ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 6, с. 1006–1021

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

О КРИТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЯХ ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО 2 + 1-МЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА С ГРАДИЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1)]

М. О. Корпусов[1,*], А. К. Матвеева[1,2,]**

[1] 119992 Москва, Ленинские горы, Кафедра математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

[2] 115409 Москва, Каширское ш.,31, НИЯУ МИФИ кафедра высшей математики, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

**e-mail: matveeva2778@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.05.2022 г.
Переработанный вариант 22.12.2022 г.
Принята к публикации 03.03.2023 г.

Рассматривается задача Коши для одного модельного нелинейного уравнения с градиентной нелинейностью. Для этой задачи Коши в работе доказано существование двух критических показателей $q_1 = 2$ и $q_2 = 3$ таких, что при $1 < q \leqslant q_1$ отсутствует локальное во времени в некотором смысле слабое решение, при $q > q_1$ локальное во времени слабое решение появляется, однако при $q_1 < q \leqslant q_2$ отсутствует глобальное во времени слабое решение. Библ. 17.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466923060133, **EDN:** TUIYYS

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая задача Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u(x,t) = \left|\nabla u(x,t)\right|^q, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T],$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Вывод уравнения (1.1) имеется в работе [1]. Уравнение (1.1) относится к классу нелинейных уравнений типа С.Л. Соболева. Отметим, что исследованию линейных и нелинейных уравнений соболевского типа посвящено много работ. Так, в работах Г.А. Свиридюка, С.А. Загребиной, А.А. Замышляевой [2–4] были рассмотрены в общем виде и в виде примеров начально-краевые задачи для большого многообразия классов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа.

Отметим, что впервые теория потенциала для неклассических уравнений типа С.Л. Соболева была рассмотрена в работе Б.В. Капитонова [5]. В дальнейшем теория потенциала изучалась в работах С.А. Габова и А.Г. Свешникова [6], [7], а также в работах их учеников (см., например, работу Ю.Д. Плетнера [8]).

В классической работе [9] С.И. Похожаева и Э. Митидиери достаточно простым методом нелинейной емкости были получены глубокие результаты о роли так называемых критических показателей. Отметим также работы Е.И. Галахова и О.А. Салиевой [10] и [11]. В настоящей работе мы получили результат о существовании двух критических показателей $q_1 = 2$ и $q_2 = 3$ таких, что в широких классах начальных функций $u_0(x)$ при $1 < q \leqslant q_1$ отсутствуют даже локальные во вре-

[1)]Работа выполнена при поддержке Фонда теоретической физики и математики "БАЗИС" и при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00056) Российский университет дружбы народов.

мени слабые решения задачи Коши (1.1), (1.2), а при $q_1 < q$ локальные во времени слабые решения уже существуют, однако при $q_1 < q \leqslant q_2$ глобальных во времени слабых решений нет – все слабые решения разрушаются за конечное время.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые нами в работах [12–16]. Причем в работе [16] была рассмотрена задача Коши

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta_x u + \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta_x u = |u|^q, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \quad q > 1,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

для которой были тоже получены два критических показателя $q_1 = 3$ и $q_2 = 4$ для аналогичных утверждений, что и в настоящей работе.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символом $[x, y]$ мы обозначаем отрезок, соединяющий точки $x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$[x, y] = \left\{z \in \mathbb{R}^2 : z = sy + (1 - s)x,\ s \in [0,1]\right\}.$$

Символом $|a, b|$ при $a, b \in \mathbb{R}^1$ мы обозначаем следующее множество:

$$|a, b| = \begin{cases} [a, b], & \text{если} \quad a \leqslant b; \\ [b, a], & \text{если} \quad b \leqslant a. \end{cases}$$

Под классом функций $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ мы понимаем ограниченные функции из класса $\mathbb{C}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$, причем это линейное пространство является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f(x,t)\|_{T,0} := \sup_{t \in [0,T]} |f(x,t)|_0, \quad |f(x,t)|_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |f(x,t)|.$$

Под классом функций $\mathbb{C}^{(n+m)}(D \times [0, T])$, $D \subset \mathbb{R}^2$ мы понимаем множество таких функций $u(x, t)$, что

$$D_t^k D_x^\beta u(x,t) \in \mathbb{C}(D \times [0, T]) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant n, \quad 0 \leqslant k \leqslant m,$$

$$D_x^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} D_{x_2}^{\beta_2}, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}_+^2, \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2,$$

причем все смешанные частные производные в (2.1) коммутируют.

Под классом функций $W_{q,\mathrm{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ при $q \geqslant 1$ мы понимаем такие функции $f(x, t)$, что для $f(x,t) \in W_{q,\mathrm{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ и для любого компакта $D \subset \mathbb{R}^2 \times [0, T]$ имеем

$$f(x,t) \in L^q(D),$$

причем существуют слабые производные

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x_j} \in L^q(D), \quad j = 1, 2.$$

Под классом функций $W_{q,\mathrm{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$ при $q \geqslant 1$ понимаем такие функции $f(x, t)$, что для любого компакта $D \subset \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$ имеем

$$f(x,t) \in L^q(D),$$

причем существуют слабые производные

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x_j} \in L^q(D), \quad j = 1, 2.$$

Под классом функций $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ понимаем такие функции $f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, что существуют все слабые частные производные

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2), \quad j = 1, 2.$$

Символами $W^1_q(\mathbb{R}^2)$ и $H^2(\Omega)$ при $q \geqslant 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ обозначаем классические пространства Соболева. Символами $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty))$ стандартным образом обозначаем векторные топологические пространства основных функций с компактными носителями.

