ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 5, с. 765–777

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.633.6

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДВУХ ФУНКЦИЙ В МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ, ОДИН КОНЕЦ КОТОРОЙ ПОМЕЩЕН В ПОДВИЖНУЮ СРЕДУ[1)]

© 2023 г. О. А. Андреянова[1,*], А. Ю. Щеглов[2,**]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

[2] 518172 Провинция Гуандун, Шэньчжэнь, район Лунган, Даюньсирьчэн, ул. Гоцзидасюеюань, 1, Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне, Китай

*e-mail: oksashka@gmail.com

**e-mail: shcheg@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 05.08.2022 г.
Переработанный вариант 23.10.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассматривается обратная задача определения коэффициентов в модели малых поперечных колебаний однородной конечной струны, один конец которой помещен в подвижную среду, а другой свободен. Колебания моделируются уравнением гиперболического типа на отрезке. Одно краевое условие имеет неклассический вид. Дополнительной информацией для решения обратной задачи являются значения решения прямой задачи при известном фиксированном значении пространственного аргумента. В рамках обратной задачи определения требуют функция в неклассическом краевом условии и функциональный множитель в правой части уравнения. Доказаны теорема единственности и теорема существования решения обратной задачи. Для прямой задачи установлены условия однозначной разрешимости в виде, упрощающем исследование обратной задачи. Для численного решения обратной задачи предложен алгоритм поэтапного раздельного восстановления искомых функций с использованием метода последовательных приближений для решения интегральных уравнений. Библ. 23.

Ключевые слова: итерационный алгоритм, уравнение колебаний, обратная задача.

DOI: 10.31857/S0044466923050046, **EDN:** PJPDAD

1. ВВЕДЕНИЕ. МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть при положительных значениях a, β, T, $l < aT$, прямая задача имеет вид:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x)g(t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$-\beta u_x(x,t)\big|_{x=0} = \mu(t) - u_t(x,t)\big|_{x=0}, \quad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u_x(x,t)\big|_{x=l} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

где $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t \le T\}$. Уравнение (1) и краевые условия (2), (3) описывают изменение амплитуды $u(x,t)$ малых поперечных колебаний струны, левый конец которой “испытывает сопротивление внешней среды, пропорциональное скорости ее движения” (см. [1, Гл. II, § 1, п. 7]), а правый конец струны не закреплен. Произведение функций $f(x)g(t)$ определяет линейную плотность силы, действующей на боковую поверхность струны, коэффициент a – скорость распространения колебаний вдоль струны, коэффициент β – натяжение (сила натяжения) струны по направлению ее оси, функция $\mu(t)$ – скорость внешней среды в плоскости поперечных колебаний струны при $x = 0$. Условия (4) являются начальными.

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке National Natural Science Foundation of China (No. 12171036) и Beijing Natural Science Foundation (Key Project No. Z210001).

Задача (1)–(4) может рассматриваться как модель неравномерного движения бура в глубоких нефтяных скважинах, что определяет интерес к исследованию задач в схожих постановках [2], [3]. Идентификация параметров в задачах для уравнений колебаний привлекает повышенное внимание при анализе геофизических процессов [4–7], в задачах оптимального управления [8–10], в постановках обратных задач [11–14]. Численное решение таких задач сопровождается использованием проработанных, ориентированных на приближенное решение некорректных задач, алгоритмов [15], [16] для компьютерной обработки экспериментальных данных.

Пусть в рамках обратной задачи при заданных положительных значениях a, β, T, $l < aT$, известны функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$ при $x \in [0,l]$ и $t \in [0,T]$, и дополнительно задана функция $h(t)$, $t \in [0,T]$, такая, что

$$h(t) = u(l,t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

где $u(x,t)$ – решение задачи (1)–(4). В рамках обратной задачи пусть требуется восстановить функции $f(s)$ и $\mu(t)$ при $s \in [0,l]$, $t \in [0,\widehat{T}]$, $\widehat{T} = T - (l/a)$, и затем получить решение $u(x,t)$ прямой задачи (1)–(4) на множестве $\Lambda_{l,T} = \{(x,t) : 0 \le t \le T - (l-x)/a,\ 0 \le x \le l\}$, так, чтобы найденные функции $f(s)$, $\mu(t)$ и $u(x,t)$ удовлетворяли уравнению (1) на множестве $\Lambda_{l,T}$, условию (2) при $t \in [0,\widehat{T}]$, условиям (3), (5) при $t \in [0,T]$ и начальным условиям (4). Множество $\Lambda_{l,T} \subset \bar{Q}_T$, где $\bar{Q}_T$ – замыкание множества Q_T, имеет границу в форме прямоугольной трапеции с основаниями в виде отрезков, на одном из которых $x = 0$ и $t \in [0,\widehat{T}]$, и на другом $x = l$ и $t \in [0,T]$. На перпендикулярной основаниям боковой стороне трапеции задаются начальные условия (4) при $t = 0$ $\forall x \in [0,l]$. Другая, наклонная, боковая сторона трапеции, ограничивающей множество $\Lambda_{l,T}$, является частью характеристики уравнения (1), соединяющей вершины трапеции с координатами $(x,t) = (l,T)$ и $(x,t) = (0,\widehat{T})$.

Выделим достаточные условия существования и единственности решения прямой задачи в форме, позволяющей перейти к исследованию условий единственности и условий существования решения обратной задачи. На основе анализа решения обратной задачи построим итерационный алгоритм ее приближенного решения.

2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Теорема 1. *Если заданы функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$, $g(t)$, $\mu(t)$ *такие, что значение* $\mu'(0)$ *существует, и выполняются условия*

$$\varphi(x) \in C^2[0,l], \quad \psi(x) \in C^1[0,l], \quad g(t) \in C^1[0,T], \quad \varphi'(l) = \psi'(l) = 0, \tag{6}$$

$$f(x) \in C[0,l], \quad \mu(t) \in C[0,T], \quad \mu(0) = \psi(0) - \beta\varphi'(0), \quad \mu'(0) = a^2\varphi''(0) - \beta\psi'(0) + f(0)g(0), \tag{7}$$

то задача (1)–(4) *имеет единственное решение* $u(x,t) \in C^2(\bar{Q}_T)$.

Доказательство. Установим, что решение задачи (1)–(4) совпадает на множестве $\bar{Q}_T$ с решением $v(x,t)$ задачи Коши, получаемой продлением известных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ в виде функций $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\psi}(x)$ и $\hat{f}(x)$ на значения аргумента $x \in (-\infty,0) \cup (l,+\infty]$. Для этого функция $\psi(x)$ с отрезка $[0,l]$ продолжается за точку $x = 0$ на луч $x \in (-\infty,0)$ линейной функцией с получением непрерывно дифференцируемого продолжения $\psi(x)$ в виде функции $\hat{\psi}(x)$ для $x \in (-\infty,l]$. Функция $f(x)$ продолжается за точку $x = 0$ на луч $x \in (-\infty,0)$ постоянным значением $f(0)$ с получением непрерывной функции $\hat{f}(x)$ для $x \in (-\infty,l]$. Функция $\varphi(x)$ доопределяется за точкой $x = 0$ на луче $x \in (-\infty,0)$ значениями дополнительно вычисляемой функции $z(x)$ так, чтобы при $x = 0$ для решения $v(x,t)$ задачи Коши выполнялось краевое условие (2), и продолжение функции $\varphi(x)$ являлось дважды непрерывно дифференцируемым при $x \in (-\infty,l]$. Продление функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ за точку $x = l$ на луч $[l,+\infty)$ осуществляется четным образом, т.е. осесимметрично относительно прямой $x = l$ для точек графиков функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$, т.е. так, чтобы решение $v(x,t)$ удовлетворяло однородному условию II рода (3) в точке $x = l$.

