

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956.4

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ
НА ПЛОСКОСТИ

© 2023 г. Е. А. Бадерко^{1,*}, С. И. Сахаров^{1,**}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: baderko.ea@yandex.ru

**e-mail: ser341516@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.08.2022 г.
Переработанный вариант 13.09.2022 г.
Принята к публикации 15.12.2022 г.

Рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для параболических систем второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини в полуограниченной области на плоскости с негладкой боковой границей, допускающей “клювы”. Доказаны теоремы о единственности классических решений этих задач в классе функций, непрерывных и ограниченных, вместе со своей пространственной производной первого порядка, в замыкании указанной области. Библ. 33.

Ключевые слова: параболические системы, начально-краевые задачи, единственность классического решения, негладкая боковая граница, граничные интегральные уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466923040038, EDN: IVVRGO

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию единственности классических решений первой и второй начально-краевых задач для одномерных по пространственной переменной x параболических систем второго порядка в полуограниченной области с негладкой боковой границей.

В случае одного уравнения единственность классического решения первой начально-краевой задачи следует из принципа максимума (см., например, [1, с. 27]), а единственность классического решения второй начально-краевой задачи установлена в [2], [3] с помощью теоремы о знаке косої производной. Заметим, что для систем, в отличие от уравнений, принцип максимума, вообще говоря, не имеет места (см. [4]).

Из [1, с. 706], [5] следует единственность классических решений параболических начально-краевых задач в пространстве Гельдера $H^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0, 1)$, если боковая граница рассматриваемой области – достаточно гладкая кривая, а именно – из класса $H^{1+\alpha/2}$, т.е. функция, задающая указанную границу, обладает первой производной из пространства $H^{\alpha/2}[0, T]$.

Особый интерес указанные задачи представляют в случае областей с негладкими боковыми границами. Единственность решений первой и второй начально-краевых задач в ограниченных областях с боковыми границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$ для одномерных по пространственной переменной x параболических систем второго порядка с гельдеровыми коэффициентами в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ функций, непрерывных и ограниченных, вместе со своей пространственной производной первого порядка, в замыкании указанных областей, доказана в [6], [7]. В случае области с боковыми границами из класса $H^{(1+\alpha)/2}$ для параболических систем с гельдеровыми коэффициентами, не зависящими от временной переменной t , в [8] доказана теорема существова-

ния и единственности классического решения первой начально-краевой задачи из пространства $C^0(\bar{\Omega})$.

В [9]– [11] доказаны теоремы о существовании классических решений из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ первой и второй начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченных областях на плоскости с боковой границей из класса Дини-Гёльдера $H^{1/2+\omega}$. Здесь и до конца введения ω – некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (см. ниже (1)). В [12] установлена единственность классического решения первой начально-краевой задачи для параболической системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной области на плоскости с боковой границей из класса $H^{1/2+\omega}$ в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ при дополнительном условии на старшую производную $\partial_x^2 u$ этого решения и на характер его гладкости по временной переменной. В [13] доказана теорема о единственности классического решения из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ второй начально-краевой задачи для параболических систем с постоянными коэффициентами в полуограниченной области с боковой границей из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$.

В настоящей работе рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для параболических систем с дини-непрерывными коэффициентами в плоской полуограниченной области с негладкой боковой границей из класса Дини-Гёльдера $H^{1/2+\omega}$ и доказывается единственность их классических решений из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$. Заметим, что, как следует из работ [14], [15], рассматриваемое условие на характер непрерывности боковой границы является точным для классической разрешимости первой начально-краевой задачи в пространстве $C^{1,0}(\bar{\Omega})$.

Параболические системы уравнений находят свое приложение, в частности, при описании эволюционных процессов в многокомпонентных средах (см., например, [16]– [21]).

Работа состоит из четырех разделов. В разд. 1 приводятся необходимые определения и формулируются основные теоремы. В разд. 2 доказывается вспомогательная лемма о единственности классического решения второй начально-краевой задачи для системы с дифференцируемыми коэффициентами. В разд. 3 и 4 доказываются основные теоремы.

Основные результаты статьи анонсированы в [22].

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть фиксировано число $T > 0$. Через $C[\tau, \eta]$, $0 \leq \tau < \eta \leq T$, обозначим пространство непрерывных вектор-функций $\psi : [\tau, \eta] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, с нормой $\|\psi; [\tau, \eta]\|^0 = \max_{t \in [\tau, \eta]} |\psi(t)|$. Положим $C_0[\tau, \eta] = \{\psi \in C[\tau, \eta] : \psi(\tau) = 0\}$.

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (ее элементов).

Следуя [23, с. 147], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $\omega(0) = 0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если для него выполняется соотношение

$$\tilde{\omega}(z) = \int_0^z \omega(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0. \tag{1}$$

Через \mathcal{D} обозначим линейное пространство, состоящее из модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1).

