

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.98

ОПТИМИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ
СИСТЕМЫ ПО ОТНОШЕНИЮ К ДРУГОМУ МНОЖЕСТВУ¹⁾© 2023 г. М. В. Балашов^{1,*}, Р. А. Камалов¹¹ 117997 Москва, Профсоюзная ул., 65, Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Россия

*e-mail: balashov73@mail.ru

Поступила в редакцию 02.11.2022 г.
Переработанный вариант 21.11.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассматриваются задача максимально быстрого по времени выполнения включения во множество достижимости линейной управляемой автономной системы некоторого выпуклого компакта, а также задача поиска максимального времени, при котором выполнено включение множества достижимости в некоторый выпуклый компакт. При этом ищутся начальная точка и время, для которых экстремальное время в соответственной задаче реализуется. Рассмотрена дискретизация задачи на сетке единичных векторов и с помощью сведения к задаче линейного программирования получены приближенное решение задачи, а также оценки погрешности решения. Задача объединяет общая идеология, восходящая к задаче поиска чебышёвского центра. Библ. 24. Фиг. 4. Табл. 4.

Ключевые слова: множество достижимости, равномерная выпуклость, условие непустоты внутренности, многозначный интеграл, линейное программирование, аппроксимация в метрике Хаусдорфа.

DOI: 10.31857/S004446692305006X, EDN: PJPZUE

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1.1. Введение

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$x' \in Ax + U, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Пусть $M(t)$ — множество достижимости этой системы с начальным условием $x(0) = 0$. Напомним, что для всякого $t \geq 0$ множество достижимости $M(t)$ для системы (1) есть

$$M(t) = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x'(s) = Ax(s) + u(s) \text{ п.в. } s \in [0, t], u(s) \in U \text{ — измеримый селектор}\}. \quad (2)$$

Хорошо известно в силу результата Ляпунова о векторных мерах (см. [1], а также [2], теорема 1, гл. 2, § 2.2, что множество достижимости выпукло и замкнуто. Легко получить представление множества достижимости для случая $x(0) = 0$ в виде интеграла

$$M(t) = \int_0^t e^{As} U ds. \quad (3)$$

Если в системе (1) $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, то множество достижимости системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ задается выражением

$$\mathcal{M}(x(0), t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{As} U ds = e^{At} x_0 + M(t). \quad (4)$$

¹⁾Результаты разделов 2, 3 получены М.В. Балашовым за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/> в ИПУ РАН.

Многозначный интеграл здесь и далее мы будем понимать в смысле интеграла Аумана (см. [3])

$$\int_0^t e^{As} U ds = \left\{ \int_0^t e^{As} u(s) ds : u(s) \in U - \text{измеримый селектор} \right\}.$$

Будем понимать $M(+\infty)$ как предел в метрике Хаусдорфа интегралов

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{As} U ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} M(t),$$

если таковой существует.

Включение $0 \in U$ обеспечивает монотонность множеств достижимости: $M(t_1) \subset M(t_2)$ при $t_1 \leq t_2$. Также заметим, что в силу аддитивности интеграла Аумана получаем

$$M(t_2) = M(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds, \quad t_1 \leq t_2.$$

Отметим, что включение $0 \in U$ является техническим. Действительно, если $0 \notin U$, то для произвольной точки $u_0 \in U$, определив $U_0 = U - u_0$, имеем

$$\int_0^t e^{As} U ds = \int_0^t e^{As} U_0 ds + \int_0^t e^{As} u_0 ds.$$

Сформулируем рассматриваемые задачи.

Задача 1. Пусть $M_0 \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Мы хотим найти минимальное время $t \geq 0$ и такую точку $x \in \mathbb{R}^n$, что множество $x + M(t)$ содержит M_0 . Иными словами, ищется решение задачи

$$t \rightarrow \min_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n} x + M(t) \supset M_0. \quad (5)$$

Пусть $t = T \geq 0$ и $x = x_0$ — решение задачи (5). Легко видеть, что если рассмотреть траектории системы $x' \in Ax + U$ с начальным условием $x(0) = e^{-AT} x_0$, то T есть минимальное время, за которое в силу (4), множество $\mathcal{M}(e^{-AT} x_0, T) = x_0 + M(T)$ будет содержать множество M_0 . Иными словами, если известно решение (T, x_0) задачи 1, то гарантируется следующее утверждение: при начальном условии $x(0) = e^{-AT} x_0$ нам требуется время не более T , чтобы попасть траекториями системы (1) в любую точку множества M_0 . При этом для любого другого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ найдется точка множества M_0 , для достижения которой при любом выборе управления $u(t) \in U$ в системе (1) потребуется время не меньше T .

Действительно, предположим, что есть вектор начальных условий $x(0)$ такой, что для времени $t_0 < T$ выполнено включение $\mathcal{M}(x(0), t_0) = e^{At_0} x(0) + M(t_0) \supset M_0$. Тогда для $x = e^{At_0} x(0)$ выполнено включение $x + M(t_0) \supset M_0$, что противоречит минимальности T в (5).

Таким образом, задача 1 имеет смысл задачи быстродействия. По ее решению (T, x_0) строится начальное условие $x(0) = e^{-AT} x_0$ для системы (1) и определяется минимальное время $T > 0$, в течение которого решения системы могут достичь любой точки множества M_0 . Для любого другого начального условия результат по времени будет не меньше.

Задача 2. Другая близкая постановка к задаче (5) — задача

$$t \rightarrow \max_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n} x + M(t) \subset M_0. \quad (6)$$

Пусть $t = T \geq 0$ и $x = x_0$ — решение задачи (6). Легко видеть, что концы траекторий системы $x' \in Ax + U$ с начальным условием $x(0) = e^{-AT} x_0$ будут в момент времени T в силу (4) содержаться

во множестве M_0 , т.е. $x(T) \in M_0$ для всех решений $x(\cdot)$. При этом указанное время максимально возможное по всем другим начальным условиям $x(0) \in \mathbb{R}^n$ в системе (1).

Действительно, предположим, что есть вектор начальных условий $x(0)$ такой, что для времени $t_0 > T$ выполнено включение $\mathcal{M}(x(0), t_0) = e^{At_0}x(0) + M(t_0) \subset M_0$. Тогда для $x = e^{At_0}x(0)$ выполнено включение $x + M(t_0) \subset M_0$, что противоречит максимальнойности T в (6).

Если (T, x_0) – решение задачи 2, то вопрос о включении $\mathcal{M}(e^{-AT}x_0, s) = e^{A(s-T)}x_0 + M(s) \subset M_0$ для промежуточных значений $s \in (0, T)$ должен решаться отдельно. В общем случае для некоторых $s < T$ предыдущее включение может быть неверно (см. [4]). Приведем простейший пример

системы без управления. Пусть $e^{At} = e^{-at} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a > 0$ – малое число. Пусть $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ – вектор начальных условий, $x, y > 0$ и M_0 есть круг радиуса $r > 0$ с центром в нуле, содержащий (x, y) . Тогда $\|e^{At}(x, y)^T\|^2 = e^{-2at}((x+ty)^2 + y^2)$, и при $t = \frac{1}{a}$ значение $\|e^{At}(x, y)^T\|^2$ имеет порядок $e^{-2} \frac{y^2}{a^2}$ при $a \rightarrow +0$. Число $e^{-2} \frac{y^2}{a^2}$ больше r^2 при малых $a > 0$, однако решение асимптотически устойчиво и тем самым при больших t попадает в любую окрестность нуля, в частности, и в M_0 .

Заметим, что для произвольного начального условия $x(0) \in M_0$ существует решение $x(\cdot)$ системы (1) со свойством $x(t) \in M_0$ при всех $t \in [0, T]$ тогда и только тогда, когда $(Ax + U) \cap T_B(M_0, x) \neq \emptyset$ для всех $x \in M_0$ (см. [5], гл. 4, теорема 1, утверждение 1, с. 180, где $T_B(M_0, x)$ – верхний касательный конус ко множеству M_0 в точке $x \in M_0$). Результаты о локальной по времени выживаемости всех траекторий (1) во множестве M_0 можно найти в [6], Theorem 1.12.

Задача 2 имеет связь с частным случаем хорошо известной линейной задачи быстрогодействия (см. [7–10], [11, гл. 2, § 7, теорема 2.20]). Пусть требуется найти оптимальное управление и минимальное время, при котором некоторая траектория системы (1) с начальным условием $x(0) = 0$ попадет на заданное терминальное множество N_0 . То есть решается задача

$$t \rightarrow \min_{t \geq 0} M(t) \cap N_0 \neq \emptyset. \quad (7)$$

Пусть также множество N_0 является каверной, т.е. N_0 есть замыкание множества $\mathbb{R}^n \setminus M_0$, где M_0 – телесный выпуклый компакт. С учетом эквивалентности условий $M(t) \cap \text{int } N_0 = \emptyset$ и $M(t) \subset M_0$, приходим к постановке $t \rightarrow \max$ при условии $M(t) \subset M_0$. В случае $M(t_1) \subset \text{int } M(t_2)$ при всех $t_1 < t_2$ последняя задача эквивалентна (7). Добавив переменную x , мы получаем задачу 2. Отметим, что если в задаче 2 зафиксировать $x = 0$, то получится задача, эквивалентная (7) для множества N_0 – каверны.

Если U в задаче (1) есть множеством помех, то решение задачи 2 дает нам максимальное время T и начальное условие $x(0) = e^{-AT}x_0$, гарантирующее нахождение концов всех траекторий системы при реализации любой помехи в допустимом подмножестве M_0 фазового пространства в момент времени T . При этом T максимально по всем начальным условиям $x(0) \in \mathbb{R}^n$, т.е. для любого другого начального условия $x(0) \in \mathbb{R}^n$ выполнение включения $\mathcal{M}(x(0), t) \subset M_0$ влечет $t \leq T$. Кроме того, для всякого $t \in (0, T)$ начальное условие $x(0) = e^{-At}x_0$ обеспечивает включение $\mathcal{M}(e^{-At}x_0, t) \subset M_0$. Действительно, с учетом (4)

$$\mathcal{M}(e^{-At}x_0, t) = e^{At}e^{-At}x_0 + M(t) \subset x_0 + M(T) \subset M_0.$$

Эти свойства имеют важное значение для различных приложений, когда все траектории системы (1) должны попасть в заданное подмножество M_0 фазового пространства в заданный момент времени t .