Рассмотрим для функции $v(x,t)$ представленную в предыдущем абзаце задачу Коши только в тех точках (x,t) полуплоскости $t \ge 0$, которые располагаются на характеристиках уравнения (1), проходящих через точки множества $\bar{Q}_T$ и, следовательно, задание исходных данных задачи (1)–(4) в которых непосредственно влияет на значения решения задачи (1)–(4) при $(x,t) \in \bar{Q}_T$. Пусть

$$v_{tt}(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) + \hat{f}(x)g(t), \quad (x,t) \in D_{l,T}, \tag{8}$$

$$v(x,t)\big|_{t=0} = \hat{\varphi}(x), \quad v_t(x,t)\big|_{t=0} = \hat{\psi}(x), \quad -aT \le x \le l + aT, \tag{9}$$

где $D_{l,T} = \{(x,t) : -(T-t)a \le x \le l + (T-t)a,\ 0 \le t \le T\}$ – множество точек с координатами (x,t) на плоскости с границей в форме равнобедренной трапеции с основаниями в виде отрезка при $t = 0$ $\forall x \in [-aT, l + aT]$ и отрезка при $t = T$ $\forall x \in [0,l]$.

Доказательство проведем для значений T из полуинтервала $((l/a),(3l/a)]$, что вполне позволит продемонстрировать схему построения и исследования решений задачи (8), (9) и задачи (1)–(4) с возможностью перенесения такого анализа на бóльшие значения $T > (3l/a)$.

Пусть в задаче (8), (9)

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} z(x), & x \in [-aT, 0), \\ \varphi(x), & x \in [0,l], \\ \varphi(2l - x), & x \in (l, 2l], \\ z(2l - x), & x \in (2l, l + aT], \end{cases} \tag{10}$$

$$\hat{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(0) + \psi'(0)x, & x \in [-aT, 0), \\ \psi(x), & x \in [0,l], \\ \psi(2l - x), & x \in (l, 2l], \\ \psi(0) - \psi'(0)(x - 2l), & x \in (2l, l + aT], \end{cases} \qquad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(0), & x \in [-aT, 0), \\ f(x), & x \in [0,l], \\ f(2l - x), & x \in (l, 2l], \\ f(0), & x \in (2l, l + aT], \end{cases} \tag{11}$$

где функция $z(x)$ определяется так, чтобы $\hat{\varphi}(x) \in C^2[-aT, l + aT]$ $\forall T \in ((l/a),(3l/a)]$ при выполнении условий (2), (3).

Однозначная разрешимость задачи (8), (9) установлена [17] в рамках исследования решения задачи Коши при $x \in (-\infty, +\infty)$ для неоднородного уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx} + w(x,t)$ при условии непрерывной дифференцируемости функции $w(x,t)$ с использованием формулы Даламбера для неоднородного уравнения, известной также как формула Дюамеля. Докажем, что такая же однозначная разрешимость задачи (8), (9) имеет место и в случае функций $f(x) \in C[0,l]$ и $g(t) \in C^1[0,T]$.

Введенные по формулам (11) функции $\hat{\psi}(x)$ и $\hat{f}(x)$ сохраняют гладкость функций $\psi(x)$ и $f(x)$, имеющуюся в условиях (6), (7) теоремы: $\hat{\psi}(x) \in C^1[-aT, l + aT]$, $\hat{f}(x) \in C[-aT, l + aT]$. На основе формулы Даламбера для неоднородного уравнения $v_{tt} = a^2 v_{xx} + \hat{f}(x)g(t)$ при условиях $\hat{\varphi}(x) \in C^2[-aT, l + aT]$, $\hat{\psi}(x) \in C^1[-aT, l + aT]$, $\hat{f}(x)g(t) \in C^1(D_{l,T})$ однозначное решение $v(x,t) \in C^2(D_{l,T})$ задачи (8), (9) существует (по теореме 7.6 в [17]) и имеет вид:

$$v(x,t) = \frac{\hat{\varphi}(x - at) + \hat{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \hat{\psi}(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t g(\tau) \int\limits_{x-(t-\tau)a}^{x+(t-\tau)a} \hat{f}(s)ds d\tau, \quad (x,t) \in D_{l,T}. \tag{12}$$

Дифференцируя формулу (12) для всех $(x,t) \in D_{l,T}$ и затем вводя в двух повторных интегралах подынтегральные аргументы $\xi = x + (t - \tau)a$ и $\eta = x - (t - \tau)a$, получаем последовательно формулы для производных решения $v(x,t)$:

$$\begin{gathered} v_x(x,t) = \frac{\hat{\varphi}'(x - at) + \hat{\varphi}'(x + at)}{2} + \frac{\hat{\psi}(x + at) - \hat{\psi}(x - at)}{2a} - \\ - \frac{1}{2a^2}\int\limits_{x-at}^{x} g\left(t - \frac{x - \eta}{a}\right)\hat{f}(\eta)d\eta + \frac{1}{2a^2}\int\limits_{x}^{x+at} g\left(t + \frac{x - \xi}{a}\right)\hat{f}(\xi)d\xi, \quad (x,t) \in D_{l,T}; \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} v_t(x,t) = a\frac{\hat{\varphi}'(x+at)-\hat{\varphi}'(x-at)}{2} + \frac{\hat{\psi}(x+at)+\hat{\psi}(x-at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x} g\left(t-\frac{x-\eta}{a}\right)\hat{f}(\eta)d\eta + \frac{1}{2a}\int\limits_{x}^{x+at} g\left(t+\frac{x-\xi}{a}\right)\hat{f}(\xi)d\xi, \quad (x,t)\in D_{l,T}; \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} v_{xx}(x,t) = \frac{\hat{\varphi}''(x-at)+\hat{\varphi}''(x+at)}{2} + \frac{\hat{\psi}'(x+at)-\hat{\psi}'(x-at)}{2a} + \frac{g(0)}{2a^2}\left(\hat{f}(x-at)+\hat{f}(x+at)\right) - \\ - \frac{1}{a^2}g(t)\hat{f}(x) + \frac{1}{2a^3}\int\limits_{x-at}^{x} g'\left(t-\frac{x-\eta}{a}\right)\hat{f}(\eta)d\eta + \frac{1}{2a^3}\int\limits_{x}^{x+at} g'\left(t+\frac{x-\xi}{a}\right)\hat{f}(\xi)d\xi, \quad (x,t)\in D_{l,T}; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} v_{tt}(x,t) = a^2\frac{\hat{\varphi}''(x+at)+\hat{\varphi}''(x-at)}{2} + a\frac{\hat{\psi}'(x+at)-\hat{\psi}'(x-at)}{2} + g(0)\frac{\hat{f}(x-at)+\hat{f}(x+at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x} g'\left(t-\frac{x-\eta}{a}\right)\hat{f}(\eta)d\eta + \frac{1}{2a}\int\limits_{x}^{x+at} g'\left(t+\frac{x-\xi}{a}\right)\hat{f}(\xi)d\xi, \quad (x,t)\in D_{l,T}. \end{gathered} \tag{16}$$