Кроме того, символом $\phi'(x,t)$ мы обозначаем для краткости частную производную по переменной t, символом $\phi_{x_1}(x,t)$ – частную производную по переменной x_1, символом $\nabla\phi(x,t)$ – градиент по пространственным переменным.

Рассмотрим линейное подпространство линейного пространства $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций $f(x)$, для которых конечна следующая норма:

$$|f|_B := \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \frac{|f(x)|}{\ln(2 + |x|)} + \sup_{x\in\mathbb{R}^2} (1 + |x|^2)^{1/2} \sum_{j=1}^{2} \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right|.$$

Это нормированное пространство обозначим символом B.

Лемма 1. *Нормированное пространство B является банаховым.*

В дальнейшем мы будем использовать банахово пространство $\mathbb{C}([0,T]; B)$ относительно нормы

$$\|f(x,t)\|_T := \sup_{t\in[0,T]} |f(x,t)|_B.$$

Символом $\mathbb{C}_b((1 + |x|^2)^{\beta/2}; \mathbb{R}^2)$ при $\beta > 0$ обозначаем те функции $f(x)$ из $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)$, для которых $(1 + |x|^2)^{\beta/2} f(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим следующее уравнение в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{D}'_+$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathscr{E}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta\mathscr{E}(x,t) = \delta(x)\delta(t), \quad x = (x_1, x_2),$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Применим преобразование Фурье по переменной $x = (x_1, x_2)$ и получим из (3.1) следующее уравнение в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{D}'_+$:

$$-|k|^2 \frac{\partial\hat{\mathscr{E}}(k,t)}{\partial t} + ik_1|k|^2\hat{\mathscr{E}}(k,t) = \delta(t), \quad k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\hat{\mathscr{E}}(k,t) = -\mathcal{P}\frac{1}{|k|^2} e^{ik_1 t}\theta(t),$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда, а обобщенная функция $\mathcal{P}1/|k|^2$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ определена в § 11.8 работы [18]. Используя результаты § 11.8 работы [18], мы получим равенство

$$\mathscr{E}(x,t) = F^{-1}[\hat{\mathscr{E}}(k,t)](x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\ln|x^*|, \quad x^* = (x_1 - t, x_2).$$

Рассмотрим следующую неоднородную задачу Коши:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T], \quad T > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

где

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t) := \frac{\partial}{\partial t}\Delta\phi(x,t) + \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta\phi(x,t).$$

Доказано, что функция

$$\mathscr{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\ln|x^*|, \quad x^* = (x_1 - t, x_2),$$

является фундаментальным решением оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$ как решение уравнения

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x,t) = \delta(x,t)$$

в смысле пространств обобщенных функций из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2 \times (-\infty,T))$ и $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2 \times (-\infty,+\infty))$. Дадим сначала определение классического решения задачи Коши (3.3), (3.4).

Определение 1. *Классическим локальным во времени решением задачи Коши* (3.3), (3.4) называется функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{3+1}(\mathbb{R}^2 \times (0,T]) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$, удовлетворяющая уравнению (3.3) и начальному условию (3.4) поточечно, причем $u_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^2)$, $f(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$.

Дадим определение локального во времени слабого решения задачи Коши (3.3), (3.4).

Определение 2. Функция $u(x,t) \in W^{1,0}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$ называется *локальным во времени слабым решением задачи Коши* (3.3), (3.4), если для любой функции $\phi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty,T))$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left[(\nabla u(x,t),\nabla\phi'(x,t)) + (\nabla u(x,t),\nabla\phi_{x_1}(x,t))\right]dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^2}(\nabla u_0(x),\nabla\phi(x,0))dx = \int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,t)\phi(x,t)dxdt,$$

где $u_0(x) \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $f(x,t) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$.

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t), & \text{если} \quad t \in [0,T], \\ 0, & \text{если} \quad t < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{f}(x,t) := \begin{cases} f(x,t), & \text{если} \quad t \in [0,T], \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Если $u(x,t)$ – локальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 2, то в смысле распределений из $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2 \times (-\infty,T))$ функция $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет равенству*

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x,t) = \widetilde{f}(x,t) + \Delta u_0(x)\delta(t),$$

где все производные понимаются в смысле распределений.

В силу результата теоремы 11.3 из [18] справедлива следующая основная теорема.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x,t)$, $\Delta u_0(x)$ таковы, что существуют свертки*

$$V_2(x,t) := \mathscr{E}(x,t) * \widetilde{f}(x,t), \quad V_2^{(0)}(x,t) := \mathscr{E}(x,t) * \Delta u_0(x)\delta(t)$$

в смысле $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2 \times (-\infty,T))$. Тогда локальное во времени решение задачи Коши (3.3), (3.4) *в смысле определения* 2 *представимо в виде суммы двух потенциалов*:

$$\tilde{u}(x,t) = V_2(x,t) + V_2^{(0)}(x,t).$$

Из этой теоремы вытекает следующее важное утверждение.

