ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 7, с. 1084–1099

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.97

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ МЛАДШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА ПОЛУЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

© 2023 г. А. В. Чернов[1,*]

[1] *603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского, Россия*

**e-mail: chavnn@mail.ru*

Поступила в редакцию 23.05.2022 г.
Переработанный вариант 25.01.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Исследуется задача оптимизации младшего коэффициента, понимаемого как функция со значениями в банаховом пространстве, линейно входящего в абстрактное полулинейное эволюционное дифференциальное уравнение псевдопараболического типа в банаховом пространстве. Для этой задачи доказывается теорема существования оптимального управления. В связи с нелинейностью изучаемого уравнения используются ранее полученные автором результаты о тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости (о тотально глобальной разрешимости) и об оценке решений для подобных уравнений. Указанная оценка оказывается существенной при проведении исследования. В качестве примера рассматривается гидродинамическая система уравнений Осколкова. Библ. 27.

Ключевые слова: полулинейное эволюционное уравнение в банаховом пространстве, система уравнений Осколкова, существование оптимального управления.

DOI: 10.31857/S0044466923070037, **EDN:** VSUHMU

ВВЕДЕНИЕ

Задачи определения коэффициентов различных уравнений с частными производными достаточно актуальны в связи с потребностями, возникающими из приложений. С физической точки зрения, эти коэффициенты характеризуют важные параметры той или иной динамической или стационарной системы такие, как коэффициент поглощения вещества или коэффициент скорости распада химических примесей, коэффициент диффузии, вязкое сопротивление среды, скорость ветра, электрический потенциал и т.д. Одним из эффективных методов решения коэффициентных обратных задач является метод минимизации регуляризованного функционала невязки между состоянием управляемой системы $\varphi[u]$ и данными наблюдений $\overline{\varphi}$, см., например, [1, 2]:

$$J_\alpha[u] = J_0[u] + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2, \quad J_0[u] = \kappa\|\varphi[u] - \overline{\varphi}\|^q, \quad \kappa > 0, \quad \alpha > 0, \quad q > 1.$$

При этом искомые (неизвестные) коэффициенты трактуются как управление u, и таким образом, получаем специфическую задачу оптимального управления. Отметим, что до сих пор коэффициентные обратные задачи изучались, в основном, для линейных уравнений с частными производными. Обзор некоторых результатов в этом направлении за последние 15 лет к моменту написания см. в [3].

При исследовании задач оптимального управления зачастую рассматривается случай, когда уравнение состояния имеет вид операторного дифференциального уравнения (либо представимо им), в частности, первого порядка по времени:

$$\frac{d\varphi}{dt} + (G\varphi)(t) = z(t), \quad t \in (0;T]; \quad \varphi(0) = a, \tag{1}$$

где на оператор G накладываются специальные условия (типа параболичности, монотонности, коэрцитивности, липшицевости, либо, скажем, линейности и ограниченности, и т.д. и т.п.), обеспечивающие разрешимость этого уравнения для любых z из заданного пространства, см., например, [2], [4, гл. 3], [5, гл. 5], [6]. При замене z на нелинейность вида $f(.,\varphi)$ (не удовлетворяющей специальным требованиям типа тех, которые были отнесены выше к оператору G) разрешимость управляемой системы становится негарантированной. В этом случае, как правило, переходят к рассмотрению пар “управление–состояние” (как, например, [7, 8]), а управляемую систему рассматривают как ограничение специального вида. При этом на функционал приходится накладывать так называемое условие коэрцитивности (см., например, [8, гл. 1, § 2, условие 2.2, с. 14]). В отношении конкретных задач это выливается в то, что приходится рассматривать лишь функционалы того или иного специального вида (как правило, это суммы q-степеней L_q-норм), см., например, [4, 8]. Кроме того, предполагается априори, что множество допустимых пар непусто, см., например, [8, условие 7.1, с. 52; условие 8.1, с. 63].

В связи с обсуждаемой проблематикой представляет интерес следующее свойство. *Тотальное сохранение глобальной разрешимости* (ТСГР), или *тотально глобальная разрешимость* (ТГР) – это свойство управляемой системы сохранять глобальную разрешимость для всех допустимых управлений. Понятие ТСГР было введено в работе [9] (Глобальную разрешимость эволюционной системы мы понимаем в смысле, характерном для теории оптимального управления, т.е. на фиксированном промежутке времени).

При наличии теорем о ТСГР и единственности глобального решения и выполнении их условий можно использовать альтернативный подход, основанный на рассмотрении функционалов оптимизационной задачи как функций, зависящих только от управлений, опираясь на соответствующие теоремы функционального анализа или их обобщения. Это, в свою очередь, позволяет упрощать исследование и/или получать достаточно сильные результаты. В ряде работ автора были получены признаки ТСГР для различного вида управляемых уравнений, в том числе операторных дифференциальных уравнений и абстрактных операторных уравнений второго и первого рода, см., например, [10–14]. Некоторые из них можно понимать как аналог известной классической теоремы Уинтнера [15, гл. III, теорема 5.1, с. 43–44]. Один из таких признаков используется и в этой статье.

Если обратиться к вопросу о проблеме существования оптимального управления, то для нелинейных управляемых систем, как правило, доказывался лишь факт существования оптимального управления, при этом рассматривались функционалы упомянутого выше специального вида. О свойствах множества оптимальных управлений речь не шла. Упомянем в связи с этим [8, гл. 1, §§ 7, 8; гл. 4, § 1], где рассматривались нелинейные параболические и гиперболические уравнения и система Навье–Стокса с правой частью в качестве управления, а также [4, гл. 3, § 15; гл. 4, § 10], где рассматривались параболические уравнения и уравнения второго порядка по времени, [5, §§ 4.4, 5.3] – эллиптические и параболические уравнения; см. также [6]. Упомянем здесь отдельно работу [16], где тоже доказывалось существование оптимального управления, но функционал (на парах “управление–состояние”) рассматривался общего вида в предположении ограниченности снизу и слабой полунепрерывности сверху; управление понималось как многозначное отображение состояния (т.е. как управление с обратной связью). В [17] рассматривался функционал Больца общего вида.

Отметим, что при рассмотрении пар “управление–состояние” свойства функционала как лишь функции управления не требуются и не изучаются. А между тем они могут представлять и самостоятельный интерес.

Отдельно упомянем работу [2], где изучалось нелинейное волновое уравнение (с липшицевой по переменной состояния правой частью) с линейно входящей управляющей функцией в качестве младшего коэффициента. Для множества U_* оптимальных управлений было доказано, что оно непусто и слабо компактно в пространстве управлений, и что всякая минимизирующая последовательность слабо сходится к этому множеству. Отметим, наконец, что при доказательстве существования оптимального управления в случае полулинейных управляемых распределенных систем на правые части накладывают зачастую либо требование (глобальной) липшицевости [2, 17], либо условия, обеспечивающие монотонность нелинейного оператора [5, гл. 4, 5], за счет чего, в частности, удается обосновать существование и единственность решения управляемой системы для каждого допустимого управления. В [17], помимо существования оптимального управления, доказывались ограниченность и относительная слабая компактность множества допустимых траекторий (управления были из класса L_∞). В некоторых случаях налагают также условия, обеспечивающие строгую выпуклость целевого функционала как функции, зависящей только от управления, см., например, [6].

В данной работе мы исследуем задачу оптимизации младшего коэффициента, понимаемого как функция со значениями в банаховом пространстве, линейно входящего в абстрактное полулинейное эволюционное уравнение псевдопараболического типа в банаховом пространстве. Для этой задачи доказывается теорема существования оптимального управления и устанавливаются свойства множества оптимальных управлений U_*, аналогичные упомянутым выше. При этом используются и развиваются некоторые приемы из [2], где рассматривалось полулинейное волновое уравнение с правой частью, удовлетворяющей (глобальному) условию Липшица. Случай нелинейного вхождения заслуживает, разумеется, отдельного рассмотрения ввиду дополнительно возникающих трудностей. В связи с нелинейностью изучаемого уравнения используются ранее полученные автором результаты о тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости (о тотально глобальной разрешимости) и об оценке решений для подобных уравнений. Указанная оценка оказывается существенной при проведении исследования. В качестве примера в разд. 5 рассматривается гидродинамическая система уравнений Осколкова.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СОГЛАШЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть V – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, непрерывно и компактно вложенное в гильбертово пространство H и плотное в нем. Если отождествить H с H^*, а H^* – с подпространством сопряженного к V пространства V^*, то [18, гл. VI] справедливы непрерывные включения

$$V \subset H \subset V^*.$$

Поясним, зачем требуется плотность вложения $V \subset H$, [18, гл. I, § 5, замечание 5.14, с. 24]. На самом деле сужение любого функционала $\psi \in H^*$ на V и без этого требования будет принадлежать V^*. В этом смысле есть вложение множеств $H^* \subset V^*$, но это нельзя понимать как обычное вложение. Действительно, два (и более) различных функционала из H^* могут иметь одинаковое сужение на V. В итоге получается, что два различных элемента H^* совпадают как элемент V^*. Чтобы исключить подобную ситуацию, как раз и требуется плотность вложения, поскольку в этом случае всякий функционал из H^* однозначно восстанавливается по своим значениям на V. Более того, в этом случае H^* можно рассматривать как плотное подпространство в V^*. Что касается непрерывности вложения $H^* \subset V^*$, она легко получается непосредственно из определения нормы линейного непрерывного функционала и непрерывности вложения $V \subset H$.