Формулы (13)–(16) дают значения непрерывных ограниченных производных $v_x(x,t)$, $v_t(x,t)$, $v_{xx}(x,t)$, $v_{tt}(x,t)$ решения задачи (8), (9) при $\hat{\varphi}(x)\in C^2[-aT,l+aT]$, $\hat{\psi}(x)\in C^1[-aT,l+aT]$, при $g(t)\in C^1[0,T]$ и при $\hat{f}(x)\in C[-aT,l+aT]$. Представленные формулами (15), (16) производные $v_{xx}(x,t)$, $v_{tt}(x,t)$ удовлетворяют уравнению (8), а функция $v(x,t)$ и производная $v_t(x,t)$ – условиям (9). Из этого следует, что задание в уравнении (8) неоднородности в виде произведения $\hat{f}(x)g(t)$ позволяет ослабить условия на функцию $f(x)$ до непрерывности $f(x)$ на отрезке $[0,l]$ по сравнению с условием непрерывной дифференцируемости из теоремы 7.6 в [17] с выражением однозначного решения задачи (8), (9) по той же формуле (12). Итак, задача (8), (9) имеет решение $v(x,t)\in C^2\left(D_{l,T}\right)$ и при функциях $\hat{\varphi}(x)$, $\hat{\psi}(x)$, $\hat{f}(x)$, сохраняющих на отрезке $[-aT,l+aT]$ гладкость функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$, удовлетворяющих условиям теоремы.

Определим функцию $z(x)$. Подставляя правые части формул (13) и (14) в условие (2) при $x=0$ и выполняя замену $s=-at$, с учетом формул (10), (11) получаем при $s\in[-l,0)$ формулу

$$\begin{gathered} z'(s) = -\frac{2}{a+\beta}\mu\left(\frac{-s}{a}\right) + \frac{a-\beta}{a+\beta}\varphi'(-s) + \frac{1}{a}\psi(0) + \frac{s}{a}\psi'(0) + \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\psi(-s) + \\ + \frac{1}{a^2}f(0)\int\limits_{s}^{0} g\left(\frac{\eta-s}{a}\right)d\eta + \frac{a-\beta}{(a+\beta)a^2}\int\limits_{0}^{-s} g\left(-\frac{s+\xi}{a}\right)f(\xi)d\xi, \quad s\in[-l,0). \end{gathered} \tag{17}$$

Интегрируя производную $z'(s)$ на полуинтервале $[x,0)\subset[-l,0)$, $\forall x\in[-l,0)$ с учетом условия $\lim\limits_{x\to 0-0} z(x) = \varphi(0)$ получаем

$$\begin{gathered} z(x) = \hat{z}(x) = \frac{2}{a+\beta}\int\limits_{x}^{0}\mu\left(\frac{-\tau}{a}\right)d\tau + \frac{2a\varphi(0)}{a+\beta} - \frac{a-\beta}{a+\beta}\varphi(-x) + \frac{\psi(0)}{a}x + \frac{\psi'(0)}{2a}x^2 - \\ - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\int\limits_{x}^{0}\psi(-\tau)d\tau - \frac{1}{a^2}f(0)\int\limits_{x}^{0}\int\limits_{\tau}^{0} g\left(\frac{\eta-\tau}{a}\right)d\eta d\tau - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a^2}\int\limits_{x}^{0}\int\limits_{0}^{-\tau} g\left(-\frac{\tau+\xi}{a}\right)f(\xi)d\xi d\tau, \quad x\in[-l,0). \end{gathered} \tag{18}$$

Из формулы (18) при $x=-l$ после замены подынтегральных аргументов $\tau=-\theta$, $\nu=-\eta$ в повторных интегралах получаем значение

$$\begin{gathered} \hat{z}(-l) = \frac{2}{a+\beta}\int\limits_{-l}^{0}\mu\left(\frac{-\tau}{a}\right)d\tau + \frac{2a\varphi(0)}{a+\beta} - \frac{a-\beta}{a+\beta}\varphi(l) - \frac{l}{a}\psi(0) + \frac{l^2}{2a}\psi'(0) - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\int\limits_{0}^{l}\psi(\tau)d\tau - \\ - \frac{1}{a^2}f(0)\int\limits_{0}^{l}\int\limits_{0}^{\theta} g\left(\frac{\theta-\nu}{a}\right)d\nu d\theta - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a^2}\int\limits_{0}^{l}\int\limits_{0}^{\theta} g\left(\frac{\theta-\xi}{a}\right)f(\xi)d\xi d\theta. \end{gathered} \tag{19}$$

Затем аналогично, подставляя правые части формул (13) и (14) в условие (2) при $x = 0$, получаем формулы для функций $z'(s)$ и $z(x)$ последовательно для $s,x \in [-\min\{aT,2l\},-l)$. После этого и в случае $aT \in (2l,3l]$ получаем, подставляя правые части формул (13) и (14) в условие (2), формулы для функций $z'(s)$ и $z(x)$ при $s,x \in [-aT,-2l)$ с непрерывным продолжением функции $z(x)$ и ее производных $z'(x)$, $z''(x)$ в точках $x = -l$ и $x = -2l$. Итак, сначала при $s \in \left[-\min\{aT,2l\},-l\right)$ получаем

$$\begin{aligned} z'(s) = {} & \frac{-2}{a+\beta}\mu\left(\frac{-s}{a}\right) - \frac{a-\beta}{a+\beta}\varphi'(s+2l) + \frac{1}{a}\psi(0) + \frac{s}{a}\psi'(0) + \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\psi(s+2l) + \\ & + \frac{1}{a}f(0)\int_0^{-s/a} g(\tau)\,d\tau + \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\int_{-(s+l)/a}^{-s/a} g(\tau)\,f(-s-a\tau)\,d\tau + \\ & + \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\int_0^{-(s+l)/a} g(\tau)\,f(2l+s+a\tau)\,d\tau, \quad s \in [-\max\{aT,2l\},-l). \end{aligned} \tag{20}$$

И с учетом полученного выше формулой (19) значения $\hat{z}(-l)$, интегрируя производную $z'(s)$ на полуинтервале $[x,-l) \subset \left[-\max\{aT,2l\},-l\right)$ $\forall x \in \left[-\max\{aT,2l\},-l\right)$, получаем

$$\begin{aligned} z(x) = \hat{z}(x) = {} & \frac{2}{a+\beta}\int_x^{-l}\mu\left(\frac{-s}{a}\right)ds + \hat{z}(-l) + \frac{a-\beta}{a+\beta}(\varphi(l)-\varphi(0)) + \frac{(x+l)}{a}\psi(0) - \\ & - \frac{(x^2-l^2)}{a}\psi'(0) - \frac{f(0)}{a}\int_x^{-l}\int_0^{-s/a} g(\tau)d\tau ds - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\left[\int_{x+2l}^{l}\psi(\xi)d\xi + \int_x^{-l}\int_{-(s+l)/a}^{-s/a} g(\tau)f(-s-a\tau)d\tau ds + \right. \\ & \left. + \int_x^{-l}\int_0^{-(s+l)/a} g(\tau)\,f(2l+s+a\tau)d\tau ds\right], \quad x \in [-\max\{aT,2l\},-l). \end{aligned} \tag{21}$$