В полосе $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, t \in (0, T)\}$ выделяется область $\Omega = \{(x, t) \in D : x > g(t)\}$ с боковой границей $\Sigma = \{(x, t) \in \bar{\Omega} : x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяет следующему условию:

$$|g(t + \Delta t) - g(t)| \leq |\Delta t|^{1/2} \omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad \omega_1 \in \mathcal{D}. \tag{2}$$

Обозначим через $C^{2,1}(\Omega)$ пространство вектор-функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, непрерывных, вместе со своими производными $\partial_t u, \partial_x^l u, l = 1, 2$, в Ω . Через $C^0(\bar{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$ с нормой $\|u; \Omega\|^0 = \sup_{(x,t) \in \Omega} |u(x,t)|$. Положим

$$C_0^{1,0}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\bar{\Omega}) : \partial_x u \in C^0(\bar{\Omega}), \partial_x^l u(x,0) = 0, l = 0,1, \|u; \Omega\|^{1,0} = \sum_{l=0}^1 \|\partial_x^l u; \Omega\|^0 < \infty \right\}.$$

Под значениями функций и их производных на границе произвольной области Ω понимаем их предельные значения “изнутри” Ω .

Пусть ω – некоторый модуль непрерывности. Введем пространства:

$$H^{1/2+\omega}[0, T] = \left\{ \psi \in C[0, T] : \|\psi; [0, T]\|^{1/2+\omega} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \sup_{\substack{t, t+\Delta t \in (0, T) \\ \Delta t \neq 0}} \left\{ \frac{|\Delta_t \psi(t)|}{|\Delta t|^{1/2} \omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty \right\},$$

$$H_0^{1/2+\omega}[0, T] = \{ \psi \in H^{1/2+\omega}[0, T] : \psi(0) = 0 \},$$

$$H^\omega(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^0(\bar{\Omega}) : \|u; \Omega\|^\omega = \|u; \Omega\|^0 + \sup_{\substack{(x,t), (x+\Delta x, t+\Delta t) \in \Omega \\ (\Delta x)^2 + |\Delta t| \neq 0}} \left\{ \frac{|\Delta_{x,t} u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|) + \omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty \right\},$$

$$H_0^{1,\omega}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C_0^{1,0}(\bar{\Omega}) : \|u; \Omega\|^{1,\omega} = \|u; \Omega\|^{1,0} + \sup_{\substack{(x,t), (x,t+\Delta t) \in \Omega \\ \Delta t \neq 0}} \left\{ \frac{|\Delta_t u(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2} \omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} + \right. \\ \left. + \sup_{\substack{(x,t), (x+\Delta x, t+\Delta t) \in \Omega \\ (\Delta x)^2 + |\Delta t| \neq 0}} \left\{ \frac{|\Delta_{x,t} \partial_x u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|) + \omega(|\Delta t|^{1/2})} \right\} < \infty \right\},$$

где $\Delta_t \psi(t) = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$, $\Delta_{x,t} u(x,t) = u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x,t)$.

Пусть

$$\partial^{1/2} \psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2} \psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \psi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

есть оператор дробного дифференцирования порядка 1/2. Следуя [24], [25], введем пространство

$$C_0^{1/2}[0, T] = \left\{ \psi \in C_0^0[0, T] : \partial^{1/2} \psi \in C_0^0[0, T], \|\psi; [0, T]\|^{1/2} = \|\psi; [0, T]\|^0 + \|\partial^{1/2} \psi; [0, T]\|^0 < \infty \right\}.$$

Замечание 1. Если $\psi \in H_0^{1/2+\omega}[0, T]$, $\omega \in \mathcal{D}$, то $\psi \in C_0^{1/2}[0, T]$ (см. [26]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [25]).

В полосе D рассматривается равномерно параболический по Петровскому (см. [27]) оператор

$$Lu \equiv \partial_t u - \sum_{l=0}^2 A_l(x,t) \partial_x^l u, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^T, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

где $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$, $l = 0,1,2$, суть $m \times m$ -матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определенные в \bar{D} и удовлетворяющие следующим условиям:

(а) собственные числа $\mu_r, r = \overline{1, m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\text{Re} \mu_r(x,t) \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \bar{D}$.

(б) $a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\bar{D})$, где ω_0 – модуль непрерывности такой, что

$$\tilde{\omega}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi) \xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0.$$

Положим $D^* = \{(x, t; \xi, \tau) \in \bar{D} \times \bar{D} : t > \tau\}$. Известно (см. [28], если $m = 1$, и [29], если $m \geq 2$), что при выполнении условий (а) и (б) у системы $Lu = 0$ существует фундаментальная матрица решений (ФМР) $\Gamma(x, t; \xi, \tau), (x, t; \xi, \tau) \in D^*$, и справедливы оценки

$$|\partial_t^k \partial_x^l \Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-(2k+l+1)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad 2k + l \leq 2, \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*.$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T, m , коэффициентов оператора L и модуля непрерывности ω_1 .