Теорема 2. *Всякое локальное во времени слабое решение* $u(x,t)$ *задачи Коши* (3.3), (3.4) *в смысле определения* 2 *удовлетворяет поточечному равенству*

$$\tilde{u}(x,t) = V_2(x,t) + V_2^{(0)}(x,t) \quad \textit{для почти всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, T),$$

если

$$V_2(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathscr{E}(x-y, t-\tau) \widetilde{f}(y,\tau) dy d\tau \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T)),$$

$$V_2^{(0)}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathscr{E}(x-y,t) \Delta u_0(y) dy \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T)),$$

а $\mathscr{E}(x,t)$ *— фундаментальное решение, определенное равенством* (3.6).

Теперь дадим определение глобального во времени слабого решения следующей задачи Коши:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

где оператор $\mathfrak{M}_{x,t}$ определен равенством (3.5).

Определение 3. Функция $u(x,t) \in W^{1,0}_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$ называется *глобальным во времени слабым решением задачи Коши* (3.8), (3.9), если для любой функции $\phi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty))$ справедливо равенство

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left[(\nabla u(x,t), \nabla \phi'(x,t)) + (\nabla u(x,t), \nabla \phi_{x_1}(x,t)) \right] dx dt + \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi(x,0)) dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,t) \phi(x,t) dx dt,$$

где $u_0(x) \in W^1_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $f(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$.

Справедливо следующее утверждение, аналогичное утверждению теоремы 2.

Теорема 3. *Всякое глобальное во времени слабое решение* $u(x,t)$ *задачи Коши* (3.8), (3.9) *в смысле определения* 3 *удовлетворяет поточечному равенству*

$$\tilde{u}(x,t) = V_2(x,t) + V_2^{(0)}(x,t) \quad \textit{для почти всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty),$$

если

$$V_3(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathscr{E}(x-y, t-\tau) \widetilde{f}(y,\tau) dy d\tau \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty)),$$

$$V_2^{(0)}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathscr{E}(x-y,t) \Delta u_0(y) dy \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty)),$$

а $\mathscr{E}(x,t)$ *— фундаментальное решение, определенное равенством* (3.6).

Отметим, что в дальнейшем мы докажем следующее утверждение.

Лемма 3. *Если* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}_b(\mathbb{R}^2)$, *причем найдутся такие постоянные* $a > 0$ *и* $\beta > 2$, *что выполнено неравенство*

$$|\Delta u_0(x)| \leqslant \frac{a}{(1 + |x|^2)^{\beta/2}} \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

то справедливы равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathscr{E}(x-y,t) \Delta u_0(y) dy = \frac{\theta(t)}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Delta u_0(y) \ln |x^* - y| dy = \theta(t) u_0(x^*),$$

где $x^* = (x_1 - t, x_2)$.

Замечание 1. При условиях леммы 3 и теорем 2, 3 равенства (3.7) и (3.10) примут следующий вид:

$$\tilde{u}(x,t) = \theta(t)u_0(x_1 - t, x_2) + \theta(t)\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\widetilde{f}(y,\tau)dyd\tau.$$

Определение 4. Будем говорить, что функция

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^2)) \cap \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(3)}(\mathbb{R}^2))$$

является *регулярной в окрестности бесконечно удаленной точки*, если для всех $t \in [0,T]$ выполнены неравенства

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{A_1(T)}{|x|}, \quad \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right| \leqslant \frac{A_2(T)}{|x|^{\alpha}\ln|x|}, \quad |\Delta_x u(x,t)| \leqslant \frac{A_3(T)}{|x|^{\alpha}\ln|x|},$$

$$|\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)| \leqslant \frac{A_4(T)}{|x|^{2+\alpha}\ln|x|}$$

при $|x| \to +\infty$, и $\alpha > 1$, где $i, j = 1,2$ и $A_m(T) > 0$ — некоторые постоянные при $m = 1,2,3,4$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Любая функция*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b^{(3)}(\mathbb{R}^2))$$

регулярная в окрестности бесконечно удаленной точки в смысле определения 4 *удовлетворяет уравнению*

$$u(x,t) = u_0(x_1 - t, x_2) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}\ln\sqrt{(x_1 - y_1 - t + \tau)^2 + (x_2 - y_2)^2}\,\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)dyd\tau$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T]$*, где* $T > 0$ *может быть сколь угодно большим, чтобы только было выполнено условие* (3.12), *где оператор* $\mathfrak{M}_{x,t}$ *определен равенством*

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) := \frac{\partial}{\partial t}\Delta u + \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u.$$

Доказательство в целом повторяет аналогичное утверждение из работы [16].

Рассмотрим потенциал

$$U_\beta(x,t) := U_\beta[\rho](x,t) := \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^2}G_\beta(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau,$$

$$G_\beta(x,y,t-\tau) := \frac{\ln|x^* - y|}{(1+|y|^2)^{\beta/2}}, \quad x^* = (x_1 - t + \tau, x_2).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Для любой плотности* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2))$ *объемный потенциал* $U_\beta(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];B) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$ *при* $\beta > 2$*, а определение банахова пространства B дано в разд.* 3, *причем справедлива оценка*

$$\|U_\beta(x,t)\|_T \leqslant Tc_1(T)\sup_{t\in[0,T]}|\rho(x,t)|_0, \quad \|v(x,t)\|_T := \sup_{t\in[0,T]}|v(x,t)|_B,$$

а функция $c_1 = c_1(T) > 0$ *и является монотонно неубывающей, ограниченной.*

Доказательство в целом повторяет доказательство аналогичного утверждения работы [16].

4. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x,t) = A(u)(x,t), \quad A(u)(x,t) = u_0(x_1 - t, x_2) + U_q(x,t),$$

$$U_q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln|x^* - y|}{(1+|y|^2)^{q/2}}\rho(y,\tau)dyd\tau, \quad \rho(x,t) = (1+|y|^2)^{q/2}|\nabla u(x,t)|^q.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];B)$, *то* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2))$.

Доказательство. Заметим, что функцию $\rho(x,t)$ можно переписать в следующем виде:

$$\rho(x,t) = \left(\sum_{j=1}^2\left((1+|x|^2)^{1/2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right)^2\right)^{q/2} = (z_1^2(x,t) + z_2^2(x,t))^{q/2},$$

$$z_j(x,t) = (1+|x|^2)^{1/2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)), \quad j = 1,2.$$

Поэтому

$$z_1^2(x,t) + z_2^2(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)) \Rightarrow (z_1^2(x,t) + z_2^2(x,t))^{q/2} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)).$$

Лемма доказана.

Справедливо неравенство

$$|\rho_1(x,t) - \rho_2(x,t)| \leqslant q\max\left\{[(1+|x|^2)^{1/2}|\nabla u_1|]^{q-1}, [(1+|x|^2)^{1/2}|\nabla u_2|]^{q-1}\right\}\times$$
$$\times\left|(1+|x|^2)^{1/2}\nabla u_1 - (1+|x|^2)^{1/2}\nabla u_2\right|, \quad q > 1,$$

где

$$\rho_j(x,t) = (1+|x|^2)^{q/2}|\nabla u_j(x,t)|^q, \quad j = 1,2.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия*

$$u_0(x), \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_1} \in B,$$

тогда для каждого $T > 0$

$$u_0(x^*) \in \mathbb{C}([0,T];B), \quad x^* = (x_1 - t, x_2).$$

Доказательство. Если $u_0(x) \in B$, то $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$ и

$$|u_0|_B := \left|\frac{u_0(x)}{\ln(2+|x|)}\right|_0 + \sum_{j=1}^2\left|(1+|x|^2)^{1/2}\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}\right|_0 < +\infty.$$

Но тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{u_0(x^*)}{\ln(2+|x|)}\right| + \sum_{j=1}^2\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\left|(1+|x|^2)^{1/2}\frac{\partial u_0(x^*)}{\partial x_j}\right| \leqslant \left|\frac{u_0(x^*)}{\ln(2+|x^*|)}\right|_0 \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T]}\left|\frac{\ln(2+|x^*|)}{\ln(2+|x|)}\right| +$$
$$+ \sum_{j=1}^2\left|(1+|x^*|^2)^{1/2}\frac{\partial u_0(x^*)}{\partial x_j}\right|_0 \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,T]}\left|\frac{(1+|x|^2)^{1/2}}{(1+|x^*|^2)^{1/2}}\right| \leqslant A_1(T) < +\infty.$$

Аналогичным образом получаем оценку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{1}{\ln(2+|x|)}\frac{\partial u_0(x^*)}{\partial t}\right| + \sum_{j=1}^{2}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\left|(1+|x|^2)^{1/2}\frac{\partial^2 u_0(x^*)}{\partial x_j \partial t}\right| \leqslant A_2(T) < +\infty,$$

поскольку

$$\frac{\partial u_0(x^*)}{\partial t} = -\frac{\partial u_0(x^*)}{\partial x_1}.$$

Справедливы выражения

$$u_0(x_1 - t_2, x_2) - u_0(x_1 - t_1, x_2) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u_0(x_1 - s, x_2)}{\partial s}ds, \quad t_2 > t_1,$$

$$|u_0(x_1 - t_2, x_2) - u_0(x_1 - t_1, x_2)|_B \leqslant \int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\partial u_0(x_1 - s, x_2)}{\partial s}\right|_B ds \leqslant A_2(T)|t_2 - t_1|.$$

Следовательно, $u_0(x^*) \in \mathbb{C}([0,T]; B)$. Лемма доказана.

В силу результата теоремы 5 и леммы 5 приходим к следующему утверждению.

Лемма 6. *Оператор* $A(u)(x,t)$, *определенный равенством* (4.1), *при* $q > 2$ *действует следующим образом*:

$$A : \mathbb{C}([0,T]; B) \to \mathbb{C}([0,T]; B),$$

если $u_0(x), u_{0x_1}(x) \in B$.

Осталось воспользоваться стандартным алгоритмом метода сжимающих отображений и продолжения решения интегрального уравнения (4.1) во времени в классе решений $\mathbb{C}([0,T]; B)$ и в результате получить следующий результат.

Теорема 6. *При* $q > 2$ *для любой начальной функции* $u_0(x)$ *такой, что* $u_0(x), u_{0x_1} \in B$ *найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(u_0) > 0$, *что для любого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (4.1) *в классе* $u(x,t) \in \mathbb{C}([0,T]; B)$, *причем либо* $T_0 = +\infty$ *либо* $T_0 < +\infty$ *и в этом случае справедливо предельное свойство*

$$\lim_{t\uparrow T_0}|u(x,t)|_B = +\infty.$$

5. КРИТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta u(x,t) = |\nabla u(x,t)|^q, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T], \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad q > 1. \tag{5.2}$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (5.1), (5.2).

Определение 5. Функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{3+1}(\mathbb{R}^2 \times (0,T]) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$, удовлетворяющая уравнению (5.1) и начальному условию (5.2) поточечно, называется *классическим решением задачи Коши* (5.1), (5.2).

