ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 9, с. 1438–1445

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.929

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ СКОРОСТИ РОСТА ОШИБОК ОокругЛЕНИЯ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

© 2023 г. М. И. Зуев[1], С. И. Сердюкова[1,*]

[1] 141980 Дубна, М.о., ул. Жолио-Кюри, 6, ЛИТ ОИЯТ, Россия

*e-mail: sis@jinr.ru

Поступила в редакцию 16.02.2023 г.
Переработанный вариант 20.03.2023 г.
Принята к публикации 28.04.2023 г.

В настоящей работе разработан численно-аналитический алгоритм оценки ошибок округления в равномерной метрике. Установлена их ограниченность на всем интервале вычисления вольт-амперных характеристик длинных джозефсоновских переходов при использовании предлагаемой схемы второго порядка точности. На примере системы двух разностных уравнений показано, как можно исследовать численно скорость роста ошибок округления в равномерной метрике в случае степенной неустойчивости. Кроме того, получены оценки скорости роста ошибок округления в раномерной метрике для схемы Русанова третьего порядка точности. Расчеты проводились на суперкомпьютере “Говорун” с использованием системы REDUCE. Библ. 9. Фиг. 6.

Ключевые слова: конечно-разностные методы, оценка роста ошибок округления в равномерной метрике, численный метод, система REDUCE, суперкомпьютер “Говорун”.

DOI: 10.31857/S0044466923080173, **EDN:** WTZUZO

ВВЕДЕНИЕ

Цель этой работы – показать, как можно оценивать скорость роста ошибок округления в равномерной метрике, используя численные методы. Устойчивые в равномерной метрике разностные схемы пригодны для счета разрывных решений. Равномерная метрика является более естественной и наглядной по сравнению с l_2 метрикой. Но для получения оценок в равномерной метрике приходится использовать более сложные методы. Так, основные результаты по исследованию устойчивости разностных схем в равномерной метрике были получены с помощью метода перевала. При этом, кроме определения точек перевала и линий наискорейшего спуска, немалого труда стоило доказывать определяющую роль “асимптотических вычетов”. С появлением суперкомпьютеров возникла реальная возможность оценивать скорость роста ошибок округления путем прямого вычисления норм степеней характеристической матрицы $\|A^n\|$. Элементы A^n являются тригонометрическими многочленами $p(e^{i\phi}) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\phi}$. Норма $p(e^{i\phi})$ в метрике l_1 есть $\sum_k |a_k|$. Норма $\|A^n\|$ в метрике l_1 есть максимум норм ее элементов. В этой работе получены оценки скорости роста ошибок округления в равномерной метрике для трех конкретных примеров.

В разд. 1 получены оценки скорости роста ошибок округления в равномерной метрике для разностной схемы, которая используется при вычислении вольт-амперных характеристик (ВАХ) длинных джозефсоновских переходов. Установлена ограниченность роста ошибок округления в равномерной метрике на всем интервале вычисления ВАХ.

В разд. 2 получены оценки скорости роста ошибок округления в равномерной метрике для системы двух разностных уравнений путем прямого вычисления норм степеней характеристической матрицы в метрике l_1. Полученные численно результаты согласуются с теоретическими: в работе [5] была установлена неустойчивость в C рассматриваемой системы порядка $O(n^{1/8})$.

В разд. 3 численно получены оценки скорости роста ошибок округления в равномерной метрике для схемы Русанова [6, 7] при различных значениях параметров схемы. Все расчеты были проведены на суперкомпьютере “Говорун” [8] с использованием системы REDUCE [9].

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВАХ ДЛИННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ОШИБОК ОКРУГЛЕНИЯ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

Вычисление вольт-амперных характеристик систем n длинных джозефсоновских переходов связано (см. [1], (7)) с решением системы n существенно нелинейных дифференциальных уравнений. Был разработан алгоритм, позволяющий свести задачу к решению одного уравнения $u_{tt} = -\beta u_t + u_{xx} - \sin(u) + I$. Для решения последнего предлагается использовать разностную аппроксимацию второго порядка точности:

$$\frac{u_\nu^{n+1} - 2u_\nu^n + u_\nu^{n-1}}{\tau^2} = -\beta\frac{u_\nu^{n+1} - u_\nu^{n-1}}{2\tau} + \frac{u_{\nu+1}^n - 2u_\nu^n + u_{\nu-1}^n}{h^2} - \sin(u_\nu^n) + I(n),$$