Основное содержание настоящей работы составляют следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (а), (б) и (2). Предположим, что вектор-функция $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$ – решение задачи

$$Lu = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \tag{3}$$

$$\partial_x u(g(t), t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{4}$$

Тогда $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (а), (б) и (2). Предположим, что вектор-функция $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$ – решение задачи

$$Lu = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad u(g(t), t) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{5}$$

Тогда $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Замечание 2. Из результатов [15] следует, что если $g \in H^{1/2+\omega_1}[0, T]$, причем модуль непрерывности ω_1 не удовлетворяет условию (1), то классическое решение первой начально-краевой задачи из пространства $C^{1,0}(\bar{\Omega})$ может не существовать.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. Пусть выполнены условия (2), (а) и, кроме того, (б) $\partial_x^k a_{ijl} \in H^{\omega_0}(\bar{D}), i, j = \overline{1, m}, l = 0, 1, 2, 0 \leq k \leq l$.

Предположим, что $\omega \in \mathfrak{D}$ и вектор-функция $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C_0^{1,0}(\bar{\Omega})$ – решение задачи (3), (4), удовлетворяющее условиям

$$|\Delta_x u(x, t)| \leq |\Delta t|^{1/2} \omega(|\Delta t|^{1/2}), \quad (x, t), (x, t + \Delta t) \in \bar{\Omega}, \tag{6}$$

$$|\partial_x^2 u(x, t)| \leq C[\omega^*(d(x, t))d^{-1}(x, t) + 1], \quad (x, t) \in \Omega, \tag{7}$$

где $d(x, t) = |x - g(t)|$, ω^* – некоторый модуль непрерывности. Тогда $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Доказательство. Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям леммы. Тогда u является решением первой начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad v(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad v(g(t), t) = \psi(t),$$

где $\psi(t) = u(g(t), t)$, $t \in [0, T]$. При этом функция ψ принадлежит пространству $H_0^{1/2+\omega+\omega_1}[0, T]$. Из [10–12], [30] следует, что функция u может быть представлена в виде векторного потенциала простого слоя

$$u(x, t) = \int_0^t \Gamma(x, t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (x, t) \in \bar{\Omega}, \tag{8}$$

где $\varphi \in C[0, T]$ — единственное в $C[0, T]$ решение граничного интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\int_0^t \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = \psi(t), \quad t \in [0, T].$$

Подставляя функцию (8) в граничное условие (4) и пользуясь формулой “скачка” для пространственной производной параболического потенциала простого слоя (см. [29]), получаем, что вектор-функция φ одновременно является решением граничного интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$-(2A_2(g(t), t))^{-1} \varphi(t) + \int_0^t \partial_x \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{9}$$

В силу единственности в $C[0, T]$ решения уравнения (9) (см. [9]) получаем, что $\varphi \equiv 0$. Подставляя найденное решение φ в представление (8), приходим к выводу, что $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия (а), (б) и $f \in C^0(\bar{\Omega})$. Тогда для векторного объемного потенциала

$$Vf(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{g(\tau)}^{+\infty} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (x, t) \in \bar{\Omega},$$

справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\partial_x^l Vf(x, t)| &\leq C \|f; D\|^0 t^{1-l/2}, \quad l = 0, 1, \\ |\Delta_t Vf(x, t)| &\leq C \|f; D\|^0 |\Delta t| (1 + |\ln |\Delta t||), \\ |\Delta_t \partial_x Vf(x, t)| &\leq C \|f; D\|^0 |\Delta t|^{1/2}, \\ |\Delta_x \partial_x Vf(x, t)| &\leq C \|f; D\|^0 |\Delta x| (1 + |\ln |\Delta x||), \\ (x, t), (x + \Delta x, t), (x, t + \Delta t) &\in \bar{\Omega}, \quad \Delta x \neq 0, \quad \Delta t \neq 0. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказывается методом из [31], где рассматривается случай $\omega_0(z) = \omega_1(z) = Cz^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Зададим функцию $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ равенствами

$$\rho(x, t) = C_1 \exp\{(x^2 + t^2 - 1)^{-1}\}, \quad x^2 + t^2 < 1, \quad \rho(x, t) = 0, \quad x^2 + t^2 \geq 1, \tag{10}$$

где постоянная C_1 выбирается из условия

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, t) dx dt = 1. \tag{11}$$

Продолжим коэффициенты оператора L на \mathbb{R}^2 , полагая

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ijl}(x, t) &= a_{ijl}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D} \quad \hat{a}_{ijl}(x, t) = a_{ijl}(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t < 0, \\ \hat{a}_{ijl}(x, t) &= a_{ijl}(x, T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > T. \end{aligned}$$