Теперь дадим определение локального во времени слабого решения задачи Коши (5.1), (5.2).

Определение 6. Функция $u(x,t) \in W^{1,0}_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$ называется *локальным во времени слабым решением задачи Коши* (5.1), (5.2), если для любой функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty,T))$ справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Big[(\nabla u(x,t), \nabla\phi'(x,t)) + (\nabla u(x,t), \nabla\phi_{x_1}(x,t))\Big] dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla\phi(x,0))dx =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x,t)|^q \, \phi(x,t)dxdt, \quad u_0(x) \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2).$$

Теперь дадим определение глобального во времени слабого решения задачи Коши (5.1), (5.2).

Определение 7. Функция $u(x,t) \in W^{1,0}_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty))$ называется *глобальным во времени слабым решением задачи Коши* (5.1), (5.2), если для любой функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty,+\infty))$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \big[(\nabla u(x,t), \nabla\phi'(x,t)) + (\nabla u(x,t), \nabla\phi_{x_1}(x,t))\big] dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla\phi(x,0))dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x,t)|^q \, \phi(x,t)dxdt, \quad u_0(x) \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2).$$

Справедлива важная вспомогательная лемма.

Лемма 7. *Пусть $u(x,t)$ — локальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения* 6. *Тогда для любых* $\phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ *и* $\phi_2(t) \in \mathbb{C}^{(1)}_0[0,T]$ *выполнено равенство* (5.3), *в котором* $\phi(x,t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Всякое глобальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения* 7 *является локальным во времени слабым решением задачи Коши в смысле определения* 6.

Доказательство основано на том, что имеет место вложение $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty,T)) \subset \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty,+\infty))$, если функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty,T))$ продолжить нулем при $t \geqslant T$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть $u(x,t)$ — глобальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения* 7. *Тогда для любых* $\phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ *и* $\phi_2(t) \in \mathbb{C}^{(1)}_0[0,+\infty)$ *справедливо равенство* (5.4) *при* $\phi(x,t) \in \phi_1(x)\phi_2(t)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.

Дадим определение класса начальных функций.

Определение 8. Функция $u_0(x) \in U$, если $u_0(x) \in W^1_q(\mathbb{R}^2)$ и найдутся такие $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и $R_0 > 0$, что $u_0(x) \in H^2(O(x_0,R_0))$ и

$$\mu\{x \in O(x_0,R_0) : \Delta_2 u_0(x) \neq 0\} > 0,$$

где μ — это стандартная мера Лебега в $\mathbb{R}^2$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Если* $u_0(x) \in U$ *и* $q \in (1,2]$, *то не существует локального во времени слабого решения задачи Коши ни для какого* $T > 0$.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – локальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 5. Тогда воспользуемся результатом леммы 7.

Доказательство этого утверждения основано на применении метода нелинейной емкости С.И. Похожаева и Э. Митидиери (см. [9]) и специальном выборе пробной функции $\phi(x,t)$ в равенстве (5.3) определения 6. Именно, возьмем

$$\phi(x,t) = \phi_T(t)\phi_R(x), \quad \phi_T(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda}, \quad \lambda > \max\{2, q'\},$$

$$\phi_R(x) = \phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad \phi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s \in [0,1/2], \\ 0, & \text{если} \quad s \geqslant 1, \end{cases} \quad \phi_0(s) \in \mathbb{C}_0^{\infty}[0,+\infty),$$

где $\phi_0(s)$ – это монотонно невозрастающая функция. Справедливы следующие оценки, основанные на применении неравенства Гёльдера с соответствующими показателями:

$$\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u(x,t), \nabla\phi'(x,t))dxdt\right| \leqslant \frac{\lambda}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-1}|\nabla u(x,t)||\nabla\phi_R(x)|dxdt =$$

$$= \frac{\lambda}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q}|\nabla u(x,t)|\phi_R^{1/q}(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q'-1}\frac{|\nabla\phi_R(x)|}{\phi_R^{1/q}(x)}dxdt \leqslant \frac{\lambda}{T}c_1(R,T)I_R^{1/q},$$

где

$$I_R := \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\phi_T(t)\phi_R(x)|\nabla u|^q\,dxdt,$$

$$c_1(R,T) := \left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-q'}\frac{|\nabla\phi_R(x)|^{q'}}{\phi_R^{q'/q}(x)}dxdt\right)^{1/q'} = \left(\frac{T}{\lambda-q'+1}\right)^{1/q'}c_2R^{(2-q')/q'}, \quad c_2 > 0;$$

$$\left|\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\left(\nabla u(x,t), \nabla\phi_{x_1}(x,t)\right)dxdt\right| \leqslant \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}|\nabla u(x,t)|\left|\nabla\phi_{x_1}(x,t)\right|dxdt \leqslant c_3(R,T)I_R^{1/q},$$

$$c_3(R,T) := \left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}\frac{|\nabla\phi_{Rx_1}|^{q'}}{\phi_R^{q'/q}}dxdt\right)^{1/q'} = c_4\left(\frac{T}{1+\lambda}\right)^{1/q'}R^{(2-2q')/q'}, \quad c_4 > 0;$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u_0(x), \nabla\phi_R(x))dx\right| \leqslant \|\nabla u_0(x)\|_q\|\nabla\phi_R(x)\|_{q'} = c_5R^{(2-q')/q'}\|\nabla u_0\|_q, \quad c_5 > 0.$$