Пусть $\mathbf{C}(0,T;V)$ – пространство функций со значениями в V, непрерывных на отрезке $[0;T]$; $L_p(0,T;V)$ – пространство функций со значениями в V, интегрируемых по Бохнеру со степенью p на отрезке $[0;T]$; $\mathbf{C}[0;T] = \mathbf{C}(0,T;\mathbb{R})$, $L_p[0;T] = L_p(0,T;\mathbb{R})$.

Будем предполагать заданными числа $T > 0$, $q \in (2;+\infty)$, $p = \dfrac{2q}{q-2}$ и сепарабельное рефлексивное банахово пространство $\tilde{V}$. Пусть, кроме того, заданы $U \subset L_p(0,T;\tilde{V})$ – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество, понимаемое как множество допустимых управлений, также линейные ограниченные операторы $\Phi : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$, $\Psi : V \to V^*$. Оператор Φ будем предполагать вольтерровым для п.в. $t \in [0;T]$ и всех $x, y \in L_2(0,T;V)$ таких, что $x(s) = y(s)$ при $s \in [0;t]$, имеем $\Phi[x](s) = \Phi[y](s)$ при $s \in [0;t]$. Относительно оператора Ψ предполагаем, что он обратим, т.е. существует линейный ограниченный оператор $\Psi^{-1} : V^* \to V$. Определим пространство

$$W = \left\{\varphi \in \mathbf{C}(0,T;V) : \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} \in L_2(0,T;V)\right\},$$

где производная по времени t понимается в смысле распределений, с нормой:

$$\|\varphi\|_W = \|\varphi\|_{\mathbf{C}(0,T;V)} + \|\varphi'\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Отметим, что пространство W не является рефлексивным, но оно непрерывно вложено в рефлексивное банахово пространство

$$\tilde{W} = \left\{\varphi \in L_q(0,T;V) : \varphi' = \frac{d\varphi}{dt} \in L_2(0,T;V)\right\}$$

с нормой $\|\varphi\|_{\tilde{W}} = \|\varphi\|_{L_q(0,T;V)} + \|\varphi'\|_{L_2(0,T;V)}$. Далее будем предполагать, что задана функция $f(.,.) : [0;T] \times H \to V^*$, обладающая следующими свойствами.

$\mathbf{F}_1$) Оператор суперпозиции $f(.,x(.))$ осуществляет непрерывное отображение $L_q(0,T;H) \to L_2(0,T;V^*)$, ограниченное на ограниченных множествах.

$\mathbf{F}_2$) Существует функция $\mathcal{N}_1(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая и локально-липшицевая по r и суммируемая с квадратом по t такая, что

$$\|f(t,\xi)\|_{V^*} \le \mathcal{N}_1(t,M)$$

для п.в. $t \in [0;T]$ и для всех $M > 0$, $\xi \in V$, $\|\xi\|_V \le M$.

$\mathbf{F}_3$) Существует функция $\mathcal{N}_2(t,r) : [0;T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по t такая, что

$$\|f(t,\xi) - f(t,\eta)\|_{V^*} \le \mathcal{N}_2(t,M)\|\xi - \eta\|_V$$

для п.в. $t \in [0;T]$ и для всех $M > 0$, $\xi,\eta \in V$, $\|\xi\|_V, \|\eta\|_V \le M$.

Замечание 1.1. Если пространство V компактно вложено в банахово пространство $Z \subset H$, то условие $\mathbf{F}_1$) можно ослабить следующим образом.

$\mathbf{F}_1'$) Оператор суперпозиции $f(.,x(.))$ осуществляет непрерывное отображение $L_q(0,T;Z) \to L_2(0,T;V^*)$, ограниченное на ограниченных множествах.

Пусть, наконец, задана функция $b(t,v,x) : [0;T] \times \tilde{V} \times H \to V^*$, измеримая по $t \in [0;T]$, билинейная по $(v,x) \in \tilde{V} \times H$ и удовлетворяющая следующим условиям.

$\mathbf{B}_1$) При каждом $u \in U$ оператор суперпозиции $b(.,u(.),x(.))$ осуществляет отображение $L_q(0,T;H) \to L_2(0,T;V^*)$, билинейное по (u,x).

$\mathbf{B}_2$) Существуют функции $\gamma(.) \in L_\infty[0;T]$, $\nu(.) \in L_p[0;T]$ такие, что при п.в. $t \in [0;T]$ выполняются оценки:

$$\sup_{u \in U}\|u(t)\|_{\tilde{V}} \le \nu(t); \quad \|b(t,v,x)\|_{V^*} \le \gamma(t)\|v\|_{\tilde{V}}\|x\|_H \quad \forall v \in \tilde{V}, \quad x \in H.$$

Замечание 1.2. На самом деле условие $\mathbf{B}_1$) следует из условия $\mathbf{B}_2$) – см. оценку функционала ψ_1 в доказательстве леммы 3.13, разд. 3.

При заданном $a \in V$ будем рассматривать эволюционное полулинейное уравнение:

$$\Psi\frac{d\varphi}{dt} + (\Phi\varphi)(t) = f(t,\varphi(t)) + b(t,u(t),\varphi(t)), \quad t \in (0;T], \tag{2}$$

при начальном условии

$$\varphi(0) = a. \tag{3}$$

Решение уравнения (2) понимаем в смысле тождества

$$\left(\Psi\varphi' + (\Phi\varphi)(t) - f(t,\varphi(t)) - b(t,u(t),\varphi(t)),\omega\right) = 0 \quad \forall \omega \in V$$

при п.в. $t \in [0;T]$.

Пусть γ_0 – константа непрерывного вложения $V \subset H$. Положим

$$\tilde{\mathcal{N}}_1(t,M) = \left\|\Psi^{-1}\right\|\mathcal{N}_1(t,M) + \gamma_0\gamma(t)\nu(t)M, \quad L = \left\|\Psi^{-1}\right\|\|\Phi\|, \quad \mu = \sqrt{2}e^{L^2T^2}.$$

При сделанных предположениях справедлива

Теорема 1.1. *Пусть выполнены сделанные выше предположения. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(a) *существует $T_0 \in (0;+\infty]$ такое, что при всех $T \in (0;T_0)$ задача Коши*

$$\frac{d\beta}{dt} = \mu\tilde{\mathcal{N}}_1(t,\beta(t)), \quad t \in (0;T]; \quad \beta(0) = \mu\|a\|_V, \tag{4}$$

имеет абсолютно непрерывное решение $\beta \in \mathbf{AC}[0;T]$, понимаемое в смысле п.в.;

(б) *при всех* $T \in (0;T_0)$ *и любом* $u \in U$ *задача* (2), (3) *имеет решение* $\varphi[u] \in W$, *удовлетворяющее оценке* $\|\varphi[u](t)\|_V \le \beta(t)\ \forall t \in [0;T]$, *и это решение единственно.*

Доказательство теоремы 1.1 см. разд. 2.

Теорема 1.1 гарантирует, что управляемая задача (2), (3) разрешима для всех допустимых управлений на *одном и том же* отрезке $[0;T]$, т.е. на данном отрезке спокойно можно рассматривать задачу оптимального управления. В этом и есть смысл теоремы 1.1. При отсутствии теоремы 1.1 горизонт существования решения будет зависеть от выбора конкретного управления, и будет непонятно, как выбирать общий для всех управлений отрезок существования решения $[0;T]$.

Замечание 1.3. Если просто постулировать разрешимость задачи (4) для любого $T \in (0;T_0)$, то требование локальной липшицевости функции $\mathcal{N}_1(t,\xi)$ по $\xi \in \mathbb{R}_+$ в условии $\mathbf{F}_2$) можно опустить. Указанную разрешимость можно устанавливать различными способами. Во-первых, иногда удается доказать ее непосредственно (см. заключительную часть разд. 5). Во-вторых, можно использовать классическую теорему Уинтнера [15, гл. III, теорема 5.1, с. 43, 44] (да и сама теорема 1.1 – это и есть аналог теоремы Уинтнера). В-третьих, наличие аккуратно построенного численного решения задачи (4) на заданном отрезке с высокой долей вероятности позволяет надеяться, что существует точное решение.