Для любого числа $r > 0$ положим

$$a_{ijl}^{(r)}(x, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{a}_{ijl}(x - ry, t - r\tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (x, t) \in \bar{D}, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad l = 0, 1, 2,$$

и определим матричный оператор $L^{(r)}$ со “сглаженными” коэффициентами:

$$L^{(r)}u \equiv L^{(r)}(x, t)u = \partial_t u - \sum_{l=0}^2 A_l^{(r)}(x, t) \partial_x^l u,$$

где $A_l^{(r)} = \|a_{ijl}^{(r)}\|_{i,j=1}^m$. Заметим, что коэффициенты операторов $L^{(r)}$ ограничены и бесконечно дифференцируемы в \bar{D} . Кроме того, существует число $r_0 > 0$ такое, что коэффициенты операторов $L^{(r)}$ удовлетворяют равномерно по $r \in (0, r_0)$ условию (а) с постоянной параболичности $\delta/2$ и условию (б) (см. [32]). Поэтому существуют ФМР $\Gamma^{(r)}$ систем $L^{(r)}u = 0$, причем справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\partial_x^l \Gamma^{(r)}(x, t; \xi, \tau)| &\leq C(t - \tau)^{-(l+1)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \\ (x, t; \xi, \tau) &\in D^*, \quad r \in (0, r_0), \quad l = 0, 1, 2, \end{aligned} \tag{12}$$

с постоянными C, c , не зависящими от $r \in (0, r_0)$. Не ограничивая общности, далее считаем, что $r \in (0, r_0), r_0 \leq 1$.

Для любых чисел $h > 0$, ограниченной вектор-функции $v : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ и множества $\mathcal{B} \subset \bar{D}$ положим

$$\omega(h; v; \mathcal{B}) = \sup_{|z_1 - z_2| \leq h, z_1, z_2 \in \mathcal{B}} |v(z_1) - v(z_2)|. \tag{13}$$

Для любого числа $R > 0$ обозначим

$$\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R} : |x| < R\}. \tag{14}$$

Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям теоремы 1. Зафиксируем произвольную точку $(x_0, t_0) \in \Omega$ и докажем, что $u(x_0, t_0) = 0$.

Рассмотрим область $\Omega_d = \{(x, t) \in \Omega : x > g(t) + d, d < t < T - d\}$, где число $0 < d < \min\left\{1, \frac{T}{2}\right\}$ мало так, что $(x_0, t_0) \in \Omega_d$ (число d будет выбрано ниже). Пусть \hat{u} – продолжение вектор-функции u с $\bar{\Omega}$ на \bar{D} с сохранением класса $C_0^{1,0}$ (см. [1, с. 344]), удовлетворяющее оценке

$$\|\hat{u}; D\|^{1,0} \leq C \|u; \Omega\|^{1,0}.$$

Тогда вектор-функция \bar{u} , определяемая равенствами

$$\bar{u}(x, t) = \hat{u}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}, \tag{15}$$

$$\bar{u}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t < 0, \quad \bar{u}(x, t) = \hat{u}(x, T), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > T, \tag{16}$$

является продолжением u с $\bar{\Omega}$ на \mathbb{R}^2 с сохранением класса $C^{1,0}$, причем

$$\|\bar{u}; \mathbb{R}^2\|^{1,0} \leq C \|u; \Omega\|^{1,0}.$$

Для каждого $s > 0$ определим “сглаженную” вектор-функцию

$$u_s(x, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \bar{u}(x - sy, t - s\tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad (x, t) \in \bar{D}.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Обозначим $\|u\|^{1,0} = \|u; \Omega\|^{1,0}$. Поскольку существует число $0 < s_0 < 1$ такое, что для любого числа $0 < s < s_0$ имеет место неравенство

$$|u_s(x_0, t_0) - \bar{u}(x_0, t_0)| < \varepsilon,$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что существует число $0 < s_1 < s_0$ такое, что для любого числа $0 < s < s_1$ имеет место неравенство

$$|u_s(x_0, t_0)| < \varepsilon. \tag{17}$$

Пусть $\zeta_R \in C^\infty(\mathbb{R})$ – функция со следующими свойствами:

$$0 \leq \zeta_R(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \zeta_R \equiv 1, \quad |x| \leq R, \quad \zeta_R \equiv 0, \quad |x| \geq 2R, \tag{18}$$

$$\left| \frac{d^l \zeta_R}{dx^l}(x) \right| \leq CR^{-l}, \quad l = 1, 2, \tag{19}$$

