ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 1, с. 74–84

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.7

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

 В. Р. Барсегян[1, 2, *]

[1] *0019 Ереван, пр-т Маршала Баграмяна, 24б, Институт механики НАН Армении, Армения*

[2] *0025 Ереван, ул. Алека Манукяна, 1, Ереванский государственный университет, Армения*

**e-mail: barseghyan@sci.am*

Поступила в редакцию 25.03.2022 г.
Переработанный вариант 16.05.2022 г.
Принята к публикации 07.07.2022 г.

Рассмотрена задача оптимального граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой, описываемой одномерным волновым уравнением с кусочно-постоянными характеристиками. Предположено, что время прохождения волны через каждый однородный участок одинаково. Управление осуществляется смещением на двух концах. Критерий качества задан на всем промежутке времени. Предложен конструктивный подход построения оптимального управляющего воздействия, переводящего колебания за заданный промежуток времени из начального состояния через многоточечные промежуточные состояния в конечное состояние. Полученные результаты иллюстрируются на конкретном примере. Библ. 20.

Ключевые слова: оптимальное управление колебаниями, оптимальное граничное управление, неоднородный колебательный процесс, волновое уравнение, кусочно-постоянные характеристики, разделение переменных

DOI: 10.31857/S0044466922120031, **EDN:** LEOHJD

ВВЕДЕНИЕ

К исследованию задач управления и оптимального управления распределенными колебательными системами с заданными начальными и конечными условиями, а также с многоточечными промежуточными условиями посвящены многие работы, в частности, [1]–[15]. Задачам исследования и управления разнородными распределенными составными системами посвящены, в частности, работы [8]–[18]. Одна из первых задач управления распределенной колебательной системой, состоящей из двух кусочно-однородных сред, была поставлена А.Г. Бутковским и исследована в [8]. В [9], [10] (и других работах этого же автора и его учеников) изучены задачи граничного управления колебаниями стержня, состоящего из разнородных участков. При исследовании этих задач использован метод Даламбера.

В настоящей работе рассмотрена задача оптимального граничного управления некоторой распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени. Предполагается, что колебательный процесс состоит из двух участков с разными упругими свойствами и плотностями, а их длины таковы, что время прохождения волны по каждому из участков одинаково.

Цель данной статьи состоит в разработке аналитического подхода построения функции оптимального граничного управления одномерными колебательными неоднородными процессами со смещением на двух концах, переводящего колебания за определенный промежуток времени из заданного начального состояния через многоточечные промежуточные состояния в заданное конечное состояние с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Построение осуществляется по следующей схеме. Задача сводится к задаче оптимального управления распределенными воздействиями с нулевыми граничными условиями, далее используются метод разделения переменных и методы теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются колебания распределенной кусочно-однородной среды, расположенной вдоль отрезка $-l_1 \le x \le l$ и состоящей из двух участков: $-l_1 \le x \le 0$ и $0 \le x \le l$. Скорость прохождения по участкам волны обозначим через $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$, где $\rho_i = \text{const}$ — плотность, $k_i = \text{const}$ — модуль Юнга, $i = 1, 2$. Предполагается, что длины l_1 и l участков выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \le x \le 0$ совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \le x \le l$, т.е.

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}. \tag{1.1}$$

Отметим, что таким колебательным неоднородным процессом могут быть продольные колебания кусочно-однородного стержня (ρ — плотность, k — модуль упругости) или поперечные колебания кусочно-однородной струны (ρ — плотность, k — натяжение струны).

Пусть состояние (продольные колебания) стержня (или поперечные колебания струны) представлено функцией $Q(x,t)$, $-l_1 \le x \le l$, $0 \le t \le T$. Отклонение от состояния равновесия описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & -l_1 \le x \le 0, \quad 0 \le t \le T, \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2}, & 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{1.2}$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0-0,t) = Q(0+0,t), \quad a_1^2\rho_1 \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0-0} = a_2^2\rho_2 \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0+0}. \tag{1.4}$$

Пусть заданы начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия:

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \le x \le l, \tag{1.5}$$

$$Q(x,T) = \varphi_T(x), \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \le x \le l. \tag{1.6}$$

Пусть также в некоторые промежуточные моменты времени t_k $(k = 1,\ldots,m)$:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = T,$$

заданы значения функции состояния колебания в виде

$$Q(x,t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \le x \le l, \quad i = 1,\ldots,m. \tag{1.7}$$

В формуле (1.3) функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — управляющие воздействия (граничные управления).

