ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 7, с. 1128–1144

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956

"ПАРАЗИТНЫЕ" СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО ТИПА

© 2023 г. С. А. Назаров[1,*]

[1] 199178 Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61, ИПМаш РАН, Россия

*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 15.08.2022 г.
Переработанный вариант 28.02.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Рассматриваются спектральные задачи для оператора Лапласа с условиями Робэна и Стеклова (третьими краевыми) на гладкой границе плоской области. Эти условия содержат малый параметр и коэффициент "неправильного" знака, вызывающий появление отрицательных собственных значений. Подобные задачи и собственные значения, называемые "паразитными", возникают в вычислительных схемах при моделировании регулярной вариации границ (малых неравномерных сдвигов вдоль нормали) посредством возмущений дифференциальных операторов в краевых условиях. Построена и обоснована асимптотика некоторых паразитных собственных значений и получены априорные оценки, способствующие выяснению их положения на вещественной оси и влияния на погрешности моделирования. Библ. 47.

Ключевые слова: спектральная задача для оператора Лапласа, краевые условия Робэна и Стеклова с малым параметром, асимптотика отрицательных собственных значений, пограничный слой, моделирование.

DOI: 10.31857/S0044466923070116, **EDN:** VTBLRY

1. МОТИВИРОВКА

Известная формула Адамара (см. [1]), используемая в вычислительных схемах и при качественном анализе задач математической физики, например, в процедурах оптимизации формы (см. [2], [3]), описывает возмущение собственных значений (СЗ) при регулярной вариации границы области, в которой поставлена спектральная краевая задача. Опубликовано множество исследований, обобщающих указанный классический результат (см. [4–7], а также приведенные там списки литературы). В [8] предложен иной подход, основанный на имитации сдвига границы с условиями Дирихле или Неймана посредством постановки соответственно условий Робэна или Стеклова на исходной границе и приемлемый, например, в теории упругости для тел с поврежденными или армированными поверхностями (ср. [9], [10]). Поясним такой способ моделирования на примере простейших, потому малосодержательных, но совершенно понятных граничных задач для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}-\partial_t^2 U^\varepsilon(t) = \Lambda^\varepsilon U^\varepsilon(t), \quad t \in (\varepsilon\ell, L), \quad U^\varepsilon(L) = 0,\\ U^\varepsilon(\varepsilon\ell) = 0 \quad \Big(\text{или} \ \ \partial_t U^\varepsilon(\varepsilon\ell) = 0\Big),\end{gathered} \tag{1}$$

где $\ell \neq 0$, $L > 0$ и $\varepsilon > 0$ – фиксированные и малый параметры соответственно, а $\partial_t = \partial/\partial t$. Также рассмотрим следующие задачи на предельном ($\varepsilon = 0$) интервале $(0, L)$:

$$\begin{gathered}-\partial_t^2 u^\varepsilon(t) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(t), \quad t \in (0, L), \quad u^\varepsilon(L) = 0,\\ u^\varepsilon(0) = -\varepsilon\ell\partial_t u^\varepsilon(0) \quad \Big(\text{или} \ \ \partial_t u^\varepsilon(0) = \varepsilon\ell\lambda^\varepsilon u^\varepsilon(0)\Big).\end{gathered} \tag{2}$$

В них граничные условия в точке $t = 0$ поставлены при учете формул Тейлора

$$U^\varepsilon(\varepsilon\ell) = U^\varepsilon(0) + \varepsilon\ell\partial_t U^\varepsilon(0) + O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\partial_t U^\varepsilon(\varepsilon\ell) = \partial_t U^\varepsilon(0) + \varepsilon\ell\partial_t^2 U^\varepsilon(0) + O\left(\varepsilon^2\right) = \partial_t U^\varepsilon(0) - \varepsilon\ell\Lambda^\varepsilon U^\varepsilon(0) + O\left(\varepsilon^2\right),$$

и образованы так, чтобы обратить в нуль главные члены этих формул. Именно в замене вариации границы возмущением граничных условий и заключается предложенный в [8] способ моделирования.

Поскольку собственные пары {значение ; функция} всех сформулированных задач доступны в явном виде, нетрудно убедиться в том, что положительные СЗ задач (1) и (2) находятся в отношении (ср. материал разд. 7)

$$\left|\Lambda_k^\varepsilon - \lambda_k^\varepsilon\right| \leqslant c_k\varepsilon^2 \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_k], \tag{3}$$

где $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, а $c_k > 0$ и $\varepsilon_k > 0$ – некоторые величины. Кроме того, тривиальный вариант формулы Адамара (см. [1]) дает соотношение

$$\left|\Lambda_k^\varepsilon - \Lambda^0 - \varepsilon\Lambda_k'\right| \leqslant c_k'\varepsilon^2 \quad \text{при} \quad \varepsilon \in \left(0, \varepsilon_k'\right], \tag{4}$$

причем Λ^0 – СЗ предельной ($\varepsilon = 0$) задачи (2), $\Lambda' \neq 0$ – основная асимптотическая поправка, а ε_k' и c_k' – положительные величины. Сравнивая формулы (3) и (4), видим, что задача (2) предоставляет двучленную асимптотику собственных пар (СП) задачи (1). Иными словами, модель с условиями Робэна (или Стеклова) дает ту же точность приближения, что и классическая формула Адамара.

При $\ell < 0$ спектр $\wp^\varepsilon$ задачи (2) располагается на замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$. В то же время при $\ell > 0$ (предельный интервал шире исходного) у задачи (2) появляется СП $\left\{\lambda_{-1}^\varepsilon, u_{-1}^\varepsilon\right\}$, удовлетворяющая при некотором $\delta > 0$ соотношениям

$$\lambda_{-1}^\varepsilon = -\varepsilon^{-2}\ell^{-2} + O\left(e^{-\delta/\varepsilon}\right), \quad u_{-1}^\varepsilon(t) = e^{-t/\varepsilon\ell} + O\left(e^{-\delta/\varepsilon}\right). \tag{5}$$

Большие отрицательные СЗ $\lambda_{-k}^\varepsilon < 0$ принято называть паразитными. Их возникновение – частый побочный эффект моделирования задач с сингулярными возмущениями границы дифференциальными операторами с малым параметром или их самосопряженными расширениями (ср. [11], [12] и др.). Для таких СЗ нередко верны явные формулы, показывающие, в частности, их значительную удаленность (ср. множитель ε^{-2} в первом выражении (5)) от области действия модели – ограниченной части положительной полуоси. В результате подобные паразитные СП без особого труда исключаются из анализа, например, при использовании максиминимального принципа или при разработке вычислительных схем – именно в численных экспериментах для уменьшения затрат их реализации полезна подмена сингулярных возмущений регулярными при контроле сопутствующих погрешностей.

В настоящей работе путем построения асимптотики устанавливается существование паразитных СЗ для нескольких краевых задач в плоских областях, для которых асимптотические структуры оказываются значительно более сложными, чем выражения (5) для одномерных задач (2), и выясняется, при каких ограничениях гарантированно сохраняется упомянутая удаленность отрицательной части спектра $\wp_-^\varepsilon = \left\{\lambda^\varepsilon \in \wp^\varepsilon : \lambda^\varepsilon < 0\right\}$ от точки $\lambda^\varepsilon = 0$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Пусть Ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная простым гладким (класса C^∞; ср. п. 6.1) связным замкнутым контуром $\Gamma = \partial\Omega$, длина которого масштабированием сведена к 2π. Пусть еще $H \in C^\infty(\Gamma)$ – строго положительная функция, и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр, причем $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим спектральную задачу

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon H(s)\partial_n u^\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma, \tag{7}$$

где $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа, $\nabla = \operatorname{grad}$, и ∂_n – производная вдоль внешней нормали. Кроме того, в окрестности $\mathcal{V}$ контура Γ введены криволинейные координаты (n, s), где n – ориентированное расстояние до Γ, $n < 0$ в $\mathcal{V} \cap \Omega$, а s – длина дуги, измеренная против часовой стрелки вдоль контура от точки $\mathbb{O}$, начала декартовых координат $x = (x_1, x_2)$. В локальных координатах оператор Лапласа принимает вид

$$-\Delta = J(n,s)^{-1}\partial_n J(n,s)\partial_n + J(n,s)^{-1}\partial_s J(n,s)^{-1}\partial_s. \tag{8}$$

Здесь $\partial_n = \partial/\partial n$, $\partial_s = \partial/\partial s$ и $J(n,s) = 1 + n\kappa(s)$ – якобиан, а $\kappa(s)$ – кривизна в точке $s \in \Gamma$ (вообще говоря, знакопеременная, т.е. отрицательная на вогнутых участках контура Γ).

