ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 10, с. 1721–1732

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.634

Посвящается 70-летию Игоря Борисовича Петрова

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ БЛИЗОСТИ РЕШЕНИЙ В L_2 ДВУХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЗВЕСЕЙ В ПРИБРЕЖНЫХ СИСТЕМАХ[1)]

В. В. Сидорякина[1,*], А. И. Сухинов[2,]**

[1] 347936 Таганрог, ул. Инициативная, 48, Таганрогский ин-т им. А.П. Чехова, РГЭУ, Россия
[2] 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1, ДГТУ, Россия
**e-mail: cvv9@mail.ru*
***e-mail: sukhinov@gmail.com*

Поступила в редакцию 16.03.2023 г.
Переработанный вариант 29.05.2023 г.
Принята к публикации 26.06.2023 г.

Рассмотрены пространственно-трехмерные модели процессов транспорта взвесей в прибрежных морских системах. Данные процессы имеют ряд характерных особенностей: высокую концентрацию взвесей (например, при осуществлении дампинга грунта на дно), значительное превышение ареала распространения взвесей по отношению к глубине акватории, сложный гранулометрический (многофракционный) состав взвеси, взаимные переходы между отдельными фракциями. Для описания распространения взвесей могут быть использованы начально-краевые задачи диффузии—конвекции—реакции. Предлагается на временной сетке, построенной для исходной непрерывной начально-краевой задачи, выполнить преобразование правых частей с “запаздыванием”, чтобы для функций — концентраций взвесей, входящих в правые части уравнений задачи и не относящихся к той фракции, для которой сформулирована начально-краевая задача для уравнения диффузии—конвекции, значения этих концентраций определялись на предыдущем временном слое. Такой подход позволяет упростить последующую численную реализацию каждого из уравнений диффузии—конвекции. Кроме того, если число фракций три и более, появляется возможность на каждом временном шаге организовать независимое (параллельное) вычисление каждой из концентраций. Ранее были определены достаточные условия существования и единственности решения начально-краевой задачи транспорта взвесей, а также построена и исследована консервативная устойчивая разностная схема, которая численно реализована для модельных и реальных задач. В настоящей работе приведены результаты исследования сходимости решения преобразованной “с запаздыванием” задачи к решению исходной начально-краевой задачи транспорта взвесей. Доказано, что разности решений начально-краевых задач (исходной и преобразованной, с “запаздыванием” в функциях правых частей на временной сетке) стремятся к нулю при стремлении параметра τ (шага временной сетки) к нулю со скоростью $O(\tau)$ в норме гильбертова L_2. Библ. 24.

Ключевые слова: пространственно-трехмерная модель, транспорт многофракционных взвесей, взаимные превращения фракций, процессы диффузии—конвекции—осаждения, оценки решений в L_2.

DOI: 10.31857/S0044466923100149, **EDN:** LIKHHN

1. ВВЕДЕНИЕ

При моделировании прибрежных систем весьма часто возникают задачи конвекции—диффузии—осаждения (переноса) взвесей, которые могут состоять из нескольких фракций. Эти задачи могут быть поставлены в связи с проведением дноуглубительных работ, прогнозированием эрозии берега, образованием наносов, оценкой антропогенных воздействий на прибрежные экоси-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 23-21-00509), https://rscf.ru/project/23-21-00509/.

стемы (см. [1–4]). Для их решения обычно требуется информация о процессах транспорта взвесей для конкретных участков водных объектов, а также прогностические модели, позволяющие упростить и предсказать результат конкретных ситуаций и действий (см. [5, 6]).

Понимание процессов транспорта взвесей и возможности их моделирования значительно продвинулись за последние десятилетия (см. [7–10]): появились все более точные, миниатюрные и более дешевые приборы для получения и обработки полевых или лабораторных данных; широкое распространение получила интеграция численных моделей; бесплатные или дешевые спутниковые данные становятся все более адаптированными, точными и многочисленными. Значительны достигнутые результаты в области построения математических моделей транспорта взвесей и их теоретического анализа (см. [11–14]).

В настоящей работе авторами представлена пространственно-трехмерная модель транспорта взвесей, учитывающая следующие физические параметры и процессы: скорость движения водной среды, многофракционный состав взвесей, конвекцию, диффузию и осаждение частиц, взаимный переход (преобразование) частиц, имеющих различную гидравлическую крупность и др. В основе математической модели транспорта взвесей лежит система уравнений с частными производными параболического типа с младшими производными и функциями источников, число которых равно количеству фракций взвешенного вещества. Проведение исследований построенной задачи базируется на использовании временной сетки и преобразовании с “запаздыванием” правых частей уравнений, при отнесении функций (определяющих концентрацию взвесей различных фракций, участвующих в формировании правых частей уравнений и не фигурирующих в левых частях уравнений, т.е. в членах, описывающих диффузию–конвекцию–осаждение) к предыдущему временному слою. Ранее были доказаны существование и единственность решения начально-краевой задачи транспорта взвесей (см. [15–17]). Целью настоящей работы является исследование сходимости решения построенной задачи с “запаздыванием”, когда концентрации фракций, не входящие в левую часть уравнений диффузии, вычисляются на правом конце предыдущего шага по времени, к решению исходной начально-краевой задачи транспорта взвесей в норме гильбертова пространства L_2 при стремлении шага временной сетки к нулю.

Предлагаемый подход дает возможность построить параллельный алгоритм решения каждой из отдельных задач диффузии–конвекции в пределах временного шага, с необходимостью обменов сеточной информацией по получению финальных на данном временном слое значений сеточных функций между параллельными вычислительными процессами, что позволяет существенно уменьшить временные затраты на обмены информацией.

2. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЗВЕСЕЙ

Будем использовать прямоугольную декартовую систему координат $Oxyz$.