τ, h – шаги сетки по t, x соответственно, ниже используются обозначения $\gamma = \tau/h$, $\delta = \beta\tau/2$. Линейная часть без $I(n)$ рассматриваемого разностного уравнения эквивалентна системе разностных уравнений:

$$u_\nu^{n+1} - u_\nu^n = v_\nu^{n+1}, \quad \frac{v_\nu^{n+1} - v_\nu^n}{\tau^2} = -\beta\frac{v_\nu^{n+1} + v_\nu^n}{2\tau} + \frac{u_{\nu+1}^n - 2u_\nu^n + u_{\nu-1}^n}{h^2}. \tag{1}$$

Решается задача Коши, заданы начальные данные u_ν^0, v_ν^0. После преобразования Фурье

$$U^n = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu\phi}[u_\nu^n, v_\nu^n]^*$$

(знак * означает преобразование вектора-строки в вектор-столбец) и некоторых алгебраических манипуляций система (1) преобразуется в векторную систему:

$$U^{n+1} = A(e^{i\phi})U^n, \quad U^n = A^n(e^{i\phi})U^0.$$

Здесь $A(e^{i\phi})$ – характеристическая матрица:

$$A(e^{i\phi}) = \begin{bmatrix} (1 - (4\gamma^2\sin^2(\phi/2))/(1+\delta) & (1-\delta)/(1+\delta) \\ -(4\gamma^2\sin^2(\phi/2))/(1+\delta) & (1-\delta)/(1+\delta) \end{bmatrix}.$$

Функция Грина системы (1) есть

$$\Gamma_j^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} A^n(e^{i\phi})e^{ij\phi}d\phi.$$

Порядок роста функции Грина Γ_j^n в метрике l_1 определяет скорость роста ошибок округления ϵ_j^n в равномерной метрике:

$$\sup_{1\le p,k\le q}\sum_j\left|\Gamma_j^n(p,k)\right| = \left(\sup_{1\le j\le q}\left|\epsilon_j^n\right|\right)/\left(\sup_{1\le j\le q}\left|\epsilon_j^0\right|\right).$$

В работах [2, 3] были получены оценки, гарантирующие ограниченность скорости роста ошибок округления в l_2 метрике для всех n.

Собственные значения характеристической матрицы A удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 - 2\frac{1 - 2\gamma^2\sin^2(\phi/2)}{1+\delta}\lambda + \frac{1-\delta}{1+\delta} = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - 2\gamma^2\sin^2(\phi/2) \pm \sqrt{(1 - 2\gamma^2\sin^2(\phi/2))^2 - (1-\delta^2)}}{1+\delta}. \tag{2}$$

В работе [2] доказано, что $|\lambda_1| \le 1$ и $|\lambda_2| \le 1$ для всех $\gamma \le 1$ и всех $0 \le \phi \le 2\pi$. Это необходимые условия устойчивости рассматриваемой задачи Коши в метрике L_2, гарантирующие отсутствие неустойчивости экспоненциального типа. Но при наличии кратных собственных значений может возникнуть неустойчивость степенного типа [4]: $\|G^n\| \asymp n^\theta$, $\theta > 0$, G – оператор перехода от слоя к слою. При наличии кратных собственных значений нормальная форма характеристической матрицы имеет блочно-треугольную форму [4]. В [2] проведен детальный спектральный анализ характеристической матрицы системы (1). В рассматриваемом случае нормальной формой характеристической матрицы является треугольная матрица второго порядка. Матрица преобразования подобия

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_1 - 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(T) = 1,$$

приводит матрицу A к треугольному виду:

$$T^{-1}AT = B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad B^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & D_n \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix}, \quad D_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}. \tag{3}$$

Сделав обратное преобразование, получаем

$$A^n = \begin{bmatrix} -\lambda_1\lambda_2 D_n - D_{n+1} & \lambda_1\lambda_2 D_n \\ (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - 1)D_n & \lambda_1\lambda_2(D_n - D_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Так как $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - 1 = 2\gamma^2(\cos(\phi) - 1)/(1 + \delta)$, $\gamma \le 1$, оценка скорости роста ошибок округления в равномерной метрике сводится к оценке роста $\|D_n\|$ в метрике l_1:

$$\frac{1-\delta}{1+\delta}\|D_n\| \le \sup_{1\le p,k\le 2}\sum_j \left|\Gamma_j^n(p,k)\right| \le \frac{4}{1+\delta}\|D_n\|.$$