Далее везде будем считать условия теоремы 1.1 выполненными. Поставим задачу оптимизации. Пусть задан непрерывный функционал $I_0 : L_q(0,T;H) \to \mathbb{R}$, ограниченный на ограниченных множествах, $J_0[u] = I_0(\varphi[u])$, $u \in U$. Для произвольно заданного $\alpha \ge 0$ будем исследовать задачу

$$J_\alpha[u] = J_0[u] + \frac{1}{2}\alpha\|u\|^2_{L_p(0,T;\tilde{V})} \to \min_{u\in U}.$$

Обозначим $J^*_\alpha = \inf_{u\in U} J_\alpha[u]$, $U_* = \left\{u \in U : J_\alpha[u] = J^*_\alpha\right\}$.

Теорема 1.2. *Множество* U *слабо компактно в* $L_p(0,T;\tilde{V})$.

Доказательство теоремы 1.2 см. в разд. 4.

Теорема 1.3. *Функционал* $J_0[u]$, *а следовательно, и* $J_\alpha[u]$, *ограничен на множестве* U.

Доказательство теоремы 1.3 см. в разд. 4.

Теорема 1.4. *Функционал* $J_0[u]$ *слабо непрерывен на множестве* U. *Функционал* $J_\alpha[u]$ *слабо полунепрерывен снизу на множестве* U.

Доказательство теоремы 1.4 см. в разд. 4.

Определение [19, глава 1, § 1, определение 6, с. 49]. Пусть E – банахово пространство. Говорят, что последовательность $\{u_m\} \subset E$ *сходится к множеству* U *слабо в* E, если $\{u_m\}$ имеет хотя бы одну слабо сходящуюся подпоследовательность, причем все точки v, являющиеся слабым пределом какой-либо подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$, принадлежат U.

Непосредственно из теорем 1.1–1.4 и [19, гл. 1, § 1, теорема 2, с. 49] вытекает

Следствие. Множество U_* непусто и слабо компактно в пространстве $L_p(0,T;\tilde{V})$, и более того, всякая минимизирующая последовательность слабо сходится к множеству U_* в $L_p(0,T;\tilde{V})$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОТАЛЬНО ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

При сделанных предположениях уравнение (2) равносильно следующему:

$$\frac{d\varphi}{dt} + (G\varphi)(t) = g[u](t,\varphi(t)), \quad t \in (0;T], \tag{5}$$

где

$$(G\varphi)(t) = \Psi^{-1}\left[(\Phi\varphi)(t)\right], \quad g[u](t,\varphi(t)) = \Psi^{-1}\left[f(t,\varphi(t)) + b(t,u(t),\varphi(t))\right].$$

Проблема *тотального* (по всем допустимым управлениям) *сохранения глобальной разрешимости* такого уравнения изучалась в [10]. Отметим, что в случае установленного факта однозначной разрешимости соответствующего уравнения (1) его решение можно обозначить как $\mathcal{F}[z]$, и тем самым, соответствующая начальная задача для уравнения (5) переписывается в виде операторного уравнения второго рода:

$$\varphi = \mathcal{F}[g[u](.,\varphi)].$$

Аналогичные [10] результаты для операторного уравнения второго рода см., например, в [11, 12]. Но результаты [10] максимально адаптированы к рассматриваемой ситуации и здесь их применение наиболее удобно. В [11–14] см. также дальнейшую литературу по проблеме тотально глобальной разрешимости.

Для уравнений вида (1) при $z(t) = g[u](t)$ проблема глобальной разрешимости, разумеется, изучалась и другими авторами, см., например, [8, 18, 20]. При этом на оператор G накладывались специальные условия типа монотонности, коэрцитивности, липшицевости, либо, скажем, линейности и ограниченности, и т.д. и т.п. При наличии нелинейной зависимости g от φ, т.е. для уравнения (5), разрешимость уже никак не гарантирована. Естественные предположения типа **F**) и наличие результата о разрешимости уравнения (1) для этого недостаточны. Поэтому и приходится доказывать теоремы сравнения типа теоремы Уинтнера. В нашем случае это теорема 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Что касается утверждения (*а*), отметим, что при сделанных предположениях относительно функции $\mathcal{N}_1(t,\xi)$ задача (4) разрешима локально (это хорошо известный классический факт; в [13, теорема 5] он доказывается даже в более общей постановке, когда речь идет об абсолютно непрерывных функциях со значениями в банахом пространстве).

Займемся далее доказательством утверждения (б) при произвольно фиксированном $T \in (0;T_0)$. С учетом [10, теоремы 1.1, 1.2], нам достаточно лишь проверить выполнение следующих условий.

$\mathbf{A}_1$) Оператор $G : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V)$ вольтерров.

$\mathbf{A}_2$) Оператор $G : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V)$ удовлетворяет условию Липшица.

$\mathbf{G}_1$) Для каждого $u \in U$ оператор суперпозиции $g[u](.,x(.))$ осуществляет отображение $\mathbf{C}(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$.

$\mathbf{G}_2$) Существует функция $\tilde{\mathcal{N}}_1(t,r) : [0;T]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по t такая, что $\|g[u](t,\xi) - (G0)(t)\|_V \le \tilde{\mathcal{N}}_1(t,M)$ для п.в. $t \in [0;T]$ и для всех $u \in U$, $M > 0$, $\xi \in V$, $\|\xi\|_V \le M$.

$\mathbf{G}_3$) Существует функция $\tilde{\mathcal{N}}_2(t,r) : [0;T]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, неубывающая по r и суммируемая по t такая, что

$$\|g[u](t,\xi) - g[u](t,\eta)\|_V \le \tilde{\mathcal{N}}_2(t,M)\|\xi - \eta\|_V$$

для п.в. $t \in [0;T]$ и для всех $u \in U$, $M > 0$, $\xi,\eta \in V$, $\|\xi\|_V, \|\eta\|_V \le M$.

Выполнение условия $\mathbf{A}_1$) очевидно в силу вольтерровости оператора $\mathbf{\Phi}$. Из линейности и ограниченности операторов Ψ^{-1}, $\mathbf{\Phi}$ получаем

$$\|(Gx)(t) - (Gy)(t)\|_V \le \left\|\Psi^{-1}\right\| \|(\Phi[x-y])(t)\|_{V^*},$$

откуда

$$\|Gx - Gy\|_{L_2(0,T;V)} \le \left\|\Psi^{-1}\right\| \|\Phi[x-y]\|_{L_2(0,T;V^*)} \le L\|x-y\|_{L_2(0,T;V)},$$

где $L = \left\|\Psi^{-1}\right\|\|\Phi\|$ для всех $x, y \in L_2(0,T;V)$. Таким образом, условие $\mathbf{A}_2$) выполнено. Условие $\mathbf{G}_1$), с учетом вложения $\mathbf{C}(0,T;V) \subset L_q(0,T;H)$, очевидным образом вытекает из условий $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{B}_1$). Проверим условие $\mathbf{G}_2$). Учитывая, что $G(0) = 0$, и принимая во внимание условия $\mathbf{F}_2$), $\mathbf{B}_2$), оценим

$$\|g[u](t,\xi)\|_V \le \left\|\Psi^{-1}\right\|\left\{\|f(t,\xi)\|_{V^*} + \|b(t,u(t),\xi)\|_{V^*}\right\} \le \left\|\Psi^{-1}\right\|\left\{\mathcal{N}_1(t,M) + \gamma_0\gamma(t)\nu(t)M\right\} \equiv \tilde{\mathcal{N}}_1(t,M)$$

для п.в. $t \in [0;T]$ и для всех $u \in U$, $M > 0$, $\xi \in V$, $\|\xi\|_V \le M$. Таким образом, условие $\mathbf{G}_2$) выполнено.

Проверим условие $\mathbf{G}_3$). Учитывая условия $\mathbf{F}_3$), $\mathbf{B}_2$), оценим

$$\|g[u](t,\xi) - g[u](t,\eta)\|_V \le \left\|\Psi^{-1}\right\|\left[\|f(t,\xi) - f(t,\eta)\|_{V^*} + \|b(t,u(t),\xi-\eta)\|_{V^*}\right] \le \tilde{\mathcal{N}}_2(t,M)\|\xi-\eta\|_V,$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_2(t,M) \equiv \left\|\Psi^{-1}\right\|\left\{\mathcal{N}_2(t,M) + \gamma_0\gamma(t)\nu(t)\right\},$$

для п.в. $t \in [0;T]$ и для всех $u \in U$, $M > 0$, $\xi, \eta \in V$, $\|\xi\|_V, \|\eta\|_V \le M$. Таким образом, условие $\mathbf{G}_3$) выполнено. Теорема 1.1 доказана.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Начнем с достаточно очевидных утверждений, которые многими используются как само собой разумеющееся, см., например, [21, гл. 2, § 2, доказательство теоремы 2.4, с. 30, [20, гл. 1, § 5, доказательство теоремы 5.1, с. 70].