Отличительной чертой задач 1 и 2 является оптимизация не только по времени, но и по пространственной переменной x . При этом в постановке задач 1 и 2 время и фазовая переменная разведены в разные слагаемые, что позволяет эффективно применять простые алгоритмы с вы-

пуклыми множествами для решения указанных задач. Возможны и другие постановки задач. Ниже мы будем ссылаться на задачу 1 по ссылке (5), а на задачу 2 по ссылке (6).

Заметим, что задача (5) может не иметь решения. Например, решения нет в случае, когда спектр $\sigma(A) < 0$ и $M(+\infty) \stackrel{*}{=} M_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x + M_0 \subset M(+\infty)\} = \emptyset$. В свою очередь задача (6) может быть разрешима при любом $T \geq 0$ в том смысле, что для всякого $T \geq 0$ найдется $x \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x + M(T) \subset M_0$. Такая ситуация возможна при условии $\sigma(A) < 0$ и $M_0 \stackrel{*}{=} M(+\infty) \neq \emptyset$. Ниже мы будем предполагать, что решения задач (5) и (6) существуют, строго положительны по времени и конечны.

Идея предлагаемого алгоритма состоит в дискретизации множеств $M(t)$, M_0 , заданных через опорные функции, на сетке единичных векторов. Кроме того, мы также будем рассматривать дискретизацию по времени $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_K = T_0$, где параметр $T_0 > 0$ задает максимальное время, до которого мы ищем решение.

В настоящей работе будет применяться аппроксимация множеств $M(t)$, M_0 с помощью опорных функций (см. детали в [12], [13]). Хорошо известно (см. [14], табл. 1), что разумная аппроксимация выпуклых компактов на сетке единичных векторов с помощью неравенств с опорной функцией реализуется в небольшой размерности: $n \leq 5$ на современном персональном компьютере. Поэтому рассмотренные в работе алгоритмы имеют практический смысл в пространстве небольшой размерности.

Существуют также подходы к исследованию множеств достижимости со специальными множествами, например, множествами-зонотопами (см. [15]) и эллипсоидальной техникой (см. [16]). Однако аппроксимация с помощью опорных функций до сих пор является одной из наиболее распространенных.

Задача (5) очень похожа на задачу поиска чебышёвского центра множества или на более общую задачу о накрытии выпуклого компакта гомотетичным образом другого выпуклого компакта (см. [17]): для выпуклых компактов $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in B$, требуется решить задачу

$$t \rightarrow \min_{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n} \quad \text{при условии} \quad x + tB \supset A. \quad (8)$$

В [17] получены достаточные условия для единственного решения этой задачи и оценки погрешности между точным и приближенным решениями в метрике Хаусдорфа. В задаче (5) появляется еще один непрерывный параметр — время t . Поэтому здесь мы рассмотрим дискретизацию по пространственной переменной, описывая множества на языке опорных функций, и по времени. При этом мы используем идеи оценок погрешности по пространству из [17]. С помощью аналогичного подхода решается задача (6).

1.2. Основные обозначения и вспомогательные факты

Через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать вещественное евклидово пространство n измерений со скалярным произведением (x, y) для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $B_R(x)$ замкнутый шар с центром x радиуса $R > 0$.

Напомним, что суммой Минковского—Понтрягина множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$, а геометрической разностью, или разностью Минковского—Понтрягина, множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется множество

$$A \stackrel{*}{-} B = \{x \in \mathbb{R}^n : x + B \subset A\} = \bigcap_{x \in B} (A - x).$$

Расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $A \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\varrho_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. Расстоянием в метрике Хаусдорфа между компактными множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$h(A, B) = \max \left\{ \max_{x \in A} \varrho_B(x), \max_{x \in B} \varrho_A(x) \right\}.$$

Полунормой компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ называется число $\|A\| = h(A, \{0\}) = \max_{a \in A} \|a\|$.

Опорной функцией множества $A \subset \mathbb{R}^n$ в точке $p \in \mathbb{R}^n$ называется $s(p, A) = \sup_{a \in A} (p, a)$. Применяя теорему об отделимости, получаем, что для любого выпуклого компакта A выполняется равенство

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leq s(p, A), \|p\| = 1\}.$$

Отметим, что для множества $M(t) = \int_0^t e^{As} U ds$ легко вычислить опорную функцию при условии, что опорная функция компактного множества управлений U может быть точно вычислена аналитически, либо с помощью простого алгоритма, например, симплекс-метода, для всякого $p \in \mathbb{R}^n$. Тогда в силу линейности многозначного интеграла

$$s(p, M(t)) = \int_0^t s(p, e^{As} U) ds = \int_0^t s(e^{A^T s} p, U) ds. \quad (9)$$

Для выпуклого замкнутого множества A нормальным конусом в точке $x \in A$ называется множество $N(A, x) = \{p \in \mathbb{R}^n : (p, x - a) \geq 0 \forall a \in A\}$. Определим также $N_1(A, x) = N(A, x) \cap \partial B_1(0)$. Через $\text{co } A$, $\text{cone } A$ будем обозначать соответственно выпуклую и коническую (иногда называют выпуклую коническую) оболочки множества $A \subset \mathbb{R}^n$. С учетом теоремы Каратеодори

$$\text{co } A = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a_k : \lambda_k \in [0, 1], \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1, a_k \in A \right\}, \quad \text{cone } A = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k : \lambda_k \geq 0, a_k \in A \right\}.$$

Обозначим через $P_A x$ метрическую проекцию точки $x \in \mathbb{R}^n$ на выпуклое замкнутое множество $A \subset \mathbb{R}^n$. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ определим $(x, y) = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in (0, 1)\}$.

Будем говорить, что выпуклое компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ равномерно выпукло, если существует строго возрастающая функция $\delta_A : [0, \text{diam } A] \rightarrow [0, +\infty)$, $\delta_A(0) = 0$, модуль равномерной выпуклости, такая, что для всех $x, y \in A$ выполнено включение $\frac{1}{2}(x + y) + B_{\delta_A(\|x - y\|)}(0) \subset A$ (см. [18], гл. 3). Рассмотрим равномерно выпуклые множества A, B и их сумму $C = A + B$. Если $c_1, c_2 \in C$, $\|c_1 - c_2\| = t > 0$, то $c_i = a_i + b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, $i = 1, 2$. При этом либо $\|a_1 - a_2\| \geq \frac{1}{2}t$, либо $\|b_1 - b_2\| \geq \frac{1}{2}t$. Отсюда следует равномерная выпуклость суммы C с модулем

$$\delta_C(t) \geq \min \left\{ \delta_A\left(\frac{1}{2}t\right), \delta_B\left(\frac{1}{2}t\right) \right\}. \quad (10)$$

В силу теоремы Дэя–Нордлендера (см. [18, гл. 3, § 3]) максимальный модуль равномерной выпуклости среди центрально-симметричных тел диаметра $2R$ имеет евклидов шар, для него $\delta_{B_R(0)}(t) = R - \sqrt{R^2 - \frac{t^2}{4}} \geq \frac{t^2}{8R}$. Отметим наконец, что в $\mathbb{R}^n$ класс строго и равномерно выпуклых компактов совпадает. Это легко вытекает из определения модуля выпуклости и соображений компактности.

Множество A называется R -сильно выпуклым (или сильно выпуклым с радиусом R) (см. [12], [19]), если оно может быть представлено в виде пересечения замкнутых шаров радиуса R . Легко видеть, что для сильно выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ с радиусом R модуль выпуклости не меньше, чем для шара радиуса R при всех допустимых значениях аргумента t , т.е. $\delta_A(t) \geq \frac{t^2}{8R}$. Известно (см. [12], следствие 2), что для R_i -сильно выпуклых множеств A_i , $i = 1, 2$, множество $A_1 + A_2$ является $(R_1 + R_2)$ -сильно выпуклым.

Сеткой $\mathbb{G} = \{p_i\}_{i=1}^I$ мы будем называть набор единичных векторов p_i . Будем говорить, что сетка $\mathbb{G}$ имеет *мелкость* $\Delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ (см. [12, определение 6], а также [20, § 2.6], [22]), если для всякого единичного вектора $p \in \mathbb{R}^n$ существуют множество $I_p \subset \{1, \dots, I\}$ и числа $\alpha_i > 0, i \in I_p$, такие, что

$$p = \sum_{i \in I_p} \alpha_i p_i, \quad \|p_i - p_j\| < \Delta \quad \forall i, j \in I_p.$$

Мы будем рассматривать внешнюю *многогранную аппроксимацию* выпуклого компактного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ на сетке $\mathbb{G}$ вида

$$\hat{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p_i, x) \leq s(p_i, A), p_i \in \mathbb{G}\}. \quad (11)$$

Предложение 1 (см. [23], теорема 2.2). Пусть выпуклый компакт $A \subset \mathbb{R}^n$ является равномерно выпуклым с модулем $\delta_A(\cdot)$. Пусть $\mathbb{G}$ – сетка мелкости $\Delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\frac{\Delta}{4 - \Delta^2} < \frac{\delta_A(\text{diam } A)}{\text{diam } A}$. Тогда

$$h(A, \hat{A}) \leq \frac{8}{7} \varepsilon(\Delta) \Delta,$$

где $\varepsilon(\cdot)$ – решение уравнения $\frac{\delta_A(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\Delta}{4 - \Delta^2}$.

Если A – произвольный выпуклый компакт, то в качестве $\varepsilon(\Delta)$ в предложении 1 нужно взять диаметр множества A .

Для сильно выпуклого множества с радиусом $R > 0$ погрешность аппроксимации уточняется в следующем предложении.