Замечание. Норма $p(e^{i\phi}) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\phi}$ в метрике l_1 есть $\sum_{k=-n}^{n}|a_k|$. При умножении $p(e^{i\phi})$ на $\cos(\phi)$ величина нормы не возрастает: $\|\cos(\phi)p(e^{i\phi})\| \le \|p(e^{i\phi})\|$.

Алгоритм прямого вычисления норм D_n в метрике l_1.

В случае четных n, $n = 2nc$, имеем

$$D_n = \frac{p_n(z)}{(1+\delta)^{n-1}}, \quad z = 2(1 - \gamma^2 + \gamma^2\cos(\phi)), \quad p_n(z) = z\sum_{j=1}^{nc} g_j(\delta^2 - 1)^{nc-j} z^{2(j-1)} = \sum_{j=1}^{nc} b_j z^{2j-1},$$

$$g_j = \sum_{k=1}^{j} C_n^{2k-1} C_{nc-k}^{j-k}, \quad z^2 = c_1 + c_2\cos(\phi) + c_3\cos(2\phi), \quad p_n = \sum_{j=1}^{n} d_j\cos((j-1)\phi), \quad \|p_n\| = \sum_{j=1}^{n}|d_j|.$$

Последовательно вычисляем $z^{2k-1} = a_1 + a_2\cos(\phi) + \ldots + a_{2k}\cos((2k-1)\phi)$, $2 \le k \le nc$.

Коэффициенты a_j зависят от k и пересчитываются при переходе от z^{2k-1} к z^{2k+1}:

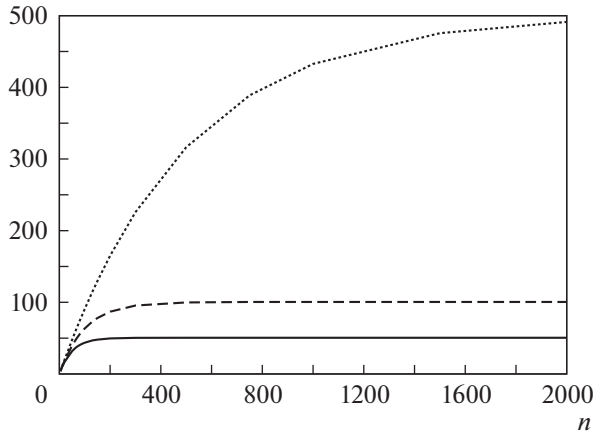
$$z^{2k+1} = z^{2k-1}(c_1 + c_2\cos(\phi) + c_3\cos(2\phi)) = a_1(c_1 + c_2\cos(\phi) + c_3\cos(2\phi)) + R_k,$$

$$R_k = \sum_{j=2}^{2k} a_j\left[c_1\cos((j-1)\phi) + c_2\frac{\cos((j-2)\phi) + \cos(j\phi)}{2} + c_3\frac{\cos((j-3)\phi) + \cos((j+1)\phi)}{2}\right].$$

В случае нечетных n, $n = 2nc - 1$, имеем

$$D_n = \frac{p_n(z)}{(1+\delta)^{n-1}}, \quad p_n(z) = \sum_{j=1}^{nc} g_j(\delta^2 - 1)^{nc-j} z^{2(j-1)},$$

$$g_j = \sum_{k=1}^{j} C_n^{2(k-1)} C_{nc-k}^{j-k}, \quad z^2 = c_1 + c_2\cos(\phi) + c_3\cos(2\phi), \quad p_n = \sum_{j=1}^{n} d_j\cos((j-1)\phi), \quad \|p_n\| = \sum_{j=1}^{n}|d_j|.$$



Фиг. 1. Графики $\|D_n\|$, $n \le 2000$ в метрике l_1 для уравнения (1). Нижний график относится к случаю $\tau = h = 0.1$. Средний – для $\tau = h = 0.05$, и верхний график – для $h = 0.05$, $\tau = h/5$.