Предполагается, что функция $Q(x,t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x,t)\colon x \in [-l_1,l],\ t \in [0,T]\}$, а функции $\varphi_i(x) \in C^2[-l_1,l]$ $(i = 0, 1,\ldots,m,\ m+1)$, $\psi_0(x), \psi_T(x) \in C^1[-l_1,l]$.

Предполагается также, что все функции такие, что выполняются условия согласования

$$\begin{gathered} \mu(0) = \varphi_0(-l_1), \quad \dot{\mu}(0) = \psi_0(-l_1), \quad \nu(0) = \varphi_0(l), \quad \dot{\nu}(0) = \psi_0(l), \\ \mu(t_i) = \varphi_i(-l_1), \quad \nu(t_i) = \varphi_i(l), \quad i = 1,\ldots,m, \\ \mu(T) = \varphi_T(-l_1), \quad \dot{\mu}(T) = \psi_T(-l_1), \quad \nu(T) = \varphi_T(l), \quad \dot{\nu}(T) = \psi_T(l). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Сформулируем следующую задачу оптимального граничного управления колебаниями системы (1.2) с заданными значениями в промежуточные моменты времени.

Требуется найти такие оптимальные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \le t \le T$, (1.3), под воздействием которых колебательное движение системы (1.2) из заданного начального состояния (1.5) переходит в конечное состояние (1.6), обеспечивая выполнение условий (1.7) и минимизирующие функционал

$$\left[\int_0^T \left(\mu^2(t) + \nu^2(t)\right) dt\right]^{1/2}. \tag{1.9}$$

Отметим, что так как в отдельные промежуточные моменты времени t_k $(k = 1,\dots,m)$ заданы только значения функции состояния (1.7), то использовать подход поэтапного решения задачи оптимального управления нецелесообразно. Поэтому в работе предлагается такой подход решения рассмотренной задачи оптимального управления, в котором учитывается специфика промежуточных условий (1.7).

2. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ЗАДАЧЕ С НУЛЕВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Для решения поставленной задачи перейдем к новой переменной (см. [18])

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{a_2}{a_1} x, & -l_1 \le x \le 0, \\ x, & 0 \le x \le l, \end{cases} \tag{2.1}$$

что приводит к растяжению или сжатию отрезка $-l_1 \le x \le 0$ относительно точки $x = 0$. При этом с учетом (1.1) будем иметь, что отрезок $-l_1 \le x \le 0$ переходит к отрезку $-l \le \xi \le 0$. Для функции $Q(\xi,t)$ получим на отрезках одинаковой длины одинаковое уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, & -l \le \xi \le 0, \quad 0 \le t \le T, \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, & 0 \le \xi \le l, \quad 0 \le t \le T, \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \le \xi \le l, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.2}$$

с соответствующими граничными условиями

$$Q(-l,t) = \mu(t), \quad Q(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$Q(\xi,0) = \varphi_0(\xi), \quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \le x \le l, \tag{2.4}$$

промежуточными условиями

$$Q(\xi,t_i) = \varphi_i(\xi), \quad -l \le \xi \le l, \quad i = 1,\dots,m, \tag{2.5}$$

с конечными условиями

$$Q(\xi,T) = \varphi_T(\xi), \quad \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \le \xi \le l, \tag{2.6}$$

и с условиями сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков

$$Q(0-0,t) = Q(0+0,t), \quad a_1\rho_1 \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0-0} = a_2\rho_2 \left.\frac{\partial Q(\xi,t)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0+0}. \tag{2.7}$$

Отметим, что для удобства после замены переменной (2.1) все функции оставлены в исходных обозначениях.