Из равенства (5.3), примененного с пробной функцией (5.5), и из оценок (5.6), (5.8) и (5.10) мы получим неравенство

$$\frac{\lambda}{T}c_1(R,T)I_R^{1/q} + c_3(R,T)I_R^{1/q} + c_5R^{(2-q')/q'}\|\nabla u_0\|_q \geqslant I_R.$$

Теперь воспользуемся следующим трехпараметрическим неравенством Юнга:

$$ab \leqslant \varepsilon a^q + \frac{1}{q'(\varepsilon q)^{q'/q}}b^{q'}, \quad a,b \geqslant 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Применим это неравенство к (5.11) с $\varepsilon = 1/4$. Тогда получим неравенство

$$\frac{2}{q'(q/4)^{q'/q}}\left[\left(\frac{\lambda}{T}c_1(R,T)\right)^{q'} + (c_3(R,T))^{q'}\right] + 2c_5R^{(2-q')/q'}\|\nabla u_0\|_q \geqslant I_R.$$

Положим теперь $R = N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим последовательность функций

$$H_N(x,t) := |\nabla u(x,t)|^q \phi_N(x)\phi_T(t), \quad H_{N+1}(x,t) \geqslant H_N(x,t)$$

для почти всех $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T]$. Далее требуем выполнения неравенств

$$q > 1 \quad \text{и} \quad 1 - q' \leqslant 0 \Rightarrow 1 < q \leqslant 2.$$

Тогда из (5.7)–(5.12) вытекает, что правая часть неравенства (5.12) ограничена некоторой константой $K > 0$, следовательно,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} H_N(x,t)dxdt \leqslant K < +\infty.$$

И поэтому в силу теоремы Беппо Леви приходим к выводу о том, что

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} H_N(x,t)dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \phi_T(t)|\nabla u(x,t)|^q dxdt \leqslant K < +\infty.$$

Рассмотрим отдельно случаи $1 < q < 2$ и $q = 2$. В случае $1 < q < 2$ из формулы (5.12) и оценок (5.7), (5.9) приходим к выводу о том, что

$$I_N := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \phi_T(t)\phi_N(x)|\nabla u|^q dxdt \to +0 \quad \text{при} \quad N \to +\infty.$$

Случай $q = 2$ является критическим и рассматривается, как все критические случаи из работы [9].

Таким образом, при $q \in (1,2]$ приходим к равенству

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x,t)|^q \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda dxdt = 0 \Rightarrow u(x,t) = F(t) \quad \text{для почти всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T].$$

После подстановки полученного равенства $u(x,t) = F(t)$ в равенство (5.3) мы получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla\phi(x,0))dx = 0$$

для всех функций $\phi(x,t)$, удовлетворяющих условиям определения 6. Поэтому для произвольных функций $\phi(x,t)$ вида

$$\phi(x,t) = \phi_1(x)\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \quad \phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \operatorname{supp}\phi_1(x) \subset O(x_0, R_0)$$

в классе $u_0(x) \in U$ после интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\int_{O(x_0,R_0)} \Delta u_0(x)\phi_1(x)dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \phi_1(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(O(x_0,R_0)).$$

В силу основной леммы вариационного исчисления приходим к выводу о том, что

$$\Delta u_0(x) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in O(x_0, R_0),$$

что противоречит определению класса $U \ni u_0(x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть* $2 < q \leqslant 3$ *и* $u_0(x) \in U$. *Тогда не существует глобального во времени слабого решения задачи Коши в смысле определения* 7.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – глобальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 7. Выберем пробную функцию из определения 7:

$$\phi(x,t) = \phi_0\left(\frac{|x|^2 + t^2}{R^2}\right), \quad R > 1,$$

$$\phi_0(s) := \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ 0 & \text{при} \quad s \geqslant 1, \end{cases} \quad \phi_0(s) \in \mathbb{C}_0^{(\infty)}[0,+\infty),$$

где функция $\phi_0(s)$ – монотонно невозрастающая. Справедливы следующие оценки:

$$\left|\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u(x,t), \nabla\phi'(x,t))dxdt\right| \leqslant J_R^{1/q} c_6(R),$$

$$\left|\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3} \big(\nabla u(x,t), \nabla\phi_{x_1}(x,t)\big)dxdt\right| \leqslant J_R^{1/q} c_7(R),$$

где

$$J_R := \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} \phi(x,t)\left|\nabla u(x,t)\right|^q dxdt,$$

$$c_6(R) := \left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla\phi'(x,t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)} dxdt\right)^{1/q'} = c_{60}R^{(3-2q')/q'}, \quad c_{60} > 0,$$

$$c_7(R) := \left(\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla\phi_{x_1}(x,t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)} dxdt\right)^{1/q'} = c_{70}R^{(3-2q')/q'}, \quad c_{70} > 0,$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla\phi(x,0))dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^2} u_0(x)\Delta\phi(x,0)dx\right| \leqslant \|u_0(x)\|_q\, c_8(R),$$

$$c_8(R) := \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\Delta\phi(x,0)|^{q'} dx\right)^{1/q'} = c_{80}R^{(2-2q')/q'}, \quad c_{80} > 0.$$

Теперь потребуем, чтобы были выполнены неравенства $q > 1$ и $3 - 2q' \leqslant 0$, тогда верно $1 < q \leqslant 3$. Заметим, что при выполнении этих неравенств выполнено неравенство $2 - 2q' < 0$. Таким образом, из оценок (5.13)–(5.15) и равенства (5.4) получим оценку

$$J_R^{1/q} c_6(R) + J_R^{1/q} c_7(R) + \|u_0(x)\|_q\, c_8(R) \geqslant J_R.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения при доказательстве теоремы 8.