Вариационная формулировка задачи (6), (7) апеллирует к интегральному тождеству (см. [13])

$$a^\varepsilon\left(u^\varepsilon, \psi\right) := \left(\nabla u^\varepsilon, \nabla\psi\right)_\Omega - \varepsilon^{-1}\left(H^{-1}u^\varepsilon, \psi\right)_\Gamma = \lambda^\varepsilon\left(u^\varepsilon, \psi\right)_\Omega \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \tag{9}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)_\Omega$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, и $H^1(\Omega)$ – пространство Соболева. В силу элементарного следового неравенства (см., например, [13], гл. 1)

$$\left\|\psi; L^2(\Gamma)\right\| \leqslant K_\Omega \left\|\psi; H^1(\Omega)\right\| \left\|\psi; L^2(\Omega)\right\| \tag{10}$$

билинейная форма a^ε полуограничена снизу и, более того, спектр $\wp^\varepsilon$ задачи (9) располагается на луче $\left[-\varepsilon^{-1}\mu_\dagger, +\infty\right)$ с некоторым $\mu_\dagger > 0$ (см. далее выкладку (74)) и состоит из монотонной неограниченной последовательности нормальных СЗ.

Условия Робэна (7) появились в результате асимптотического переноса на “неподвижный” контур $\Gamma = \Gamma^0$ условий Дирихле с возмущенного контура

$$\Gamma^\varepsilon = \left\{x \in \mathcal{V} : n = -\varepsilon H(s),\, s \in \Gamma\right\}, \tag{11}$$

охватывающего область Ω^ε, согласно формуле Тейлора

$$U^\varepsilon\left(-\varepsilon H(s), s\right) = U^\varepsilon(0,s) - \varepsilon H(s)\partial_n U^\varepsilon(0,s) + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{12}$$

(ср. рассуждения из [8]). При моделировании аналогичной задачи Неймана в регулярно возмущенной области Ω^ε возникают краевые условия Стеклова (ср. разд. 1). Поэтому далее изучается еще одна задача, состоящая из дифференциального уравнения (6) и краевого условия

$$\partial_n u^\varepsilon(x) = -\varepsilon\lambda^\varepsilon H(s) u^\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma. \tag{13}$$

Называем ее задачей Стеклова, несмотря на то что спектральный параметр присутствует и в дифференциальном уравнении, и в краевом условии. Вариационная постановка задачи (6), (13) выглядит так:

$$\left(\nabla u^\varepsilon, \nabla\psi\right)_\Omega = \lambda^\varepsilon b^\varepsilon\left(u^\varepsilon, \psi\right) := \lambda^\varepsilon\left(\left(u^\varepsilon, \psi\right)_\Omega - \varepsilon\left(H u^\varepsilon, \psi\right)_\Gamma\right) \quad \forall \psi \in H^1(\Omega). \tag{14}$$

Теперь билинейная форма b^ε из правой части интегрального тождества, остающаяся компактной в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$, перестает быть положительной, т.е в спектре $\wp^\varepsilon$ задачи (14) опять-таки появляются отрицательные СЗ на луче $\left(-\infty, -\varepsilon^{-2}\mu_\bullet\right]$ (см. ниже (73)).

В отличие от задачи (6), (13) с условием Стеклова исследованию задачи (6), (7) с условием Робэна в различных формулировках посвящено большое количество статей (см. [14–19] и др.), где, в частности, найдены главные члены асимптотики первого (минимального) СЗ в плоской и многомерных областях, но также уточненные и даже полные асимптотические разложения в нижней части спектра в предположении о существовании единственного глобального строгого максимума кривизны границы γ области $\omega \subset \mathbb{R}^2$. В настоящей работе для обеих задач используется подход, связанный с анализом явления разномасштабных пограничных слоев, и в разнообразных ситуациях, как обычно, находятся несколько членов (три или два) формальных асимптотик СП так, чтобы обеспечить асимптотическое расцепление СЗ, т.е. вывести дополнительную предельную задачу, бесконечный набор СЗ которой порождает основную серию СЗ исходной задачи. Для задачи с условием Робэна в целом повторены результаты [18], [20], [21] (соответственно в пунктах 3.1—3.3), однако убедиться в удаленности паразитных СЗ от начала координат не удается, в частности, из-за того, что помимо основной – расположенной в нижнем диапазоне спектра – асимптотической серии СЗ могут существовать и другие серии (см. п. 6.2). Для задачи с условием Стеклова асимптотические конструкции являются новыми во всех ситуациях и основной результат, полученный в п. 6.3, показывает, что при некотором $\mu_\bullet > 0$ интервал $\left(-\varepsilon^{-2}\mu_\bullet, 0\right)$ заведомо свободен от СЗ, т.е. в спектре наблюдается та же картина, что и в случае конечномерных возмущений.

Упомянем еще статьи [22—24], посвященные изучению асимптотик отрицательных СЗ в сингулярно возмущенных задачах иных типов.

Построение асимптотических представлений СП задач (9) и (14) представлено в разд. 3 и 4 соответственно. Используемые в двух задачах асимптотические процедуры оказываются весьма похожими, хотя в целом свойства отрицательных частей их дискретных спектров оказываются совершенно разными (см. п. 6.3). Асимптотический анализ требует разбора нескольких несхожих ситуаций, но общим моментом для них становится локализация “паразитных” собственных функций (СФ). В простейшем случае (Ω – круг, H – постоянная) СФ u^ε_{-k}, отвечающая “большим” отрицательным СЗ, приобретает характер пограничного слоя, распределенного вдоль всей границы, но быстро, с экспоненциальной скоростью, затухающего при удалении от нее. Подобные эффекты обычны в методе Вишика–Люстерника (см. [25—27]). В других случаях (кривизна κ или множитель H имеет экстремум, например, в начале координат $\mathbb{O}$) локализация усугубляется: СФ становится исчезающе малой соответственно вне $c_\kappa\varepsilon^{1/4}$- или $c_H\varepsilon^{1/2}$-окрестности точки $\mathbb{O}$. Такое поведение СФ встречалось и в других задачах математической физики, преимущественно в задачах Дирихле в тонких областях (см. [20], [21], [28—31] по поводу схожих способов локализации).

Другие последствия постановки третьих краевых условий в областях с нерегулярными точками на границе были исследованы в [32—34] и др. в случае сохранения липшивости и [35—40] и др. при ее потере.

Асимптотические конструкции, представленные в разд. 3 и 4, не описывают все возможные способы локализации (ср. п. 6.2), а поиск иных устойчивых асимптотик паразитных СФ остался за рамками работы. Разные легкодоступные обобщения обсуждаются в п. 6.1, где также сформулирован ряд открытых вопросов, а в разд. 7 кратко пояснено построение асимптотик положительных СЗ. Обоснование асимптотических формул обсуждается в разд. 5.

3. АСИМПТОТИКА В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ РОБЭНА

В этом разделе приводим явные асимптотические конструкции, различая три случая: постоянные H и κ, переменная H и любая κ, а также постоянная функция H, но переменная кривизна κ. Применяется некоторая модификация асимптотических конструкций из [18], [20], [21].

3.1. Первый случай

Пусть Ω – единичный круг, и множитель H в краевом условии (7) – постоянная, т.е.

$$\kappa(s) := R^{-1} = 1 \quad \text{и} \quad H(s) = h^{-1}, \quad h > 0. \tag{15}$$

При этом $s = \varphi \in [-\pi, \pi]$ – угловая переменная на единичной окружности $\Gamma = \mathbb{S}$. Введем растянутую нормальную (радиальную) координату с обратным знаком

$$t = -\varepsilon^{-1} n \in \mathbb{R}_+ \tag{16}$$

и получим следующие представления для якобиана и дифференциального оператора (8):

$$J(n,s) = 1 - \varepsilon t\kappa(s), \quad \Delta = \varepsilon^{-2}\partial_t^2 - \varepsilon^{-1}\kappa(s)\partial_t - t\kappa(s)^2\partial_t + \partial_s^2 + \cdots. \tag{17}$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого анализа, а равенства $\kappa = 1$ и $R = 1$ не конкретизируются для использования формул в других случаях.