Так как граничные условия (2.3) неоднородны, решение уравнения (2.2) построим в виде суммы

$$Q(\xi,t) = V(\xi,t) + W(\xi,t), \tag{2.8}$$

где $V(\xi,t)$ – функция с граничными условиями

$$V(-l,t) = V(l,t) = 0, \tag{2.9}$$

требующая определения, а функция $W(\xi,t)$ – решение уравнения (2.2) с условиями

$$W(-l,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = \nu(t) \tag{2.10}$$

и имеет вид

$$W(\xi,t) = \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu(t) + (l+\xi)\nu(t)\right]. \tag{2.11}$$

Подстановка (2.8) в (2.2) с учетом (2.11) приводит к следующему уравнению для определения функции $V(\xi,t)$:

$$\frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial \xi^2} + F(\xi,t), \quad -l \le \xi \le l, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.12}$$

где

$$F(\xi,t) = \frac{1}{2l}\left[(\xi - l)\ddot{\mu}(t) - (\xi + l)\ddot{\nu}(t)\right]. \tag{2.13}$$

Функция $V(\xi,t)$ удовлетворяет соответствующему (2.7) условию сопряжения в точке $\xi = 0$ соединения участков. Из (1.8), согласно (2.1) и (1.1), будем иметь

$$\begin{gathered} \varphi_0(-l_1) = \varphi_0(-l), \quad \varphi_i(-l_1) = \varphi_i(-l), \quad \varphi_T(-l_1) = \varphi_T(-l), \\ \psi_0(-l_1) = \psi_0(-l), \quad \psi_T(-l_1) = \psi_T(-l). \end{gathered} \tag{2.14}$$

Из начальных (2.4), промежуточных (2.5) и конечных (2.6) условий с учетом условий (1.8) и (2.14) функция $V(\xi,t)$ должна удовлетворять следующим начальным условиям:

$$\begin{gathered} V(\xi,0) = \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_0(-l) + (l+\xi)\varphi_0(l)\right], \\ \left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\psi_0(-l) + (l+\xi)\psi_0(l)\right], \end{gathered} \tag{2.15}$$

промежуточным условиям

$$V(\xi,t_i) = \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_i(-l) + (l+\xi)\varphi_i(l)\right], \quad i = 1,\ldots,m, \tag{2.16}$$

и конечным условиям

$$\begin{gathered} V(\xi,T) = \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\varphi_T(-l) + (l+\xi)\varphi_T(l)\right], \\ \left.\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}\right|_{t=T} = \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\psi_T(-l) + (l+\xi)\psi_T(l)\right]. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Таким образом, решение исходной задачи сведено к задаче управления колебанием, описываемым неоднородным уравнением (2.12) с однородными граничными условиями (2.9), которая формулируется следующим образом: требуется найти такие граничные оптимальные управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, под воздействием которых колебание, описываемое уравнением (2.12) с граничными условиями (2.9), переходит из заданного начального состояния (2.15) через промежуточные состояния (2.16) в конечное состояние (2.17) и минимизирующие функционал (1.9).

3. СВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С НУЛЕВЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Учитывая, что граничные условия (2.9) однородны, решение уравнения (2.12) ищем в виде

$$V(\xi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}V_k(t)\sin\frac{\pi k\xi}{l},\quad V_k(t)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}V(\xi,t)\sin\frac{\pi k\xi}{l}d\xi. \tag{3.1}$$

Функции $F(\xi,t)$, $\varphi_i(\xi)$ $(i=0,1,\ldots,m+1)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ представим в виде рядов Фурье в базисе $\left\{\sin\frac{\pi k\xi}{l}\right\}$ $(k=1,2,\ldots)$ и, подставив их значения вместе с $V(\xi,t)$ в уравнение (2.12), в соотношение (2.13) и в условия (2.15)–(2.17), получим для каждого $k=1,2,\ldots$ следующее неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot V_k(t)+\lambda_k^2V_k(t)=F_k(t),\quad \lambda_k^2=\left(\frac{a_2\pi k}{l}\right)^2, \tag{3.2}$$

$$F_k(t)=\frac{a_2}{\lambda_k l}\Big[\ddot\nu(t)\big(2(-1)^k-1\big)-\ddot\mu(t)\Big], \tag{3.3}$$

с начальным

$$\begin{gathered}V_k(0)=\varphi_k^{(0)}-\frac{a_2}{\lambda_k l}\Big[\varphi_0(-l)-\varphi_0(l)\big(2(-1)^k-1\big)\Big],\\ \dot V_k(0)=\psi_k^{(0)}-\frac{a_2}{\lambda_k l}\Big[\psi_0(-l)-\psi_0(l)\big(2(-1)^k-1\big)\Big],\end{gathered} \tag{3.4}$$

