ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 2, с. 263–272

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОДНОГО КЛАССА ОСОБЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. С. Габбасов[1,*]

[1] 423810 Набережные Челны, пр-т Мира, 68/19, Набережночелнинский ин-т Казанского ун-та, Россия

*e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.
Переработанный вариант 21.07.2022 г.
Принята к публикации 04.08.2022 г.

Исследовано линейное интегродифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложены и обоснованы специальные обобщенные варианты методов моментов и подобластей. Установлена оптимальность по порядку точности построенных методов. Библ. 13.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, приближенное решение, прямой метод, теоретическое обоснование.

DOI: 10.31857/S0044466923020072, **EDN:** BNJEMQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена приближенному решению линейного интегродифференциального уравнения (ИДУ)

$$(Ax)(t) \equiv x^{(p)}(t)\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j} + \int_{-1}^{1} K(t,s)x(s)ds = y(t), \tag{1.1}$$

в котором $t \in I \equiv [-1,1]$, числа $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in N$, $j = \overline{1,q}$, и $p \in Z^+$ являются фиксированными; K и y — известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами “гладкости” точечного характера, а x — искомая функция. Очевидно, что задача об отыскании решения ИДУ (1.1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, возникает важный вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность этой задачи. При рассмотрении этого вопроса вполне естественно учитывать то, что при $p = 0$ ИДУ (1.1) представляет собой линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле эти уравнения являются “родственными”). Последнее встречается в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1] и библиографию в ней; [2, с. 121—129]), теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщенных функций типа D или V. Под D (соответственно, V) понимается пространство обобщенных функций, построенных при помощи функционала “дельта-функция Дирака”, (соответственно, “конечная часть интеграла по Адамару”). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3—11, 168—173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106—114].

ИДУ (1.1) при $q = 1$, $t_1 = 0$ исследовано в работе [7, с. 25—43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нетера для такого уравнения в классах гладких и обобщенных функций типа D. В статье [8] разработана полная теория разрешимости общего ИДУ (1.1) в некотором пространстве типа D обобщенных функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближенного решения в пространствах обобщенных функций с соответствующим теоретическим обоснованием. Первые результаты в этом направлении получены в работе [8], где предложен и обоснован прямой проекционный метод, основанный на применении стандартных полиномов.

В настоящей работе разработаны специальные обобщенные варианты методов моментов и подобластей, хорошо приспособленные к приближенному решению ИДУ (1.1) в некотором пространстве X типа D обобщенных функций. Дано их теоретическое обоснование в смысле [9, гл. 1, § 1–5] и установлено, что построенные методы оптимальны по порядку точности на некотором классе F, порожденном классом H_ω^r, среди всех “полиномиальных” проекционных методов решения исследуемых уравнений в пространстве X.

2. ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C \equiv C(I)$ – банахово пространство всех непрерывных на I функций с обычной max-нормой и $m \in N$. Следуя [10], скажем, что функция $f \in C$ принадлежит классу $C\{m;0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$, если в точке $t = 0$ существует тейлоровская производная $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (естественно считаем, что $C\{0;0\} \equiv C$). Построим основное в наших исследованиях пространство:

$$Y \equiv C\{m,p;0\} \equiv \left\{ y \in C\{m;0\} \,|\, y^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{0, p-1}) \right\},$$

где $p \in Z^+$ таково, что $p < m$. Снабдим его нормой

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{i=p}^{m-1} \left| y^{\{i\}}(0) \right|, \tag{2.1}$$

в которой $T\colon Y \to C$ – “характеристический” оператор класса Y, определяемый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) t^i \Big/ i! \right] t^{-m} \equiv H(t) \in C, \qquad H(0) \equiv \lim_{t \to 0} H(t). \tag{2.2}$$

Лемма 2.1 (см. [8]). i) *Включение $y \in Y$ равносильно выражению*

$$y(t) = t^m H(t) + \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i, \tag{2.3}$$

причем $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t = 0$, а $y^{\{i\}}(0) = \alpha_i i!$ $(i = \overline{p, m-1})$.

ii) *Пространство Y по норме* (2.1) *полно и нормально вложено в пространство C.*

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на I функций и наделим его специальной нормой

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} \left| z^{(i)}(-1) \right| \quad (z \in C^{(p)}), \tag{2.4}$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$.