Следуя методу Вишика–Люстерника (см. [25]), зададим простейшие асимптотические разложения СП задачи (6), (7)

$$\lambda^{\varepsilon}_{-k} = \varepsilon^{-2}\lambda^0 + \varepsilon^{-1}\lambda' + \lambda''_{-k} + \cdots, \tag{18}$$

$$u^{\varepsilon}_{-k}(x) = \Phi_k(\varphi)\Big(w^0(t) + \varepsilon w'(t) + \varepsilon^2 w''_{-k}(t)\Big) + \cdots, \tag{19}$$

в которых пара

$$\lambda^0 = -h^2, \quad w^0(t) = e^{-ht} \tag{20}$$

представляет собой отрицательное СЗ и затухающую при $t \to +\infty$ (т.е. на расстоянии от границы Г) СФ первой предельной задачи о пограничном слое

$$-\partial_t^2 w^0(t) - \lambda^0 w^0(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{21}$$

$$w^0(0) + h^{-1}\partial_t w^0(0) = 0. \tag{22}$$

Остальные ингредиенты разложений подлежат определению. Приняв во внимание вращательную симметрию области Ω, предугадаем формулы для первого сомножителя в правой части (19):

$$\Phi_0(\varphi) = 1, \quad \Phi_p(\varphi) = \cos(p\varphi), \quad \Phi_{-p}(\varphi) = \sin(p\varphi), \quad p \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

Подставим анзацы (18), (19) в дифференциальное уравнение (6) и краевое условие (7), а затем соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра. Благодаря соотношениям (20)–(22) и (17), (15) основные члены невязок обращаются в нуль, а на первом шаге итерационного процесса получим задачу

$$-\partial_t^2 w'(t) + h^2 w'(t) = f'(t) := \Big(\lambda' - R^{-1}\partial_t\Big) w^0(t) = \Big(\lambda' + hR^{-1}\Big) w^0(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{24}$$

$$w'(0) + h^{-1}\partial_t w'(0) = 0. \tag{25}$$

Условие разрешимости этой задачи в классе функций, исчезающих на бесконечности, приводит к равенствам

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-ht} f(t)dt = \frac{1}{2h}\Big(\lambda' + \frac{h}{R}\Big) \Leftrightarrow \lambda' = -\frac{h}{R}. \tag{26}$$

При этом решение задачи (24), (25) определено с точностью до слагаемого cw^0, и потому можно считать, что

$$w'(t) = 0. \tag{27}$$

На втором шаге возникает задача

$$-\partial_t^2 w''_{-k}(t) + h^2 w''_{-k}(t) = f''_k(t) := \Big(\lambda''_{-k} - k^2 - t\partial_t\Big) w^0(t) + (\lambda' - \partial_t)\, w'(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{28}$$

$$w''_{-k}(0) + h^{-1}\partial_t w''_{-k}(0) = 0. \tag{29}$$

При этом учтены равенство $R = 1$ и соотношение $\partial_s^2 \Phi_k = -k^2 R^{-2}\Phi_k$ для СФ (17) второй предельной задачи

$$-\partial_\varphi^2 \Phi(\varphi) = \mu\Phi(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{S}, \tag{30}$$

которая по обыкновению возникает как условие разрешимости, но благодаря вращательной симметрии области Ω предсказана заранее.

В силу выбора (27) последнее слагаемое в уравнении (28) равно нулю. Таким образом, условие разрешимости задачи (28), (29) выглядит так:

$$0 = \int_0^{\infty} e^{-ht} f''(t)dt = \frac{1}{2h}\Big(\lambda''_{-k} - k^2\Big) + \frac{1}{4h} \Leftrightarrow \lambda''_{-k} = \mu_k - \frac{1}{2} := k^2 - \frac{1}{2}. \tag{31}$$

Здесь μ_k — СЗ дифференциального уравнения (30) на единичной окружности.

Равенства (20), (26) и (31), (23) указывают отделенные члены асимптотических анзацев (18) и (19). СФ приобретает характер пограничного слоя, локализованного около окружности $\mathbb{S} = \partial\Omega$.

3.2. Второй случай

Пусть Ω – произвольная область, но (непостоянная) функция H имеет строгий глобальный минимум в точке $\mathbb{O}$, т.е.

$$\begin{gathered}\kappa(s) = R^{-1} + O(|s|) \quad \text{и} \quad H(s) = h^{-1} + ms^2 + O\left(|s|^3\right),\\ m > 0, \quad H(s) > h^{-1} \quad \text{при} \quad s \in \Gamma \setminus \mathbb{O}, \quad h > 0.\end{gathered} \tag{32}$$

Аналогично [21], [29], [31] в дополнение к растянутой нормальной переменной (16) выполним замену

$$s \mapsto \eta = \varepsilon^{-1/2} s \in \mathbb{R} \tag{33}$$

и примем такие асимптотические анзацы для СП:

$$\lambda^{\varepsilon}_{-k} = \varepsilon^{-2}\lambda^0 + \varepsilon^{-1}\lambda'_{-k} + \cdots, \tag{34}$$

$$u^{\varepsilon}_{-k}(x) = \Psi_k(\eta) w^0(t,s) + \varepsilon w'_{-k}(t,\eta) + \cdots. \tag{35}$$

В отличие от формул (20) положим

$$\lambda^0 = -h^2, \quad w^0(t,s) = e^{-t/H(s)}. \tag{36}$$

Согласно второй группе допущений (32) имеем

$$-\partial_t^2 w^0(t,s) + h^2 w^0(t,s) = e^{-t/H(s)}\left(H(0)^{-2} - H(s)^{-2}\right) = 2h^3 ms^2 + O\left(|s|^3\right). \tag{37}$$

В силу определения (33) верны равенства $s^2 = \varepsilon\eta^2$ и $\partial_s^2 = \varepsilon^{-1}\partial_\eta^2$. Таким образом, на следующем шаге итерационного процесса после сбора множителей при ε^{-1} в дифференциальном уравнении возникает задача

$$\begin{gathered}-\partial_t^2 w'_{-k}(t,\eta) + h^2 w'_{-k}(t,\eta) = f'(t,\eta) := \Psi_k(\eta)\left(\lambda'_{-k} + hR^{-1}\right) w^0(t,0) + \\ + \left(\partial_\eta^2 \Psi_k(\eta) - 2h^3 m \eta^2 \Psi_k(\eta)\right) w^0(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+,\end{gathered} \tag{38}$$

$$w'_{-k}(0,\eta) + h^{-1}\partial_t w'_{-k}(0,\eta) = 0. \tag{39}$$

Подчеркнем, что функция w^0 из списка (36) полностью удовлетворяет краевому условию (7), и поэтому правая часть соотношения (39) – нуль. Кроме того, если точка $\mathbb{O}$ попала на вогнутый участок контура Γ, то нужна замена $R \mapsto -R = \kappa(0)^{-1}$.

Анализируя условие разрешимости задачи (38), (39), приходим к соотношениям

$$\lambda'_{-k} = -\frac{h}{R} + \mu_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{40}$$

где $\{\mu_k = A(2k-1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ – упорядоченная последовательность СЗ уравнения гармонического осциллятора (см., например, [41])

$$-\partial_\xi^2 \Psi(\xi) + A^2\xi^2\Psi(\xi) = \mu\Psi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{41}$$

с параметром

$$A^2 = 2h^3 m > 0. \tag{42}$$

Дифференциальное уравнение (41) на вещественной оси – вторая предельная задача.

Формулы (36) и (40), а также известные выражения (см., например, [41]) для СФ $\mathbb{R} \ni \eta \mapsto \Psi_k(\eta)$ уравнения (41), обеспечивающие экспоненциальную скорость $o\left(|\eta|^{k-1} e^{-A\eta^2/2}\right)$ их затухания, конкретизируют отделенные члены асимптотических анзацев (34) и (35). Указанное поведение величин $w^0(t,s)$ при $t\to+\infty$ и $\Psi_k(\eta)$ при $\eta\to\pm\infty$ обеспечивает сугубую локализацию СФ (35) в малой окрестности точки $\mathbb{O}$, где функция H достигает своего минимума.

3.3. Третий случай

Пусть функция H постоянна, а кривизна κ контура Γ имеет строгий глобальный (обязательно положительный) максимум в точке $\mathbb{O}$, т.е.

$$\begin{gathered}H(s)=h^{-1},\quad h>0\quad\text{и}\quad \kappa(s)=R^{-1}-ms^2+O\left(|s|^3\right),\\ m>0,\quad \kappa(s)<R^{-1}\quad\text{при}\quad s\in\Gamma\setminus\mathbb{O},\quad R>0.\end{gathered}\tag{43}$$

Сохраним замену (16) для нормальной координаты, но длине дуги около точки $\mathbb{O}$ аналогично [18], [20] предпишем такое растяжение:

$$\zeta=\varepsilon^{-1/4}s.\tag{44}$$

Соответствующим образом изменим анзацы для СЗ и СФ:

$$\lambda^\varepsilon_{-k}=\varepsilon^{-2}\lambda^0+\varepsilon^{-1}\lambda'+\varepsilon^{-1/2}\lambda''_{-k}+\cdots\tag{45}$$

и

$$u^\varepsilon_{-k}(x)=\Psi_k(\zeta)\left(w^0(t)+\varepsilon w'(t)\right)+\varepsilon^{3/2}w''_{-k}(t,\zeta)+\cdots.\tag{46}$$

Появление дробных показателей степеней малого параметра обусловлено равенствами $s^2=\varepsilon^{1/2}\eta^2$ и $\partial_s^2=\varepsilon^{-1/2}\partial_\eta^2$. Начальные и первые поправочные асимптотические члены находятся по формулам (21) и (26), (27). Наконец, следующие поправки удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$-\partial_t^2w''_{-k}(t,\zeta)+h^2w''_{-k}(t,\zeta)=\left(\lambda''_{-k}\Psi_k(\zeta)-hR^{-1}m\zeta^2\Psi_k(\zeta)+\partial_\zeta^2\Psi_k(\zeta)\right)w^0(t),\quad \zeta\in\mathbb{R},\tag{47}$$

и граничному условию (29). В итоге обнаруживаем, что затухающее решение w''_{-k} задачи (47), (29) существует при условии

$$\lambda''_k=\mu_k,\quad k\in\mathbb{N},\tag{48}$$

где $\{\mu_k;\Psi_k\}$ – СП уравнения гармонического осциллятора (41) (вторая предельная задача) с переменной (44) и параметром

$$A^2=hR^{-1}m>0.\tag{49}$$

Отделенные члены анзацев (45) и (46) построены, причем для СФ характерна локализация около начала координат $\mathbb{O}$, точки максимума кривизны контура Γ.