где число

$$R \geq R_0 = \max(2|x_0|, 2 \max_{t \in [0, T]} |g(t) + d|, 1).$$

Положим

$$u_{s,R}(x, t) = u_s(x, t)\zeta_R(x).$$

Для произвольных $0 < s < d, 0 < r < r_0$ и $R \geq R_0$ вектор-функция $u_{s,R}$ является решением задачи

$$L^{(r)}v = f_{s,R}^{(r)} \text{ в } \Omega_d, \quad v(x, d) = h_{s,R,d}(x), \quad x \geq g(d) + d, \tag{20}$$

$$\partial_x v(g(t) + d, t) = \theta_{s,R,d}(t), \quad t \in [d, T - d], \tag{21}$$

где $f_{s,R}^{(r)}(x, t) = L^{(r)}u_{s,R}(x, t), h_{s,R,d}(x) = u_{s,R}(x, d), \theta_{s,R,d}(t) = \partial_x u_{s,R}(g(t) + d, t)$, причем выполнено условие согласования

$$\partial_x h_{s,R,d}(g(d) + d) = \theta_{s,R,d}(d). \tag{22}$$

Так как функции $f_{s,R}^{(r)}, h_{s,R,d}$ и $\theta_{s,R,d}$ – достаточно гладкие, то в силу единственности решения задачи (20), (21) (см. лемму 1), результатов [9] и гладкости соответствующих параболических потенциалов (см. лемму 2 и [30]) вектор-функция $u_{s,R}$ для произвольных $0 < s < d$ и $R \geq R_0$ может быть представлена в виде

$$u_{s,R}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^{(r)}(x, t; \xi, d) h_{s,R,d}(\xi) d\xi + \int_d^t d\tau \int_{g(\tau)+d}^{+\infty} \Gamma^{(r)}(x, t; \xi, \tau) f_{s,R}^{(r)}(\xi, \tau) d\xi + \int_d^t \Gamma^{(r)}(x, t; g(\tau) + d, \tau) \phi_{s,R,d}^{(r)}(\tau) d\tau \equiv P_{s,R,d}^{(r)}(x, t) + V_{s,R,d}^{(r)}(x, t) + U_{s,R,d}^{(r)}(x, t). \tag{23}$$

Здесь вектор-плотность $\phi_{s,R,d}^{(r)} \in C[d, T - d]$ – единственное в $C[d, T - d]$ решение граничного интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$-(2A_2^{(r)}(g(t) + d, t))^{-1} \phi_{s,R,d}^{(r)}(t) + \int_d^t \partial_x \Gamma^{(r)}(g(t) + d, t; g(\tau) + d, \tau) \phi_{s,R,d}^{(r)}(\tau) d\tau = \hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)}(t), \quad t \in [d, T - d], \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)}(t) &= \theta_{s,R,d}(t) - \partial_x V_{s,R,d}^{(r)}(g(t) + d, t) - \partial_x P_{s,R,d}^{(r)}(g(t) + d, t) \equiv \\ &\equiv \partial_x u_{s,R}(g(t) + d, t) - \partial_x V_{s,R}^{(r)}(g(t) + d, t) - \partial_x P_{s,R,d}^{(r)}(g(t) + d, t). \end{aligned}$$

Оценим потенциалы из представления (23). Рассмотрим сначала потенциал Пуассона $P_{s,R,d}^{(r)}$. Пусть $(x, t) \in \bar{\Omega}_d$. Для любых $0 < s < d, 0 < r < r_0$ и $R \geq R_0$ в силу (18) справедливо равенство

$$P_{s,R,d}^{(r)}(x, t) = \int_{|\xi| < 2R} \Gamma^{(r)}(x, t; \xi, d) h_{s,R,d}(\xi) d\xi. \tag{25}$$

Используя (10), (11), (15) и (16), получаем (см. обозначения (13), (14)):

$$|h_{s,R,d}(\xi)| = \left| \zeta_R(\xi) \iint_{\mathbb{R}^2} [\bar{u}(\xi - sy, d - s\tau) - \bar{u}(\xi - sy, 0)] \rho(y, \tau) dy d\tau \right| \leq \leq C\omega(2d; \bar{u}; \mathcal{B}_{2R+1} \times [0, T]), \quad \xi \in \mathcal{B}_{2R}. \tag{26}$$

Отсюда и из оценок (12) вытекает неравенство

$$|P_{s,R,d}^{(r)}(x, t)| \leq C\omega_0(d; R),$$

где $\omega_0(d, R) = \omega(2d; \bar{u}; \mathcal{B}_{2R+1} \times [0, T])$.

