

Том 166, Выпуск 1

ISSN 0044-4510

Июль 2024



ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
и
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

Специальный выпуск, посвященный 130-летию П.Л. Капицы
Выпускающие редакторы:
А.И. Смирнов, С.С. Сосин



НАУКА
— 1727 —



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Продолжение физической части
Журнала Русского физико-химического общества,
издававшегося с 1873 по 1930 г.*

Выходит 12 раз в год

Том 166

ИЮЛЬ

ВЫПУСК 1 (7)

МОСКВА

2024

ЖУРНАЛ ИЗДАЕТСЯ ПОД РУКОВОДСТВОМ ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР А. И. СМИРНОВ

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

Е. И. КАЦ, С. В. ТРОИЦКИЙ, И. А. ФОМИН

Редколлегия: член-корр. РАН А. И. СМИРНОВ,

д-р физ.-мат. наук С. О. АЛЕКСЕЕВ, канд. физ.-мат. наук Ю. С. БАРАШ,

д-р физ.-мат. наук И. Г. ЗУБАРЕВ,

д-р физ.-мат. наук Е. И. КАЦ (зам. гл. редактора, представительство ЖЭТФ во Франции),

д-р физ.-мат. наук В. П. КРАЙНОВ, д-р физ.-мат. наук А. С. МЕЛЬНИКОВ

д-р физ.-мат. наук М. С. ПШИРКОВ акад. М. В. САДОВСКИЙ,

канд. физ.-мат. наук С. С. СОСИН, член-корр. РАН С. В. ТРОИЦКИЙ (зам. гл. редактора),

д-р физ.-мат. наук А. В. ФИЛИППОВ, член-корр. РАН И. А. ФОМИН (зам. гл. редактора),

Редакционный совет:

член-корр. РАН В. В. ЛЕБЕДЕВ, д-р физ.-мат. наук В. С. ПОПОВ

Москва

ФГБУ «ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

СОДЕРЖАНИЕ

К 130-летию П. Л. Капицы	От Редакции	5
Индукцированные микроволновым излучением осцилляции магнитосопротивления двумерных электронных систем	Щепетильников А. В., Кукушкин И. В.	9
Сверхбыстрый транспорт экситонов в ван-дер-ваальсовых гетероструктурах	Глазов М. М., Сурис Р. А.	20
Интерференция цепочки бозе-конденсатов в приближении Питаевского–Гросса	Мосаки И. Н., Турлапов А. В.	30
On the microscopic approach to the Andreev current... ..	Arseev P. I., Maslova N. S., Bilinskii Yu. M.	38
Обобщенная динамическая модель Келдыша	Кучинский Э.З., Садовский М.В.	45
Спиновый резонанс электронов проводимости в металлах в условиях спинового эффекта холла	Устинов В. В., Ясюлевич И. А.	63
Прогресс, проблемы и перспективы комнатно-температурной сверхпроводимости	Троян И. А., Семенов Д. В., Садаков А. В., Любутин И. С., Пудалов В. М.	74
Сверхпроводимость и неоднородные состояния в металлическом водороде и электронных системах с притяжением	Каган М. Ю., Ихсанов Р. Ш., Ковалев И. А., Красавин А. В., Мазур Е. А.	89
Josephson bifurcation readout: beyond the monochromatic approximation	Makhlin Yu., Zorin A. B.	98

Двумерная турбулентность в ограниченной ячейке	Колоколов И. В., Лебедев В. В.	110
Мощные всплески и магнитоупругие колебания магнитаров	Яковлев Д. Г.	121
Магнитные поля в околосолнечной плазме: свойства, проявления, эффекты	Зеленый Л. М., Попель С. И., Голубь А. П.	133

DOI: 10.31857/S0044451024070010

*Наука должна быть увлекательная, веселая и простая.
Таковыми же должны быть и ученые.*
П. Л. Капица

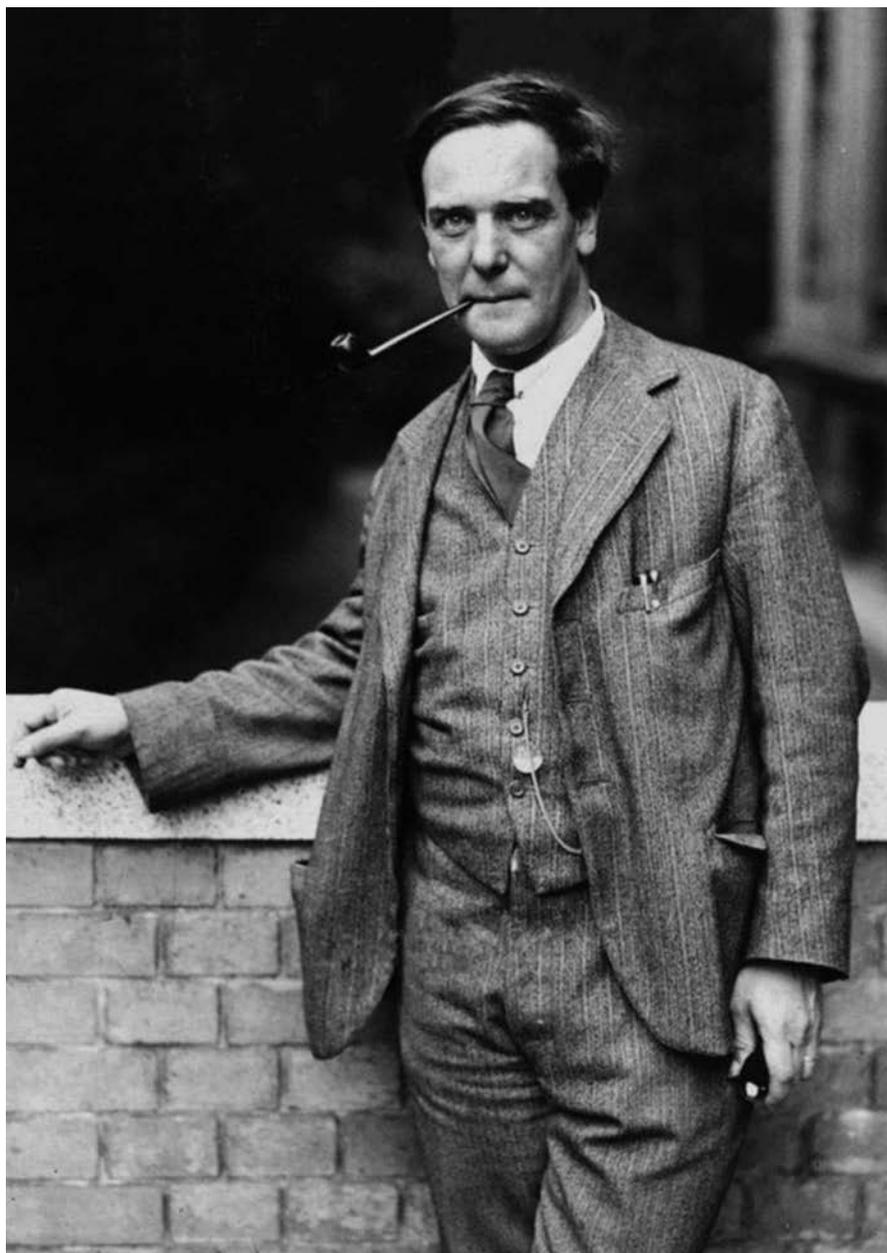


Фото из архива ИФП РАН

К 130-летию Петра Леонидовича Капицы

ОТ РЕДАКЦИИ

8 июля исполняется 130 лет со дня рождения П. Л. Капицы. Пётр Леонидович известен пионерскими фундаментальными экспериментами в области физики. Его открытие сверхтекучести, безусловно, принадлежит к наиболее ярким достижениям физики XX века. Огромное значение имеют его инженерные разработки в области получения сверхсильных магнитных полей, индустрии кислорода, электроники больших мощностей.