промежуточным

$$V_k(t_i)=\varphi_k^{(i)}-\frac{a_2}{\lambda_k l}\Big[\varphi_i(-l)-\varphi_i(l)\big(2(-1)^k-1\big)\Big] \tag{3.5}$$

и конечным условиями

$$\begin{gathered}V_k(T)=\varphi_k^{(T)}-\frac{a_2}{\lambda_k l}\Big[\varphi_T(-l)-\varphi_T(l)\big(2(-1)^k-1\big)\Big],\\ \dot V_k(T)=\psi_k^{(T)}-\frac{a_2}{\lambda_k l}\Big[\psi_T(-l)-\psi_T(l)\big(2(-1)^k-1\big)\Big].\end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь коэффициенты Фурье функций $F(\xi,t)$, $\varphi_i(\xi)$, $(i=0,1,\ldots,m,m+1)$, $\psi_0(\xi)$ и $\psi_T(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ $(i=0,1,\ldots,m,m+1)$, $\psi_k^{(0)}$ и $\psi_k^{(T)}$ соответственно.

Общее решение уравнения (3.2) с условиями (3.4) имеет вид

$$V_k(t)=V_k(0)\cos\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\dot V_k(0)\sin\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau. \tag{3.7}$$

Следуя [2]–[6], [18], с учетом условий (3.5) и (3.6) из (3.7) получим, что функции управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для каждого k удовлетворяют интегральным соотношениям

$$\begin{gathered}\int_0^T\mu(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau+E_k\int_0^T\nu(\tau)\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau=C_{1k},\\ \int_0^T\mu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau+E_k\int_0^T\nu(\tau)\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau=C_{2k},\\ \int_0^T\mu(\tau)h_k^{(i)}(\tau)d\tau+E_k\int_0^T\nu(\tau)h_k^{(i)}(\tau)d\tau=C_{1k}(t_i),\quad i=1,\ldots,m,\end{gathered} \tag{3.8}$$

где

$$C_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k} + X_{1k} + E_k Y_{1k}\right], \quad \tilde{C}_{1k} = \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k T,$$

$$C_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{2k} + X_{2k} + E_k Y_{2k}\right], \quad \tilde{C}_{2k} = \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0)\sin\lambda_k T - \dot{V}_k(0)\cos\lambda_k T,$$

$$C_{1k}(t_i) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left[\frac{\lambda_k l}{a_2}\tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} + E_k Y_{1k}^{(i)}\right], \quad \tilde{C}_{1k}(t_i) = \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0)\cos\lambda_k t_i - \dot{V}_k(0)\sin\lambda_k t_i,$$

$$\begin{gathered} X_{1k} = \lambda_k\varphi_T(-l) - \psi_0(-l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(-l)\cos\lambda_k T, \quad E_k = 1 - 2(-1)^k, \\ X_{2k} = \psi_T(-l) - \psi_0(-l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(-l)\sin\lambda_k T, \end{gathered} \tag{3.9}$$

$$Y_{1k} = \lambda_k\varphi_T(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k T - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k T, \quad Y_{2k} = \psi_T(l) - \psi_0(l)\cos\lambda_k T + \lambda_k\varphi_0(l)\sin\lambda_k T,$$

$$X_{1k}^{(i)} = \lambda_k\varphi_i(-l) - \psi_0(-l)\sin\lambda_k t_i - \lambda_k\varphi_0(-l)\cos\lambda_k t_i, \quad Y_{1k}^{(i)} = \lambda_k\varphi_i(l) - \psi_0(l)\sin\lambda_k t_i - \lambda_k\varphi_0(l)\cos\lambda_k t_i,$$

$$h_k^{(i)}(\tau) = \begin{cases} \sin\lambda_k(t_i - \tau) & \text{при} \quad 0 \le \tau \le t_i, \\ 0 \quad \text{при} \quad t_i < \tau \le T. \end{cases}$$

Таким образом, решение поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению таких граничных управлений $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, которые для каждого $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют интегральным соотношениям (3.8) и доставляют минимум функционалу (1.9).