Процесс транспорта взвесей рассматриваем на примере некоторого водного объема, который вмещает трехмерная область G. Область G водоема представляет собой цилиндрическую область, боковая поверхность которой образована движением вертикальной оси вдоль кусочно-гладкой замкнутой линии $\partial\Sigma_b$, ограничивающей данную поверхность Σ_b, представляющей собой гладкую поверхность, “крышка” области G в выбранной системе координат $\overline{\Sigma}_b = \Sigma_b \cup \partial\Sigma_b$. Нижнее основание Σ_f – невозмущенная свободная поверхность водоема, точнее та ее часть, которая “вырезается” при движении направляющей (параллельной оси Oz) на плоскости $z = 0$. Будем обозначать цилиндрическую поверхность, заключенную между Σ_b и Σ_f, как Σ_l. Таким образом, замыкание области G, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, где $\Gamma = \Sigma_f \cup \Sigma_b \cup \Sigma_l$.

Пусть в области G находится взвесь многофракционного состава. Для упрощения выкладок будем рассматривать взвесь, состоящую из трех фракций (постановка задачи для общего случая представлена, например, в [18, 19]). Ограничение, накладываемое на количество фракций, не влияет на общую идею получения представленного в работе результата.

Система уравнений, описывающая концентрацию отдельных фракций взвешенного вещества, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} + u\frac{\partial c_r}{\partial x} + v\frac{\partial c_r}{\partial y} + (w + w_{gr})\frac{\partial c_r}{\partial z} = \mu_{hr}\left(\frac{\partial^2 c_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_r}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{vr}\frac{\partial c_r}{\partial z}\right) + F_r, \quad r = 1, 2, 3. \tag{1}$$

В уравнениях (1) используются следующие обозначения: $c_r = c_r(x,y,z,t)$ — концентрация частиц взвеси r-го типа в точке (x,y,z) и в момент времени t; u, v, w — компоненты вектора скорости движения водной среды; w_{gr} — гидравлическая крупность частиц r-го типа; μ_{hr}, μ_{vr} — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии частиц r-го типа соответственно.

Функции правых частей имеют вид

$$\begin{gathered} F_1 = (\alpha_2 c_2 - \beta_1 c_1) + \gamma_1 c_1, \\ F_2 = (\beta_1 c_1 - \alpha_2 c_2) + (\alpha_3 c_3 - \beta_2 c_2) + \gamma_2 c_2, \\ F_3 = (\beta_2 c_2 - \alpha_3 c_3) + \gamma_3 c_3, \end{gathered} \tag{2}$$

где α_r, β_r — коэффициенты, определяющие интенсивность превращения частиц r-го типа в $(r-1)$-й и $(r+1)$-й тип соответственно, $\alpha_r \geq 0, \beta_r \geq 0$, γ_r — мощность внешнего источника частиц r-го типа.

Граничные и начальные условия для уравнений (1) формулируются следующим образом:

— начальные условия при времени $t = 0$

$$c_r(x,y,z,0) = c_{r0}(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \bar{G}; \tag{3}$$

— граничные условия, считая, что осаждение частиц взвесей на дно необратимо,

$$c_r = c_r', \quad c_r' = \text{const}, \quad (x,y,z) \in \Sigma_l, \quad \text{если} \quad u_{\vec{n}} < 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (x,y,z) \in \Sigma_l, \quad \text{если} \quad u_{\vec{n}} \geq 0; \tag{5}$$

где $u_{\vec{n}}$ — проекция вектора скорости на внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ к границе, c_r' — известные значения концентрации;

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = 0, \quad (x,y,z) \in \Sigma_f; \tag{6}$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = -\frac{w_{gr}}{\mu_{vr}} c_r, \quad (x,y,z) \in \Sigma_b. \tag{7}$$

Решение задачи (1)—(7) отыскивается в некоторой заданной области $G \times [0 < t \leq T]$ непрерывного изменения аргументов, представляющей собой четырехмерный цилиндр с образующими параллельными оси времени Ot.

Будем предполагать, что выполняются необходимые по ходу изложения требования к гладкости участвующих в уравнениях (1) функций, которые будут конкретизированы в конце статьи.

Из предположения, что существует классическое решение задачи (1)—(7), в [13, 14] сформулированы достаточные условия его единственности, а также непрерывной зависимости решения от входных данных: от функций начального условия, граничных условий и правой части.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С “ЗАПАЗДЫВАНИЕМ” НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЗВЕСЕЙ

Для того чтобы провести преобразование с “запаздыванием” задачи (1)—(7) с учетом начальных и граничных условий, построим на временном отрезке $0 \leq t \leq T$ равномерную сетку с шагом τ:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, \ n = 1, \ldots, N; \ N\tau \equiv T\}.$$

Будем использовать следующую договоренность в обозначениях: переменные для рассматриваемых функций концентрации взвесей указываться не будут там, где подразумеваются “непрерывные” переменные (x,y,z,t), если же данные функции определяются в фиксированный момент времени или это требует смысл проводимых рассуждений, то они будут указываться непосредственно.

На временной сетке ω_τ для исходной непрерывной начально-краевой задачи (1)–(7) выполним преобразование с “запаздыванием” так, чтобы функции – концентрации взвесей, входящие в правые части уравнений (1) задачи, определялись на предыдущем временном слое.