Лемма 2.2 (см. [8]). *Пространство $C^{(p)}$ с нормой* (2.4) *полно и нормально вложено в пространство C.*

Следствие 1. Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в $C^{(p)}$ и норма (2.4) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \ge 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \le \|z\|_{C^{(p)}} \le d\|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где

$$\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^{p} \left\| z^{(i)} \right\|_C .$$

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \left\{ z \in C^{(p)} \,|\, z^{(i)}(-1) = 0 \ (i = \overline{0, p-1}) \right\}$ – банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \tag{2.5}$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(p)}$, $\gamma_i \in R$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее “тейлоровские” производные, действующие на пространстве Y основных функций по следующему правилу:

$$(\delta^{\{i\}}, y) \equiv \int_{-1}^{1} \delta^{\{i\}}(t) y(t) dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0) \quad (y \in Y,\ i = \overline{0, m-p-1}). \tag{2.6}$$

Ясно, что векторное пространство X банахово относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-p-1} |\gamma_i|. \tag{2.7}$$

3. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОДОБЛАСТЕЙ (ОМП)

Пусть задано ИДУ (1.1). Ради сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать $q = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$\begin{gathered}(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (t \in I), \\ V \equiv UD, \quad Df \equiv f^{(p)}(t), \quad Ug \equiv t^m \, g(t), \quad Kx \equiv \int_{-1}^{1} K(t,s) x(s) ds,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$$p \in N \cup \{0\}, \quad m \in N, \quad p < m; \quad y \in Y \equiv C\{m, p; 0\},$$

ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\cdot, s) \in C, \quad K(t, \cdot) \in Y, \quad \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y \quad (i = \overline{0, m-p-1}), \tag{3.2}$$

а $x \in X$ – искомый элемент.

Приближенное решение ИДУ (3.1) будем искать в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+n} \delta^{\{i\}}(t), \tag{3.3}$$

$$g_n(t) \equiv (Jz_n)(t), \quad z_n(t) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{3.4}$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1} z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^{t} (t-s)^{p-1} z(s) ds.$$

Неизвестные коэффициенты $c_j = c_j^{(n)}$, $j = \overline{0, n+m-p-1}$, найдем, согласно ОМП, из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(n+m-p)$-го порядка:

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (T\rho_n)(t) dt = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}, \tag{3.5}$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближенного решения, а $\{\tau_k\}_0^n \subset I$ – система узлов Чебышёва II рода с присоединенными концами промежутка I.

Прежде чем перейти к обоснованию предложенного метода (3.3)–(3.5), следуя [11], примем следующие полезные при оформлении результатов соглашения. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in N$ $(n \geq n_0)$ СЛАУ (3.5) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$ и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t;\{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (3.1) по норме пространства X” заменим простой фразой “метод (3.3)–(3.5) обоснованно применим к уравнению (3.1)”. Во-вторых, для погрешности приближенного решения введем специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|_X$; оценка такой величины определяет скорость сходимости приближенных решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (3.1).

Для вычислительного алгоритма (3.1)–(3.5) справедлива

Теорема 1. *Если однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2 в* [8]*), а функции $h \equiv T_tK$ (по t), $f_i \equiv T\psi_i$, $i = \overline{0, m-p-1}$, и Ty принадлежат классу Дини–Липшица, то метод* (3.3)–(3.5) *обоснованно применим к уравнению* (3.1) *и при этом*

$$\Delta x_n^* = O\left\{\left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-p-1} E_{n-1}(f_i) + E_{n-1}(Ty)\right]\ln n\right\}, \tag{3.6}$$

где $E_l(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f \in C$ алгебраическими полиномами степени не выше l, а через $E_l^t(\cdot)$обозначен функционал $E_l(\cdot)$, примененный по переменной t.