При этом, если $aT \in (2l,3l]$, то при $x = -2l$ получаем значение

$$\begin{aligned} \hat{z}(-2l) = {} & \frac{2}{a+\beta}\int_{-2l}^{-l}\mu\left(\frac{-s}{a}\right)ds + \hat{z}(-l) + \frac{a-\beta}{a+\beta}(\varphi(l)-\varphi(0)) - \frac{l}{a}\psi(0) - \frac{3l^2}{a}\psi'(0) - \frac{1}{a}f(0)\int_{-2l}^{-l}\int_0^{-s/a} g(\tau)d\tau - \\ & - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\left[\int_0^{l}\psi(\xi)d\xi + \int_{-2l}^{-l}\int_{-(s+l)/a}^{-s/a} g(\tau)f(-s-a\tau)d\tau ds + \int_{-2l}^{-l}\int_0^{-(s+l)/a} g(\tau)\,f(2l+s+a\tau)d\tau ds\right]. \end{aligned}$$

Затем, если $aT \in (2l,3l]$, то получаем при $s \in [-aT,-2l)$ сначала

$$\begin{aligned} z'(s) = {} & \frac{-2}{a+\beta}\mu\left(\frac{-s}{a}\right) - \frac{a-\beta}{a+\beta}\hat{z}'(s+2l) + \frac{f(0)}{a}\int_0^{-s/a} g(\tau)\,d\tau + \\ & + \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\left[2l\psi'(0) + f(0)\int_0^{-(s+2l)/a} g(\tau)\,d\tau + \int_{-(s+l)/a}^{-s/a} g(\tau)\,f(-s-a\tau)\,d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{-(s+2l)/a}^{-(s+l)/a} g(\tau)\,f(2l+s+a\tau)d\tau\right], \quad s \in [-aT,-2l), \end{aligned} \tag{22}$$

где значения используемой в правой части формулы (22) производной $\hat{z}'(s+2l)$, $s \in [-aT,-2l)$, уже определены выше в формуле (18). И с учетом полученного значения $\hat{z}(-2l)$, интегрируя производную $z'(s)$ на полуинтервале $[x,-2l) \subset \left[-aT,-2l\right)$, получаем $\forall x \in \left[-aT,-2l\right)$

$$
\begin{aligned}
z(x) = \hat{z}(x) = {} & \frac{2}{a+\beta}\int\limits_x^{-2l}\mu\left(\frac{-s}{a}\right)ds + \hat{z}(-2l) + \frac{a-\beta}{a+\beta}(\varphi(0) - \hat{z}(x+2l)) - \frac{f(0)}{a}\int\limits_x^{-2l-s/a}\int\limits_0 g(\tau)\,d\tau ds + \\
& + 2\frac{(a-\beta)l}{(a+\beta)a}\psi'(0)(x+2l) - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\int\limits_x^{-2l}\left[\int\limits_{-(s+l)/a}^{-s/a} g(\tau)\,f(-s-a\tau)\,d\tau + \right. \\
& \left. + \int\limits_{-(s+2l)/a}^{-(s+l)/a} g(\tau)\,f(2l+s+a\tau)d\tau + f(0)\int\limits_0^{-(s+2l)/a} g(\tau)\,d\tau\right]ds, \quad x\in[-aT,-2l).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

При этом $\lim\limits_{s\to 0-0} z(s) = \varphi(0)$. Из входящих в условие (7) равенств на значения $\mu(0)$, $\mu'(0)$: $\mu(0) = \psi(0) - \beta\varphi'(0)$, $\mu'(0) = a^2\varphi''(0) - \beta\psi'(0) + f(0)g(0)$, следует, что

$$
\lim_{s\to 0-0} z'(s) = -\frac{2}{a+\beta}\mu(0) + \frac{a-\beta}{a+\beta}\varphi'(0) + \left(\frac{1}{a} + \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\right)\psi(0) = \varphi'(0),
$$
$$
\lim_{s\to 0-0} z''(s) = \frac{2\mu'(0)}{(a+\beta)a} - \frac{a-\beta}{a+\beta}\varphi''(0) + \left(1 - \frac{a-\beta}{a+\beta}\right)\frac{\psi'(0)}{a} - \left(1 + \frac{a-\beta}{a+\beta}\right)\frac{f(0)g(0)}{a^2} = \varphi''(0).
$$

Из непрерывной дифференцируемости правых частей формул (17), (20), (22) и из непрерывности построенной выше функции $z(x)$, $x\in[-aT,0)$ следует, что $z(x)\in C^2[-aT,0)$. Из полученных равенств $\lim\limits_{s\to 0-0} z(s) = \varphi(0)$, $\lim\limits_{s\to 0-0} z'(s) = \varphi'(0)$, $\lim\limits_{s\to 0-0} z''(s) = \varphi''(0)$ и из $z(x)\in C^2[-aT,0)$ следует, что начальная функция $\hat{\varphi}(x)$ задачи (8), (9) имеет ограниченную непрерывную производную $\hat{\varphi}''(x)$ при $x\in[-aT,l+aT]$.

Из установленных свойств функции $\hat{\varphi}(x)\in C^2[-aT,l+aT]$, и из $\hat{\psi}(x)\in C^1[-aT,l+aT]$, $g(t)\in C^1[0,T]$, $\hat{f}(x)\in C[-aT,l+aT]$ следует, что решение $v(x,t)\in C^2\left(D_{l,T}\right)$ задачи (8), (9) удовлетворяет условиям (2), (3) и однозначно определяется формулой (12) на множестве $D_{l,T}$. Таким образом, формула (12) с учетом условий теоремы дает и на множестве $\bar{Q}_T\subset D_{l,T}$ единственное на множестве $\bar{Q}_T\subset D_{l,T}$, ограниченное решение $u(x,t) = v(x,t)\in C^2\left(\bar{Q}_T\right)$ задачи (1)–(4). Теорема 1 доказана.

3. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ В НЕКОТОРЫХ ПОДОБЛАСТЯХ

Конкретизируем формулы для решения $u(x,t)$ прямой задачи (1)–(4) в той подобласти, где решение $u(x,t)$ представлено непосредственно формулой Даламбера (12), и в тех подобластях изменения аргументов x и t, которым принадлежит отрезок прямой $x = l$ при $t\in[0,T]$, на котором задается в виде функции $h(t)$ дополнительная информация (5) при постановке обратной задачи (1)–(5).