Предложение 2 (см. [22], замечание 1). Пусть $R > 0$, $\mathbb{G}$ – сетка мелкости $\Delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p_i, x) \leq 1, p_i \in \mathbb{G}\}$. Тогда $B_1(0) \subset M$ и

$$h(B_R(0), RM) \leq R \frac{\Delta^2}{1 - \frac{1}{2} \Delta^2}. \quad (12)$$

Если множество $B \subset \mathbb{R}^n$ является R -сильно выпуклым, то погрешность аппроксимации задается такой же формулой: $h(B, \hat{B}) \leq R \frac{\Delta^2}{1 - \frac{1}{2} \Delta^2}$.

В силу теоремы Дэя–Нордлендера $\varepsilon(\Delta)$ в типичных ситуациях имеет порядок Δ^α , $\alpha \in (0, 1]$.

Нам также понадобится один комбинаторный результат, доказанный в [17].

Предложение 3 (см. [17], лемма 1). Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ – такие выпуклые компакты, что $B \overset{*}{\subset} A = \{x_0\}$. Определим $D = (A + x_0) \cap \partial B$ и

$$P = \bigcup_{x \in D} N_1(B, x).$$

Тогда $0 \in \text{co } P$. Заметим, что по теореме Каратеодори $0 \in \text{co}\{p_i\}_{i=1}^m$, $m \leq n + 1$, $p_i \in P$.

2. ЗАДАЧА (5), АЛГОРИТМ И ПОГРЕШНОСТЬ

Дискретный вариант задачи (5) имеет вид

$$t_i \rightarrow \min_{i, x \in \mathbb{R}^n} x + \hat{M}(t_i) \supset \hat{M}_0, \quad (13)$$

где $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T_0$ – некоторое разбиение отрезка $[0, T_0]$. Для выпуклого компактного множества M_0 через $\hat{M}_0$, как и выше, будем обозначать его сеточную аппроксимацию на сетке $\mathbb{G}$. Договоримся решать задачу на отрезке времени $[0, T_0]$. Если при выбранном T_0 решение не найдено, то либо увеличиваем T_0 , либо возвращаем null.

Легко видеть, что если система неравенств

$$(p_j, x) + s(p_j, M(t_i)) \geq s(p_j, M_0) \quad \forall p_j \in \mathbb{G} \quad (14)$$

несовместна, то истинное решение задачи (5) $T > t_i$.

Пусть t_k – минимальное время из дискретного набора, для которого система (14) совместна, а $\hat{x}_0$ – некоторое решение системы (14).

Лемма 1. Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $\varepsilon \geq h(\hat{M}(t_k), M(t_k))$ и $\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{As} U ds \subset B_\varepsilon(0)$, где t_k – минимальное время, для которого система (14) разрешима. Тогда для любого решения $\hat{x}_0$ задачи (14) для $i = k$ истинное решение T задачи (5) удовлетворяет включению

$$-\hat{x}_0 \in (M(T) + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{\subset} M_0. \quad (15)$$

Доказательство. Пусть $\hat{x}_0$ – решение (14) для $i = k$. Тогда

$$-\hat{x}_0 \in \hat{M}(t_k) \overset{*}{\subset} \hat{M}_0 \subset (M(t_k) + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M_0. \quad (16)$$

Как было показано выше, $T > t_{k-1}$. Если $T \in (t_{k-1}, t_k]$, то из включения (16) получаем

$$-\hat{x}_0 \in \left(M(T) + \int_T^{t_k} e^{As} U ds + B_\varepsilon(0) \right) \overset{*}{\subset} M_0 \subset (M(T) + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{\subset} M_0. \quad (17)$$

Если $T > t_k$, то $M(t_k) \subset M(T)$ и

$$-\hat{x}_0 \in (M(t_k) + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M_0 \subset (M(T) + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M_0. \quad (18)$$

Объединяя формулы (17) и (18), получаем, что в любом случае выполнена формула (15). Лемма 1 доказана.

Включение $\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{As} U ds \subset B_\varepsilon(0)$ легко проверить. Для его справедливости надо, чтобы шаг по времени $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ удовлетворял условию $\Delta t_k \leq \frac{\varepsilon}{\mu \|U\|}$, где $\mu = \max_{s \in [0, t]} \|e^{As}\|$, а $\|U\| = \max_{u \in U} \|u\|$.

Теорема 1. Пусть (T, x_0) – решение задачи (5) и $T < +\infty$. Пусть выполнены условия $\varepsilon \geq h(\hat{M}(t_k), M(t_k))$ и $\int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{As} U ds \subset B_\varepsilon(0)$, где t_k – наименьшее время из дискретного набора, при котором верно (14).

1. Пусть множество $M(T)$ равномерно выпуклое с модулем $\delta_{M(T)}$. Тогда

$$\delta_{M(T) + B_{2\varepsilon}(0)}(\|x_0 - \hat{x}_0\|) \leq 2\varepsilon.$$

Заметим, что множество $M(T) + B_{2\varepsilon}(0)$ равномерно выпукло (см. (10)).

2. Определим $D = (M_0 - x_0) \cap \partial(M(T))$ и $P = \bigcup_{x \in D} N_1(M(T), x)$. Пусть $\delta > 0$ и $B_\delta(0) \subset \text{co } P$. Тогда $\|x_0 - \hat{x}_0\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}$.

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство теорем 1 и 2 из [17].

Прежде всего покажем, что решение (T, x_0) единственно в условиях пунктов 1 и 2 теоремы.

Пусть множество $M(T)$ равномерно строго выпукло. Если допустить, что есть две точки x_1 и x_2 , для которых $x_i + M(T) \supset M_0$, $i = 1, 2$, то в силу строгой выпуклости $M(T)$ выполнено включение

ние $\frac{x_1 + x_2}{2} + \text{int } M(T) \ni x$ для всякой точки $x \in M_0$. В силу компактности M_0 имеем $\frac{x_1 + x_2}{2} + \text{int } M(T) \supset M_0$. Это противоречит минимальности T .

Пункт 2 теоремы также гарантирует единственность решения (T, x_0) . Действительно, если вектор $v \neq 0$, то найдется вектор $p \in P$ такой, что $(p, v) > 0$. От противного, если для всех $p \in P$ верно $(p, v) \leq 0$, то для любой выпуклой комбинации $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i p_i$ для любых $p_i \in P$ выполнено $(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i p_i, v) \leq 0$. Отсюда $\sup_{p \in \text{co } P} (p, v) \leq 0$, т.е. 0 — граничная точка $\text{co } P$. Получили противоречие с условием $B_\delta(0) \subset \text{co } P$. Итак, пусть $p \in P$ и $(p, v) > 0$. Если $x \in D$ и $p \in N(M(T), x)$, то $(p, x + v) = (p, x) + (p, v) > s(p, M(T))$. Таким образом, сдвиг множества $M - x_0$ на любой вектор $v \neq 0$ выходит из $M(T)$, так как $x \in M - x_0$ и $x + v \notin M(T)$.

1. Без ограничения общности будем считать, что $x_0 = 0$. Фиксируем произвольное решение $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ задачи (13), (14). По лемме 1 выполнено включение (15). Это означает, что для любого $x \in D = M_0 \cap \partial(M(T))$ выполнено включение $x - \hat{x}_0 \in M(T) + B_{2\varepsilon}(0)$.

В силу предложения 3 найдутся точки $x_i \in D$, векторы $p_i \in N_1(M(T), x_i)$ и числа $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq m \leq n+1$ такие, что $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ и $\sum_{i=1}^m \lambda_i p_i = 0$. Отсюда $\sum_{i=1}^m \lambda_i (-\hat{x}_0, p_i) = 0$. Следовательно, найдется индекс $i \in \{1, \dots, m\}$ такой, что $(p_i, -\hat{x}_0) \geq 0$, $p_i \in N_1(M(T), x_i)$, $x_i \in D$. Зафиксируем данное i и соответствующие x_i, p_i .

Пусть $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : (p_i, x) \geq (p_i, x_i)\}$. Тогда $x_i - \hat{x}_0 \in H^+ \cap (M(T) + B_{2\varepsilon}(0)) =: S$, причем гиперплоскость $\partial H^+ + 2\varepsilon p_i$ опорная ко множеству $M(T) + B_{2\varepsilon}(0)$ в точке $x_i + 2\varepsilon p_i$.

Итак, вписанный шар максимального радиуса во множестве $M(T) + B_{2\varepsilon}(0)$ с центром в сегменте S имеет радиус не более 2ε (2ε — расстояние между параллельными гиперплоскостями ∂H^+ и $\partial H^+ + 2\varepsilon p_i$). Поэтому расстояние от x_i до $x_i - \hat{x}_0$, т.е. $\|\hat{x}_0\|$, оценивается из условия $2\varepsilon \geq \delta_{M(T)+B_{2\varepsilon}(0)}(\|\hat{x}_0 - 0\|)$. Пункт 1 доказан.

2. Снова, не ограничивая общности, можно считать $x_0 = 0$. Фиксируем $\tau \in (0, 1)$. Пусть $P_1 \subset P$ — такое конечное множество, что $h(P, P_1) < (1 - \tau)\delta$. Тогда $B_{\tau\delta}(0) \subset \text{co } P_1$.

Пусть L — грань множества $\text{co } P_1$, $L = \text{co}\{p_{ij}\}_{j=1}^J$, $p_{ij} \in P_1$. Заметим, что $\text{co}(L \cup \{0\})$ есть n -мерная пирамида с боковыми ребрами длины 1, вершиной 0 и основанием L . Определим $e = P_{\text{aff } L} 0$, $\|e\| \geq \tau\delta$ ($\text{aff } L$ — аффинная оболочка L).