На практике обычно выбираются несколько первых n ($k = 1, \ldots, n$) гармоник колебаний, и решается задача синтеза управлений, используя методы теории управления конечномерными системами. Решение задачи будем строить, придерживаясь этого подхода. Отметим, что для произвольного числа первых n ($k = 1, \ldots, n$) гармоник число интегральных соотношений в (3.8) равно $(2 + m)n$, которым должны одновременно удовлетворять искомые функции управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$. Учитывая это, из полученного соотношения (3.8) следует справедливость следующего утверждения о вполне управляемости (см. [19]).

Утверждение. *Для произвольного числа первых n гармоник динамический процесс, описываемый* (3.2) *с условиями* (3.4)–(3.6), *вполне управляем на промежутке времени* $[0, T]$ *тогда и только тогда, когда для любых значений величин* C_{1k}, C_{2k} *и* $C_{1k}(t_i)$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, *определяемых условиями* (3.9), *можно найти управления* $\mu(t)$ *и* $\nu(t)$, $t \in [0, T]$, *удовлетворяющие условию* (3.8).

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Так как функционал (1.9) можно рассматривать как квадрат нормы соответствующего линейного нормированного пространства, а интегральные соотношения (3.8), порожденные функциями $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \le t \le T$, линейны, то задачу определения оптимального управления для каждого n, $n = 1, 2, \ldots$, можно рассматривать как проблему моментов (см. [1], [19], [20]). Следовательно, решение можно построить с помощью алгоритма решения проблемы моментов.

Поэтому построим решение задачи (1.9) и (3.8) при $k = 1, 2, \ldots, n$ с помощью алгоритма решения проблемы моментов. Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \ldots, n$) проблемы моментов (1.9) и (3.8), следуя [19], нужно найти величины p_k, q_k, γ_{ik}, $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^{n}\left[p_k C_{1k} + q_k C_{2k} + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik} C_{1k}(t_i)\right] = 1, \tag{4.1}$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2 = \min_{(4.1)}\int_0^T\left[h_{1n}^2(\tau) + h_{2n}^2(\tau)\right]d\tau, \tag{4.2}$$

где

$$h_{1n}(\tau) = \sum_{k=1}^{n}\left[p_k \sin\lambda_k\,(T-\tau) + q_k \cos\lambda_k\,(T-\tau) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}h_k^{(i)}(\tau)\right],$$

$$h_{2n}(\tau) = \sum_{k=1}^{n}E_k\left[p_k \sin\lambda_k(T-\tau) + q_k \cos\lambda_k(T-\tau) + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}h_k^{(i)}(\tau)\right].$$

Для определения величин $p_k^0,\ q_k^0,\ \gamma_{ik}^0,\ k=1,\dots,n,\ i=1,\dots,m$, минимизирующих (4.2), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$f_n = \int_0^T\left[\left(h_{1n}(\tau)\right)^2 + \left(h_{2n}(\tau)\right)^2\right]d\tau + \beta_n\left[\sum_{k=1}^{n}\left(p_kC_{1k} + q_kC_{2k} + \sum_{i=1}^{m}\gamma_{ik}C_{1k}(t_i)\right) - 1\right],$$

где β_n – неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, вычисляя производные по $p_k,\ q_k,\ \gamma_{ik},\ k=1,\dots,n,\ i=1,\dots,m$, функции f_n и приравнивая к нулю, получаем следующую систему интегральных соотношений:

$$\int_0^T[h_{1n}(\tau) + E_kh_{2n}(\tau)]\sin\lambda_k(T-\tau)d\tau = -\frac{\beta_n}{2}C_{1k},$$

$$\int_0^T[h_{1n}(\tau) + E_kh_{2n}(\tau)]\cos\lambda_k(T-\tau)d\tau = -\frac{\beta_n}{2}C_{2k},$$

$$\int_0^T[h_{1n}(\tau) + E_kh_{2n}(\tau)]h_k^{(i)}(\tau)d\tau = -\frac{\beta_n}{2}C_{1k}(t_i), \quad k=1,\dots,n, \quad i=1,\dots,m.$$