С рассчитанными значениями $z(x)$, представленными формулами (18) и (21), функция $\hat{\varphi}(x)$ в начальном условии задачи (8), (9) на отрезке $[l-aT,l+aT]$ – части всего множества $\left[-aT,l+aT\right]$ определения функции $\hat{\varphi}(x)$, принимает при $T\in\left((l/a),(3l/a)\right]$ вид

$$
\hat{\varphi}(x) = \begin{cases}
\dfrac{2}{a+\beta}\displaystyle\int\limits_x^0\mu\left(\frac{-\tau}{a}\right)d\tau + F(x), & x\in[l-aT,0),\\
\varphi(x), & x\in[0,l],\\
\varphi(2l-x), & x\in(l,2l],\\
\dfrac{2}{a+\beta}\displaystyle\int\limits_{2l-x}^0\mu\left(\frac{-\tau}{a}\right)d\tau + F(2l-x), & x\in(2l,l+aT],
\end{cases}
\tag{24}
$$

где $\hat{\varphi}(x) \in C^2\left[-aT, l + aT\right]$, и при этом $[l - aT, l + aT] \subset \left[-aT, l + aT\right]$. В формуле (24) из полученных при доказательстве теоремы 1 формул имеем

$$F(s) = 2\frac{a\varphi(0)}{a+\beta} - \frac{a-\beta}{a+\beta}\varphi(-s) + \frac{\psi(0)}{a}s + \frac{\psi'(0)}{2a}s^2 - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\int_s^0 \psi(-\tau)d\tau -$$
$$- \frac{f(0)}{a^2}\int_s^0\int_\tau^0 g\left(\frac{\eta-\tau}{a}\right)d\eta d\tau - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a^2}\int_s^0\int_0^{-\tau} g\left(\frac{\tau+\xi}{-a}\right)f(\xi)d\xi d\tau, \quad s \in [-\min\{aT - l, l\}, 0]. \tag{25}$$

И в случае если значения a, T, l таковы, что $aT \in (2l, 3l]$, то на продолжении области определения функции $F(s)$ за точку $s = -l$ на отрезок $[l - aT, -l]$ получаем

$$F(x) = \varphi(0) + \frac{x}{a}\psi(0) + \frac{3l^2 - 2x^2}{2a}\psi'(0) - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\left(\int_0^l \psi(\xi)d\xi + \int_{x+2l}^l \psi(\xi)d\xi\right) -$$
$$- \frac{f(0)}{a}\int_x^0\int_0^{-s/a} g(\tau)d\tau - \frac{a-\beta}{(a+\beta)a^2}\left[\int_{-l}^0\int_0^{-s/a} g(\tau)f(-s-a\tau)d\tau ds + \int_x^{-l}\int_{-(s+l)/a}^{-s/a} g(\tau)f(-s-a\tau)d\tau ds +\right. \tag{26}$$
$$\left. + \int_x^{-l}\int_0^{-(s+l)/a} g(\tau)f(s + a\tau + 2l)d\tau ds\right], \quad x \in [-\max\{l - aT, l\}, -l).$$

Непосредственно формула Даламбера (12) дает решение $u(x,t)$ задачи (1)–(4) в виде

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int_0^t g(\tau)\int_{x-(t-\tau)a}^{x+(t-\tau)a} f(s)dsd\tau, \quad (x,t) \in \Omega_0,$$

где $\Omega_0 = \left\{(x,t) : at \le x \le l - at,\ 0 \le t \le (l/(2a))\right\}$ – характеристический треугольник на плоскости с координатами (x,t) с вершиной в точке $((l/2),(l/(2a)))$ и основанием на отрезке прямой $t = 0$, расположенном между точками $(0,0)$ и $(l,0)$ с $x \in [0,l]$.

Далее с представленной формулой (24) функцией $\hat{\varphi}(x)$ на подмножестве Ω_1 области определения $\bar{Q}_T$ задачи (1)–(4) решение $u(x,t)$ принимает вид

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(2l - x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{2l-at-x}\psi(\xi)d\xi + 2\int_{2l-at-x}^{l}\psi(\xi)d\xi +\right.$$
$$\left. + \int_{x-at}^{x}\int_0^{t-(x-\xi)/a} g(\tau)d\tau f(\xi)d\xi + \int_x^l\int_0^{t+(x-\xi)/a} g(\tau)d\tau f(\xi)d\xi + \int_{2l-at-x}^{l}\int_0^{t+(x+\xi-2l)/a} g(\tau)d\tau f(\xi)d\xi\right], \quad (x,t) \in \Omega_1, \tag{27}$$

где $\Omega_1 = \left\{(x,t) : ((l - x)/a) \le t \le (x/a),\ (l/2) \le x \le l\right\}$ – равнобедренный треугольник на плоскости (x,t), имеющий основание на прямой $x = l$ при $t \in [0,(l/a)]$, и противолежащую основанию вершину в точке с координатами $((l/2),(l/(2a)))$.

И затем на множестве Ω_2, ограниченном сторонами равнобедренного треугольника на плоскости (x,t) с основанием на прямой $x = l$ при $t \in [(l/a),T]$, и противолежащей основанию вершиной в точке с координатами $((3l - aT)/2,(l + 2a)/(2a))$, имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{a+\beta}\int_{x-at}^0 \mu\left(\frac{-\tau}{a}\right)d\tau + \frac{1}{2}F(x-at) + \frac{1}{a+\beta}\int_{2l-at-x}^0 \mu\left(\frac{-\tau}{a}\right)d\tau + \frac{1}{2}F(2l - at - x) +$$
$$+ \frac{\psi(0)}{a}(at - l) + \frac{\psi'(0)}{2a}\left(2(at + x - l)l - a^2t^2 - x^2\right) + \frac{1}{a}\int_0^l \psi(\xi)d\xi+$$
$$+ \frac{1}{2a}\left[f(0)\int_0^{t-(x/a)}((t-\tau)a - x)g(\tau)d\tau + \int_0^x\int_0^{t-(x-\xi)/a} g(\tau)d\tau f(\xi)d\xi + \int_x^l\int_0^{t+(x-\xi)/a} g(\tau)d\tau f(\xi)d\xi +\right. \tag{28}$$

$$+\int_0^l \int_0^{t+(x+\xi-2l)/a} g(\tau)d\tau f(\xi)d\xi + f(0)\int_0^{t-(2l-x)/a} ((t-\tau)a + x - 2l)g(\tau)d\tau\Bigg], \quad (x,t)\in\Omega_2,$$

где

$$\Omega_2 = \left\{(x,t) : \frac{2l-x}{a} \le t \le T - \frac{l-x}{a}, \frac{3l-aT}{2} \le x \le l\right\}.$$

Объединение множеств $\Omega_1 \cup \Omega_2$ содержит весь отрезок, на котором задается на плоскости (x,t) дополнительное условие (5), используемое в постановке обратной задачи (1)–(5).

4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА И УСЛОВИЯ ЕЕ РАЗРЕШИМОСТИ

Определение 1. Три функции $f(s)$, $\mu(\tau)$, $u(x,t)$, где $s\in[0,l]$, $\tau\in[0,\widehat{T}]$, $\widehat{T} = T-(l/a)$, $(x,t)\in\Lambda_{l,T}$, называются решением обратной задачи (1)–(5), если при известных положительных значениях a, β, T и l, таких, что $l < aT$, при заданных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, где $x\in[0,l]$ и $t\in[0,T]$, а также при дополнительно заданной функции $h(t)$, $t\in[0,T]$, таких, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$ удовлетворяют условию (6) и условию

$$g(0)\ne 0, \tag{29}$$

у функции $h(t)$ существует значение $h'(0)$, и для нее выполняются условия

$$h(t)\in C[0,T], \quad h(0)=\varphi(l), \quad h'(0)=\psi(l), \tag{30}$$

а сами функции $f(s)$, $\mu(\tau)$, $u(x,t)$ таковы, что $u(x,t)\in C^2(\Lambda_{l,T})$, существует значение $\mu'(0)$, для функций $f(s)$, $\mu(\tau)$ выполняются условия

$$\begin{gathered} f(x)\in C[0,l], \quad \mu(t)\in C[0,\widehat{T}], \quad \mu(0)=\psi(0)-\beta\varphi'(0), \\ \mu'(0)=a^2\varphi''(0)-\beta\psi'(0)+f(0)g(0), \end{gathered} \tag{31}$$

а также выполняется уравнение (1) на множестве $\Lambda_{l,T}$, выполняется краевое условие (2) при $t\in[0,\widehat{T}]$, и выполняются условия (3)–(5).