Лемма 3.1. *Пусть E, F — рефлексивные банаховы пространства. Тогда $E \times F$ рефлексивно.*

Доказательство легко следует из известного равенства $(E \times F)^* = E^* \times F^*$ [22, гл. I, § 4, п. 6, с. 48].

Лемма 3.2. *Пространство $\tilde{W}$ является банаховым.*

Доказательство достаточно стандартным образом проводится на основе [18, гл. IV, § 1, замечания 1.14, 1.15, с. 168–169].

Лемма 3.3. *Банахово пространство $\tilde{W}$ является рефлексивным.*

Доказательство достаточно легко получается из леммы 3.1 и рефлексивности и сепарабельности пространства V, см. также [18, гл. IV, § 1, замечание 1.11, с. 163, 23, гл. V, § 7, следствие 1, с. 163].

Лемма 3.4. *Если банахово пространство V рефлексивно и сепарабельно, то сопряженное пространство V^* также рефлексивно и сепарабельно.*

Доказательство достаточно очевидным образом следует из [25, лемма 2.24, с. 18, 23, гл. V, § 7, следствие 2, с. 237].

Напомним, что оператор $A : V \to V^*$ называется *деминепрерывным*, если из сходимости $x_n \to x$ в V вытекает слабая сходимость $Ax_n \rightharpoonup Ax$ в V^*. Ясно, что всякий непрерывный оператор деминепрерывен.

Лемма 3.5. *Пусть банахово пространство V рефлексивно и сепарабельно, а $\{A(t)\}$, $t \in [0;T]$, — семейство деминепрерывных операторов $V \to V^*$ таких, что функция $(A(t)x, y)$ измерима на $[0;T]$ при любых фиксированных $x, y \in V$. Тогда для любой измеримой (по Бохнеру) функции $\varphi : [0;T] \to V$ функция $A(t)\varphi(t)$ измерима на $[0;T]$. Более того, если при $p, q \in (1;+\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, выполняется оценка $\|A(t)x\|_{V^*} \le c\|x\|_V^{p-1} + d$ для любых $x \in V$, то $A(.)\varphi(.) \in L_q(0,T;V^*)$ для всех $\varphi \in L_p(0,T;V)$.*

Доказательство. С учетом [18, гл. IV, § 1, теорема 1.4, с. 153] и сепарабельности V, функция $\varphi : [0;T] \to V$ измерима по Бохнеру тогда и только тогда, когда для любых $\omega \in V^*$ функция $(\omega, \varphi(.)) : [0;T] \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу. По лемме 3.4 пространство V^* сепарабельно. Поэтому нам достаточно доказать, что для всех $\omega \in V^{**} = V$ функция $(A(t)\varphi(t), \omega)$ измерима по Лебегу на $[0;T]$. Поскольку функция $\varphi(t)$ измерима по Бохнеру, то по определению, существует последовательность простых функций $\varphi_n(t)$ такая, что $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ при п.в. $t \in [0;T]$. Зафиксируем произвольно $\omega \in V$ и номер $n \in \mathbb{N}$. Так как функция $\varphi_n(t)$ простая, то существует дизъюнктное разбиение $[0;T] = \coprod_{k=1}^{m_n} E_{n,k}$ на конечное число непересекающихся измеримых множеств $E_{n,k}$, на каждом из которых функция $\varphi_n(t) \equiv \varphi_{n,k} = \mathrm{const}$. Тогда по условию леммы на каждом таком множестве $E_{n,k}$ функция $(A(t)\varphi_n(t), \omega) = (A(t)\varphi_{n,k}, \omega)$ измерима. Стало быть, функция $(A(t)\varphi_n(t), \omega)$ измерима на всем отрезке $[0;T]$. При этом, в силу деминепрерывности операторов, $A(t)\varphi_n(t) \rightharpoonup A(t)\varphi(t)$ при п.в. $t \in [0;T]$. В частности, $(A(t)\varphi_n(t), \omega) \to (A(t)\varphi(t), \omega)$ при $n \to \infty$ для п.в. $t \in [0;T]$. Таким образом, функция $(A(t)\varphi(t), \omega)$ есть п.в.-предел последовательности измеримых функций, а следовательно, она измерима на $[0;T]$. Отсюда вытекает измеримость по Бохнеру функции $A(t)\varphi(t)$. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Пользуясь соответствующим неравенством (ясно, что $d \ge 0$), оценим

$$\|A(t)\varphi(t)\|_{V^*}^q \le \left\{c\|\varphi(t)\|_V^{p-1} + d\right\}^q.$$

Положим

$$E_- = \left\{ t \in [0;T] : c\left\|\varphi(t)\right\|_V^{p-1} \le d \right\},\ E_+ = \left\{ t \in [0;T] : c\left\|\varphi(t)\right\|_V^{p-1} > d \right\}.$$

Тогда можем оценить:

$$\left\|A(.)\varphi(.)\right\|_{L_q(0,T;V^*)}^q \le \int_0^T \left\{ c\left\|\varphi(t)\right\|_V^{p-1} + d \right\}^q dt \le \int_{E_-} (2d)^q dt + \int_{E_+} (2c)^q \left\|\varphi(t)\right\|^{q(p-1)} dt \le$$
$$\le T(2d)^q + (2c)^q \left\|\varphi\right\|_{L_p(0,T;V)}^p < \infty.$$

Стало быть, $A(.)\varphi(.) \in L_q(0,T;V^*)$. Лемма доказана.

Замечание 3.1. Аналогичное утверждение для семейства монотонных радиально непрерывных операторов сформулировано без доказательства в [18, гл. IV, § 1, п. 3, с. 257]. Однако для монотонных операторов радиальная непрерывность равносильна деминепрерывности [18, лемма 1.3, с. 85]. Таким образом, мы доказали прямое обобщение этого утверждения на немонотонный случай.

Замечание 3.2. Лемма 3.5 позволяет обосновать корректность выражений $\Psi\varphi'$ и $\Psi^{-1}[(\Phi\varphi)(t)]$, $\Psi^{-1}[f(t,\varphi(t))]$, $\Psi^{-1}[b(t,u(t),\varphi(t))]$ в уравнениях (2) и (5) соответственно. Кроме того, она может оказаться полезной при задании конкретного выражения для оператора Φ.

Лемма 3.6. *Пусть функция* $g \in L_2(0,T;V^*)$ *такова, что для всех* $\omega \in L_2(0,T;V)$ *имеем* $\int_0^T (g(t),\omega(t))dt = 0$. *Тогда при п.в.* $t \in [0;T]$ *справедливо тождество* $(g(t),\omega) = 0$ *для всех* $\omega \in V$.

Доказательство легко следует из известного равенства

$$(L_p(0,T;V))^* = L_{p'}(0,T;V^*)$$

для сепарабельного и рефлексивного банахова пространства V и того, что представление функционала дается соответствующим интегралом, см. [24, теорема 2.55].

Далее мы везде предполагаем, что выполнены условия теоремы 1.1. Тем самым, определено множество решений $\mathbf{S} = \{\varphi[u] : u \in U\}$.

Лемма 3.7. *Множество* $\mathbf{S}$ *ограничено в пространстве* W.

Доказательство. Выберем произвольно $u \in U$ и положим $\varphi = \varphi[u]$. Непосредственно из теоремы 1.1 получаем оценку

$$\left\|\varphi(t)\right\|_V \le \beta(t) \quad \forall t \in [0;T].$$

Следовательно, $\left\|\varphi\right\|_{C(0,T;V)} \le \left\|\beta\right\|_{C[0;T]} \equiv M_1$. При этом из уравнения (5) вытекает представление (мы используем здесь обозначения из разд. 2):

$$\varphi'(t) = g[u](t,\varphi(t)) - \Psi^{-1}[(\Phi\varphi)(t)],$$

откуда

$$\left\|\varphi'(t)\right\|_V \le \left\|g[u](t,\varphi(t))\right\|_V + \left\|\Psi^{-1}\right\|\left\|(\Phi\varphi)(t)\right\|_{V^*} \le \tilde{\mathcal{N}}_1(t,M_1) + \left\|\Psi^{-1}\right\|\left\|(\Phi\varphi)(t)\right\|_{V^*}.$$

Стало быть,

$$\left\|\varphi'\right\|_{L_2(0,T;V)} \le \left\|\tilde{\mathcal{N}}_1(.,M_1)\right\|_{L_2[0;T]} + \left\|\Psi^{-1}\right\|\left\|\Phi\varphi\right\|_{L_2(0,T;V^*)} \le \left\|\tilde{\mathcal{N}}_1(.,M_1)\right\|_{L_2[0;T]} + \left\|\Psi^{-1}\right\|\left\|\Phi\right\| M_1\sqrt{T} \equiv M_2.$$

Таким образом, $\left\|\varphi\right\|_W \le M_1 + M_2 \equiv M$. Лемма доказана.