Доказательство. Очевидно, что ИДУ (3.1) представляется в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y\left(x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m;0\},\ y \in Y \equiv C\{m,p;0\}\right), \tag{3.7}$$

в котором оператор $A : X \to Y$ непрерывно обратим.

Систему (3.3)–(3.5) требуется записать также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства. Именно, через $X_n \subset X$ обозначим $(n+m-p)$ — мерное подпространство элементов вида (3.3), а за $Y_n \subset Y$ примем класс $\mathrm{span}\{t^i\}_p^{n+m-1}$. Далее введем линейный оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m-p} : Y \to Y_n$ согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m-p}(y;t) \equiv (UP_nTy)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!}, \tag{3.8}$$

где

$$P_n : C \to \prod\nolimits_{n-1} \equiv \mathrm{span}\{t^i\}_0^{n-1}$$

представляет собой оператор метода подобластей (см., например, [12]) по системе узлов $\{\tau_k\}_0^n$.

Покажем теперь, что система (3.3)–(3.5) равносильна линейному уравнению

$$A_nx_n \equiv Vx_n + \Gamma_nKx_n = \Gamma_ny \quad (x_n \in X_n,\ \Gamma_ny \in Y_n). \tag{3.9}$$

Пусть $x_n^* \equiv x_n(t;\{c_j^*\})$ – решение уравнения (3.9), т.е. $Vx_n^* + \Gamma_n\tau_n^* = 0$ $(\tau_n^* \equiv Kx_n^* - y)$. В силу равенств (3.3), (3.4) и (3.8) последнее означает, что

$$(U(z_n^* + P_nT\tau_n^*))(t) + \sum_{i=p}^{m-1}(\tau_n^*)^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!} \equiv 0. \tag{3.10}$$

На основании (2.3) с учетом того, что $P_n^2 = P_n$, очевидна эквивалентность тождества (3.10) системе

$$(P_n(z_n^* + T\tau_n^*))(t) \equiv 0, \quad (\tau_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}. \tag{3.11}$$

Далее, согласно структуре уравнения (3.7) и равенствам (3.3), (3.4) имеем

$$(\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = (\tau_n^*)^{\{i\}}(0), \quad i = \overline{p, m-1}, \quad \rho_n^* \equiv Ax_n^* - y$$

и

$$T\rho_n^* = T(Vx_n^* + \tau_n^*) = z_n^* + T\tau_n^*.$$

Поэтому в силу определения полиномиального оператора P_n (см. [12]) тождество в системе (3.11) означает, что

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (z_n^* + T\tau_n^*)(t)dt = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (T\rho_n^*)(t)dt = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Следовательно, система (3.11) принимает вид

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (T\rho_n^*)(t)dt = 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad (\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p,m-1}.$$

Итак, СЛАУ (3.5) имеет решение $\{c_j^*\}_0^{n+m-p-1}$, т.е. решение уравнения (3.9) является решением системы (3.3)–(3.5).

Для получения обратного утверждения достаточно провести только что изложенные рассуждения в обратном порядке.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (3.9). В этих целях нам понадобится аппроксимативное свойство оператора Γ_n, которое устанавливает

Лемма 3.1. *Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка*

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \le d_1 E_{n-1}(Ty)\ln n \quad (n = 2,3,\ldots) \tag{3.12}$$

(здесь и далее d_i, $i = \overline{1,10}$, — некоторые константы, значения которых не зависят от натурального числа n).

Справедливость леммы 3.1 легко следует из представления (2.3), определений (3.8), (2.1) и оценки (см., например, [12]) $\|f - P_n f\|_C \le d_1 E_{n-1}(f)\ln n$, $f \in C$.

