\varphi)}U - \frac{4b_0\varphi}{(1+\varphi)(1-\varphi)}U^{c\top} +$$
$$+ 2U^2 + 2\left(U^{c\top}\right)^2 = \frac{8(1+\varphi^2)\xi}{(1+\varphi)^2(1-\varphi)^2}I_n.$$

Так как U – тёплицева строго верхняя треугольная матрица, то последнее соотношение эквивалентно системе

$$\begin{gathered}
b_0^2 I_n = 4\xi I_n,\\
\frac{2b_0}{(1+\varphi)(1-\varphi)}U + U^2 = 0,\\
\frac{2b_0\varphi}{(1+\varphi)(1-\varphi)}U^{c\top} - \left(U^{c\top}\right)^2 = 0.
\end{gathered} \tag{17}$$

Перепишем второе уравнение в виде

$$\left(\frac{2b_0}{(1+\varphi)(1-\varphi)}I_n + U\right)U = 0.$$

Предположим сначала, что $b_0 \neq 0$, тогда матрица $\frac{2b_0}{(1+\varphi)(1-\varphi)}I_n + U$ не вырождена и, значит, $U = 0$, что влечет за собой равенства $A = 0$ и $T = 0$, противоречащие условию задачи. Следовательно, $b_0 = 0$ и система (17) принимает вид

$$U^2 = \left(U^{c\top}\right)^2 = 0. \tag{18}$$

Для исследования этих условий будем различать случаи четного и нечетного порядка n.

Если $n = 2r+1$, то условие $U^2 = 0$ влечет за собой равенства $\{U\}_{1,2} = \{U\}_{1,3} = \ldots = \{U\}_{1,r+1} = 0$, или $u_1 = u_2 = \cdots = u_r = 0$, а из условия $(U^c)^2 = 0$ следуют соотношения $\{U^c\}_{1,2} = \{U^c\}_{1,3} = \ldots = \{U^c\}_{1,r+1} = 0$, или $u_{n-1} = u_{n-2} = \ldots = u_{r+1} = 0$, что в совокупности означает $U = 0$.

При $n = 2r$ условия (18) позволяют указать следующий вид матрицы U:

$$U = \nu\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r}\end{pmatrix}.$$

В этом случае $U = U^c$, матрицы A и B совпадают и являются скалярными кратными матрицы

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r}\end{pmatrix}.$$

Так как матрицы A и B в уравнении (12) определены с точностью до скалярных множителей, то это уравнение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi I_r \\ I_r & 0_{r,r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi I_r \\ I_r & 0_{r,r}\end{pmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} \varphi^2 I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & I_r\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \varphi^2 I_r\end{pmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} \left(\varphi^2+1\right) I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \left(\varphi^2+1\right) I_r\end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем, что $\varphi = i\nu$, где $\nu = \pm 1$.

Теперь имеем

$$T = \alpha\left[A - \sigma A^{\top}\right] = \alpha\left[\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} - i\kappa\begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 - i\kappa\varphi)I_r \\ (\varphi - i\kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 + \kappa\nu)I_r \\ i(\nu - \kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \beta B\mathcal{P}_n = \beta\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}\mathcal{P}_n = \beta\begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & i\nu\mathcal{P}_r \end{pmatrix}.$$

Этим обоснование главного результата завершено. Произведения полученных матриц T и H имеют вид

$$TH = \alpha\beta\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 + \kappa\nu)I_r \\ i(\nu - \kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & i\nu\mathcal{P}_r \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha\beta\begin{pmatrix} 0_{r,r} & i(\nu + \kappa)\mathcal{P}_r \\ i(\nu - \kappa)\mathcal{P}_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = (i\kappa)\alpha\beta\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (\nu\kappa + 1)\mathcal{P}_r \\ (\nu\kappa - 1)\mathcal{P}_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$HT = \alpha\beta\begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & i\nu\mathcal{P}_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 + \kappa\nu)I_r \\ i(\nu - \kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha\beta\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (\nu\kappa + 1)\mathcal{P}_r \\ (\nu\kappa - 1)\mathcal{P}_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Тем самым T и H σ-коммутируют при $\sigma = i\kappa$. След обоих произведений равен нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guterman A.E., Markova O.V., Mehrmann V.* Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices // Linear Algebra and Appl. 2019. V. 568. P. 135–154.
2. *Kassel C.* Quantum Groups, Grad. Texts in Math. V. 155. New York: Springer-Verlag, 1995.
3. *Manin Yu.I.* Quantum Groups and Non-commutative Geometry. Montréal: CRM, 1988.
4. *Chriss N., Ginzburg V.* Representation Theory and Complex Geometry. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1997.
5. *Чугунов В.Н.* О некоторых множествах пар σ-коммутирующих ($\sigma \neq 0, \pm 1$) теплицевой и ганкелевой матриц // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXXII, Зап. научн. сем. ПОМИ. Т. 482, ПОМИ, СПб. 2019. С. 288–294 .
6. *Гельфгат В.И.* Условия коммутирования тёплицевых матриц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 1. С. 11–14.
7. *Чугунов В.Н.* Нормальные и перестановочные тёплицевы и ганкелевы матрицы. М.: Наука, 2017.