Следующее утверждение – это известная теорема Лионса–Темама (J.L. Lions–R. Temam), см., например, [20, гл. 1, теорема 5.1, с. 70, включая ее доказательство].

Лемма 3.8. *Пусть V, V' — рефлексивные банаховы пространства, H — банахово пространство, $V \subset H$ компактно, $H \subset V'$ непрерывно, $p, q \in (1; +\infty)$. Тогда пространство*

$$W = \{z \in L_q(0,T;V) : z' \in L_p(0,T;V')\}$$

с нормой $\|z\|_W = \|z\|_{L_q(0,T;V)} + \|z'\|_{L_p(0,T;V')}$ является рефлексивным банаховым пространством, непрерывно вложенным в $\mathbf{C}(0,T;V')$ и компактно вложенным в $L_q(0,T;H)$.

Лемма 3.9. *Пространство $\tilde{W}$ непрерывно вложено в $\mathbf{C}(0,T;H)$ и компактно вложено в $L_q(0,T;H)$.*

Доказательство легко следует из леммы 3.8 при $p = 2$, $V' = H$.

При проверке рефлексивности, сепарабельности и компактного вложения конкретных пространств полезны следующие две леммы. Первая — это один из вариантов теоремы Реллиха–Кондрашова, [26, § I.11.5, с. 106].

Лемма 3.10. *Если $1 < p < \infty$, $n \ge \ell p$, $q < \dfrac{np}{n - \ell p}$, область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ представляет объединение конечного числа ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно своего шара, то вложение $W_p^\ell(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ компактно.*

О других вариантах см., например, [18, гл. II, § 1, лемма 1.28, 21, § 3.5, с. 82]. Во втором собраны известные свойства пространств Соболева [21, § 2.2, теорема 2.4, с. 30].

Лемма 3.11. *Пространство $W_p^\ell(\Omega)$ банахово при $1 \le p \le \infty$, рефлексивно при $1 < p < \infty$, сепарабельно при $1 \le p < \infty$ и гильбертово при $p = 2$ относительно скалярного произведения $(x, y) = \sum\limits_{0 \le |\alpha| \le \ell} \left(D^\alpha x, D^\alpha y\right)$.*

Лемма 3.12. *Пусть $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ в пространстве $\tilde{W}$. Тогда для любого $\omega \in L_2(0,T;V)$ имеем*

$$\int_0^T \left(\Psi\varphi_m', \omega(t)\right) dt \to \int_0^T (\Psi\varphi', \omega(t)) dt,$$

$$\int_0^T ((\Phi\varphi_m)(t), \omega(t)) dt \to \int_0^T ((\Phi\varphi)(t), \omega(t)) dt.$$

Доказательство легко следует из леммы 3.5 (при $p = q = 2$) и неравенства Гёльдера.

Лемма 3.13. *Пусть $\varphi_m \to \varphi$ в пространстве $L_q(0,T;H)$, $u_m \rightharpoonup u$ в пространстве $L_p(0,T;\tilde{V})$, $\{u_m\} \subset U$. Тогда для любого $\omega \in L_2(0,T;V)$ имеем*

$$\int_0^T (b(t, u_m(t), \varphi_m(t)), \omega(t)) dt \to \int_0^T (b(t, u(t), \varphi(t)), \omega(t)) dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно $\omega \in L_2(0,T;V)$. Используя стандартный прием "добавим и вычтем" (знак "$\pm$"), а также индексирование скобок для сокращения записи, преобразуем разность

$$b(., u_m, \varphi_m) - b(., u, \varphi) = b(., u_m, \varphi_m) - b(., u, \varphi) \pm b(., u_m, \varphi) =$$
$$= \{b(., u_m - u, \varphi)\}_1 + \{b(., u_m, \varphi_m - \varphi)\}_2.$$

Нам достаточно доказать, что

$$P_{j,m} = \int_0^T \left(\{\ldots\}_j(t), \omega(t)\right) dt \to 0, \quad j = 1, 2.$$

1. Исследуем $P_{1,m}$. Определим функционал $\psi_1 : L_p(0,T;\tilde{V}) \to \mathbb{R}$ с помощью формулы:

$$\psi_1[v] = \int_0^T (b(t, v(t), \varphi(t)), \omega(t)) dt, \quad v \in L_p(0,T;\tilde{V}).$$

Так как функция $b(.,v,x)$ билинейна по (v,x), это линейный функционал. Докажем его непрерывность. Обозначим $\overline{\gamma} = \|\gamma\|_{L_\infty[0;T]}$, см. условие $\mathbf{B}_2$). Выберем произвольно $v \in L_p(0,T;\tilde{V})$ и, пользуясь неравенством Гёльдера, оценим

$$|\psi_1[v]| \leq \int_0^T \|b(t,v(t),\varphi(t))\|_{V^*} \|\omega(t)\|_V\, dt \leq \overline{\gamma}\int_0^T \|v(t)\|_{\tilde{V}} \|\varphi(t)\|_H \|\omega(t)\|_V\, dt \leq$$
$$\leq \overline{\gamma}\left(\int_0^T \|v(t)\|_{\tilde{V}}^2 \|\varphi(t)\|_H^2\, dt\right)^{1/2} \|\omega\|_{L_2(0,T;V)}.$$

Пусть $\sigma = \dfrac{q}{2}$, $\sigma' = \dfrac{\sigma}{\sigma-1} = \dfrac{q}{q-2}$. Стало быть, $2\sigma' = p$. Пользуясь опять неравенством Гёльдера, получаем

$$\int_0^T \|v(t)\|_{\tilde{V}}^2 \|\varphi(t)\|_H^2\, dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{\tilde{V}}^{2\sigma'} dt\right)^{1/\sigma'} \left(\int_0^T \|\varphi(t)\|_H^{2\sigma} dt\right)^{1/\sigma}.$$

Таким образом,

$$|\psi_1[v]| \leq \overline{\gamma}\|\varphi\|_{L_q(0,T;H)} \|\omega\|_{L_2(0,T;V)} \|v\|_{L_p(0,T;\tilde{V})}.$$

Следовательно, $\psi_1 \in (L_p(0,T;\tilde{V}))^*$. С учетом слабой сходимости $u_m \rightharpoonup u$, заключаем, что $\psi_1[u_m] \to \psi_1[u]$, т.е. $P_{1,m} = \psi_1[u_m] - \psi_1[u] \to 0$.

2. Аналогично п. 1, получаем оценку

$$|P_{2,m}| \leq \overline{\gamma}\|u_m\|_{L_p(0,T;\tilde{V})} \|\omega\|_{L_2(0,T;V)} \|\varphi_m - \varphi\|_{L_q(0,T;H)} \leq$$
$$\leq \overline{\gamma}\|\nu\|_{L_p[0;T]} \|\omega\|_{L_2(0,T;V)} \|\varphi_m - \varphi\|_{L_q(0,T;H)} \to 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.14. *Пусть* $\varphi_m \to \varphi$ *в пространстве* $L_q(0,T;H)$. *Тогда для любого* $\omega \in L_2(0,T;V)$ *имеем*

$$\int_0^T (f(t,\varphi_m(t)) - f(t,\varphi(t)),\omega(t))dt \to 0.$$

Доказательство. Пользуясь неравенством Гёльдера, а также условием $\mathbf{F}_1$), получаем

$$\left|\int_0^T (f(t,\varphi_m(t)) - f(t,\varphi(t)),\omega(t))dt\right| \leq \int_0^T \|f(t,\varphi_m(t)) - f(t,\varphi(t))\|_{V^*} \|\omega(t)\|_V\, dt \leq$$
$$\leq \|f(.,\varphi_m(.)) - f(.,\varphi(.))\|_{L_2(0,T;V^*)} \|\omega\|_{L_2(0,T;V)} \to 0,$$

так как $\|\varphi_m - \varphi\|_{L_q(0,T;H)} \to 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.15. *Пусть* $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ *в пространстве* $\tilde{W} \subset \mathbf{C}(0,T;H)$*, причем* $\varphi_m(0) = a \in V$ *(достаточно* $a \in H$*). Тогда* $\varphi(0) = a$.