Он был новатором в организации физико-математического образования, одним из основателей Физтеха с его системой базовых кафедр. Эта система обеспечила принципиально новый подход в обучении ученых, исследователей и конструкторов. Его гражданская позиция и общественная деятельность, работа в Академии наук СССР в критические моменты помогала выводить из беды и неволи талантливых физиков. Капица создал один из лучших мировых исследовательских центров по фундаментальной физике – Институт физических проблем АН СССР (сейчас РАН). В Институте он собрал коллектив способных физиков и создал там атмосферу свободного творчества, в которой работа ученых была чрезвычайно результативной и плодотворной. В течение многих лет, с 1955 года и до самой смерти в 1984 году, он был бессменным главным редактором нашего журнала.

Личность П. Л. Капицы многие годы привлекает внимание людей всего мира, независимо от их возраста и специальности. Мы приводим здесь выдержки из небольшого очерка академика А. Ф. Андреева о Петре Леонидовиче. Очерк подготовлен по случаю 100-летия со дня рождения П. Л. Капицы и опубликован в четвертом номере журнала Природа за 1994 год. Это яркое выступление яркого ученого, принадлежавшего к научному сообществу Капицы, даже спустя 30 лет после написания и спустя более 40 лет после смерти Петра Леонидовича продолжает быть абсолютно современным и волнующим.

Мы благодарим всех авторов, принявших участие в создании юбилейного выпуска ЖЭТФ.

Редакционная коллегия ЖЭТФ

Из очерка “Слово о Капице”, *Природа*, Издательство «Наука» РАН, (1994).

*Академик А. Ф. Андреев,
директор Института физических проблем*

На долю Капицы выпало много страданий, но и много побед. Как в научном, так и в человеческом плане. При всей глубокой индивидуальности Петра Леонидовича, а может быть именно вследствие этого, его судьба многокрасочно воспроизводит картину времени. Она отразила все, что происходило с нашей наукой и вокруг нее в XX веке.

Петр Леонидович Капица прожил долгую жизнь. Он умер в 1984 году, не дожив трех месяцев до своего девяностолетия. Сталкиваясь с сегодняшними трудностями, мы пытаемся представить себе, как бы на нашем месте поступил он. В этом наш "критерий истины".

Конечно, прежде всего, Капица - великий физик и инженер. Его работы по физике и технике низких температур и сильных магнитных полей, по сверхтекучести жидкого гелия - классика. Однако Капица - больше чем просто физик, больше, чем классик науки.

Жизнь Петра Леонидовича пришлась на отрезок нашей истории, связанный с выдающимся научным прогрессом. По многим направлениям у нас была замечательная наука! На одну чашу весов можно положить небывалый престиж ученого и возвышение науки до ранга государственной идеологии, а на другую - унижительный пресс диктатуры и постоянную опасность агрессии со стороны правящего невежества. Все это П. Л. Капица испытал на себе, и в этих условиях он считал своим долгом следить за состоянием этих весов, отмечая, как власть смотрит на науку, как наука влияет на власть и как то и другое отражается в общественном мнении.

Научная работа была главным интересом Капицы, она составляла смысл его жизни, от нее он получал самое большое удовольствие и приходил в ярость, когда видел препятствия на пути ее развития. Чтобы устранить эти препятствия, он писал письма руководителям страны, пытался повлиять на формирование научной политики. Капица не был ни конформистом, ни диссидентом. Он имел мужество и не считал безнадежным делом учить, как нужно относиться к науке, научным работникам. И умел себя поставить так, что его голос был услышан, а слово имело вес. Благодаря этому ему удалось вызволить из тюрьмы и спасти Л. Д. Ландау и В. А. Фока.

Капица придавал очень большое значение авторитету ученого в глазах общества. Он делал многое для того, чтоб наука воспринималась как часть общечеловеческой культуры. Институт физических проблем был настоящим культурным центром. На знаменитые семинары Капицы и Ландау съезжались физики не только Москвы, но и многих других городов страны, и по средам и четвергам можно было встретить в ИФП коллег и друзей из Ленинграда, Харькова, Новосибирска, Казани, Красноярска, Тбилиси. По приглашению Петра Леонидовича в институт с удовольствием приезжали знаменитые артисты и писатели. Здесь же устраивались выставки молодых художников.

Размышляя над тем, что в наибольшей степени определяло вес Капицы в науке и обществе, трудно сконцентрироваться на чем-то одном. Рекордсменов по одному параметру немало.

Среди его современников было много выдающихся ученых. Не только Капица был озабочен состоянием науки и ее репутацией. Не только он был смел и независим. Но трудно назвать другую фигуру такого же масштаба. Уникальность Капицы в том, что он действовал сразу по многим параметрам и всегда добивался оптимальных результатов.

Между тем Петр Леонидович вовсе не был защищен от ударов судьбы. Наоборот, его жизнь драматична. В голодном Петрограде послереволюционных лет он потерял отца и свою первую семью - жену, сына и дочь. Ему пять раз пришлось все начинать почти "с нуля". Первый раз - в послереволюционном Петрограде в Институте А. Ф. Иоффе, второй раз - в Кембридже у Э. Резерфорда, затем - в Москве, после того как ему в 1934 г. запретили возвращаться в Англию, где Лондонское Королевское общество построило для него специальную лабораторию. В 1946 г., после столкновения с Берией, он был снят с должности начальника, организованного им в годы войны Главкислорода и лишен возможности работать в созданном им институте. Тогда-то на своей даче на Николиной Горе он построил лабораторию, в которой провел оригинальные исследования по гидродинамике (волновое течение тонких слоев жидкости), механике (маятник Капицы) и электронике больших мощностей. Наконец, в январе 1955 г. он снова стал директором Института физических проблем и начал изучение свойств плазмы.

Пример Капицы заставляет задуматься, не преувеличиваем ли мы силу внешних возмущений, мешающих научной работе сегодня. Помех во времена Капицы и лично у него было не меньше. Но он обладал замечательным свойством, которого многим из нас так не хватает, - умением отключаться и переключаться. Он не мог существовать без своего института, к тому же он обладал даром чувствовать пульс времени, его потребности и возможности.

ИНДУЦИРОВАННЫЕ МИКРОВОЛНОВЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ ОСЦИЛЛЯЦИИ МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

*А. В. Щепетильников**, *И. В. Кукушкин***

*Институт физики твердого тела им. Ю. А. Осипьяна
Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 21 февраля 2024 г.,
после переработки 24 марта 2024 г.
Принята к публикации 24 марта 2024г.

Рассматриваются важнейшие особенности эффекта индуцированных микроволновым излучением осциллирующей магнитосопротивления двумерной электронной системы. Обсуждается возможность наблюдения этого явления в различных материальных системах с использованием различных экспериментальных методик, в том числе и бесконтактных. Особое внимание уделяется влиянию электрон-электронного взаимодействия на период осцилляций, а также необходимости нанесения металлических слоев вблизи двумерной электронной системы.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S0044451024070022

1. ВВЕДЕНИЕ

Под воздействием высокочастотного электромагнитного излучения и при низких температурах в продольном магнитосопротивлении двумерных электронных систем высокого качества появляются ярко выраженные осцилляции [1, 2]. Индуцированная поглощением излучения добавка ΔR_{xx} оказывается периодичной по обратному магнитному полю, а период таких осцилляций задается соизмеримостью между частотой излучения и циклотронной энергией. Величина поправки ΔR_{xx} хорошо описывается феноменологическим выражением

$$\Delta R_{xx} = -\epsilon A \sin(2\pi\epsilon + \varphi) \exp(-\alpha\epsilon). \quad (1)$$

Здесь параметр $\epsilon = \omega/\omega_c$ — отношение частоты электромагнитного излучения и циклотронной энергии, A — амплитуда эффекта, α задает затухание эффекта с ростом номера осцилляции при уменьшении внешнего магнитного поля, а φ — фаза осцилляций. Строго говоря, в знаменателе выражения

для $\omega_c = eB/m^*$ стоит не циклотронная, а некоторая эффективная масса, перенормированная за счет ферми-жидкостных эффектов. Это явление будет рассмотрено далее в нашем обзоре. В работах [3, 4] было показано, что, как правило, фаза φ равна нулю, но при определенных условиях фаза φ может отходить от этого значения, особенно для первой осцилляции [5–8]. Амплитуда эффекта A зависит от мощности падающего излучения, она линейна в области малых мощностей и корневым образом зависит в области больших [9].