Не приводя дальнейших построений решения (так как они аналогичны построениям, приведенным в [5], [6]) отметим, что оптимальные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ для любого $n=1,2,\dots$ представятся в виде

$$\mu_n^0(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right) + \sum\limits_{i=1}^{m}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k\,(t_i-\tau)\right], & 0\le\tau\le t_1,\\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right) + \sum\limits_{i=2}^{m}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k\,(t_i-\tau)\right], & t_1<\tau\le t_2,\\ \dots & \\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right) + \gamma_{mk}^0\sin\lambda_k\,(t_m-\tau)\right], & t_{m-1}<\tau\le t_m,\\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right), & t_m<\tau\le t_{m+1}=T, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\nu_n^0(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}E_k\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right) + \sum\limits_{i=1}^{m}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k\,(t_i-\tau)\right], & 0\le\tau\le t_1,\\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}E_k\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right) + \sum\limits_{i=2}^{m}\gamma_{ik}^0\sin\lambda_k\,(t_i-\tau)\right], & t_1<\tau\le t_2,\\ \dots & \\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}E_k\left[G_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right) + \gamma_{mk}^0\sin\lambda_k\,(t_m-\tau)\right], & t_{m-1}<\tau\le t_m,\\ \dfrac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}E_kG_k\left(p_k^0,q_k^0,\lambda_k,T,\tau\right), & t_m<\tau\le t_{m+1}=T, \end{cases} \tag{4.4}$$

где

$$G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right) = p_k^0 \sin\lambda_k(T-\tau) + q_k^0 \cos\lambda_k(T-\tau).$$

Здесь величины p_k^0, q_k^0, γ_{ik}^0, $k = 1,\ldots,n$, $i = 1,\ldots,m$, являются решениями задач (4.1) и (4.2), а

$$(\rho_n^0)^2 = \int_0^T \left[\left(h_{1n}^0(\tau)\right)^2 + \left(h_{2n}^0(\tau)\right)^2\right] d\tau,$$

$$h_{1n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right) + \sum_{i=1}^m \gamma_{ik}^0 h_k^{(i)}(\tau)\right],$$

$$h_{2n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n E_k\left[G_k\left(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau\right) + \sum_{i=1}^m \gamma_{ik}^0 h_k^{(i)}(\tau)\right].$$

Отметим, что значения оптимальных управлений $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ на конце каждого предыдущего промежутка $[t_{j-1}, t_j]$ совпадают со значениями в начале последующего промежутка $(t_j, t_{j+1}]$, $j = 1,\ldots,m$, и эти значения имеют следующий вид:

$$\mu_n^0(t_j) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum_{k=1}^n \left[p_k^0 \sin\lambda_k(T-t_j) + q_k^0\cos\lambda_k(T-t_j) + \sum_{i=j+1}^m \gamma_{ik}^0 \sin\lambda_k(t_i - t_j)\right],$$

$$\nu_n^0(t_j) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2}\sum_{k=1}^n E_k\left[p_k^0 \sin\lambda_k(T-t_j) + q_k^0\cos\lambda_k(T-t_j) + \sum_{i=j+1}^m \gamma_{ik}^0 \sin\lambda_k(t_i - t_j)\right].$$

Следовательно, построенные оптимальные граничные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(t)$ как функции от времени непрерывны на промежутке $[0, T]$.

Таким образом, доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема. *При согласовании исходных данных задачи, указанных в разд.* 1, *и выполнении условий вполне управляемости, задача оптимального управления* (1.1)–(1.9) (*или* (2.12), (2.15)–(2.17), (1.9)) *имеет непрерывное решение, определяемое формулами* (4.3) *и* (4.4).

Подставляя построенные выражения для оптимальных управлений $\mu_n^0(t)$ и $\nu_n^0(\tau)$ в (3.3), а полученное для $F_k^0(\tau)$ выражение – в (3.7), получим функцию $V_k^0(t)$, $t \in [0,T]$, $k = 1,\ldots,n$. Далее, из формулы (3.1) будем иметь

$$V_n^0(\xi,t) = \sum_{k=1}^n V_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l}\xi, \tag{4.5}$$

а с помощью (2.8) и (2.11) получим функцию $Q_n^0(\xi,t)$, которую назовем *оптимальной функцией колебания* для первых n гармоник. Функция $Q_n^0(\xi,t)$ запишется в виде

$$Q_n^0(\xi,t) = V_n^0(\xi,t) + W_n^0(\xi,t), \tag{4.6}$$

где

$$W_n^0(\xi,t) = \frac{1}{2l}\left[(l-\xi)\mu_n^0(t) + (l+\xi)\nu_n^0(t)\right]. \tag{4.7}$$