Угол φ между векторами e и p_{ij} для всякого $j = 1, \dots, J$ можно оценить как $\cos \varphi = \frac{\|e\|}{\|p_{ij}\|} = \|e\| \geq \tau\delta$. Через $\angle(a, b)$ будем обозначать угол между ненулевыми векторами $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Если решение задачи (13), (14) $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет включению $-\hat{x}_0 \in \text{cone}\{p_{ij}\}_{j=1}^J = \text{cone } L$, то найдется такой номер j , $1 \leq j \leq J$, что $\angle(-\hat{x}_0, p_{ij}) \leq \varphi$. Покажем это. Пусть $w = \{-t\hat{x}_0 \mid t \geq 0\} \cap \text{aff } L$ и $R = \sqrt{1 - \|e\|^2} = \|p_{ij} - e\|$ для любого j . Пусть точка w — относительно внутренняя точка симплекса $\text{co}\{p_{ij}\}_{j=1}^m$, $m \leq n$, и $a_j = p_{ij} - w$, $1 \leq j \leq m$. Так как w относительно внутренняя точка, то найдутся $\lambda_j > 0$, $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$, для которых $\sum_{j=1}^m \lambda_j p_{ij} = w$ или $\sum_{j=1}^m \lambda_j a_j = 0$. Отсюда $\sum_{j=1}^m \lambda_j (a_j, w) = 0$ и, значит, найдется номер j , для которого $(a_j, w) \geq 0$.

Для этого номера j в треугольнике $p_{ij}0w$ $\angle(p_{ij} - w, -w) \geq \frac{1}{2}\pi$ и тем самым $\|p_{ij} - w\|^2 + \|e\|^2 \leq \|p_{ij} - w\|^2 + \|w\|^2 \leq 1$, т.е. $r = \|p_{ij} - w\| \leq R$.

По теореме косинусов из треугольника $p_{ij}0w$ косинус угла $\gamma = \angle(-\hat{x}_0, p_{ij}) = \angle(w, p_{ij})$ равен

$$\cos \gamma = \frac{1 + \|w\|^2 - r^2}{2\|w\|} \geq \frac{1 + \|w\|^2 - R^2}{2\|w\|} = \frac{\|w\|^2 + \|e\|^2}{2\|w\|} \geq \|e\| = \cos \varphi.$$

Итак, $\angle(-\hat{x}_0, p_{ij}) \leq \varphi$.

Рассмотрим соответствующую точку $x_{ij} \in D = M_0 \cap \partial(M(T))$, для которой $p_{ij} \in N_1(M(T), x_{ij})$. Для краткости обозначим $z_0 = x_{ij}$, $p_0 = p_{ij}$.

Пусть $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p_0, x - z_0) \geq 0\}$. В силу формулы (15) точка $z_0 - \hat{x}_0$ лежит между плоскостями ∂H^+ и $\partial H^+ + 2\epsilon p_0$, и угол между $-\hat{x}_0$ и p_0 не более φ . Отсюда

$$\|\hat{x}_0\| \leq \frac{2\epsilon}{\cos \angle(-\hat{x}_0, p_0)} \leq \frac{2\epsilon}{\cos \varphi} \leq \frac{2\epsilon}{\tau \delta}.$$

Устремляя $\tau \rightarrow 1 - 0$, получаем утверждение теоремы. В заключение отметим, что условие непустой внутренности $B_\delta(0) \subset \text{co } P$ в п. 2 теоремы является ключевым. Именно оно гарантирует выполнение линейной оценки по ϵ в п. 2. Теорема доказана.

Опорную функцию множества достижимости $M(t)$ для любого единичного вектора $p \in \mathbb{R}^n$ легко вычислить по формуле (9). Если U — любое компактное множество, для которого точно вычисляется опорная функция $s(p, U)$, то функция $s(p, e^{As}U) = s(e^{A^Ts}p, U)$ точно вычисляется для каждого s и является липшицевой по s . Поэтому проблем с ее интегрированием по отрезку $[0, t]$ не возникает. В частности, в рассмотренных ниже примерах погрешность вычисления соответствующего интеграла может быть сделана сколь угодно малой.

Замечание 1. Напомним, что во введении мы предположили, что решение задачи (5) существует и реализуется за конечное время. Достаточно, чтобы нашлось $t > 0$, для которого $M(t) \stackrel{*}{=} M_0 \neq \emptyset$.

Для строгой=равномерной выпуклости $M(T)$ достаточно, чтобы множество U удовлетворяло условию: для любого единичного вектора $p \in \mathbb{R}^n$ опорное подмножество $(e^{As}U)(p)$ одноточечно для п.в. $s \in [0, T]$. При этом опорное множество $M(T)(p) = \int_0^T (e^{As}U)(p) ds$ одноточечно для любого $\|p\| = 1$, и, значит, множество $M(T)$ строго выпукло. При этом множество $M(T)$ не обязательно сильно выпукло. Например, для системы с нулевой динамикой $x' \in 0 \cdot x + U = U$, $x(0) = 0$, U — строго, но не сильно выпуклый компакт (например, U — шар ℓ_α^n -нормы при $\alpha > 2$).

Вопрос о модуле равномерной выпуклости $M(T)$ для конкретных матриц A и множеств U должен решаться отдельно и в настоящей работе не рассматривается. Отметим, что если $M(T)$ сильно выпукло с радиусом R , оценка $\|x_0 - \hat{x}_0\|$ в п. 1 имеет порядок $\sqrt{(R + \epsilon)\epsilon} \asymp R\Delta$ по радиусу и мелкости сетки.

Заметим, что и для нестрого выпуклого множества U (например, отрезка) множество $M(T)$ может быть строго-равномерно, но не сильно выпуклым. Соответствующий пример будет рассмотрен в приложении 2.

В п. 2 теоремы 1 требуется выполнение включения $B_\delta(0) \subset \text{co } P$, которое априори бывает трудно проверить. Тем не менее, если из каких-то соображений это включение установлено, то, как показано в примерах, возможно оценить погрешность алгоритма. Иногда проверить указанное условие можно после решения на сетке задачи-аппроксимации. Ниже приводится такой пример.

Пример 1. Рассмотрим пример, в котором обсудим ряд условий, позволяющих установить включение $0 \in \text{int co } P$ в теореме 1 по решению задачи (13). Пусть $D = \{d_i\}_{i=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}^n$ и $M_0 = \text{co } D$ —

полноразмерный симплекс. Допустим, что сетка $\mathbb{G}$ выбирается так, что $\hat{M}_0 = M_0$. Предположим, что некоторое решение $\hat{x}_0, t_k$ задачи (13) удовлетворяет условиям $\hat{x}_0 = 0, M_0 \cap \partial \hat{M}(t_k) = D$. Предположим, что внутренность $M(t_k)$ содержит шар радиуса $r > 0$ и $r > 10\epsilon$. Потребуем строгую выпуклость $M(T)$.

Определим грани $S_i = \text{co}(D \setminus \{d_i\})$ для всех $1 \leq i \leq n+1$.

Тогда в обозначениях теоремы 1 по лемме 1

$$\hat{M}(t_k) \subset M(t_k) + B_\epsilon(0) \subset M(T) + B_{2\epsilon}(0), \quad M'_k := \hat{M}(t_k) \overset{*}{-} B_{2\epsilon}(0) \subset M(T). \quad (19)$$

Предположим, что для каждого i найдется вектор $v_i \neq 0$ такой, что $S_i + v_i \subset M'_k \overset{*}{-} B_{2\epsilon}(0)$. Последнее условие означает, что сетка $\mathbb{G}$ имеет достаточно малую мелкость, а симплекс M_0 имеет ребра меньшие, чем характерный размер M'_k . Отметим, что проверка существования векторов v_i сводится к нахождению ненулевых векторов $v = v_i$, удовлетворяющих системе линейных неравенств $s(p, S_i) + (p, v) + 4\epsilon \|p\| \leq s(p, \hat{M}(t_k))$ для всех $p \in \mathbb{G}$ и может быть решена с помощью линейного программирования. Покажем, что если требуемые векторы v_i существуют, то $(x + M_0) \cap \partial M(T) = D$ для некоторого $x \in \mathbb{R}^n$.

Действительно, найдется вектор $x \in \mathbb{R}^n$ такой, что выполнено включение $x + M_0 \subset M(T)$, а значит, для всякого i имеют место включения $x + S_i \subset M(T)$, $S_i + v_i \subset M'_k \overset{*}{-} B_{2\epsilon}(0) \subset M(T) \overset{*}{-} B_{2\epsilon}(0) \subset \text{int } M(T)$. При этом, в силу непрерывности операции сложения векторов, можно выбрать $v_i \neq x$ и сохранить включение $S_i + v_i \subset M'_k \overset{*}{-} B_\epsilon(0) \subset \text{int } M(T)$. Следовательно, $S_i + (x, v_i] \subset \text{int } M(T)$ для всех $1 \leq i \leq n+1$. Если для некоторого i точка $x + d_i$ является внутренней для множества $M(T)$, то найдется $\lambda \in (0, 1)$ такое, что $(S_i + \lambda v_i + (1 - \lambda)x) \cup (d_i + \lambda v_i + (1 - \lambda)x) \subset \text{int } M(T)$. Это противоречит минимальности T . Утверждение $(x + M_0) \cap \partial M(T) = D$ доказано. Также из строгой выпуклости $M(T)$ и замечания 1 вытекает, что $M(T) \overset{*}{-} M_0 = \{x\}$. Далее можно считать $x = 0$, заменив M_0 на $M_0 + x$.

Проанализируем множество $P = \bigcup_{1 \leq i \leq n+1} N_i(M(T), d_i)$ и установим выполнение условия $0 \in \text{int co } P$.

В силу предложения 3 $0 \in \text{co } P$. Предположим, что $0 \in \partial \text{co } P$. Тогда по теореме Каратеодори найдутся n векторов $p_i \in N_i(M(T), d_i)$ (без ограничения общности с номерами $1 \leq i \leq n$) таких, что $0 \in \text{co}\{p_i\}_{i=1}^n$. Рассмотрим S_{n+1} . Как показано выше, это множество можно сдвинуть на вектор $v = v_{n+1} \neq 0$: $S_{n+1} + v \subset \text{int } M(T)$. Значит, $S_{n+1} + (0, v] \subset \text{int } M(T)$. Так как для всякого $1 \leq i \leq n$ точка $d_i + v \in \text{int } M(T)$, то $(p_i, v) < 0$. Тем самым для любой нетривиальной выпуклой комбинации $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ векторов $\{p_i\}_{i=1}^n$ (где $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$) имеем $(\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i, v) < 0$. Значит, выпуклая комбинация $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ не может равняться нулю. Противоречие показывает, что $0 \in \text{int co } P$.