Само явление индуцированных электромагнитным излучением осцилляций было впервые обнаружено более 20 лет назад [1] при изучении транспортного отклика двумерной электронной системы, заключенной в различные квантовые ямы и гетероструктуры GaAs/AlGaAs. Материальные параметры образцов при этом естественным образом задавали частотный диапазон излучения — от нескольких гигагерц до нескольких десятков гигагерц, что фактически привело к формированию устойчивого термина, обозначающего рассматриваемое явление — индуцированные микроволновым излучением осцилляции (microwave induced resistance oscillations или сокращенно MRO) магнитосопротивления.

* E-mail: shchepetilnikov@issp.ac.ru

** E-mail: kukush@issp.ac.ru

За открытием рассматриваемого эффекта последовали обширные исследования, которые сформировали целое направление физики конденсированного состояния. Так, были измерены зависимости фазы осцилляций от их номера [5], изучалось затухание амплитуды эффекта при разных температурах [10–12] и в наклонных магнитных полях [4, 13]. Было открыто целое семейство связанных с рассматриваемым явлением эффектов. Так, при определенных условиях амплитуда осцилляций увеличивалась настолько, что суммарное сопротивление системы становилось отрицательным, что приводило к возникновению неустойчивости в электронной системе и ее разбиению на токовые и зарядовые домены [14–16]. При этом полное сопротивление двумерной системы оказывалось равно нулю в достаточно широком диапазоне магнитных полей, т. е. фактически формировалось состояние с нулевым сопротивлением [17, 18]. Аналогичные осцилляции наблюдались также и в емкостных характеристиках двумерной электронной системы [19, 20], а также в фотонапряжении и фототоке, возникающих на контактах к двумерной электронной системе [21–24]. Было продемонстрировано, что сходные осцилляции магнитосопротивления могут быть индуцированы также холловским напряжением [25–28] и взаимодействием электронов с фононами [29, 30].

Был предложен ряд хорошо проработанных теорий [31–39], призванных сформировать полную физическую картину данного явления. В основе большей части этих теорий лежит поглощение микроволнового излучения электронами проводимости в модели Друде, величина которого зависит от степени циркулярной поляризации света как $1/[(\omega \pm \omega_c)^2 + 1/\tau^2]$. Здесь τ — характерное время рассеяния. Знаки «плюс» и «минус» соответствуют разной циркулярной поляризации света. Именно это выражение задает, например, чувствительность циклотронного резонанса к поляризации излучения. Однако в отличие от циклотронного резонанса влияние поляризации излучения на амплитуду осцилляций сопротивления двумерного канала до сих пор находится под вопросом, а эксперименты различных групп дают противоречивые результаты [40–42]. Все это привело к возникновению альтернативных моделей, в рамках которых осцилляции сопротивления возникают при взаимодействии с микроволновым излучением не всех электронов, а лишь некоторой их части, локализованной либо вблизи края образца [43, 44], либо в областях вблизи омических контактов или металлического слоя, нанесенного на поверхность

образца [45]. При этом в таких областях фактически падающее излучение теряет свое поляризационное состояние и чувствительность эффекта к степени циркулярной поляризации излучения должна пропадать. Относительно недавно рассматривалось поглощение электромагнитного излучения электронами в некоторой окрестности от примесей и неоднородностей двумерной системы [46], при этом также терялась чувствительность амплитуды осцилляций к степени циркулярной поляризации излучения.

Таким образом, несмотря на все усилия, несколько важнейших особенностей рассматриваемого эффекта все еще плохо укладываются в эту картину. Помимо невосприимчивости осцилляций к степени циркулярной поляризации падающего излучения можно также отметить уменьшение эффективной массы, вычисленной по периоду осцилляций, в сравнении с циклотронной массой [47–50]. Указанные противоречия и обуславливают сохраняющуюся актуальность изучения индуцированных микроволновым излучением осцилляций сопротивления. Еще одним важным направлением современных исследований является расширение набора материальных систем, в которых наблюдаются указанные осцилляции, что в перспективе позволит гораздо полнее понять рассматриваемое явление. Перечисленные аспекты индуцированных излучением осцилляций магнитосопротивления и будут разобраны далее в нашем обзоре более подробно.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕТОДИКА

Как правило, для экспериментального изучения осцилляций магнитосопротивления, индуцированных электромагнитным излучением, подходят стандартные транспортные методики. При этом на образцах, как правило, формируют стандартные мостики Холла со стоком, истоком и несколькими потенциометрическими контактами. Отметим, что также проверялись и другие контактные геометрии — диск Корбино [51] и геометрия ван дер Пау [16, 24]. Образец размещается внутри криостата, оснащенного сверхпроводящим магнитом, так что двумерная электронная система охлаждается до температур 1 К и ниже. Над образцом располагается волновод или оканчивающийся антенной коаксиальный кабель, по которым электромагнитное излучение достигает образца. Иногда для концентрации электрического поля вблизи двумерной электронной системы на поверхность образца наносится

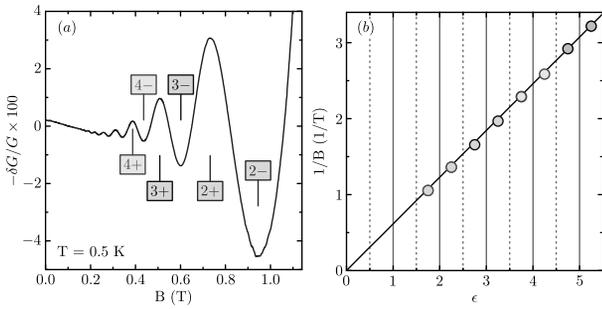


Рис. 1. (В цвете онлайн) *a* — Осцилляции магнитопроводимости G двумерной электронной системы, заключенной в гетеропереход ZnO/MgZnO. Частота излучения составляла 140 ГГц. Температура эксперимента $T = 1.5$ К. *b* — Зависимость обратного магнитного поля, соответствующего экстремумам осцилляций, от их номера. Образец, частота излучения и температура те же, что и для панели *a*

компланарный волновод, по которому пропускается возбуждающее излучение [52]. В экспериментах, направленных на анализ поляризационных зависимостей рассматриваемого эффекта, используются квазиоптические установки со специальными криостатами, оснащенными окнами, прозрачными для излучения необходимого частотного диапазона. При такой схеме возбуждения можно с хорошей точностью задавать поляризационное состояние излучения, которое обычно контролируется по амплитуде циклотронного резонанса.

Для точного измерения продольного сопротивления двумерного канала используется синхронный детектор, при этом амплитуда переменного тока подбирается таким образом, чтобы электронная система не была перегрета. Поправка ΔR_{xx} получается путем сопоставления магнитосопротивления двумерного канала под воздействием излучения и в его отсутствие. При этом частота электромагнитного излучения остается фиксированной, а изменяется магнитное поле. Для улучшения соотношения сигнал/шум можно использовать стандартную методику двойного синхронного детектирования. При этом падающее на образец излучение модулируется по амплитуде. Первый синхронный детектор, настроенный на частоту переменного тока, фактически измеряет сопротивление двумерного канала. Второй детектор, настроенный на частоту модуляции излучения, берет сигнал с выхода первого и измеряет сигнал пропорциональный вариации ΔR_{xx} . Такой экспериментальный подход позволяет наблюдать индуцированные излучением осцилляции сопротивления даже в не самых совершенных двумерных системах, в которых рассматриваемый эффект выражен достаточно слабо.