Последовательно вычисляем $z^{2(k-1)} = a_1 + a_2\cos(\phi) + \ldots a_{2k-1}\cos(2(k-1)\phi)$, $2 \le k \le nc$. Коэффициенты a_j зависят от k и пересчитываются при переходе от $z^{2(k-1)}$ к z^{2k}:

$$z^{2k} = z^{2(k-1)}(c_1 + c_2\cos(\phi) + c_3\cos(2\phi)) = a_1(c_1 + c_2\cos(\phi) + c_3\cos(2\phi)) + R_k,$$

$$R_k = \sum_{j=2}^{2k-1} a_j\left[c_1\cos((j-1)\phi) + c_2\frac{\cos((j-2)\phi) + \cos(j\phi)}{2} + c_3\frac{\cos((j-3)\phi) + \cos((j+1)\phi)}{2}\right].$$

На фиг. 1 представлены графики $\|D_n\|$ в метрике l_1. Нижний график относится к случаю $\tau = h = 0.1$, средний – к случаю $\tau = h = 0.05$, и верхний – для $h = 0.05$, $\tau = h/5$. Аналогично случаю оценки $\|D_n\|$ в метрике l_2 (см. фиг. 3, [3]), самый быстрый рост наблюдается при $\gamma \ne 1$. Нижний график выходит на плато $\|D_{2000}\| = 50.5$. Средний график также выходит на плато $\|D_{2000}\| = 100.999\ldots$. А при $\gamma = 1/5$ имеем $\|D_{2000}\| = 491.333034\ldots$, продолжается рост, но видна тенденция выхода на плато:

$$\|D_{1000}\| - \|D_{500}\| = 116.386\ldots, \quad \|D_{1500}\| - \|D_{1000}\| = 42.816\ldots, \quad \|D_{2000}\| - \|D_{1500}\| = 15.731\ldots$$

Чтобы разобраться, мы продолжили счет до $n = 5500$. В результате выяснилось, что верхний график также выходит на плато, см. фиг. 2, где точками отмечены значения $\|D_{n+500}\| - \|D_n\|$. Хорошо видно, что с ростом n значения $\|D_{n+500}\|$ и $\|D_n\|$ сближаются, достигая $\|D_{5500}\| - \|D_{5000}\| = 0.014\ldots$

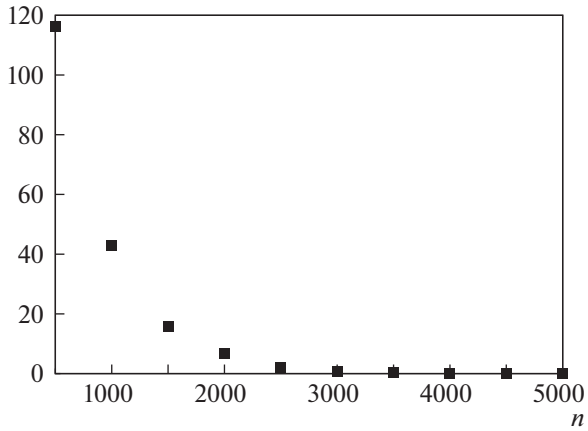
В рассматриваемом случае оценка скорости роста ошибок округления в равномерной метрике свелась к оценке $\|D_n\|$ в метрике l_1. Но это не всегда так. Рассмотрим еще один пример.

2. УСТОЙЧИВАЯ В L_2 СИСТЕМА, НЕУСТОЙЧИВАЯ В C

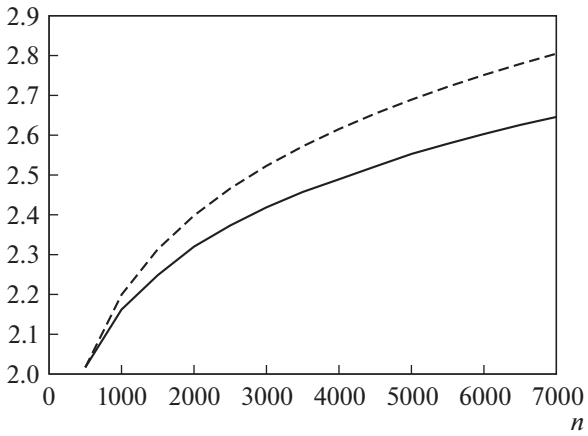
Система разностных уравнений

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\tau}{2h}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) - \frac{\tau^2}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_J^n + u_{j-1}^n) = 0, \\ v_j^{n+1} &= v_j^n - \frac{\tau}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\tau^2}{h^2}(v_{j+1}^n - 2v_J^n + v_{j-1}^n) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

устойчива в L_2 при $\tau \le h$ (см. [5]).