Покажем теперь близость операторов A и A_n на подпространстве X_n. Используя уравнения (3.1) и (3.9) и оценку (3.12), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n Kx_n\|_Y \le d_1 E_{n-1}(TKx_n)\ln n. \tag{3.13}$$

На основании (3.1), (2.5) и (2.6) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i \gamma_i\, \psi_i(t).$$

Следовательно,

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n}\psi_i(t).$$

А тогда

$$TKx_n = \int_{-1}^{1} h(t,s)g_n(s)ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n} f_i(t). \tag{3.14}$$

Теперь с целью полиномиального приближения функции $TKx_n \in C$ построим следующий элемент:

$$(Q_{n-1}x_n)(t) \equiv \int_{-1}^{1} h_{n-1}^t(t,s)g_n(s)ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n} f_{n-1}^i(t), \tag{3.15}$$

где h_{n-1}^t и f_{n-1}^i — полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для $h(t,s)$ (по t) и $f_i(t)$ соответственно. По структуре (3.15) ясно, что $Q_{n-1}x_n \in \Pi_{n-1}$.

На основании выражений (3.14) и (3.15), леммы 2.2 и определения (2.7) последовательно выводим промежуточную оценку

$$
\begin{gathered}
E_{n-1}(TKx_n) \le \|TKx_n - Q_{n-1}x_n\|_C \equiv \max_{t\in I}\left|\int_{-1}^{1}(h - h_{n-1}^t)(t,s)\,g_n(s)ds + \sum_i (-1)^i c_{i+n}(f_i - f_{n-1}^i)(t)\right| \le \\
\le 2\|g_n\|_C\, E_{n-1}^t(h) + \sum_i |c_{i+n}| E_{n-1}(f_i) \le 2\|g_n\|_{(p)}\, E_{n-1}^t(h) + \|x_n\|_X \sum_i E_{n-1}(f_i) \le 2\|x_n\|_X\, E_{n-1}^t(h) + \qquad (3.16) \\
+ 2\|x_n\|_X \sum_i E_{n-1}(f_i) = 2\left(E_{n-1}^t(h) + \sum_i E_{n-1}(f_i)\right)\|x_n\|.
\end{gathered}
$$

Из неравенств (3.13) и (3.16) следует искомая оценка близости операторов A и A_n:

$$
\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n\to Y} \le d_2\left(E_{n-1}^t(h) + \sum_i E_{n-1}(f_i)\right)\ln n. \qquad (3.17)
$$

На основании оценок (3.17) и (3.12) из теоремы 7 (см. [9, гл. 1, § 4]) вытекает утверждение теоремы 1 с оценкой погрешности (3.6). Требуемое доказано.

Замечание 1. Если функции h (по t), f_i и Ty принадлежат пространству $H_\alpha^r(S)$, то в условиях теоремы 1 верна оценка

$$
\Delta x_n^* = O(n^{-r-\alpha}\ln n), \quad r+1 \in N, \quad \alpha \in (0,1],
$$

где

$$
H_\alpha^r(S) \equiv \left\{ f \in C^{(r)}(I) \,|\, \omega(f^{(r)};\Delta) \le S\Delta^\alpha,\ S \equiv \mathrm{const} > 0 \right\},
$$

а $\omega(f;\Delta)$ – модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ, $0 < \Delta \le 2$.

Для приложений может оказаться полезной

Теорема 2. *Пусть ИДУ* (3.1) *имеет решение* x^* *вида* (2.5) *при данной правой части* $y \in Y$ *и аппроксимирующий оператор* $A_n \equiv \Gamma_n A$ *непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения* $x_n^* = A_n^{-1}\Gamma_n y$ *представляется в виде* $\Delta x_n^* = O\{E_{n-1}(TUx^*)\ln n\}$.

Доказательство. Поскольку $A_n \equiv \Gamma_n A$, то в силу теоремы 6 (см. [9, гл. 1, § 3]) и структуры приближенного уравнения (3.9) имеем

$$
\Delta x_n^* = O\{\|\Gamma_n\|\|x^* - x_n\|_X\}, \qquad (3.18)
$$

где

$$
x_n \in X_n \equiv J(\Pi_{n-1}) \oplus \mathrm{span}\{\delta^{\{i\}}(t)\}_0^{m-p-1}
$$

есть пока произвольный элемент. Выберем его исходя из минимальности правой части неравенства (3.18). Именно, пусть $x_n \in X_n$ таков, что

$$
\|x^* - x_n\|_X \equiv \inf_{u_n\in X_n}\|x^* - u_n\|_X \equiv E_{n+m-p-1}^\delta(x^*). \qquad (3.19)
$$