Оценим $\partial_x P_{s,R,d}^{(r)}(x, t)$. Обозначим через $\Gamma_1^{(r)}(x, t; \xi, \tau)$ ФМР системы

$$L_1^{(r)}(x, t)v = \partial_t v - A_2^{(r)}(x, t)\partial_x^2 v - A_1^{(r)}(x, t)\partial_x v = 0.$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_1^{(r)}(x, t; \xi, d) d\xi = E, \quad (x, t) \in \bar{D},$$

где E – единичная матрица. В силу единственности решения задачи Коши (см. [33, с. 269]) ФМР системы $L^{(r)}u = 0$ может быть представлена в виде

$$\Gamma^{(r)}(x, t; \xi, \tau) = \Gamma_1^{(r)}(x, t; \xi, \tau) + W^{(r)}(x, t; \xi, \tau), \quad (x, t; \xi, \tau) \in D^*, \tag{27}$$

где

$$W^{(r)}(x, t; \xi, \tau) = \int_{\tau}^t d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma^{(r)}(x, t; y, \eta) A_0^{(r)}(y, \eta) \Gamma_1^{(r)}(y, \eta; \xi, \tau) dy,$$

причем имеют место оценки

$$|\partial_x^l W^{(r)}(x, t; \xi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{(1-l)/2} \exp\left(-c \frac{(x - \xi)^2}{t - \tau}\right), \quad l = 0, 1. \tag{28}$$

Из (25) и (27) следует, что

$$\begin{aligned} \partial_x P_{s,R,d}^{(r)}(x, t) &= \int_{|\xi| < 2R} [\partial_x \Gamma_1^{(r)}(x, t; \xi, d)] [h_{s,R,d}(\xi) - h_{s,R,d}(x)] d\xi + \\ &+ \int_{|\xi| < 2R} \partial_x W^{(r)}(x, t; \xi, d) h_{s,R,d}(\xi) d\xi = J_{s,R,d}^{1,(r)}(x, t) + J_{s,R,d}^{2,(r)}(x, t). \end{aligned}$$

Оценим $J_{s,R,d}^{1,(r)}$. Имеем

$$\begin{aligned} h_{s,R,d}(\xi) - h_{s,R,d}(x) &\equiv [u_s(\xi, d) - u_s(x, d)] \zeta_R(\xi) + u_s(x, d) [\zeta_R(\xi) - \zeta_R(x)] = \\ &= (\xi - x) \left[\partial_\xi u_s(\bar{\xi}_1, d) \zeta_R(\xi) + u_s(x, d) \frac{d\zeta_R}{dx}(\bar{\xi}_2) \right], \end{aligned}$$

где точки $\bar{\xi}_i, i = 1, 2$, расположены между ξ и x . В силу (10), (11), (15), (16) при $0 < s < d$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} |\partial_\xi u_s(\bar{\xi}_1, d)| &\leq C \iint_{y^2 + \tau^2 < 1} |\partial_\xi \bar{u}(\bar{\xi}_1 - sy, d - s\tau) - \partial_\xi \bar{u}(\bar{\xi}_1 - sy, 0)| dy d\tau \leq \\ &\leq C\omega(2d; \partial_x \bar{u}; \mathcal{B}_{2R+1} \times [0, T]), \quad \bar{\xi}_1 \in \mathcal{B}_{2R}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (12), (18), (19) находим

$$|\partial_x J_{s,R}^{1,(r)}(x, t)| \leq C(\omega_1(d, R) + \|u\|^{1,0} R^{-1}), \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_d,$$

где $\omega_1(d, R) \equiv \omega(2d; \partial_x \bar{u}; \mathcal{B}_{2R+1} \times [0, T])$.

Оценим $J_{s,R,d}^{2,(r)}$. В силу (26) и (28) получаем

$$\left| J_{s,R,d}^{2,(r)}(x,t) \right| \leq C \omega_0(d,R) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-c \frac{(x-\xi)^2}{t-d}\right) d\xi \leq C \omega_0(d,R), \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_d.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\left\| P_{s,R,d}^{(r)}; \Omega_d \right\|^{1,0} \leq C(\omega_0(d;R) + \omega_1(d;R) + \|u\|^{1,0} R^{-1}). \quad (29)$$

Рассмотрим объемный потенциал $V_{s,R,d}^{(r)}$. Оценим $f_{s,R}^{(r)}$. Имеем

$$\begin{aligned} f_{s,R}^{(r)}(x,t) = & [L^{(r)}u_s(x,t)]\zeta_R(x) - A_2^{(r)}(x,t) \left[2\partial_x u_s(x,t) \frac{d\zeta_R}{dx}(x) + u_s(x,t) \frac{d^2\zeta_R}{dx^2}(x) \right] - \\ & - A_1^{(r)}(x,t) u_s(x,t) \frac{d\zeta_R}{dx}(x), \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_d. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу соотношений (18), (19), (30) и условия (б) получаем

$$\left| f_{s,R}^{(r)}(x,t) \right| \leq \left| [L^{(r)}u_s(x,t)]\zeta_R(x) \right| + C \|u\|^{1,0} R^{-1}.$$