Теорема 2. *Если заданы функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, удовлетворяющие условиям* (6), (29), (30), *то обратная задача* (1)–(5) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим противное утверждению теоремы 2, т.е. существование двух различных решений обратной задачи (1)–(5): трех функций $f_1(s)$, $\mu_1(\tau)$, $u_1(x,t)$ и трех функций $f_2(s)$, $\mu_2(\tau)$, $u_2(x,t)$. Тогда при заданных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, с учетом условия (5), формула (27) при $x=l$ для значений $t\in[0,(l/a)]$ приобретает вид равенства

$$h(t)=\varphi(l-at)+\frac{1}{a}\int_{l-at}^{l}\psi(s)ds+\frac{1}{a}\int_0^t g(\tau)\int_{l-(t-\tau)a}^{l} f(s)dsd\tau, \quad t\in\left[0,\frac{l}{a}\right].$$

Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле, из этого равенства получаем уравнение относительно функции $f(s)$, $s\in[0,l]$:

$$\frac{1}{a}\int_{l-at}^{l}\left(\int_0^{t-(l-s)/a} g(\tau)d\tau\right)f(s)ds = H_1(t), \quad t\in\left[0,\frac{l}{a}\right], \tag{32}$$

где

$$H_1(t)=h(t)-\varphi(l-at)-\frac{1}{a}\int_{l-at}^{l}\psi(s)ds, \quad t\in\left[0,\frac{l}{a}\right].$$

Вычитая из уравнения (32) с функцией $f_1(s)$ на месте $f(s)$ это же уравнение (32) с функцией $f_2(s)$ на месте $f(s)$, относительно разности $\Delta f(s) = f_1(s) - f_2(s)$, $s \in [0, l]$, получаем уравнение

$$\frac{1}{a}\int_{l-at}^{l}\left(\int_{0}^{t-(l-s)/a} g(\tau)d\tau\right)\Delta f(s)ds = 0, \quad t \in \left[0, \frac{l}{a}\right]. \tag{33}$$

Дифференцируя уравнение (33) по переменной t дважды и затем производя замену $l - at = x$, получаем

$$\Delta f(x) + \int_{x}^{l} K_1(s,x)\Delta f(s)ds = 0, \quad x \in [0,l], \tag{34}$$

— линейное интегральное уравнение Вольтерра II рода относительно функции $\Delta f(x)$, где

$$K_1(s,x) = \frac{1}{ag(0)}g'\left(\frac{s-x}{a}\right), \quad 0 \le x \le s \le l. \tag{35}$$

В силу следующей из условий (6), (29) теоремы 2 непрерывности ядра (35) уравнение (34) имеет [18] только решение $\Delta f(s) \equiv 0$, из чего следует, что $f_1(s) = f_2(s) = \overline{f}(s)$, $s \in [0,l]$.

Перейдем к доказательству единственности функции $\mu(t)$ для $t \in [0, \widehat{T}]$. Доказательство проведем для возможных значений $T \in \left((l/a), (3l/a)\right]$, что вполне позволит продемонстрировать схему исследования единственности решений обратной задачи с возможностью перенесения анализа на бóльшие значения $T > (3l/a)$. С учетом условия (5) рассмотрим формулу (28) при $x = l$ для $t \in \left[(l/a), T\right]$ как уравнение относительно функции $\mu(\tau)$ для $\tau \in [0, \widehat{T}]$:

$$\begin{gathered} h(t) = \frac{2}{a+\beta}\int_{l-at}^{0}\mu\left(-\frac{\tau}{a}\right)d\tau + F(l-at) + \frac{at-l}{a}\psi(0) - \frac{(l-at)^2}{2a}\psi'(0) + \frac{1}{a}\int_{0}^{l}\psi(\xi)d\xi + \\ + \frac{f(0)}{a}\int_{0}^{t-(l/a)}((t-\tau)a-l)g(\tau)d\tau + \frac{1}{a}\int_{0}^{l}\left(\int_{0}^{t-(l-\xi)/a} g(\tau)d\tau\right)f(\xi)d\xi, \quad t \in \left[\frac{l}{a}, T\right]. \end{gathered} \tag{36}$$

Выполняя в интеграле, содержащем функцию $\mu(t)$, замену подынтегрального аргумента $\tau = -a\theta$, и замену $\omega = t - (l/a)$, из равенства (36) получаем уравнение

$$\int_{0}^{\omega}\mu(\theta)d\theta = H_2(\omega), \quad \omega \in [0, \widehat{T}], \tag{37}$$

где

$$\begin{gathered} H_2(\omega) = \frac{a+\beta}{2a}h\left(\omega + \frac{l}{a}\right) - \frac{a+\beta}{2a}F(-a\omega) - \frac{a+\beta}{2a}\psi(0)\omega + \frac{a+\beta}{4}\psi'(0)\omega^2 - \frac{a+\beta}{2a^2}\int_{0}^{l}\psi(\xi)d\xi - \\ - \frac{a+\beta}{2a}f(0)\int_{0}^{\omega}(\omega-\tau)g(\tau)d\tau - \frac{a+\beta}{2a^2}\int_{0}^{l}\left(\int_{0}^{\omega+(\xi/a)} g(\tau)d\tau\right)f(\xi)d\xi, \quad \omega \in [0, \widehat{T}]. \end{gathered} \tag{38}$$

Вычитая из уравнения (37) с функцией $f_1(s) = \overline{f}(s)$ и с функцией $\mu_1(\theta)$ на месте $\mu(\theta)$ это же уравнение (37) с функцией $f_2(s) = \overline{f}(s)$ с функцией $\mu_2(\theta)$ на месте $\mu(\theta)$, получаем относительно разности $\Delta\mu(\theta) = \mu_1(\theta) - \mu_2(\theta)$ уравнение

$$\int_{0}^{\omega}\Delta\mu(\theta)d\theta = 0, \quad \omega \in [0, \widehat{T}]. \tag{39}$$

Дифференцируя уравнение (39) по аргументу ω, получаем равенство $\Delta\mu(\omega) \equiv 0$ $\forall\omega \in [0, \widehat{T}]$, из чего следует, что $\mu_1(t) = \mu_2(t) = \overline{\mu}(t)$, $t \in [0, \widehat{T}]$.

Итак, установлено попарное равенство функций $\mu_1(\tau) = \mu_2(\tau)$ и $f_1(s) = f_2(s)$ при $\tau \in [0, \hat{T}]$ и $s \in [0, l]$. Ввиду совпадения исходных коэффициентов на всей области их определения по теореме 1 совпадут и решения $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $(x,t) \in \Lambda_{l,T}$, прямой задачи (1)–(4). Таким образом, предположение о существовании двух различных решений $f_1(s)$, $\mu_1(\tau)$, $u_1(x,t)$ и $f_2(s)$, $\mu_2(\tau)$, $u_2(x,t)$ обратной задачи (1)–(5) опровергнуто за счет их попарного совпадения. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть заданы функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$, $h(t)$, *удовлетворяющие условиям* (6), (29) *и условиям*

$$h(t) \in C^2[0,T], \quad h(0) = \varphi(l), \quad h'(0) = \psi(l). \tag{40}$$

Тогда существует решение обратной задачи (1)–(5).