В результате предельного перехода при $R = N \to +\infty$ в неравенстве (5.16) мы приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla\phi(x,0))dx = 0$$

для всех функций $\phi(x,t)$, удовлетворяющих условиям определения 7. Воспользуемся результатом леммы 8. Возьмем в качестве функции $\phi(x,t)$ функцию вида $\phi_1(x)\phi_2(t)$, где

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{T}\right)^2 & \text{при} \quad t \in [0,T], \\ 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant T, \end{cases} \quad \phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Несложно заметить, что $\phi(x,t) = \phi_1(x)\phi_2(t) \in \mathbb{C}_0^{2+1}(\mathbb{R}^2 \times [0,+\infty))$. Тогда из равенства (5.17) получим

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi_1(x))dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Далее точно так же, как при доказательстве теоремы 8, из (5.18) получим противоречие с тем, что $u_0(x) \in U$.

Теорема доказана полностью.

Теперь мы докажем результат о существовании локального во времени слабого решения задачи Коши в смысле определения 6.

Теорема 10. *Пусть* $q > 2$ $u_0(x), u_{0x_1}(x) \in B$ *и найдутся такие постоянные* $a > 0$ *и* $\beta > 2$, *что справедливо следующее неравенство*:

$$|\Delta u_0(x)| \leqslant \frac{a}{(1+|x|^2)^{\beta/2}} \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда существует единственное локальное во времени слабое решение задачи Коши (5.1), (5.2) в смысле определения 6.

Доказательство. В силу условий теоремы выполнены все условия теоремы 6 о существовании непродолжаемого во времени решения интегрального уравнения (4.1) в классе $v(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];B)$ для любого $T \in (0,T_0)$, причем если $T_0 < +\infty$, то выполнено предельное свойство (4.2):

$$u(x,t) = u_0(x_1 - t, x_2) + U_q(x,t),$$

$$U_q(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y,\tau)|^q \ln|x^* - y| dy d\tau, \quad x^* = (x_1 - t + \tau, x_2).$$

В силу результатов теоремы 5 справедливы следующие выражения:

$$\frac{\partial U_q(x,t)}{\partial x_j} = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \ln|x^* - y| |\nabla u(y,\tau)|^q dy d\tau,$$

$$\frac{\partial U_q(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y,t)|^q \ln|x-y| dy + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t} \ln|x^* - y| |\nabla u(y,\tau)|^q dy d\tau.$$

Лемма 9. *Справедливо поточечное равенство*

$$\frac{\partial U_q(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial U_q(x,t)}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y,t)|^q \ln|x-y| dy.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{\partial U_q(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial U_q(x,t)}{\partial x_1} = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y,t)|^q \ln|x-y| dy +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2 \setminus O(x^*,\varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\ln|x^* - y| + \frac{\partial}{\partial x_1}\ln|x^* - y|\right) |\nabla u(y,\tau)|^q dy d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{O(x^*,\varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\ln|x^* - y| + \frac{\partial}{\partial x_1}\ln|x^* - y|\right) |\nabla u(y,\tau)|^q dy d\tau =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y,t)|^q \ln|x-y| dy + \int_0^t \int_{O(x^*,\varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\ln|x^* - y| + \frac{\partial}{\partial x_1}\ln|x^* - y|\right) |\nabla u(y,\tau)|^q dy d\tau,$$

где мы воспользовались равенством

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\ln|x^*-y|=0 \quad \text{при} \quad y\neq x^*=(x_1-t+\tau,x_2).$$

Осталось заметить, что

$$\left|\int_0^t\int_{O(x^*,\varepsilon)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\ln|x^*-y|+\frac{\partial}{\partial x_1}\ln|x^*-y|\right)|\nabla u(y,\tau)|^q\,dyd\tau\right|$$

при $\varepsilon\to+0$. Лемма доказана.

Поскольку $u_0(x)\in\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$, то справедливо следующее поточечное равенство:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u_0(x_1-t,x_2)=0 \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^2\times[0,+\infty).$$

Сначала сформулируем следующий классический результат, который непосредственно вытекает из работы [17].

Лемма 10. *Пусть* $\rho_0(x)\in\mathbb{C}_b((1+|x|^2)^{\beta/2};\mathbb{R}^2)$ *при* $\beta>2$. *Тогда классический объемный логарифмический потенциал*

$$W_0(x):=W_0[\rho_0](x):=\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|\rho_0(y)dy$$

удовлетворяет равенству

$$\langle\Delta_x W_0(x),\phi(x)\rangle=\langle\rho_0(x),\phi(x)\rangle$$

для любых $\phi(x)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, *где* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— это скобки двойственности между* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ *и* $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$, *а оператор* Δ_x *понимается в смысле производных обобщенных функций.*

Применим это утверждение к потенциалу

$$W_0(x,t):=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u(y,t)|^q\ln|x-y|dy$$

и с учетом (5.22) из (5.20) получим равенство

$$\left\langle\Delta_x\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)U_q(x,t),\phi(x,t)\right\rangle=\left\langle|\nabla u(x,t)|^q,\phi(x,t)\right\rangle$$