4. АСИМПТОТИКА В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ СТЕКЛОВА

При построении асимптотики СП задачи (6), (13) разберем несколько ситуаций, используя в значительной степени те же асимптотические конструкции, что и в разд. 3.

4.1. Первый случай

Пусть Ω – единичный круг, и множитель H в условии Стеклова (13) – постоянная, т.е. выполнены соотношения (15). Сохраняем растяжение (16) радиальной координаты и асимптотические анзацы (18), (19), но СП (20) ищем из уравнения (21) и проистекающего от (13) граничного условия

$$\partial_tw^0(0)-h^{-1}\lambda^0w^0(0)=0,\tag{50}$$

которое в итоге не отличается от (22). На первом шаге итерационного процесса возникает дифференциальное уравнение (24) с граничным условием

$$\partial_t w'(0) + hw'(0) = g' := h^{-1}\lambda' w^0(0) = h^{-1}\lambda'. \tag{51}$$

Аналогично п. 3.1, из условия разрешимости задачи (24), (51)

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-ht}dt = g'$$

выводим, что

$$\lambda' = h, \quad w'(t) = te^{-ht}. \tag{52}$$

Учитывая формулы (23) для множителя Φ_k в анзаце (19), на втором шаге процесса получаем уравнение (28) с граничным условием

$$\partial_t w''_{-k}(0) + hw''_{-k}(0) = h^{-1}(\lambda''_{-k} w^0(0) + \lambda' w'(0)) = h^{-1}\lambda''_{-k}. \tag{53}$$

Задача (28), (53) имеет затухающее на бесконечности решение тогда и только тогда, когда

$$\lambda''_{-k} = \frac{1}{2} - k^2. \tag{54}$$

При ограничении (15) построение отделенных членов анзацев (18) и (19) для СП задачи (6), (13) закончено. По-прежнему во второй поправке (54) фигурирует СЗ второй предельной задачи (30), однако с обратным знаком (ср. формулу (31)). Величины λ' из (26) и (52) также приобрели разные знаки. Напомним, что в упомянутых формулах $R = 1$.

4.2. Второй случай

Пусть справедливы требования (32), т.е, в частности, функция H имеет строгий глобальный максимум в точке $\mathbb{O} \in \Gamma$. Сохраним определения (33) и (36). Тогда поправочные члены анзацев (34) и (35) находятся из задачи (38), (51), условие разрешимости которой приводит к формуле

$$\lambda'_{-k} = \frac{h}{R} - \mu_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{55}$$

где μ_k – СЗ уравнения гармонического осциллятора (41) с параметром (42), а в случае вогнутости контура нужна замена $R \mapsto -R$. Как и в п. 3.2, СЗ второй предельной задачи появилось в обеих формулах (40) и (55), обслуживающих краевые условия Робэна и Стеклова, однако с разными знаками.

4.3. Третий случай

При ограничении (43) вводятся растянутые координаты (16) и (44), а асимптотики СЗ и СФ задачи (6), (13) ищутся в виде (45) и (46). Первые пары членов анзаев находятся из задач (21), (50) и (24), (51), т.е. заданы равенствами (20) и (52) соответственно. Для третьих членов получаем дифференциальное уравнение (47) и граничное условие

$$\partial_t w''_{-k}(0) + hw''_{-k}(0) = h^{-1}\lambda''_{-k}\Psi_k(\zeta)w^0(0).$$

В итоге условие разрешимости указанной задачи дает соотношение

$$\lambda''_k = -\mu_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{56}$$

в котором μ_k – СЗ второй предельной задачи (41) с параметром (49). Как и в других пунктах этого раздела, правые части формул (56) и (48) содержат разные знаки.

5. ЧАСТИЧНОЕ ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

Убедимся в том, что найденные асимптотики в самом деле присущи некоторым СЗ. В пространстве Соболева $\mathcal{H}^\varepsilon = H^1(\Omega)$ введем норму

$$\left\|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\right\| = \left(\alpha a^\varepsilon\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) + \beta\varepsilon^{-2} b^\varepsilon\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right)\right)^{1/2} \tag{57}$$

и порожденное ею скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$. В случае краевого условия (7) форма a^ε взята из тождества (9) и

$$b^\varepsilon\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) = \left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2, \quad \alpha = 1, \quad \beta \geqslant K_\Omega^2\left(\min_{s\in\Gamma}\{H(s)\}\right)^{-2} + 1, \tag{58}$$

но в случае краевого условия (13) форма b^ε взята из тождества (14) и

$$a^\varepsilon\left(u^\varepsilon, u^\varepsilon\right) = \left\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2, \quad \beta = 1, \quad \alpha \geqslant K_\Omega^2\left(\max_{s\in\Gamma}\{H(s)\}\right)^2 + 1. \tag{59}$$

При $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon_0\right]$ и некотором $\varepsilon_0 > 0$ соотношение

$$\left\|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\right\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(\left\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2\right) \tag{60}$$

получается применением следового неравенства (10) и алгебраического неравенства Коши $2fg \leqslant f^2 + g^2$. Действительно, в случае (58) при $\varepsilon \in \left(0, 1\right]$ находим

$$\left\|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\right\|^2 \geqslant \left\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 + \beta\varepsilon^{-2}\left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 - \varepsilon^{-1}\left(\min_{s\in\Gamma}\{H(s)\}\right)^{-1}\left\|u^\varepsilon; L^2(\Gamma)\right\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 + \beta\varepsilon^{-2}\left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 - \varepsilon^{-1}\left(\min_{s\in\Gamma}\{H(s)\}\right)^{-1} K_\Omega\left(\left\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\| + \left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|\right)\left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\left\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2\right) + \left(\frac{\beta}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon^2}K_\Omega^2\left(\min_{s\in\Gamma}\{H(s)\}\right)^{-2} - \frac{1}{\varepsilon}K_\Omega\left(\min_{s\in\Gamma}\{H(s)\}\right)^{-1} - \frac{1}{2\varepsilon^2}\right).$$

Ограничения, наложенные на величины β и ε, гарантируют положительность последнего слагаемого. В ситуации (59) неравенство (60) проверяется похожей выкладкой (ср. далее (73)).

Введем непрерывный и симметричный, а значит, самосопряженный оператор $\mathcal{T}^\varepsilon$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon$ при помощи тождества

$$\left\langle\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon, \psi^\varepsilon\right\rangle_\varepsilon = b^\varepsilon\left(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon\right) \quad \forall u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon. \tag{61}$$

Этот оператор компактный, т.е. его существенный спектр состоит из единственной точки $\tau = 0$, а на проколотом замкнутом сегменте

$$\left[-\left\|\mathcal{T}^\varepsilon\right\|, 0\right) \cup \left(0, \left\|\mathcal{T}^\varepsilon\right\|\right]$$

лежит дискретный спектр (см. [42], теорема 10.1.5); здесь $\left\|\mathcal{T}^\varepsilon\right\|$ — норма оператора. В случае (58) оператор $\mathcal{T}^\varepsilon$ положительный, т.е. его СЗ располагаются выше точки $\tau = 0$. Подчеркнем, что именно различное положение спектра введенного вспомогательного оператора предопределяет разные свойства отрицательной части спектра исходных задач (см. п. 6.3).

Сравнивая определения (57)–(59) с интегральными тождествами (9) и (14), обслуживающими рассматриваемые задачи, видим, что обе задачи эквивалентны абстрактному уравнению

$$\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon = \tau^\varepsilon\, u^\varepsilon \text{ в пространстве } \mathcal{H}^\varepsilon$$

с новым спектральным параметром

$$\tau^\varepsilon = \left(\alpha\lambda^\varepsilon + \beta\varepsilon^{-2}\right)^{-1}. \tag{62}$$

Следующее утверждение, известное как теорема о почти “собственных значениях” (см. [25]), является непосредственным следствием спектрального разложения резольвенты (см., например, [42], гл. 6), но формулируется в используемом далее укороченном варианте.