В силу следствия из теоремы 1.5.14 (см. [5, гл. 1, § 5]) ясно, что наилучшее приближение (3.19) обобщенной функции $x^* \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$ элементами из X_n просто выражается через наилучшее равномерное приближение:

$$
E_{n+m-p-1}^\delta(x^*) = E_{n-1}(TUx^*). \qquad (3.20)
$$

Тогда из соотношений (3.18), (3.19) и (3.20), с учетом $\|\Gamma_n\|_{Y\to Y} = \|P_n\|_{C\to C} \le d_3\ln n$, следует требуемая оценка погрешности Δx_n^*.

4. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД МОМЕНТОВ (ОММ)

Приближенное решение задачи (3.1), (3.2) построим в виде агрегата (3.3), (3.4). Набор $\{c_j\}_0^{n+m-p-1}$ неизвестных параметров найдем, согласно ОММ, из СЛАУ

$$\int_{-1}^{1} \eta(t)(T\rho_n)(t)T_j(t)dt = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \quad \text{i} = \overline{p, m-1}, \tag{4.1}$$

где $\{T_j\}$ – полная ортонормированная на I по весу $\eta(t) \equiv (1 - t^2)^{-1/2}$ система полиномов Чебышёва I рода.

Обоснование вычислительного алгоритма (3.1)–(3.4), (4.1) дается в следующем утверждении.

Теорема 3. *Если* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ *в* X, *а функции* $h \equiv T_t K$ *(по t),* $f_i \equiv T\psi_i$, $i = \overline{0, m-p-1}$, *и* Ty *удовлетворяют на* I *условию Дини-Липшица, то метод* (3.3), (3.4), (4.1) *обоснованно применим к уравнению* (3.1), *причем*

$$\Delta x_n^* \le d_4 \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-p-1} E_{n-1}(f_i) + E_{n-1}(Ty) \right] \ln n.$$

Доказательство данной теоремы проводится повторением рассуждений, изложенных при доказательстве теоремы 1, с учетом того, что в случае ОММ система (3.3), (3.4), (4.1) эквивалентна следующему линейному операторному уравнению:

$$A_n x_n \equiv F_n A x_n = F_n y \quad (x_n \in X_n,\ F_n y \in Y_n), \tag{4.2}$$

где подпространства $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ введены в разд. 3, а $F_n : Y \to Y_n$– обобщенный оператор Фурье, построенный согласно правилу (3.8), в котором роль оператора P_n играет оператор Фурье $\Phi_n : \mathrm{C} \to \Pi_{n-1}$ по системе $\{T_j\}$ (см., например, [13, гл. 4, § 3]). В силу (2.3), (3.8), (2.1) и теоремы 2 (см. [13, гл. 4, § 7]) правые части уравнений (3.7) и (4.2) близки в том смысле, что $\|y - F_n y\|_Y \le d_5 E_{n-1}(Ty) \ln n$.

Замечание 2. В случае предложенного ОММ для решения ИДУ (3.1) справедлива теорема, содержание которой идентично содержанию теоремы 2.

5. К ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИДУ

Предварительно приведем необходимые определения и постановку задачи. Пусть X и Y – банаховы пространства, а X_n и Y_n – их соответствующие произвольные подпространства одинаковой размерности $N = N(n) < +\infty$, $n \in N$, причем $N \to \infty$ $(n \to \infty)$. Обозначим через $\Lambda_n \equiv \{\lambda_n\}$ некоторое множество линейных операторов λ_n, отображающих Y на Y_n. Далее рассмотрим два класса однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \tag{5.1}$$

и

$$\lambda_n A x_n = \lambda_n y, \quad x_n \in X_n, \quad \lambda_n \in \Lambda_n, \quad n \in N, \tag{5.2}$$

соответственно. Пусть $x^* \in X$ и $x_n^* \in X_n$ – решения уравнений (5.1) и (5.2) соответственно, а $F \equiv \{f\}$ – класс коэффициентов (т.е. исходных данных) уравнения (5.1), порождающий класс $X^* \equiv \{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя работе [9, гл. 2, § 1], величину

$$V_N(F) \equiv \inf_{X_n, Y_n} \inf_{\lambda_n \in \Lambda_n} V(F; \lambda_n; X_n, Y_n), \tag{5.3}$$

где

$$V(F; \lambda_n; X_n, Y_n) \equiv \sup_{f \in F}(f; \lambda_n; X_n, Y_n) = \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^*\|_X,$$

назовем *оптимальной оценкой погрешности* всевозможных прямых проекционных методов $(\lambda_n \in \Lambda_n)$ решения уравнения (5.1) на классе F.