На каждом шаге времени номера $n = 1,2,\ldots,N$, $t_{n-1} < t \le t_n$ рассматриваются преобразованные уравнения (1), решениями которых являются функции $\tilde{c}_r^n$, $n = 1,2,\ldots,N+1$:

$$\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial t} + u^n \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial y} + \left(w^n + w_{gr}\right)\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z} = \mu_{hr}\left(\frac{\partial^2 \tilde{c}_r^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{c}_r^n}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{vr}\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z}\right) + \tilde{F}_r^n, \tag{8}$$

$$\tilde{F}_1^n = \left(\alpha_2 \tilde{c}_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) - \beta_1 \tilde{c}_1^n\right) + \gamma_1^n \tilde{c}_1^n,$$

$$\tilde{F}_2^n = \left(\beta_1 \tilde{c}_1^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) - \alpha_2 \tilde{c}_2^n\right) + \left(\alpha_3 \tilde{c}_3^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) - \beta_2 \tilde{c}_2^n\right) + \gamma_2^n \tilde{c}_2^n,$$

$$\tilde{F}_3^n = \left(\beta_2 \tilde{c}_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) - \alpha_3 \tilde{c}_3^n\right) + \gamma_3^n \tilde{c}_3^n,$$

где $\tilde{c}_r^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})$ – финальное значение концентрации частиц взвесей r-го типа, рассчитанное на предыдущем временном слое $t_{n-2} < t \le t_{n-1}$, $n = 2,\ldots,N$.

Если $n = 1$, то в качестве $\tilde{c}_r^1(x,y,z,t_0)$ достаточно взять функцию начального условия, т.е. $\tilde{c}_r^1(x,y,z,0) \equiv c_{r0}(x,y,z)$. Если же $n = 2,\ldots,N$, то функции $\tilde{c}_r^n(x,y,z,t_{n-1}) = \tilde{c}_r^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})$ предполагаются известными, поскольку предполагается решенной задача (1)–(7) для предыдущего временного промежутка $t_{n-2} < t \le t_{n-1}$.

К уравнениям (8) добавим начальные условия вида

$$\begin{gathered} \tilde{c}_r^1(x,y,z,0) = c_{r0}, \quad (x,y,z) \in \bar{G}, \\ \tilde{c}_r^n(x,y,z,t_{n-1}) = \tilde{c}_r^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}), \quad n = 2,\ldots,N, \quad (x,y,z) \in G, \end{gathered} \tag{9}$$

а также граничные условия, аналогичные условиям (3)–(7).

Для всех t, $t_{n-1} < t < t_n$, $n = 1,2,\ldots,N$, имеем

$$\tilde{c}_r^n = c_r', \quad (x,y,z) \in \Sigma_l, \quad \text{если} \quad u_{\vec{n}} < 0; \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (x,y,z) \in \Sigma_l, \quad \text{если} \quad u_{\vec{n}} \ge 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z} = 0, \quad (x,y,z) \in \Sigma_f; \tag{12}$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z} = -\frac{w_{gr}}{\mu_{\nu r}}\tilde{c}_r^n, \quad (x,y,z) \in \Sigma_b. \tag{13}$$

4. ИССЛЕДОВАНИЕ БЛИЗОСТИ РЕШЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАННОЙ И ИСХОДНОЙ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЗВЕСЕЙ

Представим исходную задачу (1)–(7) в виде цепочки связанных начально-краевых задач, построенных на каждом временном слое $t_{n-1} < t \le t_n$ номера $n = 1,2,\ldots,N$ сетки ω_τ. В этом случае уравнения (1) будут иметь вид

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial t} + u^n \frac{\partial c_r^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial c_r^n}{\partial y} + \left(w^n + w_{gr}\right)\frac{\partial c_r^n}{\partial z} = \mu_{hr}\left(\frac{\partial^2 c_r^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{vr}\frac{\partial c_r^n}{\partial z}\right) + F_r^n. \tag{14}$$

Для краткости не будем приводить определение функций F_r^n на каждом промежутке времени $t_{n-1} < t \le t_n$, считая, что $F_r^n \equiv F_r(x,y,z,t)$, $t_{n-1} < t \le t_n$. Начальные и граничные условия для уравнений (14) определяются очевидным образом из выражений (3)–(7).

Убедимся в том, что на каждом временном слое $t_{n-1} < t \le t_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, решение уравнения (14) соответствующим образом стремится к решению уравнения (8) при $\tau \to 0$, $N\tau = T$ в норме пространства $L_2(G)$.

Введем обозначения $z_r^n(x, y, z, t) = c_r^n(x, y, z, t) - \tilde{c}_r^n(x, y, z, t)$, $t_{n-1} < t \le t_n$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Дальнейшие рассуждения будут относиться к отдельным типам фракций. Более детально рассмотрим случай $r = 1$.

Пусть $\gamma_{1\max}^n = \max\limits_{\substack{(x,y,z)\in G \\ t_{n-1}<t\le t_n}} \left\{\gamma_1^n(x, y, z, t)\right\}$, где γ_1^n — мощность источников частиц первого типа на временном промежутке $t_{n-1} < t \le t_n$ (очевидно, для исходной и преобразованной с “запаздыванием” задач мощность источника частиц одинакова).

Вычтем из первого уравнения (14) для c_1^n первое уравнение, содержащее $\tilde{c}_1^n$ из системы (8), $n = 1, 2, \dots, N$. Получаем систему вида

$$\begin{gathered}\frac{\partial z_1^n}{\partial t} + u^n\frac{\partial z_1^n}{\partial x} + v^n\frac{\partial z_1^n}{\partial y} + \left(w^n + w_{g1}\right)\frac{\partial z_1^n}{\partial z} = \mu_{h1}\left(\frac{\partial^2 z_1^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1^n}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{v1}\frac{\partial z_1^n}{\partial z}\right) + \left(F_1^n - \tilde{F}_1^n\right), \\ F_1^n - \tilde{F}_1^n = \alpha_2\left(c_2^{n-1}(x, y, z, t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\right) + \left(-\beta_1 + \gamma_{1\max}^n\right)z_1^n.\end{gathered} \tag{15}$$

Дополним уравнение (15) начальными условиями

$$\begin{gathered}z_1^1(x, y, z, 0) = 0, \quad (x, y, z) \in \overline{G}, \\ z_1^n(x, y, z, t_{n-1}) = z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (x, y, z) \in G,\end{gathered} \tag{16}$$