Теорема 1. *Пусть* $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ *и* $t^\varepsilon \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *таковы, что*

$$\left\|\mathbf{u}^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\right\| = 1, \quad \left\|\mathcal{T}^\varepsilon\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{t}^\varepsilon\mathbf{u}^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\right\| =: \delta^\varepsilon \in \left(0,\left|\mathbf{b}^\varepsilon\right|\right). \tag{63}$$

Тогда у оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$ *есть СЗ* τ^ε, *удовлетворяющее неравенству* $\left|\tau^\varepsilon - t^\varepsilon\right| \leqslant \delta^\varepsilon$.

Обоснование всех найденных асимптотических конструкций в требуемом для целей настоящей работы объеме проводится по единой схеме. Остановимся на п. 3.2, который является представительным, но порождает самые короткие формулы. Кроме того, по причине, обсуждаемой ниже в разд. 6, ограничимся выводом только промежуточных оценок точности асимптотических приближений. В последующих выкладках выражения для членов анзацев (34) и (35) не конкретизируются, мы только пользуемся полученными задачами для них и свойствами затухания.

Зафиксируем номер $k \in \mathbb{N}$ и при учете формул (58), (62) в качестве “почти собственного” значения возьмем величину

$$t_k^\varepsilon = \varepsilon^2\left(-h^2 + \varepsilon\lambda'_{-k} + \beta\right)^{-1}, \tag{64}$$

где λ'_{-k} — поправка (40). Подчеркнем, что число β взято достаточно большим положительным, т.е. $\beta + \varepsilon\lambda'_{-k} - h^2 > 0$ и $t_k^\varepsilon > 0$. Соответствующий “почти собственный” вектор зададим равенствами

$$\mathbf{u}_k^\varepsilon = \left\|\mathbf{w}^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\right\|^{-1}\mathbf{w}_k^\varepsilon, \quad \mathbf{w}_k^\varepsilon(x) = \chi(x)\Psi_k(\eta)\left(w^0(t,s) + \varepsilon w'_{-k}(t,s)\right), \tag{65}$$

где w^0 — экспонента из (36), w'_{-k} — какое-то решение задачи (38), (39), условие разрешимости которой выполнено по построению, а χ — гладкая срезающая функция, равная единице в окрестности начала координат $\mathbb{O}$ и нужная для продолжения пограничного слоя вовнутрь области Ω. Ввиду экспоненциального затухания функций w^0, w'_{-k} и Ψ_k справедливы неравенства

$$c\varepsilon^{-1/2} \leqslant \left\|\mathbf{w}_k^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\right\|^2 \leqslant C\varepsilon^{-1/2}, \quad c > 0. \tag{66}$$

Оценки (66) обусловлены вытекающими из (16) и (33) соотношениями

$$\partial_n = -\varepsilon^{-1}\partial_t, \quad \partial_s = \varepsilon^{-1/2}\partial_\eta, \quad dx = \varepsilon^{3/2}\left(1 + O\left(\varepsilon^{1/2}\right)\right)dtd\eta.$$

Обработаем величину δ_k^ε, вычисленную согласно формуле (63) по “почти собственной” паре (64), (65). В силу определений (57) и (61) имеем

$$\begin{gathered}\delta_k^\varepsilon = \left\|\mathcal{T}^\varepsilon\mathbf{u}_k^\varepsilon - \mathbf{t}_k^\varepsilon\mathbf{u}_k^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\right\| = \sup\left|\left\langle\mathcal{T}^\varepsilon\mathbf{u}_k^\varepsilon - \mathbf{t}_k^\varepsilon\mathbf{u}_k^\varepsilon,\psi\right\rangle_\varepsilon\right| = \\ = \mathbf{t}_k^\varepsilon\left\|\mathbf{w}^\varepsilon;\mathcal{H}^\varepsilon\right\|^{-1}\sup\left|\left(\nabla\mathbf{w}_k^\varepsilon,\nabla\psi\right)_\Omega - \varepsilon^{-1}\left(H^{-1}\mathbf{w}_k^\varepsilon,\psi\right)_\Gamma - \left(\varepsilon^{-2}h^2 + \varepsilon^{-1}\lambda'_k\right)\left(\mathbf{w}_k^\varepsilon,\psi\right)_\Omega\right|.\end{gathered} \tag{67}$$

Здесь супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon$, т.е. $\left\|\psi;\mathcal{H}^\varepsilon\right\| \leqslant 1$, а значит, согласно неравенству (60) верна оценка

$$\left\|\nabla\psi;L^2(\Omega)\right\|^2 + \varepsilon^{-2}\left\|\psi;L^2(\Omega)\right\|^2 + \varepsilon^{-1}\left\|\psi;L^2(\Gamma)\right\|^2 \leqslant c. \tag{68}$$

Обработаем выражение $I^\varepsilon(\psi)$ между последними знаками модуля в соотношении (67). Применим формулу интегрирования по частям и прокоммутируем дифференциальные операторы со срезающей функцией χ. В результате получим равенство

$$\begin{gathered}
I^\varepsilon(\psi) = -\Big([\Delta,\chi]\Big(\Psi_k\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right)\Big),\psi\Big)_\Omega + \left(\Psi_k\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right),\psi\partial_n\chi\right)_\Gamma - \\
-\left(\Delta\Big(\Psi_k\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right)\Big) - \varepsilon^{-2}\left(h^2 - \varepsilon\lambda'_{-k}\right)\Psi_k\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right),\chi\psi\right)_\Omega + \\
+\left(\partial_n\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right) - \varepsilon^{-1}H^{-1}\left(w^0 + \varepsilon w'_{-k}\right),\Psi_k\chi\psi\right)_\Gamma =: I^\varepsilon_\chi(\psi) - I^\varepsilon_\Omega(\psi) + I^\varepsilon_\Gamma(\psi).
\end{gathered} \tag{69}$$

Поскольку производная $\partial_n\chi$ и коэффициенты коммутатора $[\Delta,\chi] = 2\nabla\chi\cdot\nabla + \Delta\chi$ аннулируются в фиксированной окрестности точки $\mathcal{O}$, а функции w^0, w'_{-k} и Ψ_k затухают с экспоненциальной скоростью соответственно при $t\to+\infty$ и $\eta\to\pm\infty$, имеем

$$\left|I^\varepsilon_\chi(\psi)\right| \leqslant ce^{-\delta/\varepsilon}, \quad \delta > 0.$$

Последнее скалярное произведение из (69) приводим к виду

$$\begin{gathered}
I^\varepsilon_\Gamma(\psi) = -\varepsilon^{-1}\left(H\partial_t w^0 + w^0, \Psi_k H^{-1}\psi\chi\right)_\Gamma - \left(h^{-1}\partial_t w' + w', \Psi_k H^{-1}\psi\chi\right)_\Gamma - \\
-\left(\Psi_k\left(H - h^{-1}\right)\partial_n w'_{-k}, H^{-1}\psi\chi\right)_\Gamma.
\end{gathered}$$

Первые два слагаемых исчезают благодаря равенствам (36) и (39). В силу экспоненциального затухания множителя Ψ_k и формулы Тейлора для H, а также оценки (68) модуль последнего слагаемого не превосходит величины

$$c\left(\varepsilon^{3/2}\int_{\mathbb{R}}\eta^2 e^{-2\delta\eta^2}d\eta\right)^{1/2}\left\|\psi; L^2(\Gamma)\right\| \leqslant C\varepsilon^{5/4}.$$

Положив $w^0_0(t) = w^0(t,0)$, преобразуем выражение $I^\varepsilon_\Omega(\psi)$ следующим образом:

$$\begin{gathered}
I^\varepsilon_\Omega(\psi) = \varepsilon^{-2}\left(\partial_t^2 w^0 - H^{-2}w^0, \Psi_k\psi\chi\right)_\Omega + \\
+\varepsilon^{-1}\left(\partial_t^2 w'_{-k} - h^2 w'_{-k} + \Psi_k\left(\lambda'_{-k} - R^{-1}\partial_t\right)w^0_0 + w^0_0\left(\partial_\eta^2 - 2m\eta^2\right)\Psi_k, \psi\chi\right)_\Omega + \\
+\left(\left(\Delta - \left(\partial_n^2 + \left(R^{-1} + ms^2 + nR^{-2}\right)\partial_n - \partial_s^2\right)\right)\left(\Psi_k w^0\right),\psi\chi\right)_\Omega + \varepsilon\left(\left(\Delta - \partial_n^2 + \varepsilon^{-1}\lambda'_{-k}\right)w'_{-k},\psi\chi\right)_\Omega + \\
+\left((H^{-2} - h^2 - 2h^3ms^2)w^0, \Psi_k\psi\chi\right)_\Omega + \\
+\varepsilon^{-1}\left(\Psi_k\left(\lambda'_{-k} - R^{-1}\partial_t\right)\left(w^0 - w^0_0\right) + \left(w^0 - w^0_0\right)\left(\partial_\eta^2 - 2m\eta^2\right)\Psi_k, \psi\chi\right)_\Omega.
\end{gathered}$$