Оценим теперь $|T - t_k|$. С одной стороны, $T > t_{k-1}$. Для оценки T сверху предположим, что $T > t_k$. Тогда

$$\emptyset \neq M(T) \overset{*}{-} M_0 = \left(M(t_k) + \int_{t_k}^T e^{As} U ds \right) \overset{*}{-} M_0,$$

причем T минимально возможное. По формуле (16) $(M(t_k) + B_\epsilon(0)) \overset{*}{-} M_0 \neq \emptyset$, откуда $T \leq \tau$, где $\tau > t_k$ — минимально возможное число, для которого

$$\int_{t_k}^{\tau} e^{As} U ds \supset B_\epsilon(0). \quad (20)$$

Условие (20) достаточно трудно для проверки и, в частности, оно может не выполняться. В реальных задачах это условие может проверяться численно. В случае $0 \in \text{int } U$ можно дать оценку сверху на T через ε .

Лемма 2. Пусть $\mu = \min_{\|h\|=1, t \in [0, T_0]} \|e^{At} h\|$ и $B_d(0) \subset U$ для некоторого $d > 0$. Тогда если $t_k + \frac{\varepsilon}{\mu d} \leq T_0$, то $t_{k-1} < T \leq t_k + \frac{\varepsilon}{\mu d}$.

Доказательство. Из определения μ получаем

$$\int_{t_k}^{\tau} e^{As} U ds \supset \int_{t_k}^{\tau} \mu B_d(0) ds = (\tau - t_k) \mu d \cdot B_1(0).$$

Поэтому $(\tau - t_k) \mu d \leq \varepsilon$ и $T \leq \tau \leq t_k + \frac{\varepsilon}{\mu d}$.

Некоторые оценки типа (20) для плоского случая содержатся в приложении 1.

3. ЗАДАЧА (6), АЛГОРИТМ И ПОГРЕШНОСТЬ. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотрим теперь задачу (6). Напомним, что мы ищем решение t на отрезке $[0, T_0]$. Дискретный вариант задачи (6) имеет вид

$$t_i \rightarrow \max_{i, x \in \mathbb{R}^n} x + \hat{M}(t_i) \subset \hat{M}_0, \quad (21)$$

все обозначения имеют тот же смысл, что и в разд. 2. Включение $x + \hat{M}(t_i) \subset \hat{M}_0$ имеет вид системы

$$(p_j, x) + s(p_j, M(t_i)) \leq s(p_j, M_0) \quad \forall p_j \in \mathbb{G}. \quad (22)$$

Лемма 3. Пусть t_k — решение (21), и $\hat{x}_0$ — некоторое решение системы (22). Определим $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon \geq h(M_0, \hat{M}_0)$ и $\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{As} U ds \subset B_\varepsilon(0)$. Тогда для $i = k$ и для истинного решения T задачи (6) выполнено включение

$$\hat{x}_0 \in (M_0 + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{\subset} M(T). \quad (23)$$

Доказательство. Пусть $\hat{x}_0$ — решение (21) для $i = k$. С учетом равенства $M(t_{k+1}) = M(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{As} U ds \subset M(t_k) + B_\varepsilon(0)$ имеем

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 \in \hat{M}_0 \overset{*}{\subset} \hat{M}(t_k) &\subset (M_0 + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{\subset} M(t_k) = \\ &= (M_0 + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{\subset} (M(t_k) + B_\varepsilon(0)) \subset (M_0 + B_{2\varepsilon}(0)) \overset{*}{\subset} M(t_{k+1}). \end{aligned}$$

Легко видеть, что если $\hat{M}_0 \overset{*}{\subset} \hat{M}(t_i) = \emptyset$, то и $M_0 \overset{*}{\subset} M(t_i) = \emptyset$. Отсюда $M_0 \overset{*}{\subset} M(t_{k+1}) = \emptyset$ и тем самым $T < t_{k+1}$. Следовательно, $M(T) \subset M(t_{k+1})$ и выполнено включение (23).

Используя формулу (23), получаем аналогично разд. 2 следующий результат относительно погрешности $\|x_0 - \hat{x}_0\|$ при условии, что t_k — решение (21).

Теорема 2. Пусть (T, x_0) — решение задачи (6) и $T < +\infty$. Пусть $\varepsilon \geq h(M_0, \hat{M}_0)$ и $\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{As} U ds \subset B_\varepsilon(0)$, где t_k — наибольшее время из дискретного набора, при котором верно (22).

1. Пусть множество M_0 равномерно выпуклое с модулем δ_{M_0} . Тогда

$$\delta_{M_0 + B_{2\varepsilon}(0)}(\|x_0 - \hat{x}_0\|) \leq 2\varepsilon.$$

2. Определим $D = (M(T) + x_0) \cap \partial M_0$ и $P = \bigcup_{x \in D} N_1(M_0, x)$. Пусть $\delta > 0$ и $B_\delta(0) \subset \text{co } P$. Тогда $\|x_0 - \hat{x}_0\| \leq 2\varepsilon/\delta$.

Замечание 2. Как и в теореме 1, решение (T, x_0) единственно. Замечание, аналогичное замечанию 1, имеет место и для теоремы 2.

Предположим, $T < t_k$. Тогда из включения

$$\hat{x}_0 \in (M_0 + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{=} M(t_k) = (M_0 + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{=} M(T) \overset{*}{=} \int_T^{t_k} e^{As} U ds$$

получаем, что T не менее максимального числа τ , $\tau < t_k$, которое определяется из условия

$$\int_\tau^{t_k} e^{As} U ds \supset B_\varepsilon(0). \quad (24)$$

Действительно, из доказательства леммы 3 и выполнения включения (24) имеем

$$\emptyset \neq (M_0 + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{=} M(t_k) = \left((M_0 + B_\varepsilon(0)) \overset{*}{=} \int_\tau^{t_k} e^{As} U ds \right) \overset{*}{=} M(\tau) \subset M_0 \overset{*}{=} M(\tau),$$

и тем самым $\tau \leq T$ (T — максимально число, для которого $M_0 \overset{*}{=} M(T) \neq \emptyset$).

Лемма 4. Пусть $\mu = \min_{\|h\|=1, t \in [0, T_0]} \|e^{At} h\|$ и $B_d(0) \subset U$ для некоторого $d > 0$. Тогда $t_k - \frac{\varepsilon}{\mu d} \leq T < t_{k+1}$.

Доказательство. Повторяет доказательство леммы 2.

Заметим, что если $t_k - \frac{\varepsilon}{\mu d} \leq 0$, то оценка леммы 4 не информативна, так как утверждает, что $0 \leq T < t_{k+1}$.

Доказательство лемм 2 и 4 основано на включении (20) или (24), они доказываются при условии, что 0 — внутренняя точка множества U . Однако может выполняться включение $0 \in \partial U$. В этом случае удастся доказать включение (20) или (24) для некоторых конкретных видов матрицы A и множества U . Этим вопросам посвящено приложение 1, где рассматривается ряд примеров в плоском случае.

В заключение рассмотрим, как меняется множество достижимости при изменении начальной точки и времени на их приближенные значения. Пусть (T, x_0) — истинное решение задачи (5) или (6), а $(\hat{T}, \hat{x}_0)$ — некоторое их приближение. Без ограничения общности считаем, что $T \leq \hat{T}$. Тогда отличие множеств достижимости системы (1) с начальными условиями $x(0) = e^{-AT} x_0$ и $x(0) = e^{-A\hat{T}} \hat{x}_0$ и временами T и $\hat{T}$ соответственно есть (см. (4))

$$\begin{aligned} & \left\| e^{AT} e^{-AT} x_0 + \int_0^T e^{As} U ds, e^{A\hat{T}} e^{-A\hat{T}} \hat{x}_0 + \int_0^{\hat{T}} e^{As} U ds \right\| \leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + \\ & + \left\| \int_0^T e^{As} U ds, \int_0^{\hat{T}} e^{As} U ds \right\| \leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + \left\| \int_T^{\hat{T}} e^{As} U ds \right\| \leq \|x_0 - \hat{x}_0\| + C \|U\| \cdot |T - \hat{T}|, \end{aligned}$$

где $C = \max_{s \in [T, \hat{T}]} \|e^{As}\|$.

Таким образом, основной вклад в погрешность вносит погрешность по времени $|T - \hat{T}|$.

Для сильно выпуклого множества достижимости с радиусом R погрешность $\|x_0 - \hat{x}_0\|$ решения задач (13) и (21) имеет порядок $\sqrt{(R + \varepsilon)\varepsilon}$. В случае условия непустой внутренней (пункт 2 в теоремах 1 и 2) указанная погрешность имеет порядок ε .

Величина $|T - \hat{T}|$ в силу лемм 2 и 4 оценивается $\varepsilon/(\mu d)$ в обозначениях этих лемм. В случае, если точка 0 — граничная точка множества $U \subset \mathbb{R}^2$ и спектр матрицы $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ не вещественный, получаем, что $|T - \hat{T}|$ имеет порядок $\varepsilon^{1/3}$ в случае гладкой границы U , когда возможно касание 0 шаром, целиком содержащимся в U . В случае, когда 0 лежит на отрезке, являющемся частью гра-

ницы ∂U , $U \subset \mathbb{R}^2$, получаем, что $|T - \hat{T}|$ имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$. Эти плоские случаи рассмотрены в приложении 1.