и условиями на границе

$$z_1^n = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_l, \quad \text{если} \quad u_{\vec{n}} < 0; \tag{17}$$

$$\frac{\partial z_1^n}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_l, \quad \text{если} \quad u_{\vec{n}} \ge 0; \tag{18}$$

$$\frac{\partial z_1^n}{\partial z} = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_f; \tag{19}$$

$$\frac{\partial z_1^n}{\partial z} = -\frac{w_{g1}}{\mu_{v1}} z_1^n, \quad (x, y, z) \in \Sigma_b. \tag{20}$$

Введем скалярное произведение функций $\xi(x, y, z, t)$ и $\eta(x, y, z, t)$, таких что для любого $0 \le t \le T$, $(x, y, z) \in G$ существуют и ограничены интегралы $\iiint_G \xi^2(x, y, z, t)\,dG$ и $\iiint_G \eta^2(x, y, z, t)\,dG$, каждый из которых есть непрерывно дифференцируемая функция переменной t.

Под скалярным произведением (ξ, η) понимаем выражение

$$(\xi, \eta) = \iiint_G \xi(x, y, z, t)\eta(x, y, z, t)\,dG,$$

которое представляет собой функцию, зависящую от переменной t.

В гильбертовом пространстве $L_2(G)$ для функций, интегрируемых “с квадратом” на G, введем норму (см. [20]):

$$\|\xi\|_{L_2(x,y,z)} \equiv (\xi, \xi)^{1/2} \equiv \left(\iiint_G \xi^2(x, y, z, t)\,dG\right)^{1/2}.$$

Каждая такая норма является неотрицательной функцией переменной t, которую мы предполагаем непрерывно дифференцируемой по этой переменной, если исходная функция ξ такова.

Будем предполагать, что каждая из функций c_1^n и $\tilde{c}_1^n$ интегрируема “с квадратом” в области G для всех $n = 1, 2, \ldots, N$.

Умножим скалярно обе части уравнения (15) на функцию z_1^n и проинтегрируем сначала по пространственным переменным, а затем по временной переменной t от t_{n-1} до t_n. После перегруппировки слагаемых получим

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G \frac{\partial z_1^n}{\partial t} z_1^n dG\right)dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G \left(u^n \frac{\partial z_1^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial z_1^n}{\partial y} + \left(w^n + w_{g1}\right)\frac{\partial z_1^n}{\partial z}\right) z_1^n dG\right)dt -$$
$$- \int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G \left(\mu_{h1}\left(\frac{\partial^2 z_1^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1^n}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{v1}\frac{\partial z_1^n}{\partial z}\right)\right) z_1^n dG\right) - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G \left(-\beta_1 + \gamma_{1\max}^n\right)\left(z_1^n\right)^2 dG\right) = \tag{21}$$
$$= \alpha_2 \int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G \left(c_2^{n-1}(x,y,z,t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right) z_1^n dG\right)dt.$$

С учетом тождества $z_1^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) \equiv z_1^n(x,y,z,t_{n-1})$ преобразуем первое слагаемое из левой части равенства (21):

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G z_1^n \frac{\partial z_1^n}{\partial t} dG\right)dt = \frac{1}{2}\iiint_G \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial \left(z_1^n\right)^2}{\partial t} dt\right) dG =$$
$$= \frac{1}{2}\iiint_G \left(\left(z_1^n(x,y,z,t_n)\right)^2 - \left(z_1^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right)^2\right) dG = \frac{1}{2}\left(\left\|z_1^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)}^2 - \left\|z_1^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2\right). \tag{22}$$

Заметим, что в выражении (22) порядок интегрирования изменен в силу теоремы Фубини (см. [21]).

Используя формулу (теорему) Гаусса, преобразуем второе слагаемое в левой части равенства (21) с учетом граничных условий (17)–(20). Для удобства введем обозначение

$$\Sigma^+ = \begin{cases} (x,y,z) \in \Gamma, & \text{если} \quad u_{\vec{n}}^+ \equiv v_{\vec{n}} \geq 0, \\ \Phi, & \text{если} \quad v_{\vec{n}} < 0, \end{cases}$$

где $u_{\vec{n}}^+$ – совокупность всех $u_{\vec{n}}$, определенных на границе Σ_l, таких что $u_{\vec{n}} \geq 0$.

Имеем

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G z_1^n \left(u^n \frac{\partial z_1^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial z_1^n}{\partial y} + \left(w^n + w_{g1}\right)\frac{\partial z_1^n}{\partial z}\right) dG\right)dt =$$
$$= \int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G z_1^n \operatorname{div}\left(\mathbf{U}_1^n z_1^n\right) dG\right)dt = \frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{\Sigma^+} u_{\mathbf{n}}^+ \left(z_1^n\right)^2 d\Sigma^+\right)dt, \tag{23}$$

где $\mathbf{U}_1^n = \left\|u^n, v^n, w^n - w_{g1}\right\|^{\mathrm{T}}$.

Преобразуем третье слагаемое, стоящее в левой части равенства (21).