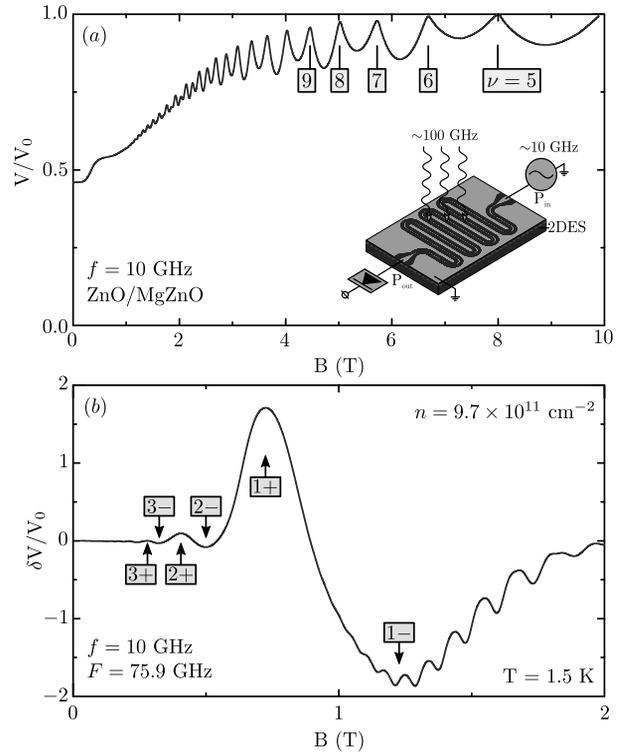


Рис. 2. (В цвете онлайн) *a* — Зависимость сигнала детектора на выходе нанесенного на поверхность образца компланарного волновода от магнитного поля. Частота пропускаемого через образец излучения 10 ГГц. Образец представлял собой гетеропереход ZnO/MgZnO с двумерной плотностью электронов $9.7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$. Температура образца 1.5 К. Отмечено положение первых нескольких факторов заполнения. На вставке показана схема эксперимента. *b* — Типичный вид индуцированных микроволновым излучением осцилляций сопротивления, которые наблюдались в такой схеме. Частота возбуждающего излучения 75.9 ГГц, а частота опорного 10 ГГц

Пример аналогичной поправки δG к магнитопроводимости образца, измеренной в гетеропереходе ZnO/MgZnO, содержащем двумерную электронную систему, показан на рис. 1 *a*. Температура образца была равна 1.5 К. Образец был выполнен в виде диска Корбино. Частота излучения составляла 140 ГГц. Хорошо видно, что данная поправка периодична по обратному магнитному полю и затухает в области малых полей – больших порядковых номеров осцилляций. Номера первых нескольких осцилляций отмечены на рисунке.

В соответствии с формулой (1) максимумы и минимумы осцилляций соответствуют значениям $\epsilon = k \pm 1/4$, где $k = 1, 2, 3 \dots$. Для проверки этого факта можно проанализировать зависимость обратного магнитного поля, соответствующего экстрему-

мам осцилляций от ε , при этом минимуму с номером k будет соответствовать величина $k - 1/4$, а максимуму с тем же номером — $k + 1/4$. Так построенная зависимость показана на рис. 1 *b*. При этом использовались данные панели *a* того же рисунка. Хорошо видно, что в таких координатах зависимость положения экстремумов осцилляций от порядкового номера линейна, причем линия проходит через начало координат, что явно указывает на нулевую фазу осцилляций. Отметим, что, как правило, фаза φ становится ненулевой лишь для первой осцилляции.

Амплитуда осцилляций экспоненциально затухает с увеличением номера осцилляции (или, что то же самое, с уменьшением магнитного поля). Такое поведение очень хорошо заметно на рис. 1 *a*. Считается, что такое затухание обуславливается уширением уровней Ландау из-за неидеальностей системы, при этом величина α в формуле (1) определяется обратным квантовым временем жизни τ_q . Подчеркнем, что это характерное время отличается от транспортного времени рассеяния. Например, в типичных гетероструктурах ZnO/MgZnO и GaAs/AlGaAs величина τ_q составляет примерно 5 и 15 пс соответственно и различается всего лишь в три раза, в то время как транспортные подвижности в структурах GaAs больше почти на два порядка [24]. С другой стороны, время τ_q также не совпадает и с временем τ , задающим затухание амплитуды осцилляций Шубникова – де Гааза в малых магнитных полях и при повышенных температурах. Дело в том, что в отличие от индуцированных излучением осцилляций период осцилляции Шубникова – де Гааза линеен по двумерной электронной плотности, а значит, затухание их амплитуды во многом определяется однородностью концентрации в двумерной системе.

Наряду со стандартными транспортными методами развитие получили и бесконтактные методики детектирования индуцированных микроволновым излучением осцилляций сопротивления. При этом транспортные характеристики снимаются фактически без формирования омических контактов к двумерному слою, а сопротивление или проводимость электронной системы измеряются на высокой частоте (от нескольких мегагерц до десятков гигагерц). Отчасти применение таких подходов было обусловлено попыткой разобраться с одним из фундаментальных вопросов — какое влияние оказывают области омических контактов и области вблизи металлических слоев, нанесенных на поверхность образца, на физику рассматриваемых осцилляций.

Взаимодействие двумерной электронной системы с электромагнитным излучением определяет

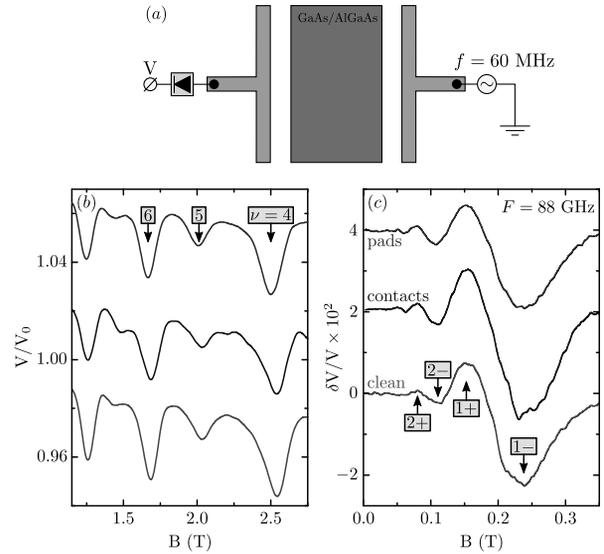


Рис. 3. (В цвете онлайн) *a* — Одна из схем бесконтактного наблюдения индуцированных микроволновым излучением осцилляций сопротивления. Образец помещался между двумя Т-образными антеннами, одна из которых играла роль излучателя, а вторая приемника. *b* — Сигнал детектора на выходе приемной антенны в зависимости от магнитного поля в показанной на панели *a* схеме. Частота излучения составляла 60 МГц. Верхняя кривая получена при размещении между антеннами образца, на поверхность которого нанесена сетка из металлических квадратов, средняя кривая — когда на поверхности образца была сформирована сетка из омических контактов к образцу, а нижняя — в случае образца с чистой поверхностью. *c* — Типичный вид наблюдаемых в такой схеме и для таких же образцов осцилляций сопротивления, индуцированных микроволновым излучением