Справедливо представление

$$\begin{aligned} L^{(r)}u_s(x,t) = & \iint_{y^2+\tau^2 < 1} L^{(r)}(x,t) \bar{u}(x-sy, t-s\tau) \rho(y,\tau) dy d\tau = \\ = & \iint_{y^2+\tau^2 < 1} [L^{(r)}(x,t) - L^{(r)}(x-sy, t-s\tau)] \bar{u}(x-sy, t-s\tau) \rho(y,\tau) dy d\tau + \\ + & \iint_{y^2+\tau^2 < 1} [L^{(r)}(x-sy, t-s\tau) - L(x-sy, t-s\tau)] \bar{u}(x-sy, t-s\tau) \rho(y,\tau) dy d\tau. \end{aligned}$$

Используя условие (б) и гладкость \bar{u} , при $0 < s \leq d/2$, $0 < r < r_0$, $R \geq R_0$ находим

$$\left| L^{(r)}u_s(x,t)\zeta_R(x) \right| \leq C(d,R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})], \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_d.$$

Здесь и далее обозначаем $C(d,R) = C(\|u\|^{1,0} + \sup_{\Omega_{d/2} \cap (\mathbb{B}_R \times [0,T])} |\partial_x^2 u|)$.

Таким образом, при $0 < s \leq d/2$, $0 < r < r_0$, $R \geq R_0$ выполнена оценка

$$\left| f_{s,R}^{(r)}(x,t) \right| \leq C(d,R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})] + C \|u\|^{1,0} R^{-1}, \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_d.$$

Следовательно, в силу свойств объемного потенциала (см. лемму 2) для любых $0 < s \leq d/2$, $0 < r < r_0$, $R \geq R_0$ вектор-функция $V_{s,R,d}^{(r)}$ обладает следующими свойствами:

$$V_{s,R,d}^{(r)} \in C^{1,0}(\bar{\Omega}_d), \quad (31)$$

$$\left\| V_{s,R,d}^{(r)}; \Omega_d \right\|^{1,0} \leq C(d,R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})] + C \|u\|^{1,0} R^{-1}. \quad (32)$$

Рассмотрим потенциал простого слоя $U_{s,R,d}^{(r)}$. Оценим $\hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)}$. В силу (29) и (32) достаточно оценить вектор-функцию $\theta_{s,R,d}$. Положим

$$\theta_{s,R,d}(t) = \{\partial_x [(u_s(x,t) - \bar{u}(x,t))\zeta_R(x)] + \partial_x [\bar{u}(x,t)\zeta_R(x)]\}_{x=g(t)+d} = \theta_{s,R,d}^1(t) + \theta_{s,R,d}^2(t).$$

При $0 < s \leq d^2/[4(1+\mathcal{M})^2]$, $\mathcal{M} = \omega_1(1)$, $0 < r < r_0$ и $R \geq R_0$ имеем

$$\left| \theta_{s,R,d}^1(t) \right| \leq C \int_{y^2+\tau^2 < 1} |\partial_x [\bar{u}(x-sy, t-s\tau) - \bar{u}(x,t)]\zeta_R(x)|_{x=g(t)+d} dy d\tau \leq C[\omega_0(d;R) + \omega_1(d;R)],$$

$$\begin{aligned} \left| \theta_{s,R,d}^2(t) \right| &= \left| \partial_x [\bar{u}(x,t) \zeta_R(x)] \Big|_{x=g(t)+d} = \\ &= \left| \left[\partial_x \bar{u}(g(t)+d,t) - \partial_x \bar{u}(g(t),t) \right] \zeta_R(g(t)+d) + \bar{u}(g(t)+d,t) \frac{d\zeta_R}{dx}(g(t)+d) \right| \leq \\ &\leq C \omega_0(d; R) + C \|u\|^{1,0} R^{-1}, \quad t \in [d, T-d]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\theta_{s,R,d}; [d, T-d]\|^0 \leq C[\omega_0(d; R) + \omega_1(d; R)] + C \|u\|^{1,0} R^{-1}. \tag{33}$$

Из (22), (29), (31)–(33) следует, что $\hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)} \in C_0[d, T-d]$ и выполнены неравенства

$$\|\hat{\theta}_{s,R,d}^{(r)}; [d, T-d]\|^0 \leq C[\|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R)] + C(d, R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})].$$

Отсюда заключаем, что для решения $\varphi_{s,R,d}^{(r)} \in C_0[d, T-d]$ уравнения (24) имеет место оценка

$$\|\varphi_{s,R,d}^{(r)}; [d, T-d]\|^0 \leq C[\|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R)] + C(d, R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})]$$

и, следовательно,

$$\left| U_{s,R,d}^{(r)}(x,t) \right| \leq C[\|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R)] + C(d, R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})], \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_d.$$