Фиг. 2. Выход на плато графика $\|D_n\|$ в метрике l_1 (система (1), $h = 0.05$, $\tau = h/5$). Точками отмечены значения $\|D_{n+500}\| - \|D_n\|$, $n = 500, 1000, 1500, 2000, ..., 5000$.



Фиг. 3. Нижний график представляет $\|A^n\|$, $500 \le n \le 7000$ в метрике l_1 для системы (4), $\gamma = 1/2$. Верхний график представляет функцию $\|A^{500}\| * n^{1/8}$.

Характеристическая матрица

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad a = 1 - \gamma^2(1 - \cos(\phi)), \quad b = i\gamma\sin(\phi),$$

имеет два собственных значения $\lambda_{1,2} = a \pm b$. Матрица преобразования подобия

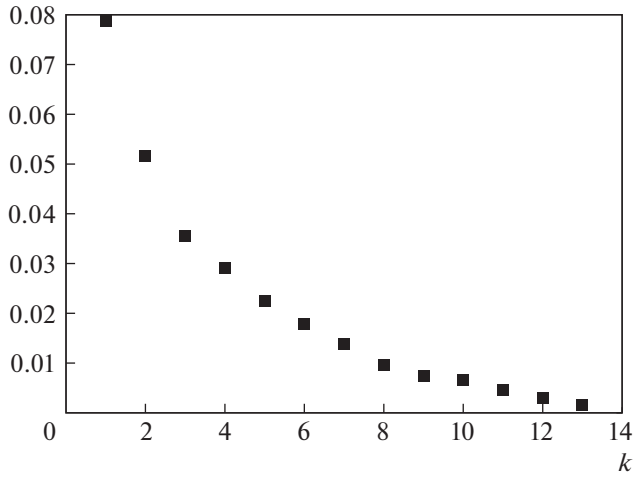
$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_1 - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

приводит характеристическую матрицу к треугольному виду

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ b & \lambda_1 \end{bmatrix} = B, \quad B^n = \begin{bmatrix} \lambda_2^n & 0 \\ (\lambda_1^n - \lambda_2^n)/2 & \lambda_1^n \end{bmatrix}.$$

Сделав обратное преобразование, получаем

$$A^n = 0.5\begin{bmatrix} \lambda_1^n + \lambda_2^n & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & \lambda_1^n + \lambda_2^n \end{bmatrix}.$$



Фиг. 4. На графике точками отмечены значения $r(14)/r(k) - (14/k)^{1/8}$, $k = 1,2,\ldots,13$, где $r(k) = \left\|A^{500k}\right\|$ в метрике l_1. График демонстрирует скорость роста $\left\|A^n\right\|$ порядка $O(n^{1/8})$ для системы (4) .

Скорость роста ошибок округления в равномерной метрике определяется скоростью роста норм элементов матрицы A^n в метрике l_1 [5]. В рассматриваемом случае

$$\lambda_1 = 1 - \gamma^2 + \frac{\gamma^2 + \gamma}{2} e^{i\phi} + \frac{\gamma^2 - \gamma}{2} e^{-i\phi} = p(e^{i\phi})e^{-i\phi}, \quad p(x) = d1 + d2x + d3x^2,$$