4. ПРИМЕРЫ

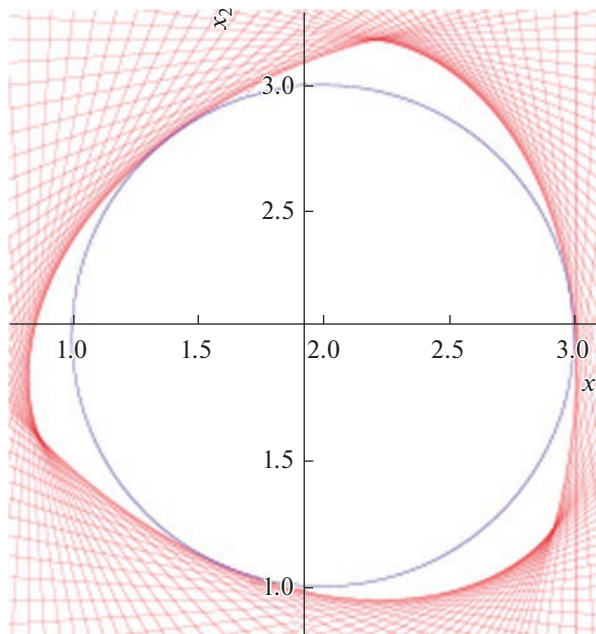
В примерах используется равномерная сетка в $\mathbb{R}^2$ вида $\left\{ \left(\cos \frac{2\pi k}{I}, \sin \frac{2\pi k}{I} \right) \right\}_{k=0}^{I-1}$, где I – число элементов сетки. Мелкость сетки имеет порядок $1/I$. Все картинки нарисованы для $I = 100$. Во всех примерах для всех i шаг по времени $t_{i+1} - t_i = 10^{-7}$ (избыточно малый). Мы старались подобрать условия примеров так, чтобы читатель мог их максимально просто интерпретировать.

Пример 2. Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad e^{As} = e^{-s} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}.$$

Пусть множество $U \subset \mathbb{R}^2$ является треугольником $\text{co}\{(-1, 1), (1, -1), (\sqrt{3}, \sqrt{3})\}$, а множество $M_0 \subset \mathbb{R}^2$ является кругом $M_0 = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 1\}$.

Решается задача (5) (см. фиг. 1). В табл. 1 приведены результаты численного моделирования для данного примера. Все обозначения соответствуют ранее описанным, и их значения были получены с помощью алгоритмов, описанных выше. Радиус сильной выпуклости множеств $M(t_k)$ равен примерно $R = 2.81$ и вычисляется численно, его можно также оценить чисто теоретически (см. следствие теоремы 1 из [24]). В условиях п. 2 теоремы 2 значение $\delta = 0.5$. Истинное время оценивается из условия $t_k - 10^{-7} \leq T \leq \tau$. Последняя строка данной таблицы подтверждает оценку $\|x_0 - \hat{x}_0\|$, полученную в п. 2 теоремы 2. Скорость сходимости алгоритма по пространственной переменной является квадратичной по мелкости сетки и соответственно линейной по $\varepsilon = h(\hat{M}(t_k), M(t_k))$ в силу неравенства $\delta > 0$.



Фиг. 1. Пример 1.

Таблица 1

I	200	400	600	2000	10 000
t_k	1.70047	1.70056	1.70058	1.70059	1.70060
$\hat{x}_0$	(1.89550, 1.40899)	(1.89548, 1.40902)	(1.89547, 1.40901)	(1.89548, 1.40901)	(1.89548, 1.40901)
ε	0.00275	0.00069	0.00031	2.77699×10^{-5}	1.11079×10^{-6}
τ (20)	1.91705	1.80585	1.77063	1.72128	1.70475
τ по лемме 6	1.93234	1.80997	1.77225	1.72155	1.70475
$\frac{1}{I^2} \ \hat{x}_0 - \hat{x}_0(10\,000)\ $	1.07092	2.93539	0.710737	1.96163	0

Пример 3. Снова матрица $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad e^{As} = e^{-s} \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix},$$

$U = \text{co}\{(-1,1), (1,-1), (\sqrt{3}, \sqrt{3})\}$, а множество $M_0 \subset \mathbb{R}^2$ является эллипсом с центром симметрии $x_0 = (-1,1)^T$ и матрицей $Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

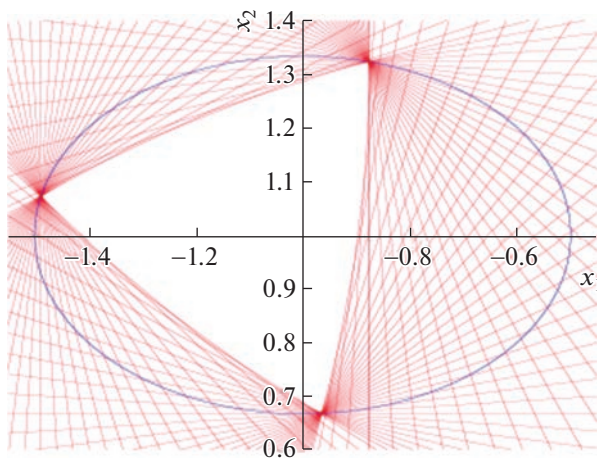
По теореме 3 (см. [12]) множество M_0 является сильно выпуклым с радиусом $R = 3/4$.

Решается задача (6) (см. фиг. 2). В условиях п. 2 теоремы 2 значение $\delta = 0.11$. Истинное время T оценивается из условия $\tau \leq T \leq t_k + 10^{-7}$. В табл. 2 приводятся результаты численного моделирования для данного примера.

Пример 4. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ задана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad e^{As} = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{2s} \end{pmatrix}.$$

Зададим $U = \text{co}\{(0.5,0), (-0.5,0), (0,1), (0,-1)\}$. Множество $M_0 \subset \mathbb{R}^2$ является эллипсом с центром симметрии $x_0 = (2,2)^T$ и матрицей $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$. Тогда по теореме 3 (см. [12]) множество M_0 является сильно выпуклым с радиусом $R = \frac{25}{3}$.



Фиг. 2. Пример 2.

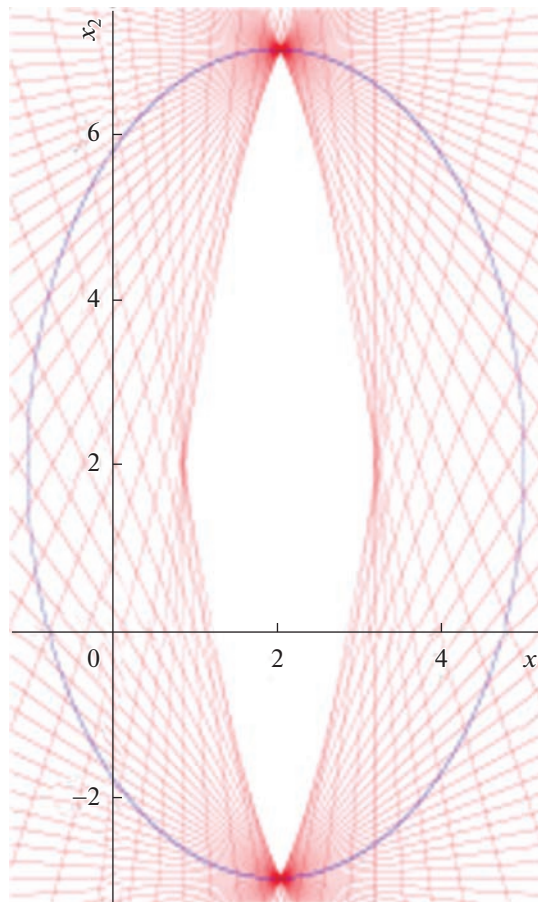
Таблица 2

I	200	400	600	2000	10 000
t_k	0.26734	0.26729	0.26729	0.26729	0.26728
$\hat{x}_0$	(-1.22649, 0.86960)	(-1.22653, 0.86966)	(-1.22653, 0.86965)	(-1.22653, 0.86966)	(-1.22653, 0.86966)
ε	0.00074	0.00019	8.22512×10^{-5}	7.40224×10^{-6}	2.96088×10^{-7}
τ (24)	0.21863	0.24216	0.25083	0.26243	0.26634
τ по лемме 6	0	0.07499	0.12055	0.20153	0.24479
$\frac{1}{I^2} \ \hat{x}_0 - \hat{x}_0(10\,000)\ $	2.79663	0.26175	2.65212	0.71218	0

На фиг. 3 изображено решение задачи (6). В отличие от предыдущего примера здесь не реализуется случай п. 2 теоремы 2 ($\delta = 0$). При этом 0 – внутренняя точка множества U , а именно, $B_{1/\sqrt{5}}(0) \subset U$. Истинное время T оценивается из условия $\tau \leq T \leq t_k + 10^{-7}$. В табл. 3 приведены результаты численного моделирования для данного примера.

Пример 5. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ задана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad e^{As} = \begin{pmatrix} e^{-0.5s} & 0 \\ 0 & e^{-3s} \end{pmatrix}.$$



Фиг. 3. Пример 3.