Доказательство. По лемме 3.9 имеет место непрерывное вложение $\tilde{W} \subset \mathbf{C}(0,T;H)$. Поэтому утверждение леммы сформулировано корректно. Выберем произвольно функционал $\psi \in H^* = H$ и соответственно, на пространстве $\mathbf{C}(0,T;H)$ определим функционал $\overline{\psi}[x] = \psi[x(0)]$. Очевидно, что $\overline{\psi}$ – линейный функционал. При этом

$$|\overline{\psi}[x]| \leq \|\psi\|\|x(0)\|_H \leq \|\psi\|\|x\|_{\mathbf{C}(0,T;H)} \qquad \forall x \in \mathbf{C}(0,T;H).$$

Следовательно, $\overline{\psi} \in (\mathbf{C}(0,T;H))^* \subset \tilde{W}^*$. Тогда, с учетом слабой сходимости $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$, получаем

$$\overline{\psi}[\varphi_m] \to \overline{\psi}[\varphi] \quad \Leftrightarrow \quad \psi[\varphi_m(0)] \to \psi[\varphi(0)].$$

В силу произвольности выбора функционала $\psi \in H^*$, это означает, что $\varphi_m(0) \rightharpoonup \varphi(0)$ в пространстве H.

Определим на пространстве H функционал $h[x] = \|x - a\|_H$. Очевидно, что он является выпуклым и непрерывным. Следовательно, слабо полунепрерывен снизу [19, гл. 1, § 3, теорема 5, с. 52]. Поэтому, с учетом слабой сходимости $\varphi_m(0) \rightharpoonup \varphi(0)$ в H, получаем

$$0 \le h[\varphi(0)] \le \varliminf_{m\to\infty} h[\varphi_m(0)] = 0.$$

Таким образом, $h[\varphi(0)] = 0$, т.е. $\|\varphi(0) - a\|_H = 0$. Это означает, что $\varphi(0) = a$. Лемма доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Доказательство теоремы 1.2. По условию, $\tilde{V}$ — рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Следовательно, пространство $L_p(0,T;\tilde{V})$ рефлексивно [18, гл. IV, § 1, замечание 1.11, с. 163]. Тогда, поскольку множество U по условию ограничено, замкнуто и выпукло, то оно слабо компактно в пространстве $L_p(0,T;\tilde{V})$ [19, гл. 1, § 3, теорема 4, с. 51].

Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3. По лемме 3.7, множество

$$\mathbf{S} = \{\varphi[u] : u \in U\}$$

ограничено в пространстве W. По лемме 3.9, пространство $\tilde{W}$ компактно вложено в $L_q(0,T;H)$. Поскольку $W \subset \tilde{W}$, то ясно, что и пространство W компактно вложено в $L_q(0,T;H)$. Так как множество $\mathbf{S}$ ограничено в $W \subset L_q(0,T;H)$, то оно ограничено и в $L_q(0,T;H)$. Тогда, в силу ограниченности функционала I_0 на ограниченных множествах в $L_q(0,T;H)$, получаем, что функционал $J_0[u] = I_0[\varphi[u]]$ ограничен на множестве U. В таком случае и функционал $J_\alpha[u]$ ограничен на множестве U.

Теорема 1.3 доказана.

Лемма 4.1. *Пусть* $\{u_m\} \subset U$ — *слабосходящаяся в* $L_p(0,T;\tilde{V})$ *последовательность:* $u_m \rightharpoonup u$, *и по теореме* 1.2, $u \in U$. *Тогда существует подпоследовательность* $\{u_{m_k}\}$ *такая, что* $J_0[u_{m_k}] \to J_0[u]$.

Доказательство. Поскольку слабый предел определяется однозначно [25, утверждение 2.22, с. 17], $u_{m_k} \rightharpoonup u$. Дальнейшие рассуждения проведем в несколько этапов.

1. Как уже было показано при доказательстве теоремы 1.2, имеет место компактное вложение $W \subset L_q(0,T;H)$.

2. Обозначим $\varphi_m = \varphi[u_m] \in \mathbf{S}$, $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что с точностью до перехода к подпоследовательности, $\varphi_m \rightharpoonup \varphi \in \tilde{W}$ в пространстве $\tilde{W}$ и при этом $\varphi \in L_q(0,T;H)$, $\varphi_m \to \varphi$ (сильно) в пространстве $L_q(0,T;H)$.

Ясно, что $\mathbf{S} \subset W \subset \tilde{W}$, а по лемме 3.3, пространство $\tilde{W}$ рефлексивно. Поэтому всякий замкнутый шар в $\tilde{W}$ слабо компактен [19, гл. 1, § 3, теорема 4, с. 51]. Отсюда и из леммы 3.7 получаем, что из последовательности $\{\varphi_m\}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому $\varphi \in \tilde{W}$, $\|\varphi\|_{\tilde{W}} \le M$, причем $\|\varphi_m\|_{\tilde{W}} \le M$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности рассуждений, будем считать, что сама последовательность $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ в пространстве $\tilde{W}$. С другой стороны, в силу п. 1, пространство W компактно вложено в $L_q(0,T;H)$. Поэтому у последовательности $\{\varphi_m\}$ существует подпоследовательность, сходящаяся (сильно) в пространстве $L_q(0,T;H)$. Опять же, без ограничения общности рассуждений (с точностью до перехода к подпоследовательности) будем считать, что $\varphi_m \to \overline{\varphi} \in L_q(0,T;H)$. Ясно, что из сильной сходимости вытекает слабая. Поэтому $\varphi_m \rightharpoonup \overline{\varphi}$ в $L_q(0,T;H)$. При этом (за счет плотного вложения $V \subset H$) $(L_q(0,T;H))^* = L_{q'}(0,T;H^* = H) \subset \tilde{W}^*$, и стало быть, $\varphi_m \rightharpoonup \varphi$ в $L_q(0,T;H)$. Поскольку слабый предел определяется однозначно [25, утверждение 2.22, с. 17], заключаем, что $\overline{\varphi} = \varphi$.

3. Пусть $\varphi_m \rightharpoonup \varphi \in \tilde{W}$ в пространстве $\tilde{W}$ и при этом $\varphi \in L_q(0,T;H)$, $\varphi_m \to \varphi$ (сильно) в пространстве $L_q(0,T;H)$. Докажем, что $\varphi = \varphi[u]$.

В соответствии с леммой 3.6 для этого достаточно доказать, что для всякого $\omega \in L_2(0,T;V)$ выполняется равенство

$$\int_0^T (\Psi\varphi'(t) + (\Phi\varphi)(t) - f(t,\varphi(t)) - b(t,u(t),\varphi(t)),\omega(t))dt = 0, \quad (6)$$

а также начальное условие $\varphi(0) = a$. Поскольку функция $\varphi_m = \varphi[u_m]$, то для нее аналогичное подынтегральное выражение равно нулю для п.в. $t \in [0;T]$. Стало быть, зануляется также и интеграл. Поэтому, пользуясь леммами 3.12–3.15, заключаем, что функция φ удовлетворяет тождеству (6) и начальному условию. Однако по построению, $\varphi \in \tilde{W}$. Строго говоря, надо еще доказать, что $\varphi \in W$. Для этого заметим, что φ является решением соответствующего линейного уравнения

$$\Psi\varphi'(t) + (\Phi\varphi)(t) = z(t), \quad t \in [0;T],$$

с правой частью $z = f(.,\varphi(.)) + b(.,u(.),\varphi(.)) \in L_2(0,T;V^*)$, при начальном условии $\varphi(0) = a$, а стало быть, и решением задачи

$$\varphi'(t) + (G\varphi)(t) = \Psi^{-1}z(t), \quad t \in [0;T]; \quad \varphi(0) = a,$$

при $(G\varphi)(t) = \Psi^{-1}[(\Phi\varphi)(t)]$ – вольтерровом линейном ограниченном операторе $L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V)$ и $\Psi^{-1}z \in L_2(0,T;V)$. Отсюда, см. [18, гл. V, § 1.3, теорема 1.3], вытекает, что $\varphi \in W$. Следовательно, $\varphi = \varphi[u]$.

4. В силу п.п. 2 и 3, с точностью до перехода к подпоследовательности, имеем $\varphi_m \to \varphi[u]$ в пространстве $L_q(0,T;H)$. Поэтому, в силу непрерывности функционала I_0 на пространстве $L_q(0,T;H)$, получаем

$$J_0[u_m] = I_0[\varphi_m] \to I_0[\varphi[u]] = J_0[u].$$

Лемма 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Прежде всего, исследуем функционал $J_0[u]$. Выберем произвольно слабосходящуюся в $L_p(0,T;\widetilde{V})$ последовательность $\{u_m\} \subset U$, $u_m \rightharpoonup u$ и покажем, что $J_0[u_m] \to J_0[u]$. Пусть $\bar{J}$ – произвольная предельная точка (ограниченной в силу теоремы 1.3) числовой последовательности $J_0[u_m]$. Это означает, что существует подпоследовательность $\{u_{m_k}\}$ такая, что $J_0[u_{m_k}] \to \bar{J}$. Поскольку слабый предел определяется однозначно [25, утверждение 2.22, с. 17], $u_{m_k} \rightharpoonup u$. А так как предел любой подпоследовательности $\lim_{\ell\to\infty} J_0[u_{m_{k_\ell}}] = \bar{J}$, то нам достаточно убедиться, что существует такая подпоследовательность $u_{m_{k_\ell}}$, для которой

$$\lim_{\ell\to\infty} J_0[u_{m_{k_\ell}}] = J_0[u].$$

Но этот факт следует непосредственно из леммы 4.1. А он, в свою очередь, означает, что $\bar{J} = J_0[u]$.