Определение 1 (см. [9, гл. 2, § 1]). Пусть существуют подпространства $X_n^0 \subset X, Y_n^0 \subset Y$ размерности $N = N(n) < +\infty$ и операторы $\lambda_n^0 \colon Y \to Y_n^0$, $\lambda_n^0 \in \Lambda_n$, при которых выполняется условие

$$V_N(F) \succ\prec V(F; \lambda_n^0; X_n^0, Y_n^0) \quad (N \to \infty), \tag{5.4}$$

где символ $\succ\prec$ означает, как обычно, слабую эквивалентность. Тогда метод (5.1), (5.2) при $X_n = X_n^0$, $Y_n = Y_n^0$ и $\lambda_n = \lambda_n^0$ называется *оптимальным по порядку точности* на классе F среди всех прямых проекционных методов λ_n $(\lambda_n \in \Lambda_n)$ решения уравнений (5.1).

Рассмотрим теперь оптимизацию на классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K \in F$) ИДУ вида (3.1) при K (по t), $\psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t,0)$, $i = \overline{0, m-p-1}$, $y \in YH_\omega^r \equiv \left\{g \in Y \equiv C\{m,p;0\} \,|\, Tg \in H_\omega^r\right\}$, где $H_\omega^r \equiv \left\{f \in C^{(r)} \,|\, \omega(f^{(r)};\Delta) \le \omega(\Delta)\right\}$, $\omega(\Delta)$ – некоторый заданный модуль непрерывности; в частности, $H_\omega^r = H_\alpha^r(S)$ при $\omega(\Delta) = S\Delta^\alpha$, $S \equiv \mathrm{const} > 0$, $0 < \alpha \le 1$, $r + 1 \in N$. Тогда в силу теоремы 2 (см. [8]) имеем

$$X^* \equiv \left\{x^* \in X \,\middle|\, Ax^* = y;\, K, \psi_i,\, y \in YH_\omega^r\right\} = XH_{\omega^*}^r,$$

где

$$XH_\omega^r \equiv \left\{x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m;0\} \,|\, TUx \in H_\omega^r\right\}, \quad \omega^* \equiv e^*\,\omega, \quad 1 \le e^* \equiv \mathrm{const}.$$

Пусть

$$X_n^0 \equiv J\left(\Pi_{n-1}\right) \oplus \mathrm{span}\{\delta^{\{i\}}(t)\}_0^{m-p-1}, \quad Y_n^0 \equiv \mathrm{span}\{t^i\}_p^{n+m-1},$$

а $\Lambda_n^{(2)} \equiv \{\lambda_n\}$ – семейство всех линейных проекционных ($\lambda_n^2 = \lambda_n$) операторов $\lambda_n : Y \to Y_n^0$, удовлетворяющих условию $\|\lambda_n\| n^{-r}\omega(n^{-1}) = o(1)$, $n \to \infty$.

Иными словами, рассмотрим оптимизацию полиномиальных проекционных методов решения ИДУ (3.1) в пространстве $D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$ обобщенных функций.

Теорема 4. *Пусть* $F = YH_\omega^r$ *и* $\Lambda_n = \Lambda_n^{(2)}$. *Тогда*

$$V_N(F) \succ\prec N^{-r}\omega(N^{-1})\ln N, \quad N = n + m - p, \tag{5.5}$$

и предложенные ОМП и ОММ оптимальны по порядку точности на классе F среди всех прямых проекционных методов $\lambda_n \in \Lambda_n^{(2)}$ *решения ИДУ* (3.1) *в пространстве* $D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$.