Первые два скалярных произведения в правой части обратились в нуль согласно формулам (36) и (38). При выводе мажоранты $c\varepsilon^{5/4}$ для модулей остальных четырех скалярных произведений нужно принять во внимание представления (8), (17) оператора Лапласа, растяжение координат (16) и (33), соотношения (37) и (68), экспоненциальное затухание функций w^0, w'_{-k} и Ψ_k, а также простую оценку

$$\left|w^0(t,s) - w^0_0(t)\right| + \left|\partial_t w^0(t,s) - \partial_t w^0_0(t)\right| \leqslant cse^{-ht}.$$

Итак, теорема 1 предоставляет СЗ τ^ε оператора $\mathcal{T}^\varepsilon$, для которого выполнено неравенство

$$\left|\tau^\varepsilon - t^\varepsilon_k\right| \leqslant c\varepsilon^{5/4}.$$

При учете формул (62) и (64) приходим к соотношению

$$\left|\lambda^\varepsilon_{-k} + \beta\varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-2}\left(\beta + \varepsilon\lambda'_{-k} - h^2\right)\right| \leqslant c\varepsilon^{5/4}\left(\lambda^\varepsilon_{-k} + \beta\varepsilon^{-2}\right)\left(\beta + \varepsilon\lambda'_{-k} - h^2\right)$$

откуда сначала выводим формулу

$$\lambda^{\varepsilon}_{-k} + \beta\varepsilon^{-2} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}\left(\beta + \varepsilon\lambda'_{-k} - h^2\right) \quad \text{при} \quad c\varepsilon^{5/4}\left(\lambda^{\varepsilon}_{-k} + \beta\varepsilon^{-2}\right)\left(\beta + \varepsilon\lambda'_{-k} - h^2\right) \leqslant \frac{1}{2},$$

а затем и окончательное неравенство

$$\left|\lambda^{\varepsilon}_{-k} + \varepsilon^{-2}\left(h^2 - \varepsilon\lambda'_{-k}\right)\right| \leqslant \frac{c_k}{2}\varepsilon^{-1/4}\left(\beta + \varepsilon\lambda'_{-k} - h^2\right)^2 \leqslant C_k\varepsilon^{-1/4} \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_{-k}] \tag{70}$$

с некоторыми подходящими величинами c_k, C_k и $\varepsilon_{-k} > 0$.

Сформулируем результат, полученный для задачи с условиями Робэна в одной из рассматриваемых ситуаций, – аналогичные результаты верны как и в других ситуациях, так и для задачи с условиями Стеклова.

Теорема 2. *Пусть выполнены ограничения* (32)*, а поправочное слагаемое* λ'_{-k} *в анзаце* (34) *имеет вид* (38)*, где* $k \in \mathbb{N}$ *и* μ_k – СЗ *уравнения гармонического осциллятора* (41) *с параметром* (42). *Тогда найдется (отрицательное) собственное значение* $\lambda^{\varepsilon}_{-k}$ задачи (6), (7) (*или* (9) *в вариационной формулировке*)*, для которого выполнена асимптотическая формула* (70).

Как и предполагалось, мы получили утверждение с несколькими изъянами. Во-первых, нижний индекс у СЗ $\lambda^{\varepsilon}_{-k}$ не отражает номер элемента в упорядоченной по возрастанию последовательности СЗ задачи (9). Во-вторых, теорема не предоставляет информации о соответствующей СФ. Причина кроется в том, что осталось неизвестным, все ли собственные значения из отрицательной части спектра $\wp^{\varepsilon}$ найдены в п. 3.2 (заведомо не все в случае множественности глобального максимума кривизны при разных коэффициентах m в представлениях (43)). Таким образом, СЗ $\lambda^{\varepsilon}_{-k}$ может оказаться кратным, а асимптотическая формула для СФ – малосодержательной. Для краткости формулировать и тем более доказывать половинчатые результаты не будем. Подчеркнем, что их можно получить, дополнив приведенные выше выкладки вычислениями и рассуждениями из цитированных публикаций. К вопросу о расположении отрицательных СЗ вернемся в п. 6.3.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

6.1. О гладкости

Разумеется, требование бесконечной дифференцируемости кривизны к контура Г и множителя H в краевых условиях избыточно. Поскольку в разд. 3 и 4 были использованы только трехчленные формулы Тейлора, достаточно функциям H и к приписать класс C^3. Кроме того, в случае глобальных и локальных экстремумов (ср. п. 6.2) такое требование нужно только в окрестностях точек их возникновения. Вместе с тем эффекты, происходящие от потери гладкости, не изучались.

При постоянном коэффициенте $H = h^{-1}$ обсудим задачи (6), (7) и (6), (13) в прямоугольнике $\Omega = (0, \ell_1)\times(0, \ell_2)$ со сторонами $\ell_1 \geqslant \ell_2 > 0$. В этом случае кривизна к постоянная – нулевая, и поэтому на каждой из сторон прямоугольника пригодны асимптотические конструкции из п. 3.1 и п. 4.1. Вместе с тем пограничные слои, например, около стороны $(0, \ell_1)\times\{0\}$ оставляют невязки в краевых условиях на перпендикулярных ей сторонах $\{0\}\times(0, \ell_2)$ и $\{\ell_1\}\times(0, \ell_2)$, которые согласно схеме из [43] (см. также [44], [45] по поводу общих краевых задач с малым параметром при старших производных в областях с угловыми и коническими точками на границе) следует компенсировать при помощи решений следующих задач в квадранте $\mathbb{K} = \left\{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_i > 0,\, i = 1, 2\right\}$:

$$-\Delta v(\xi) + h^2 v(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{K}, \tag{71}$$

$$\left.\left(v(\xi) + h^{-1}\frac{\partial v}{\partial \xi_i}(\xi)\right)\right|_{x_i=0} g_i(\xi_{3-i}), \quad xi_{3-i} > 0, \quad i = 1, 2. \tag{72}$$

Подчеркнем, что для обеих задач краевые условия на сторонах квадранта одинаковы, а их правые части g_i – затухающие при $\xi_{3-i} \to +\infty$ экспоненты. К сожалению, автору не удалось убедиться в однозначной разрешимости или указать решение однородной задачи (71), (72) в пространстве Соболева $H^1(\mathbb{K})$. Таким образом, вопрос о построении асимптотики решений сформулированных задач в прямоугольнике и других многоугольниках остается открытым. Упомянем статьи [32], [33], где установлено, что существенный спектр задачи для уравнения Лапласа в квадранте $\mathbb{K}$ с условием Стеклова

$$\left.\left(\frac{\partial v}{\partial \xi_i}(\xi) - \varrho v(\xi)\right)\right|_{x_i=0} = g_i(\xi_{3-i}), \quad \xi_{3-i} > 0, \quad i = 1,2,$$

занимает луч $[1,+\infty)$, а ниже него располагается непустой дискретный спектр.

Как известно (см. [35–39] и др.), при более сложном строении иррегулярности границы конечной области спектры задач Робэна и Стеклова могут перестать быть дискретными.

6.2. О качестве экстремумов

При формальном асимптотическом анализе локализации СФ около точек минимума функции H и максимума кривизны κ последние ограничения в списках (32) и (43) не нужны: асимптотические конструкции сохраняются полностью и в случае локальных экстремумов того же свойства. При этом для обоснования асимптотик достаточно утверждение, похожее на теорему 2, так как полученные новые серии СЗ располагаются ниже основной серии, порожденной глобальными минимумом или максимумом функций H или κ соответственно.

Если же упомянутые выше экстремумы становятся нестрогими, т.е. в формулах Тейлора из списков (32) и (43) выражение $\pm ms^2 + O\left(|s|^3\right)$ заменяется выражением $\pm ms^{2q} + O\left(|s|^{2q+1}\right)$ с натуральным показателем $q \geqslant 2$, то вместо (33) или (44) требуется выполнить замены

$$s \mapsto \eta = \varepsilon^{-1/(q+1)} s \quad \text{или} \quad s \mapsto \zeta = \varepsilon^{-1/2(q+1)} s$$

и соответствующим образом изменить анзацы для СП. В результате повторения проведенного асимптотического анализа получается уравнение

$$-\partial_\xi^2 \Psi(\xi) + A^2 \xi^{2q} \Psi(\xi) = \mu \Psi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

похожее на уравнение гармонического осциллятора и также имеющее положительный дискретный спектр $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. При этом пограничные слои около точки $\mathbb{O}$ становятся более пологими в касательном к границе направлении.