Доказательство. Доказательство проведем для значений $T \in \left((l/a),(3l/a)\right]$, что продемонстрирует схему доказательства существования решений обратной задачи (1)–(5), с возможностью перенесения аналогичного анализа на бóльшие значения $T > (3l/a)$.

Дифференцируя уравнение (32) дважды по t и производя замену $l - at = x$, имеем

$$f(x) + \int_x^l K_1(s,x) f(s) ds = \frac{1}{g(0)} H_1''\left(\frac{l-x}{a}\right), \quad x \in [0,l]. \tag{41}$$

Уравнение (41) в силу следующей из условий (6), (29) теоремы 3 непрерывности его ядра $K_1(x,s)$, определяемого формулой (35), и, также следующей из условий (6), (29), (40), непрерывности правой части уравнения (41), задаваемой с функцией

$$H_1''\left(\frac{l-x}{a}\right) = h''\left(\frac{l-x}{a}\right) - a^2\varphi''(x) + a\psi'(x), \quad x \in [0,l],$$

имеет [18] единственное решение $f(x) \in C[0,l]$, для которого также из уравнения (41) получаем значение

$$f(l) = \frac{1}{g(0)} h''(0) - \frac{a^2}{g(0)} \varphi''(l).$$

Таким образом, функция $f(x) \in C[0,l]$, как часть решения обратной задачи (1)–(5), существует и определяется из решения уравнения (41).

Дифференцируя уравнение (37) по аргументу ω, получаем для функции $\mu(\omega)$ формулу

$$\mu(\omega) = H_2'(\omega), \quad \omega \in [0, \hat{T}], \tag{42}$$

где, исходя из формулы (38), с учетом представлений (25) и (26) для функции $F(s)$ на разных частях отрезка $[0, \hat{T}]$, правая часть равенства (42) принимает вид

$$\begin{aligned} H_2'(\omega) = \frac{a+\beta}{2a} h'\left(\omega + \frac{l}{a}\right) + \frac{a+\beta}{2} F'(-a\omega) - \frac{a+\beta}{2a}\psi(0) + \frac{a+\beta}{2}\psi'(0)\omega - \\ - \frac{a+\beta}{2a} f(0) \int_0^\omega g(\tau) d\tau - \frac{a+\beta}{2a^2} \int_0^l g\left(\omega + \frac{\xi}{a}\right) f(\xi) d\xi, \quad \omega \in [0, \hat{T}], \end{aligned} \tag{43}$$

при

$$\begin{aligned} \frac{a+\beta}{2} F'(-a\omega) = \frac{a-\beta}{2}\varphi'(a\omega) + \frac{a+\beta}{2a}\psi(0) - \frac{a+\beta}{2}\psi'(0)\omega + \frac{a-\beta}{2a}\psi(-a\omega) + \\ + \frac{a+\beta}{2a^2} f(0) \int_0^{a\omega} g\left(\omega - \frac{\eta}{a}\right) d\eta + \frac{a-\beta}{2a^2} \int_0^{a\omega} g\left(\omega - \frac{\xi}{a}\right) f(\xi) d\xi, \quad \omega \in \left[0, \frac{l}{a}\right], \end{aligned} \tag{44}$$

и при

$$\frac{a+\beta}{2}F'(-a\omega)=\frac{a+\beta}{2}\left[\frac{\psi(0)}{a}-\psi'(0)\omega-\varphi'(2l-a\omega)+\frac{a-\beta}{(a+\beta)a}\psi(2l-a\omega)+\frac{f(0)}{a^2}\int_0^{a\omega}g\left(\omega-\frac{\eta}{a}\right)d\eta\right]+$$
$$+\frac{a-\beta}{2a^2}\int_0^l g\left(\omega-\frac{\xi}{a}\right)f(\xi)d\xi+\frac{a-\beta}{2a^2}\int_l^{a\omega}g\left(\omega-\frac{\xi}{a}\right)f(2l-\xi)d\xi,\quad \omega\in\left[\frac{l}{a},\hat{T}\right]. \tag{45}$$

Из условий теоремы 3 следует непрерывность функции $H_2'(\omega)$, $\omega\in[0,\hat{T}]$, представляемой формулой (43) с использованием равенств (44), (45). Следовательно, непрерывна и функция $\mu(t)$, $t\in[0,\hat{T}]$, определяемая формулой (42). С учетом равенств

$$h'\left(\frac{l}{a}\right)=-a\varphi'(0)+\psi(0)+\frac{1}{a}\int_0^l g\left(\frac{\xi}{a}\right)f(\xi)d\xi,$$
$$h''\left(\frac{l}{a}\right)=a^2\varphi''(0)-a\psi'(0)+g(0)f(0)+\frac{1}{a}\int_0^l g'\left(\frac{\xi}{a}\right)f(\xi)d\xi,$$

и формул (43), (44) имеем

$$\mu(0)=H_2'(\omega)\Big|_{\omega=0}=\frac{a+\beta}{2a}h'\left(\frac{l}{a}\right)+\frac{a-\beta}{2}\varphi'(0)+\frac{a+\beta}{2a}\psi(0)+\frac{a-\beta}{2a}\psi(0)-\frac{a+\beta}{2a}\psi(0)-$$
$$-\frac{a+\beta}{2a^2}\int_0^l g\left(\frac{\xi}{a}\right)f(\xi)d\xi=-\frac{a+\beta}{2}\varphi'(0)+\frac{a+\beta}{2a}\psi(0)+\frac{a+\beta}{2}\varphi'(0)+\frac{a-\beta}{2a}\psi(0)=\psi(0)-\beta\varphi'(0),$$

$$\mu'(0)=H_2''(\omega)\Big|_{\omega=0}=\left[\frac{a+\beta}{2a}h''\left(\omega+\frac{l}{a}\right)+\frac{(a-\beta)a}{2}\varphi''(a\omega)+\frac{a-\beta}{2}\psi'(-a\omega)+\frac{a+\beta}{2a}f(0)g(0)+\right.$$
$$\left.+\frac{a-\beta}{2a}g(0)f(a\omega)-\frac{a+\beta}{2a}f(0)g(\omega)-\frac{a+\beta}{2a^2}\int_0^l g'\left(\omega+\frac{\xi}{a}\right)f(\xi)d\xi\right]\Bigg|_{\omega=0}=a^2\varphi''(0)-\beta\psi'(0)+f(0)g(0).$$

Полученные равенства соответствуют выполнению на функцию $\mu(t)$ условий на значение $\mu(0)=\psi(0)-\beta\varphi'(0)$ и на значение $\mu'(0)=a^2\varphi''(0)-\beta\psi'(0)+f(0)g(0)$ из ограничений (7) и (31), входящих в условия теоремы 1 и определения 1 решения обратной задачи. Следовательно, функция $\mu(t)$ удовлетворяет условиям определения 1, как часть решения обратной задачи (1)–(5), существует и определяется формулой (42).