Доказательство. Предварительно получим нижнюю оценку для $V_N(F)$. В этой связи отметим, что при $K(t,s) \equiv 0$ ИДУ (3.1) не принадлежит исследуемому нами классу однозначно разрешимых в $D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$ уравнений. Поэтому способ, предложенный в [9, гл. 4, §§ 2, 3] при оптимизации прямых проекционных методов решения интегральных уравнений II рода, здесь неприменим. Мы предлагаем несколько иной путь, позволяющий найти требуемую нижнюю оценку. Именно, рассмотрим уравнения (3.1) и (5.2) при $K = K^*$ из примера 1 (см. [8]). Нетрудно проверить, что в этом случае $A_n \equiv \lambda_n A$ $(\lambda_n \in \Lambda_n^{(2)})$ является сужением оператора A на подпространство $X_n^0 : A_n x_n \equiv \lambda_n A x_n = A x_n$, $x_n \in X_n^0$. Следовательно, в силу формулы (23) из (см. [8]) приближенное уравнение (5.2) при $K = K^*$ имеет единственное решение вида

$$x_n^*(t) = \left(JT\lambda_n y\right)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i \left(\lambda_n y - KJT\lambda_n y\right)^{\{i+p\}}(0)\delta^{\{i\}}(t). \tag{5.6}$$

ИДУ (3.1) при $K = K^*$ принадлежит классу однозначно разрешимых в $D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$ уравнений. Поэтому с учетом (5.3), формулы (23) из [8], (5.6), (2.7), (3.8) и соответствующих результатов работы [5, гл. 1, § 5, с. 27–31] имеем

$$\begin{gathered} V_N(F) \geq \inf_{\lambda_n\in\Lambda_n^{(2)}} \sup_{x^*\in XH_{\omega^*}^r} \|x^* - x_n^*\|_X = \inf_{\lambda_n} \sup_{y\in YH_\omega^r} \Big\{ \|JT(y-\lambda_n y)\|_{(p)} + \\ + \sum_{i=0}^{m-p-1} \Big| (y - KJTy)^{\{i+p\}}(0) - (\lambda_n y - KJT\lambda_n y)^{\{i+p\}}(0) \Big| \Big\} \geq \\ \geq \inf_{\lambda_n} \sup_{y} \|J(Ty - T\lambda_n y)\|_{(p)} \equiv \inf_{\lambda_n} \sup_{y} \|Ty - T\lambda_n y\|_C = \inf_{q_n\in Q_n^{(2)}} \sup_{Ty\in H_\omega^r} \|Ty - q_n Ty\|_C , \end{gathered} \tag{5.7}$$

где

$$Q_n^{(2)} \equiv \{q_n\} \equiv \Big\{ q_n \,|\, q_n : C \to \Pi_{n-1},\ q_n^2 = q_n,\ \|q_n\| n^{-r}\omega(n^{-1}) = o(1),\ n\to\infty \Big\}.$$

На основании рассуждений, приведенных при доказательстве лемм 1.5.1 и 1.5.2 (см. [5, гл. 1, § 5]), ясно, что $\lambda_n \in \Lambda_n^{(2)}$ эквивалентно $q_n \in Q_n^{(2)}$. Далее, известно (см. [9, гл. 4, § 3]), что

$$\inf_{q_n\in Q_n^{(2)}} \sup_{f\in H_\omega^r} \|f - q_n f\|_C \geq d_6 n^{-r}\omega(n^{-1}) \ln n,$$

откуда и из (5.7) находим нижнюю оценку

$$V_N(F) \geq d_7 N^{-r}\omega(N^{-1}) \ln N. \tag{5.8}$$

С другой стороны, согласно результатам разд. 3 и 4, каждый из предложенных методов (ОМП, ОММ) порождает свой проекционный оператор $\lambda_n^0 : Y \to Y_n^0$, причем $(\lambda_n^0)^2 = \lambda_n^0$ и $\|\lambda_n^0\| \succ\prec \ln n$, т.е. $\lambda_n^0 \in \Lambda_n^{(2)}$. Здесь $\lambda_n^0 = \Gamma_n$ в случае ОМП, а для ОММ $\lambda_n^0 = F_n$. Следовательно, благодаря теореме 2 и теореме Джексона (см., например, [13, гл. 3, § 2]) последовательно находим, что