Стало быть, все предельные точки последовательности $J_0[u_m]$ совпадают с $J_0[u]$, т.е. существует $\lim_{m\to\infty} J_0[u_m] = J_0[u]$. Иначе говоря, функционал J_0 слабо непрерывен на U.

Остается заметить, что функционал $K[u] = \|u\|^2_{L_p(0,T;\widetilde{V})}$ является выпуклым и непрерывным на U, а следовательно, слабополунепрерывен снизу на U [19, гл. 1, § 3, теорема 5, с. 52]. Теорема 1.4 доказана.

5. ПРИМЕР: СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА С ДОБАВЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, – ограниченная область с локально липшицевой границей $\partial\Omega$, удовлетворяющая условиям леммы 3.10; $T > 0$, $\Gamma = [0;T]\times\partial\Omega$, $\Pi_T = [0;T]\times\Omega$. Обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ – пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса $\mathbf{C}^\infty$ с компактным носителем в

Ω; $H_0^1(\Omega)^n$ – замыкание $\mathcal{D}(\Omega)^n$ в норме пространства $H^1(\Omega)^n$; $\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^n : \operatorname{div}\varphi = 0\}$ – множество соленоидальных функций; H – замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2^n(\Omega)$; V – замыкание $\mathcal{V}$ по норме $H^1(\Omega)^n$ со скалярным произведением

$$(v,w) = \int_\Omega \nabla v : \nabla w\,dx, \quad \nabla v : \nabla w = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial w_i}{\partial x_j}.$$

Соответствующая норма $\|.\|_V$ эквивалентна норме пространства $H^1(\Omega)^n$. Согласно [18], имеют место непрерывные и плотные вложения

$$V \subset H, \quad H^* \subset V^*,$$

причем H допускает отождествление с H^*. При данном выборе пространств V, H пространство W определяется так, как указано в разд. 1. Отметим, что по леммам 3.1, 3.11 банахово пространство $H^1(\Omega)^n$ рефлексивно и сепарабельно. Замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства рефлексивно [23, гл. V, § 7, следствие 1, с. 237]. Кроме того, метрическое пространство, содержащееся в сепарабельном метрическом пространстве, сепарабельно [23, гл. I, § 4, с. 39]. Таким образом, пространство V рефлексивно и сепарабельно. Очевидно, что пространство H гильбертово. В соответствии с леммой 3.10 пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в лебегово пространство $L_r(\Omega)$ при любом

$$1 < r < \frac{3\times 2}{3 - 2\times 1} = 6.$$

В частности, $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ компактно. Отсюда вытекает компактное вложение $V \subset H$. Дальше мы опишем один из возможных способов (но, разумеется, не единственный способ) выбора функции $b(t,u,\varphi)$ и соответственно, пространства $\tilde{V}$, обеспечивающих выполнение условия $\mathbf{B}_2$), а тем самым, и условия $\mathbf{B}_1$), см. замечание 1.2. Пусть $\gamma(.) \in L_\infty^+[0;T]$, $\overline{\gamma} = \|\gamma\|_{L_\infty[0;T]}$. Определим функцию $b(t,u,\varphi) : [0;T]\times\tilde{V}\times H \to V^*$ как отображение, которое при $t \in [0;T]$ каждой паре $u \in \tilde{V}$, $\varphi \in H$ ставит в соответствие функционал, определяемый формулой

$$(b(t,u,\varphi),\omega) = \gamma(t)\int_\Omega u(x)\varphi(x)\cdot\omega(x)\,dx, \quad \omega \in V.$$

Здесь (для простоты, но это не единственная возможность) $u(x)$ понимается как скалярная функция; “$\cdot$” – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Пока это – формальное определение. Чтобы оно стало корректным, нужно обеспечить существование и конечность этого интеграла за счет выбора подходящего пространства $\tilde{V}$. Для этого, в свою очередь, достаточно существования и конечности интеграла от каждого слагаемого $u\varphi_i\omega_i$, $i = \overline{1,n}$. Как уже было сказано выше, имеет место компактное вложение $H^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ при $r \in (2;6)$. Зафиксируем произвольно $r \in (2;6)$. В соответствии с неравенством Гёльдера, нам достаточно, чтобы $u\xi \in L_{r'}(\Omega)$ для всякого $\xi \in L_2(\Omega)$, при $r' = \dfrac{r}{r-1}$. Подберем число σ, исходя из равенства

$$\sigma r' = 2 \quad\Rightarrow\quad \sigma = \frac{2(r-1)}{r} \quad\Rightarrow\quad \sigma - 1 = 1 - \frac{2}{r} = \frac{r-2}{r}.$$

Сопряженное число

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sigma - 1} = \frac{2(r-1)}{r-2} \quad\Rightarrow\quad \sigma' r' = \frac{2r}{r-2}.$$

По неравенству Гёльдера, можно взять $\tilde{V} = L_\kappa(\Omega)$, $\kappa = \dfrac{2r}{r-2} \in (3;\infty)$. При этом

$$|(b(t,u,\varphi),\omega)| \le \gamma(t)\|u\|_{\tilde{V}}\|\varphi\|_H\|\omega\|_{L_r(\Omega)^n} \le \gamma(t)C_r\|u\|_{\tilde{V}}\|\varphi\|_H\|\omega\|_V,$$

где C_r – константа непрерывного вложения $V \subset L_r(\Omega)^n$. Таким образом,

$$\|b(t,u,\varphi)\|_{V^*} \le \gamma(t) C_r \|u\|_{\tilde{V}} \|\varphi\|_H ,$$

т.е. условие $\mathbf{B}_2$) выполнено.

Следуя [27, гл. 2, с. 16–37], рассмотрим в цилиндре Π_T систему

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu_1\Delta\varphi + \sum_{i=1}^{n}\varphi_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - \mu_2\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t} - \int_0^t h(s,t)\Delta\varphi(s)\,ds + \nabla p = g; \tag{7}$$

$$\operatorname{div}\varphi = 0, \quad (t,x)\in\Pi_T; \tag{8}$$

$$\varphi(0,x) = a(x), \quad x\in\Omega; \tag{9}$$

$$\varphi|_\Gamma = 0. \tag{10}$$

Система уравнений (7), (8) называется системой уравнений Осколкова, или интегродифференциальной системой Кельвина–Фойгта. Она является модельной для описания движения неньютоновской жидкости, которой требуется время для того, чтобы среагировать на действие внезапно приложенной силы (в рамках модели Кельвина–Фойгта). Здесь $\varphi(t,x)$ – вектор скорости частицы жидкости, расположенной в точке $x\in\Omega$ в момент времени $t\in[0;T]$; φ_1, ..., φ_n – компоненты вектора φ; $p = p(t,x)$ – давление жидкости; $g = g(t,x)$ – вектор внешних сил, действующих на жидкость (их также называют объемными); μ_1, μ_2 $(\mu_2 > 0)$ – константы; $h\in L_\infty((0,T)\times(0,T))$. С физической точки зрения число μ_1 также должно быть положительным (поскольку это вязкость жидкости), однако с математической точки зрения это не важно.

Следуя [27, определение 2.2.1], слабым решением задачи (7)–(10) назовем функцию $\varphi\in W$, удовлетворяющую для всех $\omega\in V$ и п.в. $t\in[0;T]$ тождеству

$$\langle J\varphi'(t),\omega\rangle + \langle\mu_2 A\varphi'(t),\omega\rangle + \langle\mu_1 A\varphi(t),\omega\rangle + \langle(N\varphi)(t),\omega\rangle - \langle B\varphi(t),\omega\rangle = \langle g,\omega\rangle, \tag{11}$$

с начальным условием

$$\varphi(0) = a. \tag{12}$$

(Давление p здесь отсутствует, поскольку $\int_\Omega \nabla p\cdot\omega\,dx = \int_\Omega p\operatorname{div}\omega\,dx = 0$.)