ся именно высокочастотной проводимостью канала, а значит, анализ пропускания или поглощения излучения в системе позволяет бесконтактным образом измерять эту величину [53, 54]. В работах [55, 56] была продемонстрирована возможность наблюдения осцилляций сопротивления при анализе пропускания компланарного волновода на частотах $f \sim 10$ ГГц в гетероструктурах как GaAs/AlGaAs, так и ZnO/MgZnO. Осцилляции при этом возбуждались падающим на систему электромагнитным излучением существенно большей частоты $F \sim 100$ ГГц. Принципиальная схема эксперимента приведена на вставке к рис. 2 *a*. Можно показать, что в такой схеме пропускание компланарного волновода, нанесенного на поверхность образца, определяется проводимостью системы σ и геометрическими размерами волновода (в формуле ниже геометрия волновода определяет коэффициент β):

$$P_{out} = P_{in} \exp(-\beta \sigma_{xx}). \quad (2)$$

Здесь P_{in} и P_{out} — мощности излучения на входе и выходе компланарного волновода. Величина P_{out} измеряется коаксиальным детектором на основе диода Шоттки. На рис. 1 *a* показана зависимость напряжения на выходе детектора от магнитного поля. Напряжение нормировано на величину V_0 в нулевом магнитном поле. В области больших полей наблюдаются хорошо разрешаемые осцилляции Шубникова–де Гааза. Мы отметили положение первых нескольких факторов заполнения. Таким образом, мощность на выходе компланарного волновода действительно зависит от проводимости двумерного канала.

На рис. 2 *b* показана поправка к напряжению на выходе детектора, которая возникает при включении возбуждающего излучения. Отметим, что оно было модулировано по амплитуде, что позволяло использовать методику синхронного детектирования. Положение первых нескольких минимумов и максимумов отмечено стрелками. При изменении частоты, как было показано в работе [56], положение экстремумов осцилляций смещается, а тангенсы углов наклона соответствующих магнитодисперсионных зависимостей хорошо согласуются с результатами более традиционных транспортных методик. Таким образом, можно заключить, что наличие омических контактов к двумерной электронной системе не является обязательным для наблюдения рассматриваемого эффекта. Более того, было показано, что в гетеропереходах GaAs/AlGaAs и ZnO/MgZnO осцилляции высокочастотной проводимости затухают с увеличением опорной частоты f и при $f > 20$ ГГц уже практически не различаются.

Несущественность омических контактов была также показана и в работе [57], где была продемонстрирована возможность наблюдения осцилляций высокочастотной проводимости при использовании емкостных контактов к системе, которые представляли собой золотые слои, нанесенные на поверхность структуры. В работах [58, 59] было показано, что индуцированные электромагнитным излучением осцилляции можно наблюдать и в отсутствие каких-либо металлических слоев на поверхности образца. Так, высокочастотный транспорт двумерной электронной системы, сформированной в квантовой яме GaAs/AlGaAs, исследовался путем измерения мощности радиочастотного излучения, проходящего через пару Т-образных антенн, выполняющих роль излучателя и детектора. Частота опорного излучения f лежала в диапазоне 10–100 МГц. Геометрия эксперимента схематично представлена на рис. 3 *a*.

Микроволновое излучение с частотой 60–100 ГГц доставлялось до образца по сверхразмерному волноводу. В области больших полей, как показано на рис. 3 *b*, наблюдались хорошо разрешимые осцилляции Шубникова–де Гааза. А при включении возбуждающего излучения в области малых магнитных полей появлялись дополнительные осцилляции, амплитуда которых была сравнима с осцилляциями Шубникова–де Гааза в больших полях. Кроме того, введение омических контактов в двумерный канал или слоев металла, нанесенных непосредственно на поверхность образца, не приводило к существенному изменению амплитуды обнаруженных индуцированных микроволновым излучением осцилляций сопротивления, что подчеркивает несущественность также и слоев металла на поверхности образца для наблюдения рассматриваемого эффекта.

3. ПЕРЕНОРМИРОВКА ЭФФЕКТИВНОЙ МАССЫ, ЗАДАЮЩЕЙ ПЕРИОД ОСЦИЛЛЯЦИЙ

Обратимся теперь к вопросу о перенормировке массы m^* , задающей период осцилляций магнитосопротивления, индуцированных электромагнитным излучением, более подробно. Большинство теорий, описывающих индуцированные электромагнитным излучением осцилляции сопротивления фактически в одночастичной модели Друде, предполагают равенство между m^* и массой, извлекаемой из дисперсии циклотронного резонанса в координатах магнитное поле/частота возбуждающего излучения. Однако, как было показано экспериментально в целом ряде работ [47–50], эти две массы существенно различаются, более того, было продемонстрировано, что величина m^* испытывает перенормировку из-за электрон-электронного взаимодействия.

Величину m^* удобно извлекать из анализа дисперсионных зависимостей, задающих положение экстремумов осцилляций по магнитному полю при изменении частоты возбуждающего излучения. Такой способ обеспечивает наилучшую точность. Например, на рис. 1 эта частота F была зафиксирована и составляла 140 ГГц. При ее изменении положения соответствующих максимумов и минимумов будут смещаться по магнитному полю. На рис. 4 показана зависимость их положения от частоты для того же образца ZnO/MgZnO. Символы обозначают экспериментальные данные. Вблизи каждого набора данных указан номер осцилляции, знаки «+» или «-» обозначают характер экстре-

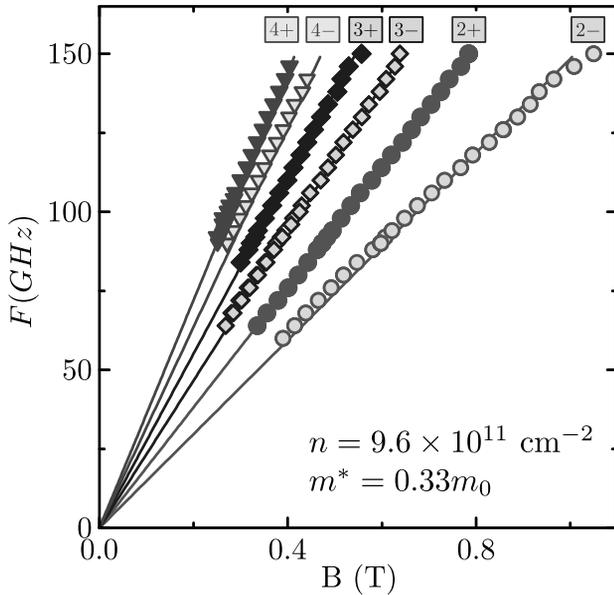


Рис. 4. (В цвете онлайн) Зависимости магнитополевого положения экстремумов первых нескольких осцилляций магнитосопротивления, индуцированных излучением, от частоты излучения. Номер осцилляции указан вблизи каждого набора данных. Знаки «+» и «-» соответствуют максимумам и минимумам. Сплошные линии — линейная аппроксимация экспериментальных данных. Образец представлял собой гетеропереход ZnO/MgZnO с двумерной электронной плотностью $9.7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$

мум — максимум или минимум соответственно. Хорошо видно, что для каждого минимума и максимума их положение смещается линейно по частоте, при этом совокупность этих зависимостей хорошо аппроксимируются прямыми линиями, задающимися выражением $\omega/\omega_c = k \pm 1/4$ с фактически единственным подгоночным параметром m^* , входящим в выражении $\omega_c = eB/m^*$. Получившееся значение массы указано на том же рисунке. Отметим, что такая процедура позволяет получать значения массы с очень большой точностью.

В работе [47] было показано, что в квантовой яме GaAs/AlGaAs с двумерной плотностью электронов $n \approx 2.7 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ различие в циклотронной массе и m^* , задающей период микроволновых осцилляций, доходит до 10%. В работах [48–50] была измерена зависимость массы m^* от плотности двумерных электронов в различных материальных системах, а именно в квантовых ямах GaAs/AlGaAs и гетеропереходах ZnO/MgZnO. Отметим, что в случае гетероструктур GaAs/AlGaAs сходные результаты были получены различными группами на образцах, перебор двумерной плотности в которых осуществлялся

как за счет изменения плотности доноров, расположенных в δ -легирующем слое, так и путем изменения напряжения на заднем затворе.