С этой целью используем равенство, которое можно считать первой формулой Грина применительно к нашей задаче:

$$\iiint_G \left[\mu_{h1}\left(\frac{\partial^2 z_1^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1^n}{\partial y^2}\right) z_1^n + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{v1}\frac{\partial z_1^n}{\partial z}\right) z_1^n\right] dG =$$
$$= -\iint_{\Sigma_b} w_{g1}\left(z_1^n\right)^2 d\Sigma_b - \iiint_G \mu_{h1}\left[\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1^n}{\partial y}\right)^2\right] dG - \iiint_G \mu_{v1}\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial z}\right)^2 dG. \tag{24}$$

Пусть L_x, L_y, L_z есть максимальные размеры области G по направлениям координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно:

$$L_x = \sup_{\substack{A'\in G\\ A''\in G}} \rho(A', A''), \quad \text{где} \quad A' = (x', y, z) \in G, \quad A'' = (x'', y, z) \in G,$$

$$L_y = \sup_{\substack{B'\in G\\ B''\in G}} \rho(B', B''), \quad \text{где} \quad B' = (x, y', z) \in G, \quad B'' = (x, y'', z) \in G,$$

$$L_z = \sup_{\substack{C'\in G\\ C''\in G}} \rho(C', C''), \quad \text{где} \quad C' = (x, y, z') \in G, \quad C'' = (x, y, z'') \in G,$$

где $\rho(P,Q)$ – евклидова функция расстояния в G. Тогда имеют место неравенства Пуанкаре

$$\iiint_G \mu_{h1}\left[\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1^n}{\partial y}\right)^2\right] dG \geq 4\mu_{h1}\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}\right)\iiint_G \left(z_1^n\right)^2 dG, \tag{25}$$

$$\iiint_G \mu_{v1}\left(\frac{\partial z_1^n}{\partial z}\right)^2 dG \geq 4\mu_{v1_{\min}} \frac{1}{L_z^2}\iiint_G \left(z_1^n\right)^2 dG, \tag{26}$$

где $\mu_{v1_{\min}} = \min\limits_G \{\mu_{v1}(x, y, z)\}$.

С учетом соотношений (22)–(26) от равенства (21) переходим к неравенству вида

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left\|z_1^n(x, y, z, t_n)\right\|^2_{L_2(G)} + \frac{1}{2}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{\Sigma^+} u_n^+ \left(z_1^n\right)^2 d\Sigma^+\right)dt + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_{\Sigma_b} w_{g1}\left(z_1^n\right)^2 d\Sigma_b\right)dt + \\ + \left[4\mu_{h1}\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}\right) + 4\mu_{v1_{\min}}\frac{1}{L_z^2} + \beta_1 - \gamma_{1\max}^n\right]\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G \left(z_1^n\right)^2 dG\right)dt \leq \\ \leq \frac{1}{2}\left\|z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\right\|^2_{L_2(G)} + \alpha_2\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G \left(c_2^{n-1}(x, y, z, t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\right) z_1^n dG\right)dt.\end{gathered} \tag{27}$$

Далее обратимся к интегралу, стоящему в правой части неравенства (27). В результате его вычисления получаем (см. [22])

$$\begin{gathered}\alpha_2\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G \left(c_2^{n-1}(x, y, z, t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\right) z_1^n dG\right)dt = \\ = \alpha_2\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint_G \left(c_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) + \frac{\partial c_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}^*)}{\partial t}(t - t_{n-1}) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\right) z_1^n dG\right)dt.\end{gathered} \tag{28}$$

При записи равенства (28) было использовано разложение по формуле Тейлора

$$c_2^{n-1}(x, y, z, t) = c_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) + \frac{\partial c_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}^*)}{\partial t}(t - t_{n-1}), \tag{29}$$

где $t_{n-1} \leq t_{n-1}^* \leq t_n$, $t - t_{n-1} \leq \tau$.

Частная производная $\dfrac{\partial c_2^{n-1}}{\partial t}$ предполагается непрерывной на отрезке $t_{n-1} \leq t \leq t_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$, определения, поэтому она ограничена:

$$\left|\frac{\partial c_2^{n-1}}{\partial t}\right| \leq M_2^{n-1} \equiv \text{const} > 0. \tag{30}$$

С учетом выражений (29) и (30), а также вводимого обозначения $z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) = c_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) - \tilde{c}_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})$, $n = 2,\dots,N+1$, для равенства (28) получаем

$$\begin{gathered}\alpha_2\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G\left(c_2^{n-1}(x,y,z,t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right)z_1^n dG\right)dt \le \\ \le \alpha_2\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})z_1^n dG\right)dt + \alpha_2 M_2^{n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G (t-t_{n-1})z_1^n dG\right)dt.\end{gathered} \tag{31}$$

Привлекая неравенство вида $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$, в соотношении (31) получим

$$\begin{gathered}\alpha_2\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})z_1^n dG\right)dt + \alpha_2 M_2^{n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G (t-t_{n-1})z_1^n dG\right)dt \le \\ \le \frac{\alpha_2}{2}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G\left(z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right)^2 + \left(z_1^n\right)^2 dG\right)dt + \frac{\alpha_2}{2}M_2^{n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\left(\iiint\limits_G (t-t_{n-1})^2 + \left(z_1^n\right)^2\right)dG\right)dt = \\ = \frac{\alpha_2}{2}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G\left(z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right)^2 dG\right)dt + \frac{\alpha_2}{2}M_2^{n-1}\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\left(\iiint\limits_G (t-t_{n-1})^2\right)dG\right)dt + \\ + \frac{\alpha_2}{2}\left(1+M_2^{n-1}\right)\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G\left(z_1^n\right)^2 dG\right)dt = \frac{\alpha_2}{2}\left\|z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}dt + \\ + \frac{\alpha_2}{2}M_2^{n-1}\operatorname{mes}G\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}(t-t_{n-1})^2 dt + \frac{\alpha_2}{2}\left(1+M_2^{n-1}\right)\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G\left(z_1^n\right)^2 dG\right)dt = \\ = \frac{\alpha_2}{2}\tau\left\|z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + \frac{\alpha_2}{6}\tau^3 M_2^{n-1}\operatorname{mes}G \equiv \iiint\limits_G dG + \frac{\alpha_2}{2}\left(1+M_2^{n-1}\right)\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G\left(z_1^n\right)^2 dG\right)dt,\end{gathered} \tag{32}$$