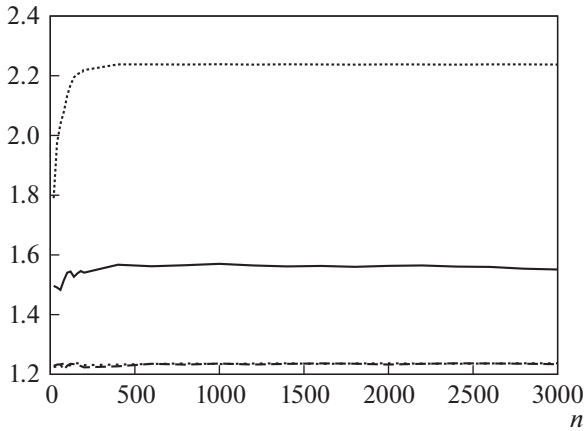
$\lambda_2 = q(e^{i\phi})e^{-i\phi}$, $q(x) = d3 + d2x + d1x^2$. Последовательно вычисляем p^k, q^k, $2 \le k \le n$. Сумма модулей коэффициентов многочленов $(p^n + q^n)/2$, $(p^n - q^n)/2$ определяет скорость роста ошибок округления в равномерной метрике.

С использованием системы REDUCE удалось вычислить при $\gamma = 1/2$ на суперкомпьютере “Говорун” $r(n) = \left\|A^n\right\|$, $1 \le n \le 7000$, в метрике l_1, которые медленно растут от 2.0166... до 2.645..., что обеспечивает ограниченность роста ошибок округления в равномерной метрике на интервале $[0, 7000\tau]$. См. нижний график на фиг. 3. Верхний график представляет функцию $r(500)n^{1/8}$. В работе [5] аналитически была установлена неустойчивость рассматриваемой системы в C порядка $O(n^{1/8})$. На фиг. 4 точками отмечены значения $\Delta(k) = r(14)/r(k) - (14/k)^{1/8}$, $k = 1,2,\ldots,13$, где $r(k) = \left\|A^{500k}\right\|$. Хорошо видно, что величина $\Delta(k)$ монотонно убывает, достигая в конце значения 0.00159..., что согласуется с результатом, полученным теоретически.

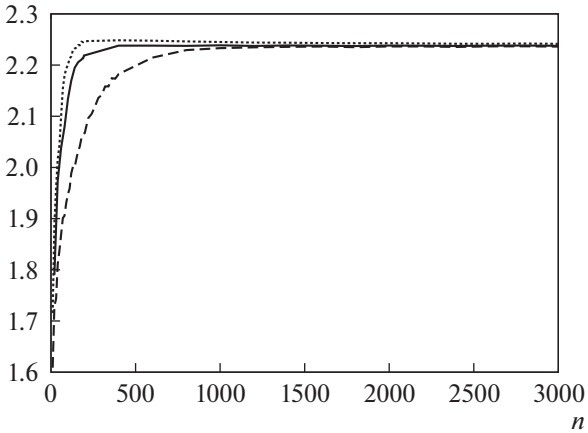
3. ОЦЕНКА ОШИБОК ОКРУГЛЕНИЯ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ ДЛЯ СХЕМЫ РУСАНОВА

Был разработан и реализован с использованием системы REDUCE на суперкомпьютере “Говорун” численный метод исследования устойчивости в равномерной метрике схемы Русанова третьего порядка точности, которая используется при решении задач газовой динамики. Для модельного уравнения $u_t = u_x$ рассматривается [6] такая разностная схема:

$$u_\nu^{n+1} = \left\{1 + \frac{\gamma}{12}(-T^2 + 8T - 8T^{-1} + T^{-2}) + \frac{\gamma^2}{8}(T^2 - 2I + T^{-2}) + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma^3}{12}(T^2 - 2T + 2T^{-1} - T^{-2}) - \frac{\omega}{24}(T^2 - 4T + 6I - 4T^{-1} + T^{-2})\right\} u_\nu^n, \tag{5}$$
$$n \ge 0, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad x = \nu h, \quad t = n\tau, \quad \gamma = \tau/h, \quad Tu_\nu^n = u_{\nu+1}^n.$$



Фиг. 5. Графики $\|A^n\|$ в метрике l_1 – для схемы Русанова при $\gamma = 0.5$: верхний график относится к $\omega = 3$, средний – к $\omega = 3/2$, два оставшихся (практически неразличимых при $n > 500$) относятся к $\omega = 0.5, 0.25$.



Фиг. 6. Графики $\|A^n\|$ в метрике l_1 – для схемы Русанова при $\omega = 3$: верхний график относится к $\gamma = 0.75$, средний – для $\gamma = 0.5$, нижний – для $\gamma = 0.25$. При $n > 1000$ графики практически неразличимы, выходят на одну и ту же асимптоту.