Рассмотрим случай квантовых ям GaAs/AlGaAs более подробно. На рис. 5 показана зависимость эффективной массы, задающий период осцилляций сопротивления, от двумерной плотности n электронов. Для сравнения показана аналогичная зависимость от n циклотронной массы, а также фермижидкостной массы, величина которой была определена из спектров люминесценции в нулевых магнитных полях и в режиме квантового эффекта Холла. При малых плотностях масса m^* , извлеченная из периода осцилляций, значительно растет с уменьшением n и становится больше циклотронной. Как видно на рисунке, такое поведение m^* аналогично поведению фермижидкостной массы и имеет многочастичное происхождение. Действительно, силу многочастичного взаимодействия удобно описывать с помощью безразмерного параметра r_s , который в случае однодолинной системы представляет собой отношение характерной энергии кулоновского отталкивания и энергии Ферми, задающей масштаб кинетического движения электронов. Энергия кулоновского взаимодействия зависит от двумерной плотности электронов n как \sqrt{n} (обратное среднее расстояние между электронами в двумерной системе), а энергия Ферми пропорциональна первой степени двумерной плотности n и обратно пропорциональной эффективной массе носителей заряда. Таким образом, параметр r_s обратно пропорционален \sqrt{n} и линеен по массе электронов, а значит, в полном соответствии со сделанными ранее выводами вклад электрон-электронных перенормировок должен увеличиваться при уменьшении двумерной плотности электронов. При средних значениях n величина m^* достигает минимального значения и снова растет при увеличении n . Рост в области больших плотностей схож с поведением циклотронной массы и, по всей видимости, объясняется непараболичностью электронной зоны в GaAs. Отметим, что зависимость m^* от n во многом похожа на поведение эффективной массы, задающей активационную щель, измеренную по температурной зависимости сопротивления двумерного канала вблизи минимумов осцилляций Шубникова–де Гааза в области малых магнитных полей.

Дополнительной проверкой влияния электрон-электронных корреляций на период осцилляций, индуцированных электромагнитным излучением, стали эксперименты в материальной системе с большой

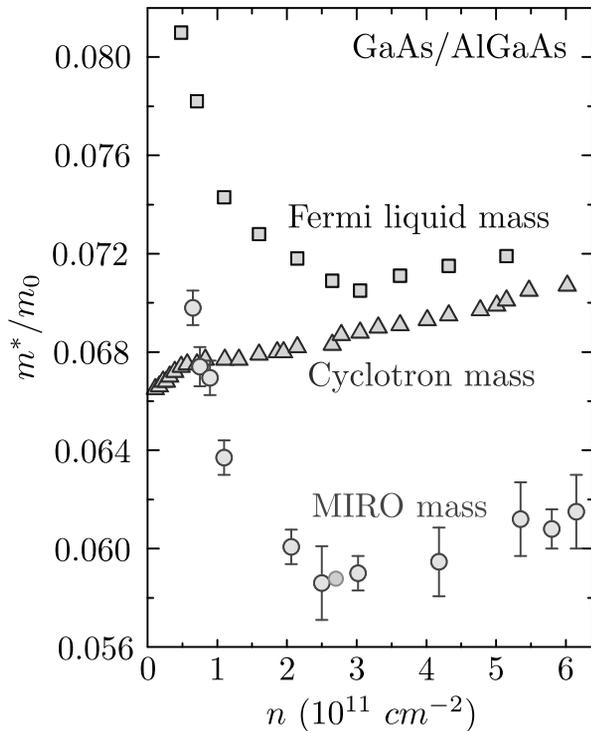


Рис. 5. (В цвете онлайн) Зависимость эффективной массы от двумерной плотности электронов в гетероструктурах GaAs/AlGaAs. Зеленые круги — масса, полученная из периода индуцированных излучением осцилляций магнитосопротивления [48]. Оранжевый круг — аналогичные данные, полученные в работе [47] на образце с фиксированной электронной плотностью. Синие квадраты — ферми-жидкостная масса, полученная из анализа фотolumинесценции электронной системы в магнитном поле [60]. Красные треугольники — масса, задающая дисперсию циклотронного резонанса [60]

массой носителей заряда на основе ZnO. Так, например, из-за разницы в эффективных массах параметр r_s различается в гетероструктурах ZnO/MgZnO и квантовых ямах GaAs почти на порядок при одинаковой двумерной плотности. Зависимость массы m^* , извлекаемой из периода индуцированных микроволновым излучением осцилляций сопротивления, от двумерной плотности в образцах ZnO/MgZnO показана на рис. 6. По аналогии с рис. 5 показаны также циклотронные и ферми-жидкостные массы. Все основные особенности, обнаруженные в гетероструктурах GaAs/AlGaAs, проявляются еще сильнее в случае систем ZnO/MgZnO в полном соответствии с их многочастичной природой.

Перечисленные экспериментальные результаты подчеркивают важность учета электрон-электронного взаимодействия при построения

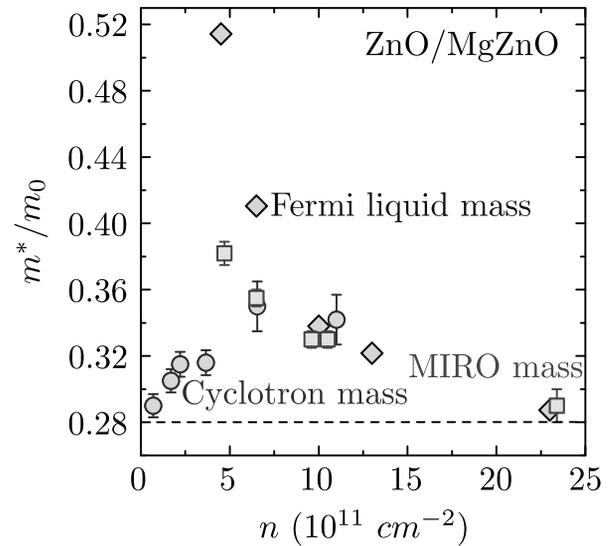


Рис. 6. (В цвете онлайн) Зависимость эффективной массы от двумерной плотности электронов в гетероструктурах ZnO/MgZnO. Зеленые квадраты — масса, полученная из периода индуцированных излучением осцилляций магнитосопротивления [50]. Синие ромбы — ферми-жидкостная масса, полученная из анализа фотolumинесценции электронной системы в магнитном поле [61]. Красные круги — масса, задающая дисперсию циклотронного резонанса [62]

теоретических моделей, описывающих индуцированные микроволновым излучением осцилляции магнитосопротивления.

4. РАЗЛИЧНЫЕ МАТЕРИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Гетероструктуры GaAs/AlGaAs длительное время оставались единственной материальной системой, на которой наблюдались индуцированные микроволновым излучением осцилляции магнитосопротивления, что заметно осложняло понимание физики рассматриваемого эффекта. Так, некоторые из ключевых аспектов этого явления существенно зависят от параметров конкретных полупроводников, из которых составлена гетероструктура. Ярким примером может служить перенормировка эффективной массы электрона, которая обсуждалась в предыдущем разделе. Таким образом, одной из важнейших задач на данный момент является поиск новых систем, в которых наблюдаются индуцированные электромагнитным излучением осцилляции сопротивления.

Одной из первых полупроводниковых структур, в которых были обнаружены индуцированные мик-

роволновым излучением осцилляции сопротивления, стала двумерная дырочная система, заключенная в квантовую яму Ge с барьерами SiGe [63]. Низкотемпературная подвижность и плотность дырок составляли соответственно $0.4 \cdot 10^6$ см²/В·с и $2.8 \cdot 10^{11}$ см⁻². Отметим, что в *n*-канале в аналогичной кремниевой яме (со сходными концентрациями и даже большими подвижностями) осцилляции сопротивления не наблюдались, а реакция сопротивления двумерного канала на действие микроволнового излучения ограничивалась разогревными эффектами из-за возбуждения магнитоплазмона [64, 65].