где $\operatorname{mes}G \equiv \iiint_G dG$. С учетом равенства (32) выражение (31) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\alpha_2\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G\left(c_2^{n-1}(x,y,z,t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right)z_1^n dG\right)dt \le \\ \le \frac{\alpha_2}{2}\tau\left\|z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + \frac{\alpha_2}{6}\tau^3 M_2^{n-1}\operatorname{mes}G + \frac{\alpha_2}{2}\left(1+M_2^{n-1}\right)\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G\left(z_1^n\right)^2 dG\right)dt.\end{gathered} \tag{33}$$

Используя неравенство (33), представим соотношение (27) в виде

$$\begin{gathered}\left\|z_1^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)}^2 + \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{\Sigma^+}u_{\bar{n}}^+\left(z_1^n\right)^2 d\Sigma^+\right)dt + 2\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint\limits_{\Sigma_b}w_{g1}\left(z_1^n\right)^2 d\Sigma_b\right)dt + \\ + 2\left[4\mu_{h1}\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}\right) + 4\mu_{v1_{\min}}\frac{1}{L_z^2} - \frac{\alpha_2}{2}\left(1+M_2^{n-1}\right) + \beta_1 - \gamma_{1\max}^n\right]\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iiint\limits_G\left(z_1^n\right)^2 dG\right)dt \le \\ \le \left\|z_1^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + \alpha_2\tau\left\|z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + \frac{\alpha_2}{3}\tau^3 M_2^{n-1}\operatorname{mes}G.\end{gathered} \tag{34}$$

Пусть выполняется условие

$$4\mu_{h1}\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}\right) + 4\mu_{v1_{\min}}\frac{1}{L_z^2} - \frac{\alpha_2}{2}\left(1+M_2^{n-1}\right) + \beta_1 - \gamma_{1\max}^n > 0. \tag{35}$$

В силу выполнения условия (35) можно утверждать, что все слагаемые, содержащие интегралы, стоящие в левой части неравенства (34), будут неотрицательными, а потому в дальнейшем мы можем ими пренебречь (рассматриваемое неравенство при этом только усилится). На основании сказанного, соотношение (34) можно представить в виде

$$\left\|z_1^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)}^2 \le \left\|z_1^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + \alpha_2\tau\left\|z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + K_1\tau^3, \quad n = 1,2,\ldots,N, \tag{36}$$

где $K_1 \equiv \frac{\alpha_2}{3}\left(\max\limits_{2\le n\le N+1} M_2^{n-1}\right)\operatorname{mes} G$.

Аналогично случаю $r = 1$ могут быть получены оценки для $\left\|z_2^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)}$ и $\left\|z_3^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)}$. А именно,

$$\begin{gathered}\left\|z_2^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)}^2 \le \left\|z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + \beta_1\tau\left\|z_1^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + \\ + \alpha_3\tau\left\|z_3^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + \frac{\beta_1}{3}\tau^3 M_1^{n-1}\operatorname{mes} G + \frac{\alpha_3}{3}\tau^3 M_3^{n-1}\operatorname{mes} G,\end{gathered} \tag{37}$$

$$\left\|z_3^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)}^2 \le \left\|z_3^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + \beta_2\tau\left\|z_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1})\right\|_{L_2(G)}^2 + \frac{\beta_2}{3}\tau^3 M_2^{n-1}\operatorname{mes} G \tag{38}$$

при выполнении условий

$$4\mu_{h2}\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}\right) + 4\mu_{v2_{\min}}\frac{1}{L_z^2} + \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_{2\max}^n - \frac{\beta_1}{2}M_1^{n-1} - \frac{\alpha_3}{2}M_3^{n-1} > 0,$$

$$4\mu_{h3}\left(\frac{1}{L_x^2}+\frac{1}{L_y^2}\right) + 4\mu_{v3_{\min}}\frac{1}{L_z^2} + \alpha_3 - \gamma_{3\max}^n - \frac{\beta_2}{2}M_2^{n-1} > 0,$$

где

$$K_2 \equiv \left(\frac{\beta_1}{3}\max_{2\le n\le N+1} M_1^{n-1} + \frac{\alpha_3}{3}\max_{2\le n\le N+1} M_3^{n-1}\right)\operatorname{mes} G, \quad K_3 \equiv \frac{\beta_2}{3}\left(\max_{2\le n\le N+1} M_2^{n-1}\right)\operatorname{mes} G,$$

$$\left|\frac{\partial c_1^{n-1}}{\partial t}\right| \le M_1^{n-1} \equiv \text{const} > 0, \quad \left|\frac{\partial c_3^{n-1}}{\partial t}\right| \le M_3^{n-1} \equiv \text{const} > 0,$$

$$\gamma_{2\max}^n = \max_{\substack{(x,y,z)\in G\\ t_{n-1}<t\le t_n}}\left\{\gamma_2^n(x,y,z,t)\right\}, \quad \gamma_{3\max}^n = \max_{\substack{(x,y,z)\in G\\ t_{n-1}<t\le t_n}}\left\{\gamma_3^n(x,y,z,t)\right\}.$$

Очевидно, что с учетом начального условия (16) для каждого из неравенств (36)–(38) можно получить для различных значений n, $n = 1,2,\ldots,N$, неравенства

$$\left\|z_r^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)}^2 \le nK_r\tau^3(1+O(\tau)) \le TK_r\tau^2(1+O(\tau)), \quad T = N\tau, \quad n = 1,2,\ldots,N,$$

из которых следуют оценки

$$\left\|z_r^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)} \le O(\tau), \quad n = 1,2,\ldots,N, \quad r = 1,2,3.$$

Представленный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Пусть дана начально-краевая задача*