Характеристическая функция рассматриваемой разностной схемы есть

$$f(e^{i\phi}) = 1 - \frac{\gamma^2}{2}\sin^2(\phi) - \frac{2}{3}\omega\sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right) + \gamma i\sin(\phi)\left[1 + \frac{2}{3}(1-\gamma^2)\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right],$$

$$\left|f(e^{i\phi})\right|^2 = 1 + 4P(z)z^2/9, \qquad P(z) = [4\gamma^2(1-\gamma^2)^2 - (\omega - 3\gamma^2)^2]z^2 -$$
$$- 2[2\gamma^2(1-\gamma^2)^2 + 3\gamma^2(\omega - \gamma^2 - 2)]z + 3(\omega - 4\gamma^2 + \gamma^4), \qquad z = \sin^2(\phi/2).$$

Последовательно вычисляем суммы модулей коэффициентов f, f^2, f^3,... (сумма модулей коэффициентов f^n есть норма f^n в метрике l_1). На фиг. 5 представлены графики $\|f^n\|$ в метрике l_1 для схемы Русанова при $\gamma = 1/2$: верхний график относится к $\omega = 3$, средний – к $\omega = 3/2$, два оставшихся графика (практически неразличимые при $n > 500$) относятся к $\omega = 0.5, 0.25$. Во всех

случаях $\|f^n\|$ ограничены при $n \le 3000$, что гарантирует ограниченность ошибок округления в равномерной метрике при $t \le 3000\tau$.

На фиг. 6 представлены графики $\|f^n\|$ в метрике l_1 для схемы Русанова при $\omega = 3$: верхний график относится к $\gamma = 0.75$, средний – для $\gamma = 0.5$, нижний относится к $\gamma = 0.25$. Во всех случаях $\|f^n\|$ ограничены при $n \le 3000$, что гарантирует ограниченность ошибок округления в равномерной метрике при $t \le 3000\tau$. Начиная с $n = 1000$, графики практически неразличимы, выходят на одну и ту же асимптоту. Полученные численно результаты согласуются с теоретическими результатами [7].

Авторы благодарны Г.М. Кобелькову за полезные критические замечания и Е.Е. Тыртышникову за поддержку проводимого исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башашин М.В., Земляная Е.В., Рахмонов И.Р., Шукринов Ю.М., Атанасова П.Х., Волохова А.В.* Вычислительная схема и параллельная реализация для моделирования системы длинных джозефсоновских переходов // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8. № 4. С. 593–604.
2. *Сердюкова С.И.* Моделирование динамических процессов в длинных джозефсоновских переходах. Проблема вычисления вольт-амперных характеристик.Численный метод оценки скорости роста ошибок округления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 3–11.
3. *Зуев М.И., Сердюкова С.И.* Моделирование динамических процессов в длинных джозефсоновских переходах. Проблема вычисления вольт-амперных характеристик. Оценки скорости роста ошибок округления для разностной схемы второго порядка точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 1. С. 159–166.
4. *Урм В.Я.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости систем разностных уравнений // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 1. С. 40–43.
5. *Сердюкова С.И.* Об устойчивости в равномерной метрике систем разностных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. № 3. С. 497–509.
6. *Rusanov V.V.* On difference schemes of third order accuracy for nonlinear hyperbolic systems // Jour. of Comp. Phys. 1970. V. 5. № 3. P. 507–516.
7. *Сердюкова С.И.* Схема Русанова. Исследование устойчивости в равномерной метрике. Асимптотика в окрестности изолированного разрыва // Сообщение ОИЯИ. 1977. Р5-10708.
8. *Adam Gh., Bashashin M., Belyakov D., Kirakosyan M., Matveev M., Podgainy D., Sapozhnikova T., Streltsova O., Torosyan Sh., Vala M., Valova L., Vorontsov A., Zaikina T., Zemlyanaya E., Zuev M.* IT-ecosystem of the HybriLIT heterogeneous platform for high-performance computing and training of IT-specialists. Selected Papers of the 8th International Conference “Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education” (GRID 2018), Dubna, Russia, September 10–14, 2018, CEUR-WS.org/Vol-2267”.
9. REDUCE User’s Guide for Unix Systems. Version 3.8 by Winfried Neun ZIB, 2004.