$$\begin{gathered} V_N(F) \leq V(F;\lambda_n^0;X_n^0;Y_n^0) = \sup_{x^*\in XH_{\omega^*}^r} \|x^* - x_n^0\|_X \leq \\ \leq d_8 \{E_{n-1}(TUx^*)\ln n\} \leq d_9 n^{-r}\omega(n^{-1})\ln n \leq d_{10} N^{-r}\omega(N^{-1})\ln N, \quad \lambda_n^0 A x_n^0 \equiv \lambda_n^0 y. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Тогда из (5.4), (5.8) и (5.9) следует утверждение теоремы 4 с оценкой (5.5). Требуемое доказано.

Следствие 2. Если $F = YH_\alpha^r(S)$, $0 < \alpha \leq 1$, $r = 0,1,\ldots$, то справедливо соотношение

$$V_N(F) \succ\prec SN^{-r-\alpha} \ln N, \quad N = n + m - p,$$

и ОМП, ОММ оптимальны по порядку на классе F среди всех полиномиальных проекционных методов решения ИДУ (3.1) в пространстве $D_{-1}^{(p)}\{m;0\}$.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 3. На основании определения нормы в пространстве $X \equiv D_{-1}^{\{p\}}\{m;0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) приближенных решений к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщенных функций, т.е. слабая сходимость.

Замечание 4. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко получить из теорем 1 и 3, а именно, из них вытекает простое следствие: если исходные данные h, f_i и Ty уравнения (3.1) принадлежат классу H_α^r, $0 < \alpha \leq 1$, $r = 0,1,2,\ldots$, то в условиях теорем 1 и 3 соответственно справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-r-\alpha}\ln n)$.

Замечание 5. Поскольку $C\{m,0;0\} \equiv C\{m;0\}$ и $D_{-1}^{(0)}\{m;0\} \equiv D\{m;0\}$, при $p = 0$ исследуемое ИДУ (3.1) преобразуется в интегральное уравнение III рода с оператором $A: D\{m;0\} \to C\{m;0\}$, а предложенный метод (3.3)–(3.5) – в специальный для уравнения III рода вариант ОМП. Следовательно, теорема 1 содержит в себе соответствующие результаты (см. [5, гл. 4, § 1]) по обоснованию специального варианта ОМП для решения уравнений III рода в классе $D\{m;0\}$ обобщенных функций.

Замечание 6. Суть предыдущего замечания 5 остается в силе и в случае прямого проекционного метода (3.3), (3.4), (4.1).

Замечание 7. Так как в условиях теорем 1 и 3 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида

$$\left\|A_n^{-1}\right\| = O(1), \quad A_n^{-1}: Y_n \to X_n, \quad n \geq n_1,$$

то ясно (см. [9, гл. 1, § 5]), что предложенные в данной работе прямые методы для ИДУ (3.1) устойчивы относительно малых возмущений исходных данных. Это позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперед заданной степенью точности. Более того, если ИДУ (3.1) хорошо обусловлено, то хорошо обусловленными являются также СЛАУ (3.5) и (4.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bart G.R., Warnock R.L.* Linear integral equations of the third-kind // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
3. *Бжихатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче со смещением // Дифференц. ур-ния. 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
4. *Расламбеков С.Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. 1983. № 10. С. 51–56.
5. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. 176 с.
6. *Замалиев Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Казань: КФУ, 2012. 114 с.
7. *Абдурахман.* Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Ростов-на-Дону, 2003. 142 с.
8. *Габбасов Н.С.* Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 7. С. 889–899.
9. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. 232 с.
10. *Пресдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Матем. исследования. 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
11. *Габбасов Н.С.* К численному решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1721–1733.
12. *Нагих В.В.* Оценка нормы некоторого полиномиального оператора в пространстве непрерывных функций // Методы вычислений. Л.: 1976. Вып. 10. С. 99–102.
13. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.