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} + u\frac{\partial c_r}{\partial x} + v\frac{\partial c_r}{\partial y} + (w + w_{gr})\frac{\partial c_r}{\partial z} = \mu_{hr}\left(\frac{\partial^2 c_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_r}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{vr}\frac{\partial c_r}{\partial z}\right) + F_r, \quad r = 1,2,3, \tag{39}$$

$$F_1 = (\alpha_2 c_2 - \beta_1 c_1) + \gamma_1 c_1,$$
$$F_2 = (\beta_1 c_1 - \alpha_2 c_2) + (\alpha_3 c_3 - \beta_2 c_2) + \gamma_2 c_2,$$
$$F_3 = (\beta_2 c_2 - \alpha_3 c_3) + \gamma_3 c_3,$$

в области $G \times [0 < t \le T]$ *с достаточно гладкой границей* $\Gamma = \Sigma_f \cup \Sigma_b \cup \Sigma_l$ (Σ_b *— поверхность, представляющая "крышку" области* G, Σ_f *— невозмущенная свободная поверхность водоема*, Σ_l *— цилиндрическая поверхность, заключенная между* Σ_b *и* Σ_f *с начальными и граничными условиями* (3)–(7). *В отношении функций, участвующих в уравнениях* (39), *примем следующие требования гладкости:*

$$c_r(x,y,z,t) \in C^2(G) \cap C(\bar{G}), \quad \operatorname{grad} c_r \in C(\bar{G}), \quad \|u, v, w + w_{gr}\|^{\mathrm{T}} \in C^1(G) \cap C(\bar{G}),$$

$$c_{r0}(x,y,z,t) \in C(G) \cap C(\bar{G}), \quad F_r(x,y,z,t) \in C(G), \quad \mu_{vr}(x,y,z) \in C^1(G) \cap C(\bar{G}), \quad c_r' \in C(\Sigma_l), \tag{40}$$

$$\left|\frac{\partial c_r}{\partial t}\right| \le M_r \equiv \mathrm{const} > 0, \quad r = 1,2,3,$$

а также выполняются условия согласованности граничных и начальных условий.

Пусть далее на временной сетке $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 1,\ldots,N;\ N\tau \equiv T\}$ *поставлена начально-краевая задача вида*

$$\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial t} + u^n \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial y} + \left(w^n + w_{gr}\right)\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z} = \mu_{hr}\left(\frac{\partial^2 \tilde{c}_r^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{c}_r^n}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{vr}\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z}\right) + F_r^n, \quad r = 1,2,3, \tag{41}$$

$$\tilde{F}_1^n = \left(\alpha_2 \tilde{c}_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) - \beta_1 \tilde{c}_1^n\right) + \gamma_1^n \tilde{c}_1^n,$$

$$\tilde{F}_2^n = \left(\beta_1 \tilde{c}_1^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) - \alpha_2 \tilde{c}_2^n\right) + \left(\alpha_3 \tilde{c}_3^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) - \beta_2 \tilde{c}_2^n\right) + \gamma_2^n \tilde{c}_2^n,$$

$$\tilde{F}_3^n = \left(\beta_2 \tilde{c}_2^{n-1}(x,y,z,t_{n-1}) - \alpha_3 \tilde{c}_3^n\right) + \gamma_3^n \tilde{c}_3^n,$$

с начальными и граничными условиями, аналогичными условиям (9)–(13). *Для начально-краевой задачи* (41) *выполняются требования, указанные в соотношениях* (40). *Тогда при выполнении условий*

$$4\mu_{h1}\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}\right) + 4\mu_{v1_{\min}}\frac{1}{L_z^2} - \frac{\alpha_2}{2}\left(1 + M_2^{n-1}\right) + \beta_1 - \gamma_{1\max}^n > 0,$$

$$4\mu_{h2}\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}\right) + 4\mu_{v2_{\min}}\frac{1}{L_z^2} + \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_{2\max}^n - \frac{\beta_1}{2}M_1^{n-1} - \frac{\alpha_3}{2}M_3^{n-1} > 0,$$

$$4\mu_{h3}\left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2}\right) + 4\mu_{v3_{\min}}\frac{1}{L_z^2} + \alpha_3 - \gamma_{3\max}^n - \frac{\beta_2}{2}M_2^{n-1} > 0,$$

$$\gamma_{r\max}^n = \max_{\substack{(x,y,z)\in G\\ t_{n-1}<t\le t_n}}\left\{\gamma_r^n(x,y,z,t)\right\}, \quad \left|\frac{\partial c_r^{n-1}}{\partial t}\right| \le M_r^{n-1} \equiv \mathrm{const} > 0, \quad r = 1,2,3,$$

имеют место оценки

$$\left\|c_r^n(x,y,z,t_n) - \tilde{c}_r^n(x,y,z,t_n)\right\|_{L_2(G)} \le O(\tau), \quad r = 1,2,3, \quad n = 1,2,\ldots,N.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассматривается нестационарная пространственно-трехмерная математическая модель транспорта многокомпонентной взвеси, для которой поставлена начально-краевая задача и проведено ее преобразование на временной сетке с шагом τ с "запаздыванием", когда концентрации фракций, присутствующие в правых частях уравнений и не входящие в их левые части уравнений конвекции–диффузии, вычисляются на правом конце предыдущего шага по времени. В результате получена цепочка начально-краевых задач, связанных по начальным–конечным данным на каждом шаге временной сетки. Доказана сходимость решений преобразованной системы к решению исходной задачи в норме гильбертова пространства $L_2(G)$ со скоростью $O(\tau)$ при $\tau \to 0$.

На основе данного преобразования исходной системы могут быть построены монотонные разностные схемы модели транспорта многокомпонентной взвеси, для которых будет выполняться сеточный принцип максимума, позволяющий установить устойчивость схемы по начальным данным, по граничным условиям, а также по правой части уравнения. Также данное преобразование дает возможность построить параллельный алгоритм решения каждой из отдельных задач диффузии—конвекции в пределах временного шага с необходимостью обменов сеточной информацией по получению финальных на данном временном слое значений сеточных функций между параллельными вычислительными процессорами, что позволяет существенно уменьшить временные затраты на обмены информацией.