6.3. О расположении спектра на отрицательной полуоси

В задачах из [11], [12] и, конечно, из разд. 1 операторы приобретают конечномерные отрицательные возмущения, т.е. согласно максиминимальному принципу (см., например, [42], теорема 10.2.2) возможное количество паразитных СЗ задач известно заранее (одно для задач (2) при $\ell > 0$). Именно поэтому найденные асимптотические формулы (5) вполне определяют положение отрицательной части дискретного спектра. Операторная постановка задач (6), (7) и (6), (13) включает бесконечномерную отрицательную компоненту, а значит, кратность дискретного спектра на полуоси $(-\infty, 0)$ может случиться любой. Неизвестно, все ли паразитные СЗ описываются асимптотическими формулами из разд. 3, 4 и п. 6.2, а значит, выяснение отрицательной части спектра – отдельный вопрос, ответ на который является основной целью настоящей работы, но получить его на основе асимптотического анализа нельзя.

Следующая выкладка показывает, что интервал $\left(-\varepsilon^{-2}\mu_\bullet, 0\right)$ при некотором $\mu_\bullet > 0$ свободен от спектра задачи (6), (13). В самом деле, пусть $\lambda^\varepsilon = -\varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon$ – ее СЗ при $\mu^\varepsilon \in (0, \mu_\bullet)$, и u^ε – соответствующая СФ. Согласно интегральному тождеству (14) и следовому неравенству (10) имеем

$$\begin{gathered}0 = \left\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 + \varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon\left(\left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 - \varepsilon\left(Hu^\varepsilon, u^\varepsilon\right)_\Gamma\right) \geqslant \left\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 + \\ + \varepsilon^{-2}\mu\left(\left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 - \varepsilon \max_{s\in\Gamma} H(s)\left(\left\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\| + \left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|\right)\left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|\right) \geqslant \\ \geqslant \varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon\left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2\left(1 - \varepsilon K_\Omega \max_{s\in\Gamma} H(s) - \frac{1}{4}\mu^\varepsilon K_\Omega^2\left(\max_{s\in\Gamma} H(s)\right)^2\right).\end{gathered} \tag{73}$$

Посредством выбора чисел $\mu_\bullet > 0$ и $\varepsilon_\bullet > 0$ последний сомножитель при квадрате $L^2(\Omega)$-нормы функции u^ε можно сделать положительным при $\mu^\varepsilon \in (0, \mu_\bullet)$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\bullet)$, и прийти тем самым к противоречию. В итоге видим, что паразитные СЗ удалены от положительной полуоси на заметное расстояние, превосходящее $\varepsilon^{-2}\mu_\bullet$.

К сожалению, аналогичное утверждение о спектре задачи (6), (7) неверно, но автор не смог найти в ее спектре отрицательное СЗ порядка $\varepsilon^{-\gamma}$ при $\gamma \in [0, 2)$. Иными словами, асимптотическое поведение СЗ около верхнего конца интервала $\left(-\varepsilon^{-2}\mu_\dagger, 0\right)$ осталось неизученным, хотя понятно, что ввиду неограниченного возрастания кратности отрицательной части спектра при уменьшении параметра ε происходит миграция СЗ с положительной полуоси вниз, и нуль становится СЗ бесконечное число раз при $\varepsilon \to +0$. Вместе с тем посредством аналогичной (73) выкладки для СФ u^ε уравнения (6) с условиями Робэна (7) нетрудно убедиться в отсутствии спектра на луче $\left(-\infty, -\varepsilon^{-2}\mu_\dagger\right)$ с некоторым $\mu_\dagger > 0$. Для $\lambda^\varepsilon = -\varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon$ из интегрального тождества (9) выводим соотношение

$$\begin{gathered}0 = \left(\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right)^2 - \varepsilon^{-1}\left(H^{-1}u^\varepsilon, u^\varepsilon\right)_\Gamma + \varepsilon^{-2}\mu^\varepsilon\left\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2 \geqslant \\ \geqslant \varepsilon^{-2}\left\|\nabla u^\varepsilon; L^2(\Omega)\right\|^2\left(\mu^\varepsilon - \frac{1}{4}K_\Omega^2\left(\max_{s\in\Gamma} H(s)\right)^{-2} - \varepsilon K_\Omega\left(\max_{s\in\Gamma} H(s)\right)^{-1}\right).\end{gathered} \tag{74}$$

При подходящих $\mu_\dagger > 0$ и $\varepsilon_\dagger > 0$ правая часть формулы (74) становится положительной для $\mu^\varepsilon > \mu_\dagger$ и $\varepsilon < \varepsilon_\dagger$, что действительно невозможно.

Обнаруженное расхождение в строении отрицательных частей спектров задач Робэна и Стеклова вполне согласуется с обнаруженными в разд. 4 разным поведением при $\varepsilon \to +0$ членов анзацев (18), (34) и (45): асимптотические поправки в случае краевых условий (7) или (13) отличаются знаками, т.е. при возрастании номера k стремятся к $+\infty$ или к $-\infty$ соответственно.

6.4. Многомерные области

В случае $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, известны главный (см. [14]) и поправочный (см. [17]) члены асимптотического разложения отрицательных СЗ уравнения (6) с условием Робэна (7), причем под R^{-1} в формуле (26) нужно понимать сумму главных кривизн поверхности. Для задачи Стеклова (6), (13) какие-либо результаты не публиковались. Впрочем, нетрудно предсказать, что асимптотические анзацы в целом сохраняются, но обыкновенное дифференциальное уравнение гармонического осциллятора (41) превращается в уравнение с частными производными

$$-\Delta_y \Psi(y) + Q(y)\Psi(y) = \mu\Psi(y), \quad y = (y_1, \ldots, y_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}, \tag{75}$$

в котором Q – положительно-определенная квадратичная форма, которая задается главными (положительными) кривизнами границы или строгим минимумом функции H нескольких переменных. Спектр уравнения (75) конечно же остается дискретным.

Приемы асимптотического анализа, представленные в разд. 3 и 4, предсказывают любопытные анзацы для СП в трехмерном эллипсоиде с двумя одинаковыми осями и одной меньшей или в тороидальном множестве с круговой направляющей и образующей в форме эллипса.

7. ДОПОЛНЕНИЕ: АСИМПТОТИКА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЗ

В области Ω^ε, ограниченной контуром (11), который есть не что иное как регулярное возмущение контура Γ, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\Delta U^\varepsilon(x) = \Lambda^\varepsilon U^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{76}$$

с краевым условием Дирихле

$$U^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon, \tag{77}$$

или условием Неймана

$$\partial_n U^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon. \tag{78}$$

Вне зависимости от знака профильной функции H в определении (11) границы $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega^\varepsilon$ асимптотику положительных СЗ задач (76), (77) и (76), (78) ищем в виде

$$\Lambda^\varepsilon = \lambda^0(x) + \varepsilon\lambda' + \tilde{\Lambda}^\varepsilon, \tag{79}$$

а соответствующим СФ припишем разложение

$$U^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon u'(x) + \tilde{U}^\varepsilon(x). \tag{80}$$

Здесь $\left\{\lambda^0, u^0\right\}$ – СП предельной ($\varepsilon = 0$) задачи

$$\begin{gathered} -\Delta u^0(x) = \lambda^0 u^0(x), \quad x \in \Omega, \\ u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma \quad (\text{или} \ \ \partial_n u^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma). \end{gathered} \tag{81}$$

Приведем асимптотические формулы для простого СЗ λ^0, а соответствующую СФ нормируем равенством $\left\|u^0; L^2(\Omega)\right\| = 1$.

7.1. *Условие Дирихле*

Благодаря аналогичной (12) формуле Тейлора для (гладкой) СФ

$$u^0(x)\Big|_{n=-\varepsilon H(s)} = 0 - \varepsilon H(s)\partial_n u^0(0,s) + O\left(\varepsilon^2\right)$$

получаем, что поправочные члены в анзацах (79) и (80) находятся из дифференциального уравнения

$$-\Delta u'(x) - \lambda^0 u'(x) = \lambda' u^0(x), \quad x \in \Omega, \tag{82}$$

с краевым условием

$$u'(x) = H(s)\partial_n u^0(0,s), \quad x \in \Gamma. \tag{83}$$

Условие разрешимости появившейся задачи превращается в равенство

$$\begin{gathered} \lambda' = \lambda'\left\|u^0; L^2(\Omega)\right\|^2 = -\int_\Omega u^0(x)\left(\Delta u'(x) + \lambda^0 u'(x)\right)dx = \\ = \int_\Gamma \partial_n u^0(0,s) u'(0,s) ds_x = \int_\Gamma H(s)\left|\partial_n u^0(0,s)\right|^2 ds_x, \end{gathered} \tag{84}$$

а соотношение (79) с остатком $\tilde{\Lambda}^\varepsilon = O\left(\varepsilon^2\right)$ – в формулу Адамара (см. [1]). Оценки остатков в разложениях (79) и (80) – классический результат (см., например, [46], гл. 7, § 6).