Учитывая обозначения (2.1), согласно (4.5)–(4.7), оптимальная функция $Q_n^0(x,t)$ при $-l_1 \le x \le l$ представляется в виде

$$Q_n^0(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^n V_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l_1}x + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{l_1}\right)\mu_n^0(t) + \left(1+\frac{x}{l_1}\right)\nu_n^0(t)\right], & -l_1 \le x \le 0, \quad 0 \le t \le T, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^n V_k^0(t)\sin\frac{\pi k}{l}x + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_n^0(t) + \left(1+\frac{x}{l}\right)\nu_n^0(t)\right], & 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{4.8}$$

Функция $Q_n^0(x,t)$ является непрерывной и можно убедиться, что для функции $Q_n^0(x,t)$ выполняются условия сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков (1.4).

5. ПРИМЕР

Для иллюстрации вышеизложенного построения предположим, что в граничных условиях (1.3) правый конец закреплен: $Q(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T$ (т.е. $\nu(t) = 0$). Рассмотрим случай $m = 1$, т.е. когда в одном промежуточном моменте времени t_1 $(0 < t_1 < T)$ задано состояние колебания

$$Q(x,t_1) = \varphi_1(x), \quad -l_1 \le x \le l.$$

Для простоты изложения построим функцию оптимального граничного управления $\mu_n^0(\tau)$ при $n = 1$ (следовательно, $k = 1$). В этом случае из (4.3) получим

$$\mu_1^0(t) = \begin{cases} \mu_1^{(1)0}(t) = \dfrac{1}{(\rho_1^0)^2}\Big[p_1^0 \sin\lambda_1(T-t) + q_1^0\cos\lambda_1(T-t) + \gamma_{11}^0\sin\lambda_1(t_1 - t)\Big], & 0 \le t \le t_1, \\ \mu_1^{(2)0}(t) = \dfrac{1}{(\rho_1^0)^2}\Big[p_1^0 \sin\lambda_1(T-t) + q_1^0\cos\lambda_1(T-t)\Big], & t_1 < t \le t_2 = T, \end{cases}$$

где

$$(\rho_1^0)^2 = \frac{T}{2}\Big((q_1^0)^2 + (p_1^0)^2\Big) + \frac{t_1}{2}\Big((\gamma_{11}^0)^2 + 2\gamma_1^0\left(p_1^0\cos\lambda_1(T-t_1) - q_1^0\sin\lambda_1(T-t_1)\right)\Big) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda_1}\left(p_1^0 q_1^0 \sin^2\lambda_1 T - \frac{(\gamma_{11}^0)^2}{2}\sin\lambda_1 t_1\cos\lambda_1 t_1 + \gamma_{11}^0\left(q_1^0\sin\lambda_1 T - p_1^0\cos\lambda_1 T\right)\sin\lambda_1 t_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{(q_1^0)^2 - (p_1^0)^2}{2}\sin\lambda_1 T\cos\lambda_1 T\right).$$

Оптимальная функция состояния $Q_n^0(\xi,t)$, согласно формулам (4.5)–(4.7), будет иметь вид

$$Q_1^0(\xi,t) = V_1^0(\xi,t) + W_1^0(\xi,t) = V_1^0(t)\sin\frac{\pi}{l}\xi + \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)\mu_1^0(t).$$

Согласно (4.8), явное выражение оптимальной функции $Q_1^0(x,t)$ при $-l_1 \le x \le l$ представляется в виде

$$Q_1^0(x,t) = \begin{cases} V_1^0(t)\sin\dfrac{\pi}{l_1}x + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{l_1}\right)\mu_1^0(t), & -l_1 \le x \le 0, \quad 0 \le t \le T, \\ V_1^0(t)\sin\dfrac{\pi}{l}x + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{l}\right)\mu_1^0(t), & 0 \le x \le l, \quad 0 \le t \le T, \end{cases}$$

или

при $0 \le t \le t_1$

$$Q_1^0(x,t) = \begin{cases} V_1^0(t)\sin\dfrac{\pi}{l_1}x + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{l_1}\right)\mu_1^{(1)0}(t), & -l_1 \le x \le 0, \\ V_1^0(t)\sin\dfrac{\pi}{l}x + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{l}\right)\mu_1^{(1)0}(t), & 0 \le x \le l, \end{cases}$$