Также заметим, что рассматриваемые в работе вычислительные алгоритмы могут быть использованы и для описания ряда других физических процессов. Одна из потенциальных областей применения связана с процессами, происходящими в прискважинной зоне. При бурении скважины взвесь частиц бурового раствора проникает в пористую геологическую среду. Ввиду осаждения частиц на стенки поровых каналов происходит их сужение, снижается проницаемость среды (см. [23, 24]). Для описания физики задачи может быть использована система диффузии—конвекции—реакции и схемы, предложенные авторами после их обобщения на криволинейные расчетные сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin B., Falconer R.A.* Numerical modelling of three-dimensional suspended sediment for estuarine and coastal waters // J. Hydraulic Res. 1996. V. 34. № 4. P. 435—456. https://doi.org/10.1080/00221689609498470
2. *Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б.* Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 296 с.
3. *Петров И.Б.* Проблемы моделирования природных и антропогенных процессов в Арктической зоне Российской Федерации // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 7. С. 103—136; Math. Models Comput. Simul. 2019. V. 11. №. 2. P. 226—246. https://doi.org/10.1134/S2070048219020145
4. *Дымников В.П., Залесный В.Б.* Основы вычислительной геофизической гидродинамики. М.: Геос, 2019, 448 с.
5. *Murillo J., Burguete J., Brufau P. García-Navarro P.* Coupling between shallow water and solute flow equations: analysis and management of source terms in 2D // Inter. J. Numer. Meth. Fluid. 2005. V. 49. № 3. P. 267—299. https://doi.org/10.1002/fld.992
6. *Ballent A., Pando S., Purser A., Juliano M.F., Thomsen L.* Modelled transport of benthic marine microplastic pollution in the Nazaré Canyon // Biogeo-sciences. 2013. V. 10. № 12. P. 7957—7970. https://doi.org/10.5194/bg-10-7957-2013
7. *Cao L., Liu S., Wang S., Cheng Q., Fryar A.E., Zhang Z., Yue F., Peng T.* Factors controlling discharge-suspended sediment hysteresis in karst basins, southwest China // Implications for sediment management. J. Hydrol. 2021. V. 594. P. 125792. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2020.125792
8. *Haddadchi A., Hicks M.* Interpreting event-based suspended sediment concentration and flow hysteresis patterns // J. Soils Sed. 2021. V. 21. № 1. P. 592—612. https://doi.org/10.1007/s11368-020-02777-y
9. *Jirka G.H.* Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows // J. Hydr. Res. 2001. V. 39. № 6. P. 567—573. https://doi.org/10.1080/00221686.2001.9628285
10. *Афанасьев А.П., Качанов И.В., Шаталов И.М.* Методики определения расстояний осаждения взвешенных частиц при дноуглубительных работах на судоходных реках // Вестник Гос. ун-та морск. и речн. флота им. адмирала С.О. Макарова. 2020. Т. 12. № 2. С. 310—322. https://doi.org/10.21821/2309-5180-2020-12-2-310-322
11. *Belyaev K., Chetverushkin B., Kuleshov A., Smirnov I.* Correction of the model dynamics for the Northern seas using observational altimetry data // J. Phys.: Conf. Ser., IOP Publ. 2021. V. 2131. P. 022113. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2131/2/022113
12. *Зиновьев Е.А., Китаев А.Б.* О воздействии взвешенных частиц на гидрофауну // Изв. Самарского научн. центра РАН. 2015. Т. 17. № 5. С. 283—288.
13. *Yan H., Vosswinkel N., Ebbert S., Kouyi G.L., Mohn R., Uhl M., Bertrand-Krajewski J.-L.* Numerical investigation of particles' transport, deposition and resuspension under unsteady conditions in constructed stormwater ponds // Environ Sci Eur. 2020. V. 32 № 76. https://doi.org/10.1186/s12302-020-00349-y
14. *Сидорякина В.В., Сухинов А.И.* Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 6. С. 985—1002;

Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. № 6. P. 978–994.
https://doi.org/10.7868/S0044466917060138

15. *Murphy J.C.* Changing Suspended Sediment in United States Rivers and Streams: Linking Sediment Trends to Changes in Land Use/Cover, Hydrology and Climate // Hydrol. Earth Syst. Sci. 2020. V. 24. P. 991–1010. https://doi.org/10.5194/hess-24-991-2020
16. *Sukhinov A., Sidoryakina V.* Two-Dimensional-One-Dimensional Alternating Direction Schemes for Coastal Systems Convection-Diffusion Problems // Mathematics. 2021. V. 9. P. 3267. https://doi.org/10.3390/math9243267
17. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко С.В., Атаян А.М.* Локально-двумерные схемы расщепления для параллельного решения трехмерной задачи транспорта взвешенного вещества // Матем. физ. и компьют. моделирование. 2021. Т. 24. № 2. С. 38–53. https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4
18. *Сухинов А.И., Сидорякина В.В.* Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменения рельефа дна // Вестник Донского гос. технич. ун-та. 2018. Т. 18. № 4. С. 350–361. https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361
19. *Sukhinov A.I., Sukhinov A.A., Sidoryakina V.V.* Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems structures // J. Phys.: Conf. Ser., IOP Publ. 2020. V. 1479. № 1. P. 012081. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081
20. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
21. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. Учебник. 4-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1981. 512 с.
22. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
23. *Golubev V.I.* Pore space colmatation during the bimodal suspension flow through the porous medium // Computational Mathematics and Information Technologies. 2019. V. 2. № 2. P. 67–75. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2019-2-2-67-75
24. *Голубев В.И., Михайлов Д.Н.* Моделирование динамики фильтрации двухчастичной суспензии через пористую среду // Труды МФТИ. Труды Московского физико-технического института (национального исследовательского университета). 2011. Т. 3. № 2. С. 143–147.