В итоге решение $f(x)$ уравнения (41) и функция $\mu(t)$, определяемая формулой (42), удовлетворяют условиям теоремы 1, в соответствии с которой с учетом включения $\Lambda_{l,T}\subset\bar{Q}_T$ существует единственное решение $u(x,t)\in C^2(\Lambda_{l,T})$ прямой задачи (1)–(4). В результате три полученные функции $f(x)$, $\mu(t)$, $u(x,t)$ составляют решение обратной задачи (1)–(5). Теорема 3 доказана.

5. ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Для приближенного решения обратной задачи (1)–(5) при известных исходных функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(t)$ и при заданных вместо функции $h(t)$ значении уровня погрешности $\delta>0$ и функции $h_\delta(t)\in C[0,T]$ такой, что $\|h_\delta(t)-h(t)\|_{C[0,T]}\le\delta$, при выполнении условий (6), (29), (30) на заданные функции, могут быть использованы регуляризирующие алгоритмы [15], [16].

С учетом того, что получение решения обратной задачи (1)–(5) эквивалентно по существу последовательному решению интегральных уравнений Вольтерра I рода (32) и (37), для приближенного решения уравнений (32) и (37), в правых частях которых на местах значений функции $h(t)$ располагаются значения приближенно известной функции $h_\delta(t)$ с известным уровнем погрешности $\delta>0$, можно использовать алгоритмы, ориентированные на решение именно интегральных уравнений Вольтерра I рода.

Уравнение (32) имеет ядро с тождественно нулевыми значениями на диагонали области определения его аргументов, т.е. при равенстве аргументов. При этом это ядро имеет на диагонали строго знакоопределенную первую производную. Поэтому для решения уравнения (32) могут быть использованы методы, представленные в работах [19–22]. При этом предлагаемые в этих работах алгоритмы основаны на различных подходах к получению устойчивых приближенных решений интегральных уравнений Вольтерра I рода: сеточных и функциональных, с введением регуляризирующего параметра и точным определением условий сходимости приближенных методов.

Для решения уравнения Вольтерра I рода (37), имеющего ядро с положительными значениями на диагонали, помимо представленных в работах [19–22] алгоритмов, может быть использован предложенный в работе [23] переход к решению интегрального уравнения Вольтерра II рода с малым параметром $\alpha > 0$ при искомой функции в дополнительно вводимом в уравнение внеинтегральном слагаемом:

$$\alpha\mu(\omega) + \int_0^{\omega} \mu(\theta)d\theta = H_2(\omega), \quad \omega \in [0, \widehat{T}]. \tag{46}$$

Сходимость приближенного решения уравнения (46) к точному решению уравнения (37) обусловливается в работе [23] согласованием погрешности $\delta > 0$ задания исходных данных для решения обратной задачи (1)–(5) с параметром $\alpha > 0$ уравнения (46).

Разнообразие алгоритмических схем, предложенных в работах [19–23], близость их конструкций к уравнениям (32) и (37) делают использование таких специфичных методов решения уравнений Вольтерра I рода достаточно привлекательным и не требующим алгоритмических усложнений.

Как альтернатива перечисленным методам может быть использован итерационный алгоритм, основанный на приближенном решении уравнения (41) методом последовательных приближений, с получением последовательности $\left\{f^{(n)}(x)\right\}$, приближающей функцию $f(x)$, по рекуррентной формуле

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{g(0)} H_1''\left(\frac{l-x}{a}\right) - \int_x^l K_1(s,x) f^{(n)}(s)ds, \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{g(0)} H_1''\left(\frac{l-x}{a}\right), \quad x \in [0,l].$$

После получения приближенного решения уравнения (41) приближенные значения функции $\mu(t)$ могут быть получены по формуле (42).

При использовании представленного итерационного алгоритма приближенного решения интегрального уравнения (41) и формулы (42) некорректность обратной задачи (1)–(5) связана лишь с необходимостью предварительного двукратного численного дифференцирования приближенно заданной на отрезке $[0,T]$ непрерывной функции $h_\delta(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1953.
2. *Moiseev E.I., Kholomeeva A.A.* Solvability of the mixed problem for the wave equation with a dynamic boundary condition // Differential Equations. 2012. V. 48. № 10. P. 1392–1397.
3. *Moiseev E.I., Kholomeeva A.A., Frolov A.A.* Boundary displacement control for the oscillation process with boundary conditions of damping type for a time less than critical // J. of Math. Sci. 2021. V. 257. № 1. P. 74–84.
4. *Yanovskaya T.V., Asbel I.J.* The determination of velocities in the upper mantle from the observations on p-waves // Geophys. J. Royal Astronom. Soc. 1964. V. 8. № 3. P. 313–318.
5. *Baev A.V., Glasko V.B.* The solution of the inverse kinematic problem of seismology by means of a regularizing algorithm // J. Comput. Math. and Math. Phys. 1976. V. 16. № 4. P. 96–106.
6. *Belishev M.I.* Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC-method) // Inverse Problems. 1997. V. 13. № 5. P. R1–R45.
7. *Yilmaz O.* Seismic data analysis. 1. Tulsa: SEG, 2001.
8. *Vasil'ev F.P., Kurzhanskij M.A., Razgulin A.V.* On using Fourier method for solving a problem of string vibration control // Moscow University Comput. Math. and Cybernetics. 1993. № 2. P. 3–8.
9. *Il'in V.A., Moiseev E.I.* Optimization of boundary controls of string vibrations // Russian Math. Surveys. 2005. V. 60. № 6. P. 1093–1119.
10. *Kapustin N.Yu., Kholomeeva A.A.* Spectral solution of a boundary value problem for equation of mixed type // Lobachevskii Journal of Math. 2019. V. 40. № 7. P. 981–983.

11. *Gopinath B., Sondi M.* Determination of the shape of the human vocal tract from acoustical measurements // Bell System Tech. J. 1970. V. 49. P. 1195–1214.
12. *Cannon J.R., Du Chateau P.* An inverse problem for an unknown source term in a wave equation // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. № 3. P. 553–564.
13. *Zhang Guan Quan.* On an inverse problem for 1-dimensional wave equation // Sci. China. Ser. A. Math., Phys., Astron. and Tech. Sci. 1989. V. 32. № 3. P. 257–274.
14. *Denisov A.M.* Existence of a solution of the inverse coefficient problem for a quasilinear hyperbolic equation // J. Comput. Math. and Math. Phys. 2019. V. 59. № 4. P. 550–558.
15. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983.
16. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994.
17. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993.
18. *Lovitt W.V.* Linear integral equations. New York: McGraw-Hill Book Company, 1924.
19. *Sergeev V.O.* Regularization of the Volterra equation of the first kind // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1971. V. 197. № 3. P. 531–534.
20. *Апарцин А.С., Бакушинский А.Б.* Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // В сб.: “Дифференц. и интегральные уравнения”. Вып. 1. Иркутск, Гос. ун-тет. 1972. С. 120–128.
21. *Magnitskii N.A.* A method of regularizing Volterra equations of the first kind // Comput. Math. and Math. Phys. 1975. V. 15. № 5. P. 221–228.
22. *Магницкий Н.А.* О приближенном решении некоторых интегральных уравнений Вольтерра 1 рода // Вестн. Московского университета. Серия 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1978. № 1. С. 91–98.
23. *Denisov A.M.* On approximate solution of Volterra equation of the first kind // Comput. Math. and Math. Phys. 1975. V. 15. № 4. P. 237–239.