при $t_1 < t \le t_2 = T$

$$Q_1^0(x,t) = \begin{cases} V_1^0(t)\sin\dfrac{\pi}{l_1}x + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{l_1}\right)\mu_1^{(2)0}(t), & -l_1 \le x \le 0, \\ V_1^0(t)\sin\dfrac{\pi}{l}x + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{x}{l}\right)\mu_1^{(2)0}(t), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Из полученных явных выражений для функции $Q_1^0(x,t)$ следует, что в точке стыка $x = 0$ имеем

$$Q_1^0(0,t) = \mu_1^0(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Из этих явных выражений также видно, что в силу непрерывности функции $\mu_1^0(t)$ оптимальная функция колебания $Q_1^0(x,t)$ также непрерывна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен конструктивный подход к построению функции оптимального граничного управления одномерными неоднородными колебательными процессами смещением на двух концах, переводящие колебания за определенный промежуток времени из заданного начального состояния через многоточечные промежуточные состояния в заданное конечное состояние с критерием качества, заданным на всем промежутке времени. Результаты могут быть использованы при проектировании оптимального граничного управления процессами разнородных колебаний в физических и технологических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. *Barseghyan V.R.* Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points in time // Mech. of Solid. 2019. V. 54. Iss. 8. P. 1216–1226.
https://doi.org/10.3103/S0025654419080120
3. *Barsegyan V.R.* The problem of optimal control of string vibrations // Inter. Appl. Mech. 2020. V. 56. № 4. P. 471–48.
https://doi.org/10.1007/s10778-020-01030-w
4. *Барсегян В.Р.* Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // Автоматика и телемехан. 2020. № 2. С. 36–47; Automation and Remote Control. 2020. V. 81. Iss. 2. P. 226–235.
https://doi.org/10.31857/S0005231020020038
5. *Barseghyan V., Solodusha S.* Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time. Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2021 // Lect. Not. Comp. Sci. 2021. V. 12755. P. 299–313.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-77876-7_20
6. *Barseghyan V. and Solodusha S.* On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time // Conf. Paper. Publ.: IEEE. *2021 International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*, P. 343–349, 2021.
https://doi.org/10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537514
7. *Barseghyan V.R.* On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure // Proceed.s of 2016 Inter. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conference), STAB 2016.
https://doi.org/10.1109/STAB.2016.7541163
8. *Львова Н.Н.* Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой // Автоматика и телемехани. 1973. № 10. С. 22–32.
9. *Ильин В.А.* Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. АН. 2011. Т. 440. № 2. С. 159–163.
10. *Ильин В.А.* О приведении в произвольно заданое состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. АН. 2010. Т. 435. № 6. С. 732–735.
11. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // Тр. ИММ УрОРАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 85–92.
12. *Егоров А.И., Знаменская Л.Н.* Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 5. С. 815–825. Comput. Math. Math. Phys. 2009. V. 49. Iss. 5. P. 786–796.
https://doi.org/10.1134/S0965542509050054
13. *Провоторов В.В.* Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. 2012. Вып. 1. С. 62–71.
https://doi.org/10. 2012.

14. *Amara J. Ben, Beldi E.* Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients // SIAM J. Control Optim. 2019. V. 57. № 5. P. 3360–3387.
https://doi.org/10.1137/16M1100496
15. *Mercier D., Régnier V.* Boundary controllability of a chain of serially connected Euler-Bernoulli beams with interior masses // Collectanea Math. 2009. V. 60. № 3. P. 307–334.
https://doi.org/10.1007/BF03191374
16. *Кулешов А.А.* Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости // Докл. АН. 2012. Т. 442. № 5. С. 594–597.
17. *Рогожников А.М.* Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами // Докл. АН. 2012. Т. 444. С. 488–491.
18. *Холодовский С.Е., Чухрий П.А.* Задача о движении неограниченной кусочно-однородной струны // Ученые записки Забайкальского гос. ун-та. Сер. Физика, математика, техника, технология. 2018. Т. 13. № 4. С. 42–50.
https://doi.org/10.21209/2308-8761-2018-13-4-42-50
19. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
20. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.