Отсюда и из неравенств (29), (32) при $(x,t) \in \Omega_d$ находим

$$\left| u_{s,R}(x,t) \right| \leq C[\|u\|^{1,0} R^{-1} + \omega_0(d; R) + \omega_1(d; R)] + C(d, R)[\omega_0(s^{1/2}) + \omega_0(r^{1/2})],$$

где постоянная C не зависит от R, d, s и r , а $C(d, R)$ – от s и r . Выбирая последовательно достаточно большое $R \geq R_0$, а затем – достаточно малые $d = d(R)$, $0 < r = r(d, R) < r_0$ и $s_1 = s_1(d, R) \leq d^2/[4(1 + M)^2]$, получаем неравенство (17). Теорема 1 доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Пусть вектор-функция u удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда u является решением второй начально-краевой задачи

$$Lv = 0 \text{ в } \Omega, \quad v(x, 0) = 0, \quad x \geq g(0), \quad \partial_x v(g(t), t) = \theta(t),$$

где $\theta(t) = \partial_x u(g(t), t)$, $t \in [0, T]$, $\theta \in C_0[0, T]$. Из теоремы 1 и результатов [9] следует, что вектор-функция u может быть представлена в виде потенциала простого слоя (8), где $\varphi \in C_0[0, T]$ – единственное в $C[0, T]$ решение интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$-(2A_2(g(t), t))^{-1} \varphi(t) + \int_0^t \partial_x \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = \theta(t), \quad t \in [0, T].$$

Подставляя вектор-функцию (8) в граничное условие задачи (5), получаем, что вектор-плотность φ одновременно является решением интегрального уравнения Вольтерра I рода

$$\int_0^t \Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{34}$$

В силу единственности в $C[0, T]$ решения уравнения (34) (см. [11]) получаем, что $\varphi \equiv 0$. Подставляя найденное решение φ в представление (8), приходим к выводу, что $u \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

2. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. О приложениях принципа максимума к параболическим уравнениям 2-го порядка // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 529–532.
3. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. ж. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
4. Мазья В.Г., Кресин Г.И. О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.
5. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.
6. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Докл. АН. 2020. Т. 494. № 5. С. 5–8.
7. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.
8. Коненков А.Н. Классические решения первой краевой задачи для параболических систем на плоскости // Докл. АН. 2022. Т. 503. С. 67–69.
9. Зейнеддин М. О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини. Дисс. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1992.
10. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 1. С. 7–10.
11. Baderko E.A., Cherepova M.F. Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // *Applicable Analysis*. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
12. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной негладкой плоской области // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 5. С. 625–634.
13. Бадерко Е.А., Стасенко А.А. О гладком решении второй начально-краевой задачи для модельной параболической системы в полуограниченной негладкой области на плоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 3. С. 39–50.
14. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. Принцип максимума и локальная регулярность (в смысле Липшица) решений параболического уравнения 2-го порядка вблизи боковой части параболической границы // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 4. С. 785–788.
15. Камынин Л.И., Химченко Б.Н. Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. ж. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
16. Ворошин Л.Г., Хусид Б.М. Диффузионный массоперенос в многокомпонентных системах. Минск: Наука и техн. 1979. 255 с.
17. Гуров К.П., Карташкин Б.А., Угасте Ю.Э. Взаимная диффузия в многофазных металлических системах. М.: Наука. 1981. 350 с.
18. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
19. Князева А.Г. Перекрестные эффекты в твердых средах с диффузией // Прикл. механ. и техн. физ. 2003. Т. 44. № 3. С. 85–99.
20. Дышин О.А. Разрешимость в гёльдеровых функциях задачи нестационарной фильтрации жидкости в трещиновато-пористом кольцевом пласте // Науч. труды НИПИ Нефтегаз ГНКАР. 2012. № 2. С. 74–81.
21. Семенов М.Ю., Смирнов А.Е., Лашнев М.М., Ступников В.В. Математическая модель вакуумной нитроцементации теплостойкой стали ВКС-10 // Наука и образование, научн. изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 8. С. 75–90.
22. Бадерко Е.А., Сахаров С.И. Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. АН. 2022. Т. 503. С. 26–29.
23. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
24. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. АН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
25. Бадерко Е.А., Черепова М.Ф. Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
26. Камынин Л.И. Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини-Гёльдера // Сиб. матем. ж. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.

27. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. 1. № 7. С. 1–72.
28. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$ -параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.
29. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини. 1992. Деп. ВИНТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
30. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Smoothness in the Dini space of a single layer potential for a parabolic system in the plane // J. Math. Sci. 2018. V. 235. № 2. P. 154–167.
31. *Черепова М.Ф.* О гладкости потенциала объемных масс для параболических систем // Вестн. МЭИ. 1999. № 6. С. 86–97.
32. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Uniqueness theorem for parabolic Cauchy problem // Appl. Anal. 2016. V. 95. № 7. P. 1570–1580.
33. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964. 444 с.