Как уже было сказано ранее, осцилляции сопротивления, индуцированные электромагнитным излучением, наблюдались в гетероструктурах ZnO/MgZnO [24, 66]. Удивительным образом это явление было обнаружено в системах с достаточно низкой подвижностью $(1 - 5) \cdot 10^3$ см²/В·с, что на несколько порядков меньше, чем в структурах Ge/SiGe и GaAs/AlGaAs. Отметим также, что осцилляции в системах ZnO/MgZnO существовали только при большой плотности электронов $n > 4 \cdot 10^{11}$ см⁻², в области меньших плотностей наблюдалось лишь магнитоплазменное возбуждение. Индуцированные электромагнитным излучением осцилляции сопротивления детектировались также и в квантовой яме HgTe [67].

Аналогичные осцилляции фотонапряжения наблюдались в монослоях графена, заключенных между двумя относительно толстыми кристаллами гексагонального нитрида бора [68]. При этом такие осцилляции существовали вплоть до температур жидкого азота.

Осцилляции сопротивления наблюдались также и в неполупроводниковых структурах. Так, в работе [69] было показано, что магнитопроводимость двумерного электронного канала, сформированного на поверхности жидкого гелия, проявляет аналогичные осцилляции под воздействием внешнего электромагнитного излучения.

Хорошо видно, что количество систем, в которых наблюдались индуцированные электромагнитным излучением осцилляции сопротивления, до сих пор ограничено. Дальнейший экспериментальный поиск новых структур является одной из ключевых задач для достижения полного понимания рассматриваемого явления.

5. ЦИРКУЛЯРНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Вопрос о чувствительности осцилляций сопротивления двумерного канала, индуцированных электромагнитным излучением, к степени циркулярной поляризации падающей волны является ключевым для установления их природы. Так, теории, предусматривающие существование таких осцилляций в бесконечной однородной электронной системе, явно предполагают зависимость поглощения излучения электронами проводимости от степени его циркулярной поляризации как $1/[(\omega \pm \omega_c)^2 + 1/\tau^2]$, где τ — характерное время рассеяния. Знаки «плюс» и «минус» здесь соответствуют разной циркулярной поляризации света. Аналогичную чувствительность должна демонстрировать в этих моделях и амплитуда рассматриваемых осцилляций. Однако если для существования эффекта необходимы края образца, омические контакты или металлические слои на поверхности образца, то осцилляции сопротивления должны утрачивать чувствительность к поляризации излучения, поскольку падающая волна теряет свою циркулярную поляризацию. К настоящему моменту многократные попытки не привели к получению окончательного ответа на данный вопрос, а результаты экспериментов разных групп дают прямо противоположные результаты.

В одной из первых работ, посвященных данному аспекту обсуждаемого явления, зависимость осцилляций от поляризации света изучалась в криостате с оптическими окнами, прозрачными для излучения в субтерагерцевом частотном диапазоне [40]. При этом удавалось добиться очень высокой степени циркулярной поляризации падающей на образец волны. В такой схеме необходимо использовать образцы достаточно большого размера, иначе края образца могут существенно искажать поляризацию излучения. Степень циркулярной поляризации света при этом удобно контролировать по амплитуде циклотронного резонанса, измеряемого по мощности прошедшего через образец излучения. Качество использовавшихся в этой работе структур на основе GaAs/AlGaAs было настолько высоко, что позволило наблюдать циклотронный резонанс также и в продольном сопротивлении. При этом ширина резонанса была много меньше периода осцилляций, что дало возможность достаточно хорошо оценить его амплитуду. Измеренный таким образом резонанс также имел высокую чувствительность к степени циркулярной поляризации возбуждающего

излучения. Однако осцилляции сопротивления оказались нечувствительны к степени циркулярной поляризации излучения. В работе [41] аналогичные результаты были получены при больших частотах излучения (от 0.6 ТГц и выше). Образец также представлял собой квантовую яму GaAs/AlGaAs. Отметим, что в обеих работах вблизи образца располагалась металлическая диафрагма с линейными размерами порядка нескольких миллиметров.

В ряде работ был получен прямо противоположный ответ. Так, эксперименты [70] на поверхности жидкого гелия показали сильную чувствительность осцилляций проводимости к степени циркулярной поляризации света. Также и в работе [42] было показано, что в гетероструктурах GaAs/AlGaAs амплитуда осцилляций сопротивления зависит от циркулярной поляризации излучения. Более того, в ходе экспериментов было продемонстрировано, что при введении в оптический тракт диафрагмы малого размера вблизи образца осцилляции теряют эту чувствительность из-за искажения поляризации света. Авторы работы этим обстоятельством объясняют многократно подтвержденную ранее нечувствительность осцилляций к циркулярной поляризации.

Параллельно был опубликован ряд экспериментов [71, 72], где снова была обнаружена нечувствительность амплитуды осцилляций к степени циркулярной поляризации. При этом авторы этих работ также продемонстрировали, что циклотронный резонанс, наблюдаемый в разных экспериментальных методиках, имел разную зависимость от поляризации света: резонансный пик, детектируемый по изменению мощности прошедшего через образец излучения, сильно зависел от циркулярной поляризации излучения, в то время как резонанс, измеряемый по модификации продольного сопротивления системы из-за разогрева при поглощении излучения, был нечувствителен к ней. На основе этих экспериментальных наблюдений авторы предположили, что такие противоречивые результаты являются следствием особенностей поглощения излучения в ближнем поле и не связаны с механизмом возникновения осцилляций сопротивления.

Указанные выше результаты на данном этапе не позволяют однозначно судить о чувствительности амплитуды осцилляций магнитосопротивления к степени циркулярной поляризации возбуждающего электромагнитного излучения и подчеркивают актуальность дальнейших исследований.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были рассмотрены важные экспериментальные результаты, полученные при изучении эффекта индуцированных микроволновым излучением осцилляций магнитосопротивления двумерной электронной системы. Обсуждались различные экспериментальные методики (в том числе и бесконтактные) наблюдения этого явления в различных материальных системах. Особое внимание уделялось перенормировке периода осцилляций из-за электрон-электронного взаимодействия. Рассматривались результаты экспериментов, анализирующих зависимость амплитуды осцилляций от степени циркулярной поляризации.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 19-72-30003).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Zudov, R. Du, J. Simmons, and J. Reno, arXiv: cond-mat/9711149 (1997).
2. M. A. Zudov, R. R. Du, J. A. Simmons, and J. L. Reno, Phys. Rev. B **64**, 201311 (2001).
3. R. G. Mani, V. Narayanamurti, K. von Klitzing et al., Phys. Rev. B **70**, 155310 (2004).
4. R. G. Mani, Phys. Rev. B **72**, 075327 (2005).
5. M. A. Zudov, Phys. Rev. B **69**, 041304 (2004).
6. S. A. Studenikin, M. Potemski, A. Sachrajda et al., Phys. Rev. B **71**, 245313 (2005).
7. A. T. Hatke, H.-S. Chiang, M. A. Zudov, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **101**, 246811 (2008).
8. Y. Dai, R. R. Du, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **105**, 246802 (2010).
9. A. T. Hatke, M. Khodas, M. A. Zudov, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. B **84**, 241302 (2011).
10. A. T. Hatke, M. A. Zudov, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **102**, 066804 (2009).
11. S. A. Studenikin, A. S. Sachrajda, J. A. Gupta et al., Phys. Rev. B **76**, 165321 (2007).
12. Q. Shi, S. A. Studenikin, M. A. Zudov et al., Phys. Rev. B **93**, 121305 (2016).