Таблица 3

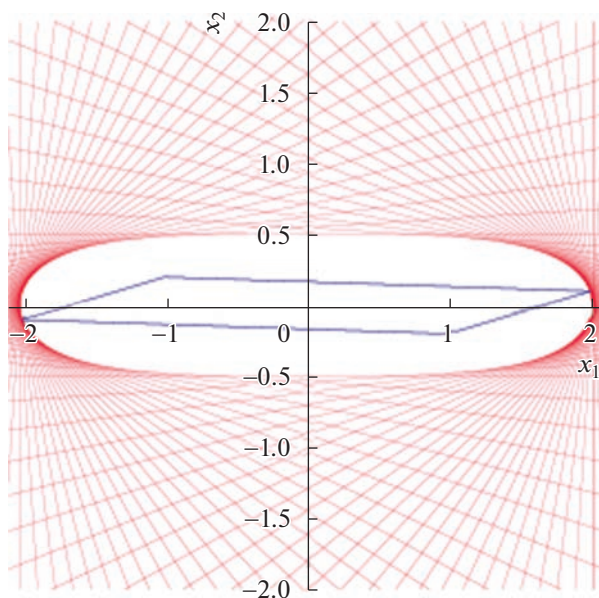
I	200	400	600	2000	10 000
t_k	1.19895	1.19895	1.19895	1.19895	1.19895
$\hat{x}_0$	(2.02830, 2)	(2.01418, 2)	(2.00949, 2)	(2.00303, 2)	(2.00158, 2)
ε	0.00823	0.00206	0.00091	8.22471×10^{-5}	3.28987×10^{-6}
τ (24)	1.19393	1.19769	1.19839	1.19890	1.19895
τ по лемме 4	0.99780	1.14868	1.17661	1.19694	1.19887
$\frac{1}{I^2} \ \hat{x}_0 - \hat{x}_0(10\,000)\ $	5.34503	5.04090	4.74569	2.90680	0

Таблица 4

I	200	600	2000	10 000
t_k	2.23484	2.23490	2.23491	2.23491
$\hat{x}_0$	(-0.00021, 0.00052)	(-0.00021, 0.00054)	(-3.90502×10^{-5} , 1.02372×10^{-5})	(-2.93699×10^{-5} , 7.72814×10^{-5})
ε	0.06393	0.00710	0.00064	2.55644×10^{-5}
$\frac{1}{I^2} \ \hat{x}_0 - \hat{x}_0(10\,000)\ $	0.09606	0.29784	0.05379	0

Зададим $U = B_{1.5}(0)$. Множество $M_0 \subset \mathbb{R}^2$ является параллелограммом с вершинами $(-2, -0.1)$, $(-1, 0.2)$, $(2, 0.1)$, $(1, -0.2)$.

Решается задача (5). В табл. 4 приведены результаты численного моделирования для данного примера. Радиус сильной выпуклости множества $M(t_k)$ примерно равен 64.76 и может быть вычислен по формуле $\int_0^{t_k} R(s) ds$ (см. [19]), где $R(s) = \lambda_1^2(s)/\lambda_2(s) = \frac{3}{2}e^{-2s}$ — радиус сильной выпуклости эллипса $e^{As}B_{3/2}(0)$ с максимальной полуосью $\lambda_1(s) = \frac{3}{2}e^{-0.5s}$ и минимальной полуосью



Фиг. 4. Пример 4.

$\lambda_2(s) = \frac{3}{2}e^{-3s}$. Для $I = 3000$ векторов в сетке время τ , полученное из включения (20), равно $\tau = 2.44260$. При меньшем I получается $\tau = 0$ в силу малости параметра $\mu = e^{-3t_k}$ из леммы 2. Скорость сходимости алгоритма по фазовой переменной является линейной по мелкости сетки, что обусловлено равенством $\delta = 0$.

Приложение 1

ВНУТРЕННОСТЬ МНОГОЗНАЧНОГО ИНТЕГРАЛА В ПЛОСКОМ СЛУЧАЕ

Лемма 5. Пусть собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — комплексно-сопряженные числа $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, и $e^{As} = e^{\alpha s}Q(\beta s)$, где $Q(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклый компакт, $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = r$ и выполняются условия $B_r(x) \subset U$, $0 \in B_r(x) \cap \partial U$. Определим $C = \min\{e^{\alpha t_1}, e^{\alpha t_2}\}$. Тогда для любых $0 < t_1 < t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset B_\delta(0),$$

где $\delta = Cr(t_2 - t_1) \left(1 - \frac{\sin(\beta(t_2 - t_1)/2)}{\beta(t_2 - t_1)/2} \right)$.

Отметим, что условия леммы означают гладкость границы множества U в точке 0. Более того, изнутри множества U точку $0 \in \partial U$ можно коснуться шаром радиуса r .

Доказательство. Имеем цепочку включений

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset \int_{t_1}^{t_2} e^{As} B_r(x) ds \supset C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) B_r(x) ds = C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) B_r(0) ds + C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) x ds.$$

Первое слагаемое справа с учетом равенства $Q(\beta s) B_r(0) = B_r(0)$ оценивается как

$$C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) B_r(0) ds \supset Cr(t_2 - t_1) B_1(0).$$

Пусть $x = r(\cos \theta, \sin \theta)^T$ для некоторого $\theta \in [0, 2\pi)$. Для второго слагаемого получаем

$$C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) x ds = \frac{2Cr \sin(\beta(t_2 - t_1)/2)}{\beta} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta(t_2 + t_1)}{2} + \theta\right) \\ \sin\left(\frac{\beta(t_2 + t_1)}{2} + \theta\right) \end{pmatrix} =: z.$$

Для точки z имеем $\|z\| = \frac{2Cr \sin(\beta(t_2 - t_1)/2)}{\beta}$, откуда

$$\delta \geq Cr(t_2 - t_1) - \|z\| = Cr(t_2 - t_1) \left(1 - \frac{\sin(\beta(t_2 - t_1)/2)}{\beta(t_2 - t_1)/2} \right).$$

Лемма 6. Пусть собственные значения матрицы $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — комплексно-сопряженные числа $\alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, и $e^{As} = e^{\alpha s}Q(\beta s)$, где $Q(s)$ из леммы 5. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклый компакт, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ и $I = \text{co}\{\pm r(\cos \theta, \sin \theta)^T\} \subset \partial U$. Определим $C = \min\{e^{\alpha t_1}, e^{\alpha t_2}\}$. Тогда для любых $0 < t_1 < t_2$, $t_2 - t_1 < \pi/\beta$,

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset B_\delta(0),$$

где $\delta = \frac{2}{\beta} Cr \left(1 - \cos \left(\frac{1}{2} \beta (t_2 - t_1) \right) \right)$.

Доказательство. Имеем цепочку включений $\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset \int_{t_1}^{t_2} e^{As} I ds \supset C \int_{t_1}^{t_2} Q(\beta s) I ds$. Пусть $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ — единичный вектор. Тогда

$$s \left(p, \int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \right) \geq C \int_{t_1}^{t_2} s(p, Q(\beta s) I) ds = Cr \int_{t_1}^{t_2} |\sin(\beta s + \psi)| ds,$$

где $\psi = \theta - \varphi + \pi/2$. Делая замену переменной $\tau = \beta s + \psi$, для $T_i = \beta t_i + \psi$, $i = 1, 2$, получаем $s \left(p, \int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \right) \geq \frac{1}{\beta} Cr \int_{T_1}^{T_2} |\sin \tau| d\tau$. Поскольку $T_2 - T_1 < \pi$, то

$$\int_{T_1}^{T_2} |\sin \tau| d\tau \geq 2 \int_0^{\frac{1}{2}(T_2 - T_1)} \sin \tau d\tau = 2 \left(1 - \cos \left(\frac{1}{2} (T_2 - T_1) \right) \right).$$

Подставляя последнюю оценку в предыдущее неравенство, получаем утверждение леммы.

Заметим, что лемма 6 дает второй порядок радиуса шара по $t_2 - t_1$, а лемма 5 — третий.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклый компакт. Допустим, что существует такое число $\rho > 0$, что $U \cap B_\rho(0) \supset H \cap B_\rho(0)$, где $H = \{x \in \mathbb{R}^2 | (p, x) \leq 0\}$ — полупространство для некоторого единичного вектора $p \in \mathbb{R}^2$. Тогда $\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \asymp (t_2 - t_1)^2$, $t_2 - t_1 \rightarrow +0$.

Действительно, пусть I — отрезок с центром в нуле такой, что $I \subset \partial H$. Рассмотрим круг $B_R(x)$, $\|x\| = R$, который касается ∂H в точке 0 и $I + B_R(x) \supset U$. Такие R и отрезок I можно подобрать в силу компактности U и того, что ∂H — опорная прямая к U в точке 0. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \subset \int_{t_1}^{t_2} e^{As} I ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{As} B_R(x) ds.$$

По леммам 5, 6 слагаемые в правой части последней формулы имеют порядок $(t_2 - t_1)^2 + (t_2 - t_1)^3 \asymp (t_2 - t_1)^2$, $t_2 - t_1 \rightarrow +0$.

Таким образом, наличие отрезка во множестве U , $0 \in \partial U$, с центром в нуле важнее телесности U для максимальности вписанного в интеграл шара с центром в нуле.

Лемма 7. Пусть $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$, где $\lambda_1 > \lambda_2$. Определим $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 > 0$ и $C = \min\{e^{\lambda_2 t_1}, e^{\lambda_2 t_2}\}$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклый компакт и $I \subset \partial U$, где $I = \text{co}(\pm r(\cos \theta, \sin \theta)^T)$, $r > 0$, $\theta \in (0, \pi)$, $\theta \neq \pi/2$. Тогда для любых $0 < t_1 < t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset B_\delta(0),$$

где $\delta = Cr \frac{\lambda K^2 \sin \theta}{\pi^2} (t_2 - t_1)^2$. Здесь $K = K(t_1, t_2, \lambda, \theta) = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{e^{\lambda t_i} |\text{ctg} \theta|}{1 + e^{2\lambda t_i} \text{ctg} \theta} \right\}$.

Доказательство. Пусть $M = \int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds$. Тогда

$$M \supset \int_{t_1}^{t_2} e^{\lambda_2 s} \begin{pmatrix} e^{\lambda s} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} I ds \supset Cr \int_{t_1}^{t_2} \text{co}(\pm (e^{\lambda s} \cos \theta, \sin \theta)^T) ds.$$

Пусть $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ — единичный вектор, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тогда для

$$J = \int_{t_1}^{t_2} |e^{\lambda s} \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta| ds$$

имеем $s(p, M) \geq CrJ$. Оценим J снизу.