Асимптотика положительных СЗ задачи (6), (7) ищется в виде

$$\lambda^\varepsilon = \lambda^0 + \varepsilon\lambda' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \tag{85}$$

причем в соответствии с краевым условием Робэна поправка λ' определяется условием разрешимости (84) той же задачи (82), (83), а значит, отделенные члены асимптотик (79) и (85) совпадают.

7.2. Условие Неймана

При учете уравнения и второго краевого условия в задаче (81), а также соотношения (8) для оператора Лапласа формула Тейлора

$$\partial_n u^0(x)\Big|_{n=-\varepsilon H(s)} = 0 - \varepsilon H(s)\partial_n^2 u^0(0,s) + O\left(\varepsilon^2\right) = \varepsilon H(s)\lambda^0 u^0(0,s) + O\left(\varepsilon^2\right)$$

замыкает уравнение (82) краевым условием

$$\partial_n u'(x) = -H(s)\lambda^0 u^0(0,s), \quad x \in \Gamma. \tag{86}$$

Условие разрешимости задачи (82), (86) принимает вид

$$\lambda' = \lambda'\left\|u^0; L^2(\Omega)\right\|^2 = \int_\Gamma u^0(0,s)\partial_n u'(0,s)ds_x = -\lambda^0\int_\Gamma H(s)\left|u^0(0,s)\right|^2 ds_x.$$

Точно такая же формула для поправочного асимптотического члена в анзаце (79) получается в результате простого асимптотического анализа регулярно возмущенной задачи (6), (13) со спектральным условием Стеклова. Оценки остатков выводятся с помощью стандартных схем (см., например, [46], гл. 7, и [47], гл. 7).

Автор благодарен рецензенту за полезные советы, позволившие значительно улучшить изложение материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hadamard J.* Mémoire sur le problème d’analyse relatif à l’équilibre des plaques élastiques encastrées // 1968. Œuvres V. 2. P. 515–631.
2. *Sokolowski J., Zolésio J.-P.* Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis. Springer Ser. Comput. Math. V. 16. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
3. *Delfour M.C., Zolésio J.-P.* Shapes and Geometries. Analysis, Differential Calculus, and Optimization. Adv. Design and Control, V. 4. Philadelphia: Soc. Indust. Appl. Math. (SIAM), 2001.
4. *Kawohl B.* Some nonconvex shape optimization problems. In: Optimal Shape Design (Tróia, 1998). Lect. Not. Math. V. 1740. Berlin: Springer, 2000. P. 7–46.
5. *Henrot A.* Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators. Front. Math. Basel: Birkhäuser Verlag, 2006.
6. *Kozlov V.* On the Hadamard formula for nonsmooth domains // J. Diff. Equat. 2006. V. 230. P. 532–555.
7. *Kozlov V.A., Nazarov S.A.* On the Hadamard formula for second order systems in non-smooth domains // Comm. Part. Different. Equat. 2012. V. 37. P. 901–933.
8. *Назаров С.А.* Двучленная асимптотика решений спектральных задач с сингулярными возмущениями // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 3. С. 291–320.
9. *Назаров С.А.* Асимптотическое моделирование упругих тел с поврежденными или упрочненными поверхностями // Докл. РАН. 2007. Т. 415. № 5. С. 611–616.
10. *Назаров С.А.* Асимптотика решений и моделирование задач теории упругости в области с быстроосциллирующей границей // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72. № 3. С. 103–158.
11. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* Спектральные задачи в сингулярно возмущенных областях и самосопряженные расширения дифференциальных операторов // Тр. Санкт-Петербург. матем. общества. 1998. Т. 6. С. 151–212.
12. *Назаров С.А.* Моделирование сингулярно возмущенной спектральной задачи при помощи самосопряженных расширений операторов предельных задач // Функц. анализ и его приложения. 2015. Т. 49. № 1. С. 31–48.
13. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
14. *Levitin M., Parnovski L.* On the principal eigenvalue of a Robin problem with a large parameter // Math. Nachr. 2008. V. 281. № 2. P. 272–281.
15. *Pankrashkin K.* On the asymptotics of the principal eigenvalue problem for a Robin problem with a large parameter in a planar domain // Nanosystems: Phys., Chem., Math. 2013. V. 4. № 4. P. 474–483.
16. *Exner P., Minakov A., Parnovski L.* Asymptotic eigenvalue estimates for a Robin problem with a large parameter // Port. Math. 2014. V. 71. № 2. P. 141–156.
17. *Pankrashkin K., Popoff N.* An effective Hamiltonian for the eigenvalue asymptotics of the Robin Laplacian with a large parameter // J. Math. Pures Appl. 2016. V. 106. P. 615–650.
18. *Helffer B., Kachmar A.* Eigenvalues for the Robin Laplacian in domains with variable curvature // Trans. Am. Math. Soc. 2017. V. 369. P. 3253–3287.

19. *Helffer B., Kachmar A.* Semi-classical edge states for the Robin Laplacian // Mathematika. 2022. V. 68. P. 454–485.
20. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Пробл. матем. анализа. Вып. 19. Новосибирск: Науч. книга, 1999. С. 105–148.
21. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // Israel J. Math. 2009. V. 170. P. 337–354.
22. *Назаров С.А.* Асимптотика отрицательных собственных чисел задачи Дирихле при плотности переменного знака // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 27. М.: Изд-во МГУ, 2009. С. 235–275.
23. *Nazarov S.A., Pankratova I.L., Piatnitski A.L.* Homogenization of the spectral problem for periodic elliptic operators with sign-changing density function // Arch. Ration. Mech. Anal. 2011. V. 200. № 3. P. 747–788.
24. *Chesnel L., Claeys X., Nazarov S.A.* Spectrum of a diffusion operator with coefficient changing sign over a small inclusion // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik. 2015. V. 66. P. 2173–2196.
25. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
26. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15. № 3. С. 3–80.
27. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстроменяющимися коэффициентами и граничными условиями // Успехи матем. наук. 1960. Т. 15. № 4. С. 27–95.
28. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of narrow periodic waveguides // Russ. J. Math. Phys. 2008. V. 15. № 2. P. 238–242.
29. *Borisov D., Freitas P.* Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linèaire. 2009. V. 26. № 2. P. 547–560.
30. *Borisov D., Freitas P.* Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in $\mathbb{R}^d$ // J. Funct. Anal. 2010. V. 258. № 3. P. 893–912.
31. *Nazarov S.A., Perez E., Taskinen J.* Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains // Trans. Amer. Math. Soc. 2016. V. 368. № 7. P. 4787–4829.
32. *Pankrashkin K.* On the Robin eigenvalues of the Laplacian in the exterior of a convex polygon // Nanosyst. Phys. Chem. Math. 2015. V. 6. P. 46–56.
33. *Pankrashkin K.* On the discrete spectrum of Robin Laplacians in conical domains // Math. Model. Nat. Phenom. 2016. V. 11. № 2. P. 100–110.
34. *Khalile M., Ourmières-Bonafos T., Pankrashkin K.* Effective operators for Robin eigenvalues in domains with corners // Ann. Institut Fourier. 2020. V. 70. P. 2215–2301.
35. *Daners D.* Robin boundary problems on arbitrary domains // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 9. P. 4207–4236.
36. *Daners D.* A Faber–Krahn inequality for Robin problems in any space dimansion // Math. Ann. 2006. V. 335. № 4. P. 767–785.
37. *Назаров С.А., Таскинен Я.* О спектре задачи Стеклова в области с пиком // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2008. Вып. 1. С. 56–65.
38. *Nazarov S.A., Taskinen J.* Spectral anomalies of the Robin Laplacian in non-Lipschitz domains // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 2013. V. 20. P. 27–90.
39. *Nazarov S.A., Taskinen J.* "Blinking eigenvalues" of the Steklov problem generate the continuous spectrum in a cuspidal domain // J. Different. Equat. 2020. V. 269. № 4, 5. P. 2774–2797.
40. *Nazarov S.A., Popoff N., Taskinen J.* Plummeting and blinking eigenvalues of the Robin Laplacian in a cuspidal domain // Proceed. Royal Soc. Edinburgh: Sect. A Math. 2019. P. 1–23.
41. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (релятивиская теория). М.: Наука, 1974. 752 с.
42. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 264 с.
43. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения уравнения $\mu^2\Delta u - k^2(x,y)u = f(x,y)$ в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 9. С. 1654–1660.
44. *Назаров С.А.* Метод Вишика–Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 1. Задача в конусе // Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22. № 4. С. 142–163.
45. *Назаров С.А.* Метод Вишика–Люстерника для эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. 2. Задача в ограниченной области // Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22. № 5. С. 132–152.
46. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
47. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск : Науч. книга, 2002.