для любой функции $\phi(x,t)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2\times(-\infty,T)$ и для всех $t\in[0,T]$. Отсюда с учетом (5.19) и (5.21) приходим к выводу о том, что справедливо равенство

$$\left\langle\Delta_x\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u(x,t),\phi(x,t)\right\rangle=\left\langle|\nabla u(x,t)|^q,\phi(x,t)\right\rangle$$

для любой функции $\phi(x,t)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^2\times(-\infty,T))$ и для всех $t\in[0,T]$, где $u(x,t)$ — решение интегрального уравнения (5.19) такого класса, что $(1+|x|^2)^{1/2}u(x,t)\in\mathbb{C}_b^{(1,0)}((1+|x|^2)^{1/2};\mathbb{R}^2\times[0,T])$ для всех $T\in(0,T_0)$. Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u(x,t),\Delta_x\phi(x,t)\right\rangle=\left\langle|\nabla u(x,t)|^q,\phi(x,t)\right\rangle,$$

которое можно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u(x,t)\Delta\phi(x,t)dx=\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u(x,t)|^q\,\phi(x,t)dx.$$

Теперь проинтегрируем обе части равенства (5.23) по $t \in [0,T]$ и после интегрирования по частям получим равенство

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\left[u(x,t)\Delta\phi'(x,t) + u(x,t)\Delta\phi_{x_1}(x,t)\right]dxdt - \int_{\mathbb{R}^2}\Delta u_0(x)\phi(x,0)dx = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\phi(x,t)\left|\nabla u(x,t)\right|^q dxdt$$

для любых $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2\times(-\infty,T)$. В левой части этого равенства можно снова проинтегрировать по частям, поскольку $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$ и $U_q(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2\times[0,T])$, поэтому $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2\times[0,T])$, и в результате получим равенство

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\left[\left(\nabla u(x,t),\nabla\phi'(x,t)\right) + \left(\nabla u(x,t),\nabla\phi_{x_1}(x,t)\right)\right]dxdt + \int_{\mathbb{R}^2}\left(\nabla u_0(x),\nabla\phi(x,0)\right)dx =$$

$$= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\phi(x,t)\left|\nabla u(x,t)\right|^q dxdt \quad \text{для любых} \quad \phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2\times(-\infty,T)).$$

Таким образом, построенное $u(x,t)$ является локальным во времени слабым решением задачи Коши в смысле определения 6.

Теперь докажем единственность построенного локального во времени слабого решения задачи Коши. В силу теоремы 2, леммы 3 всякое слабое решение задачи Коши в смысле определения 6 должно удовлетворять уравнению (3.11), которое в нашем случае имеет вид

$$\tilde{u}(x,t) = \theta(t)u_0(x_1 - t, x_2) + \theta(t)\int_{-\infty}^t\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{E}(x-y,t-\tau)\widetilde{\left|\nabla u\right|^q}(y,\tau)dyd\tau,$$

где $\mathcal{E}(x,t)$ – фундаментальное решение, определенное равенством (3.6). Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{если} \quad t \in [0,T], \\ 0, & \text{если} \quad t < 0, \end{cases}$$

где $u(x,t)$ – это найденное единственное решение интегрального уравнения (4.1). Заметим, что

$$\widetilde{\left|\nabla u\right|^q}(x,t) = \begin{cases} \left|\nabla u(x,t)\right|^q, & \text{если} \quad t \in [0,T], \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Но тогда построенная функция $\tilde{u}(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2\times(-\infty,T))$ является единственным решением интегрального уравнения (5.24) в классе функций, равных нулю при $t < 0$. Отсюда вытекает единственность локального во времени слабого решения в смысле определения 6.

Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Багдоев Г.А., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Физматлит, 2009. 320 с.
2. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. Р. 47–74.
3. *Загребина С.А.* Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)-радиальным оператором // Матем. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. № 2. С. 39–48.
4. *Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A.* Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. мех. физ. 2016. Т. 8. № 4. С. 5–16.
5. *Капитонов Б.В.* Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109(151). № 4(8). С. 607–628.
6. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. С. 344.
7. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998. С. 448.
8. *Плетнер Ю.Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
9. *Похожаев С.И., Митидиери Э.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.

10. *Galakhov E.I.* Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 252. № 1. P. 256–277.
11. *Галахов Е.И., Салиева О.А.* Об отсутствии неотрицательных монотонных решений для некоторых коэрцитивных неравенств в полупространстве // Современ. матем. Фундамент. направл. 2017. Т. 63. № 4. С. 573–585.
12. *Корпусов М.О.* Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79. № 5. С. 103–162.
13. *Корпусов М.О.* О разрушении решений нелинейных уравнений типа уравнения Хохлова–Заболотской // Теор. и матем. физ. 2018. Т. 194. № 3. С. 403–417.
14. *Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Panin A.A.* Instantaneous blow-up versus local solvability of solutions to the Cauchy problem for the equation of a semiconductor in a magnetic field // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 17. P. 8070–8099.
15. *Корпусов М.О., Панин А.А.* Мгновенное разрушение versus локальная разрешимость задачи Коши для двумерного уравнения полупроводника с тепловым разогревом // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83. № 6. С. 1174–1200.
16. *Корпусов М.О., Матвеева А.К.* О критических показателях для слабых решений задачи Коши для одного нелинейного уравнения составного типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 4. С. 96–136.
17. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики, М.: Наука, 1988. С. 512.