1. Рассмотрим случай $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$. Здесь

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta e^{2\lambda s}} |\sin(\alpha(s) + \varphi)| ds,$$

где $\alpha(s) = \operatorname{arctg}(e^{\lambda s} \theta)$. Введем новую переменную $\tau = \alpha(s) + \varphi$, $ds = \frac{d\tau}{\alpha'(s)} = \frac{1 + e^{2\lambda s} \operatorname{ctg}^2 \theta}{\lambda e^{\lambda s} \operatorname{ctg} \theta} d\tau$. Отсюда, с учетом включения $\alpha(s) \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$,

$$\begin{aligned} J &= \frac{\sin \theta}{\lambda} \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(s))^{3/2}}{\operatorname{tg} \alpha(s)} |\sin \tau| d\tau = \frac{\sin \theta}{\lambda} \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} \frac{|\sin \tau|}{(\tau - \varphi) \cos^3(\tau - \varphi)} d\tau \geq \\ &\geq \frac{\sin \theta}{\lambda} \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} |\sin \tau| d\tau \geq \frac{2 \sin \theta}{\lambda} \int_0^{\frac{1}{2}(\alpha(t_2)-\alpha(t_1))} \sin \tau d\tau = \frac{4 \sin \theta}{\lambda} \sin^2 \left(\frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{4} \right) \geq \\ &\geq \frac{4 \sin \theta}{\lambda} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{4^2} (\alpha(t_2) - \alpha(t_1))^2 \frac{\sin \theta}{\lambda \pi^2} (\alpha(t_2) - \alpha(t_1))^2. \end{aligned}$$

По теореме о среднем найдется $\xi \in [t_1, t_2]$ такое, что

$$|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| = \frac{\lambda e^{\lambda \xi} |\operatorname{ctg} \theta|}{1 + e^{2\lambda \xi} \operatorname{ctg}^2 \theta} (t_2 - t_1) \geq \lambda K (t_2 - t_1).$$

Отсюда получаем утверждение леммы.

2. Пусть $\theta \in \left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$. Заменой $\psi = \pi - \theta$, $\alpha(s) = \operatorname{arctg}(e^{\lambda s} \operatorname{ctg} \psi)$ и $\tau = \alpha(s) + \varphi$ приводим интеграл J к виду

$$\begin{aligned} J &= \frac{\sin \psi}{\lambda} \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(s))^{3/2}}{\operatorname{tg} \alpha(s)} |\cos(\alpha(s) + \varphi)| d\tau \geq \frac{\sin \theta}{\lambda} \int_{\alpha(t_1)+\varphi-\frac{1}{2}\pi}^{\alpha(t_2)+\varphi-\frac{1}{2}\pi} |\sin \tau| d\tau \geq \\ &\geq \frac{2 \sin \theta}{\lambda} \int_0^{\frac{1}{2}(\alpha(t_2)-\alpha(t_1))} |\sin \tau| d\tau. \end{aligned}$$

Далее доказательство повторяет пункт 1.

Лемма 8. Пусть $e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Определим $C = \min\{e^{\lambda t_1}, e^{\lambda t_2}\}$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклый компакт и $I \subset \partial U$, где $I = \operatorname{co}(\pm r(\cos \theta, \sin \theta)^T)$, $r > 0$, $\theta \in (0, \pi)$. Тогда для любых $0 < t_1 < t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds \supset B_\delta(0),$$

где $\delta = Cr \frac{K^2 \sin \theta}{\pi^2} (t_2 - t_1)^2$. Здесь $K = K(t_1, t_2, \theta) = \min_{i=1,2} \left\{ \frac{1}{1 + (t_i + \operatorname{ctg} \theta)^2} \right\}$.

Доказательство. Повторяя рассуждения леммы 7, получаем для $M = \int_{t_1}^{t_2} e^{As} U ds$, $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ и $J = \int_{t_1}^{t_2} |(\cos \theta + s \sin \theta) \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi| ds$ имеем $s(p, M) \geq CrJ$. Для J получаем $J = \sin \theta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (s + \operatorname{ctg} \theta)^2} |\sin(\alpha(s) + \varphi)| ds$, где $\alpha(s) = \operatorname{arctg}(s + \operatorname{ctg} \theta)$. Заменой $\tau = \alpha(s) + \varphi$ находим

$$J = \sin \theta \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} (1 + (s + \operatorname{ctg} \theta)^2)^{3/2} |\sin \tau| d\tau = \sin \theta \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha(s))^{3/2} |\sin \tau| d\tau =$$

$$= \sin \theta \int_{\alpha(t_1)+\varphi}^{\alpha(t_2)+\varphi} \frac{|\sin \tau|}{|\cos^3(\tau - \varphi)|} d\tau \geq 2 \sin \theta \int_0^{\frac{1}{2}(\alpha(t_2) - \alpha(t_1))} \sin \tau d\tau = 4 \sin \theta \sin^2 \left(\frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{4} \right).$$

Отсюда $J \geq 4 \sin \theta \frac{4}{\pi^2} \frac{(\alpha(t_2) - \alpha(t_1))^2}{4^2}$. Применение теоремы о среднем завершает доказательство.

Приложение 2

ОДИН ПРИМЕР МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ

Приведем пример множества достижимости нетривиальной линейной системы, которое строго выпукло, но не сильно выпукло. Напомним, что $f(s) \asymp g(s)$, $s \rightarrow 0$, если существует такое $\delta > 0$, что $C_1 \leq \frac{f(s)}{g(s)} \leq C_2$ для всех $s \in (-\delta, \delta)$ и некоторых $C_2 \geq C_1 > 0$. Пусть $U = \operatorname{co}\{(0, 0, \pm 1)\}$,

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad e^{As} = e^{\lambda s} \begin{bmatrix} 1 & s & \frac{1}{2}s^2 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Для } \varepsilon \in (0, 1) \text{ рассмотрим векторы } p = \frac{1}{3}(2, -2, 1) \text{ и}$$

$q = q(\varepsilon) = \frac{(2, -2, 1 - \varepsilon)}{\sqrt{9 - 2\varepsilon + \varepsilon^2}}$. Легко проверить, что $\|p - q\| \asymp \varepsilon$, $\varepsilon \rightarrow 0$, и для $t > 1 + \sqrt{\varepsilon}$ ($s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}$ есть корни уравнения $(e^{A^T s} q(\varepsilon), (0, 0, 1)^T) = 0$)

$$M(t)(p) - M(t)(q) = \int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\sqrt{\varepsilon}} e^{\lambda s} (s^2, 2s, 2)^T ds, \|M(t)(p) - M(t)(q)\| \geq \int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{1+\sqrt{\varepsilon}} 2e^{\lambda s} ds \asymp \sqrt{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для произвольного фиксированного $R > 0$ значение $\sqrt{\varepsilon}/(R\varepsilon)$ не ограничено сверху при малых $\varepsilon > 0$. Следовательно, $M(t)$ не сильно выпукло, так как для сильно выпуклого множества с радиусом $R > 0$ опорные элементы этого множества должны удовлетворять условию Липшица на единичной сфере с константой R (см. [19], [12], следствие 4). Заметим, что множество $M(t)$ строго выпукло, так как для всякого вектора $p \in \partial B_1(0)$ множество $(e^{As} U)(p)$ одноточечно при всех $s \in [0, t]$, за исключением не более чем двух значений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liapounoff A.A.* Sur les fonctions-vecteurs completement additives // *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 1940. V. 4. № 6. P. 465–478.
2. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory, John Wiley; 1st Printing, ed. 1967, 588 p.
3. *Aumann R.* Integrals of set-valued functions // *J. Math. Anal. Appl.* 1965. V. 12. № 1. P. 1–12.
4. *Polyak B.T., Smirnov G.* Large deviations for non-zero initial conditions in linear systems // *Automatica*. 2016. V. 74. P. 297–307.
5. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential inclusions, Springer-Verlag, 1984.
6. *Aubin J.-P.* A Survey of viability theory // *SIAM J. Control and Optimizat.* 1990. V. 28. № 4. P. 749–788.

7. Kelley H.J. Gradient theory of optimal flight paths // ARSJ. 1960. V. 30. P. 947–953.
<https://doi.org/10.2514/8.5282>
8. Bryson A.E., Denham W.F. A steepest-ascent method for solving optimum programming problems // J. Appl. Mech. 1962. V. 29. P. 247–257; <https://www.gwern.net/docs/ai/1962-bryson.pdf>
9. Eichmeir Ph., Lauß Th., Oberpeilsteiner S., Nachbagauer K., Steiner W. The adjoint method for time-optimal control problems // J. Comput. Nonlinear Dynam. 2021. V. 16. № 2. P. 021003 (12 pages).
<https://doi.org/10.1115/1.4048808>
10. Cannarsa P., Sinestrari C. Convexity properties of the minimum time function // Calcul. Variat. Part. Different. Equat. 1995. V. 3. № 3. P. 273–298;
<https://doi.org/10.1007/bf01189393>
11. Boltyanskii V.G. Mathematical methods of optimal control, Holt, Rinehart and Winston (1st ed.), 1971.
12. Половинкин Е.С. Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 103–130.
13. Le Guernic C., Girard A. Reachability analysis of linear systems using support functions // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2010. V. 4. P. 250–262.
14. Althoff M., Frehse G., Girard A. Set propagation techniques for reachability analysis // Ann. Rev. Control, Robotics, and Autonomous Systems, Ann. Rev. 2021. V. 4. № 1. hal-03048155.
<https://doi.org/10.1146/annurev-control-071420-081941>
15. Serry M., Reissig G. Over-approximating reachable tubes of linear time-varying systems, arXiv:2102.04971v1.
16. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes, ser. Systems and Control: Foundations and Applications. Birkhauser/Springer, 2014, theory and computation.
17. Балашов М.В. Покрывание множества выпуклым компактом: оценки погрешности и вычисление // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 3. С. 337–349.
18. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств, Киев, Вища школа, 1980.
19. Frankowska H., Olech C. R-convexity of the integral of the set-valued functions, Contributions to analysis and geometry, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1981. P. 117–129.
20. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа, М., Физматлит, 2007. 2-е изд.
21. Балашов М.В., Половинкин Е.С. М-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 27–64.
22. Balashov M.V. On polyhedral approximations in an n -dimensional space // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. № 10. P. 1679–1685.
23. Balashov M.V., Repovš D. Polyhedral approximations of strictly convex compacta // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 374. P. 529–537.
24. Балашов М.В. Сильная выпуклость множеств достижимости линейных систем // Матем. сб. 2022. Т. 213. № 5. С. 30–49.