Здесь предполагается, что $a\in V$, $g\in L_2(0,T;V^*)$ и используются следующие операторы

$$J : V \to V^*, \quad \langle J\varphi,\omega\rangle = \int_\Omega \varphi\cdot\omega\,dx, \quad \varphi,\omega\in V;$$

$$A : V \to V^*, \quad \langle A\varphi,\omega\rangle = \int_\Omega \nabla\varphi : \nabla\omega\,dx, \quad \varphi,\omega\in V;$$

$$N : L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*),$$

$$\langle(N\varphi)(t),\omega\rangle = \int_\Omega\int_0^t h(s,t)\nabla\varphi(s)ds : \nabla\omega\,dx, \quad \varphi\in L_2(0,T;V), \quad \omega\in V;$$

$$B : L_4^n(\Omega) \to V^*, \quad \langle B\varphi,\omega\rangle = \int_\Omega \varphi_i\varphi_j\frac{\partial\omega}{\partial x_i}dx, \quad \varphi\in L_4^n(\Omega), \quad \omega\in V.$$

В силу произвольности выбора $\omega\in V$ тождество (11) эквивалентно операторному дифференциальному уравнению

$$(\mu_2 A + J)\varphi' + \mu_1 A\varphi + N\varphi - B\varphi = g, \quad \varphi\in W. \tag{13}$$

В [27, теорема 2.2.1] уже было установлено, что для любых $a\in V$, $g\in L_2(0,T;V^*)$ существует единственное слабое решение исходной задачи, т.е., иначе говоря, решение задачи Коши (12), (13).

В отличие от [27, гл. 2], мы далее будем рассматривать управляемый полулинейный аналог уравнения (13) вида

$$(\mu_2 A + J)\varphi' + \mu_1 A\varphi + N\varphi = F[u](.,\varphi), \quad \varphi\in W, \tag{14}$$

где $u \in U$ – управление, $F[u](.,\varphi) = f(.,\varphi) + B\varphi + b(.,u,\varphi)$, $\varphi \in W$.

Касательно структуры правой части $F[u](.,\varphi)$ заметим следующее. Даже если убрать слагаемое $f(.,\varphi)$, все равно останется нелинейность $B\varphi$, которая перешла сюда из системы Осколкова классического вида (13). Поэтому нелинейность тут присутствует по существу задачи. Что касается слагаемого $b(.,u,\varphi)$, его можно трактовать как управляющую внешнюю силу в форме линейной обратной связи (а если скорость жидкости φ априори должна быть мала, то эта структура возникает как результат линеаризации управления с обратной связью по состоянию). Наконец, слагаемое $f(.,\varphi)$ тоже не лишено смысла, поскольку физически трактуется как внешняя сила, зависящая от скорости жидкости – возникает при наличии упругого препятствия движению жидкости.

Здесь предполагается, что функция $f(t,\xi) : [0;T]\times V \to V^*$, обладает свойствами $\mathbf{F}_1) - \mathbf{F}_3)$. Что касается оператора B, то в [10, лемма 3.6] уже было показано, что он удовлетворяет условиям $\mathbf{F}_1')$ (при $Z = L_4^n(\Omega)$, см. замечание 1.1), $\mathbf{F}_2)$, $\mathbf{F}_3)$. Там же было показано, что оператор $\Phi = \mu_1 A + N$ действует как отображение $L_2(0,T;V) \to L_2(0,T;V^*)$ и является вольтерровым, линейным и ограниченным [10, леммы 3.1, 3.5], а оператор $\Psi = \mu_2 A + J$ является линейным ограниченным $V \to V^*$ и имеет обратный оператор, удовлетворяющий оценке [10, леммы 3.1, 3.2], [27, леммы 2.3.1, 2.3.2]:

$$\left\|\Psi^{-1}v - \Psi^{-1}w\right\|_V \le \frac{1}{\mu_2}\|v - w\|_{V^*}$$

для всех $v,w \in V^*$. Оператор, обратный к линейному, обязан быть линейным. Таким образом, $\Psi^{-1} : V^* \to V$ – линейный ограниченный оператор. Стало быть, все предположения разд. 1 выполнены. Поэтому применимы теоремы 1.1–1.4 и их следствие.

Поскольку теорема 1.1 носит условный характер, рассмотрим вопрос о разрешимости задачи Коши для функции $\beta(t)$ из ее формулировки.

В [10] была получена оценка

$$\|B\varphi\|_{V^*} \le K^2M^2 \quad \forall\varphi \in V, \quad \|\varphi\|_V \le M.$$

Как уже было сказано выше, $\gamma(.) \in L_\infty^+[0;T]$. Таким образом, если, допустим для определенности, функция $f(t,\xi)$ имеет не более, чем квадратичный порядок роста по $\xi \in V$, и такова, что $f(t,0) = 0$, то можно считать, что оценочная функция $\tilde{\mathcal{N}}_1(t,M)$ представляется в виде:

$$\tilde{\mathcal{N}}_1(t,M) = \frac{1}{\mu}\left\{\mu_1 M^2 + \mu_2 M\right\},$$

при некоторых константах $\mu_1,\mu_2 > 0$. Соответственно, задача относительно функции $\beta(t)$ из формулировки теоремы 1.1 принимает вид:

$$\frac{d\beta}{dt} = \mu_1\beta^2 + \mu_2\beta, \quad \beta(0) = \beta_0 = \mu\|a\|_V.$$

Решение такой задачи легко найти непосредственно:

$$\beta(t) = \frac{\mu_2}{Ce^{-\mu_2 t} - \mu_1}, \quad C = \mu_1 + \frac{\mu_2}{\beta_0}.$$

Очевидно, что это решение существует на любом отрезке $[0;T] \subset [0;T_0)$, где T_0 определяется из условия:

$$\mu_1 e^{\mu_2 T_0} = C \quad \Leftrightarrow \quad T_0 = \frac{1}{\mu_2}\ln\left(1 + \frac{\mu_2}{\beta_0\mu_1}\right).$$

Заметим, что если $\|a\|_V \to +0$, то $\beta_0 \to +0$, а значит, $T_0 \to +\infty$. Таким образом, для всех достаточно малых $a \in V$ решение существует на сколь угодно большом промежутке.

Если же наоборот, $\|a\|_V \to +\infty$, то $T_0 \to +0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вахитов И.С.* Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии-реакции // Дальневосточный матем. журнал. 2010. Т. 10. № 2. С. 93–105.
2. *Ismayilova G.G.* The problem of the optimal control with a lower coefficient for weakly nonlinear wave equation in the mixed problem // European journal of pure and applied mathematics 2020. V. 13. № 2. P. 314–322.
3. *Прилепко А.И., Костин А.Б., Соловьев В.В.* Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гёльдера и Соболева // Сиб. журн. вычисл. и прикл. матем. 2017. Т. 17. Вып. 3. С. 67–85.
4. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 415 с.
5. *Tröltzsch F.* Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010. xv+399 p.
6. *Bewley T., Temam R., Ziane M.* Existence and uniqueness of optimal control to the Navier-Stokes equations // C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math. 2000. V. 330. № 11. P. 1007–1011.
7. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.
8. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. xii+352 с.
9. *Чернов А.В.* Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Матем. 2011. № 3. С. 95–107.
10. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении глобальной разрешимости операторного дифференциального уравнения: L_2-теория // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения. Материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева (Пермь, 17–19 мая 2017). Пермь: Изд-во Пермского нац. исслед. политех. ун-та, 2018. С. 263–276.
11. *Чернов А.В.* О тотально глобальной разрешимости управляемого операторного уравнения второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 92–111.
12. *Чернов А.В.* О тотально глобальной разрешимости эволюционного вольтеррова уравнения второго рода // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 593–614.
13. *Чернов А.В.* Операторные уравнения II рода: теоремы о существовании и единственности решения и о сохранении разрешимости // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 5. С. 656–668.
14. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. 2018. № 11. С. 60–74.
15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 721 с.
16. *Plotnikov P.I., Turbin M.V., Ustiuzhaninova A.S.* Existence theorem for a weak solution of the optimal feedback control problem for the modified Kelvin-Voigt model of weakly concentrated aqueous polymer solutions // Dokl. Math. 2019. V. 100. № 2. P. 433–435.
17. *Idczak D., Walczak S.* Existence of optimal control for an integro-differential Bolza problem // Optim. Control Appl. Methods. 2020. V. 41. № 5. P. 1604–1615.
18. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
19. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
20. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.
21. *Павлова М.Ф., Тимербаев М.Р.* Пространства Соболева (теоремы вложения). Казань: КГУ, 2010. 123 с.
22. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.
23. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
24. *Фаминский А.В.* Функциональные пространства эволюционного типа. М.: Изд-во РУДН, 2016. 146 с.
25. *Рыжиков В.В.* Курс лекций по функциональному анализу. М.: МГУ, 2004. 24 с.
26. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
27. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 31. С. 3–144.