13. A. Bogan, A. T. Hatke, S. A. Studenikin et al., *Phys. Rev. B* **86**, 235305 (2012).
14. S. Dorozhkin, L. Pfeiffer, K. West, K. von Klitzing, and J. Smet, *Nature Phys.* **7**, 336 (2011).
15. S. I. Dorozhkin, V. Umansky, L. N. Pfeiffer et al., *Phys. Rev. Lett.* **114**, 176808 (2015).
16. B. Friess, V. Umansky, L. N. Pfeiffer et al., *Phys. Rev. Lett.* **124**, 117601 (2020).
17. R. G. Mani, J. H. Smet, K. von Klitzing et al., *Nature* **420**, 646 (2002).
18. M. A. Zudov, R. R. Du, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 046807 (2003).
19. S. I. Dorozhkin, A. A. Kapustin, V. Umansky, K. von Klitzing, and J. H. Smet, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 176801 (2016).
20. A. D. Levin, G. M. Gusev, O. E. Raichev, Z. S. Momtaz, and A. K. Bakarov, *Phys. Rev. B* **94**, 045313 (2016).
21. А. А. БЫКОВ, ПИСЬМА В ЖЭТФ **87**, 281 (2008) [A. A. Bykov, *JETP Lett.* **87**, 233 (2008)].
22. S. I. Dorozhkin, I. V. Pechenezhskiy, L. N. Pfeiffer et al., *Phys. Rev. Lett.* **102**, 036602 (2009).
23. R. G. Mani, A. N. Ramanayaka, Tianyu Ye et al., *Phys. Rev. B* **87**, 245308 (2013).
24. D. F. Kärcherr, A. V. Shchepetilnikov, Yu. A. Nefyodov et al., *Phys. Rev. B* **93**, 041410 (2016).
25. A. A. Bykov, J.-q. Zhang, S. Vitkalov, A. K. Kalagin, and A. K. Bakarov, *Phys. Rev. B* **72**, 245307 (2005).
26. W. Zhang, H.-S. Chiang, M. A. Zudov, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. B* **75**, 041304 (2007).
27. Q. Shi, Q. A. Ebner, and M. A. Zudov, *Phys. Rev. B* **90**, 161301 (2014).
28. M. A. Zudov, I. A. Dmitriev, B. Friess et al., *Phys. Rev. B* **96**, 121301 (2017).
29. A. T. Hatke, M. A. Zudov, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 086808 (2009).
30. A. T. Hatke, M. A. Zudov, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. B* **84**, 121301 (2011).
31. В. И. РЫЖИЙ, ФТТ **11**, 2577 (1969) [V. I. Ryzhii, *Sov. Phys. Solid State* **11**, 2078 (1970)].
32. В. И. РЫЖИЙ, Р. А. СУРИС, Б. С. ШЧАМХАЛОВА, ФТП **20**, 2078 (1986) [V. I. Ryzhii, R. A. Suris, and B. S. Shchamkhalova, *Sov. Phys. Solid State* **20**, 1299 (1986)].
33. A. C. Durst, S. Sachdev, N. Read, and S. M. Girvin, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 086803 (2003).
34. M. G. Vavilov, I. A. Dmitriev, I. L. Aleiner, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, *Phys. Rev. B* **70**, 161306 (2004).
35. I. A. Dmitriev, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 226802 (2003).
36. I. A. Dmitriev, M. G. Vavilov, I. L. Aleiner, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, *Phys. Rev. B* **71**, 115316 (2005).
37. I. A. Dmitriev, A. D. Mirlin, and D. G. Polyakov, *Phys. Rev. B* **75**, 245320 (2007).
38. С. И. ДОРОЖКИН, ПИСЬМА В ЖЭТФ **77**, 681 (2003) [S. I. Dorozhkin, *JETP Lett.* **77**, 577 (2003)].
39. Y. M. Beltukov and M. I. Dyakonov, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 176801 (2016).
40. J. H. Smet, B. Gorshunov, C. Jiang et al., *Phys. Rev. Lett.* **95**, 116804 (2005).
41. T. Herrmann, I. A. Dmitriev, D. A. Kozlov et al., *Phys. Rev. B* **94**, 081301 (2016).
42. M. L. Savchenko, A. Shuvaev, I. A. Dmitriev et al., *Phys. Rev. B* **106**, L161408 (2022).
43. A. D. Chepelianskii and D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. B* **80**, 241308 (2009).
44. O. V. Zhirov, A. D. Chepelianskii, and D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. B* **88**, 035410 (2013).
45. S. A. Mikhailov, *Phys. Rev. B* **83**, 155303 (2011).
46. A. D. Chepelianskii and D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. B* **97**, 125415 (2018).
47. A. T. Hatke, M. A. Zudov, J. D. Watson et al., *Phys. Rev. B* **87**, 161307 (2013).
48. A. V. Shchepetilnikov, D. D. Frolov, Yu. A. Nefyodov, I. V. Kukushkin, and S. Schmult, *Phys. Rev. B* **95**, 161305 (2017).
49. X. Fu, Q. A. Ebner, Q. Shi et al., *Phys. Rev. B* **95**, 235415 (2017).

50. А. В. Щепетильников, Ю. А. Нефедов, А. А. Дремин, И. В. Кукушкин, Письма в ЖЭТФ **107**, 799 (2018) [A. V. Shchepetilnikov, Y. A. Nefyodov, A. Dremin, and I. V. Kukushkin, JETP Lett. **107**, 770 (2018)].
51. C. L. Yang, M. A. Zudov, T. A. Knuuttila et al., Phys. Rev. Lett. **91**, 096803 (2003).
52. P. D. Ye, L. W. Engel, D. C. Tsui et al., Appl. Phys. Lett. **79**, 2193 (2001)
53. L. W. Engel, D. Shahar, I. M. C. Kurdak, and D. C. Tsui, Phys. Rev. Lett. **71**, 2638 (1993).
54. V. Dziom, A. Shuvaev, A. V. Shchepetilnikov et al., Phys. Rev. B **99**, 045305 (2019).
55. I. V. Andreev, V. M. Muravev, I. V. Kukushkin, S. Schmult, and W. Dietsche, Phys. Rev. B **83**, 121308 (2011).
56. A. V. Shchepetilnikov, A. R. Khisameeva, Yu. A. Nefyodov, and I. V. Kukushkin, Phys. Rev. B **100**, 125425 (2019).
57. A. A. Bykov, I. V. Marchishin, A. V. Goran, and D. V. Dmitriev, Appl. Phys. Lett. **97**, 082107 (2010).
58. A. V. Shchepetilnikov, A. R. Khisameeva, Yu. A. Nefyodov, S. Schmult, and I. V. Kukushkin, Phys. Rev. B **102**, 075445 (2020).
59. А. Р. Хисамеева, А. В. Щепетильников, Ю. А. Нефедов, И. В. Кукушкин, Письма в ЖЭТФ **114**, 328 (2021) [A. R. Khisameeva, A. Shchepetilnikov, Yu. A. Nefyodov, and I. V. Kukushkin, JETP Lett. **114**, 279 (2021)].
60. И. В. Кукушкин, С. Шмульт, Письма в ЖЭТФ **101**, 770 (2015) [I. V. Kukushkin and S. Schmult, JETP Lett. **101**, 693 (2015)].
61. V. V. Solovyev and I. V. Kukushkin, Phys. Rev. B **96**, 115131 (2017).
62. V. E. Kozlov, A. B. Van'kov, S. I. Gubarev et al., Phys. Rev. B **91**, 085304 (2015).
63. M. A. Zudov, O. A. Mironov, Q. A. Ebner et al., Phys. Rev. B **89**, 125401 (2014).
64. S. Sassine, Yu. Krupko, E. B. Olshanetsky et al., Sol. St. Commun. **142**, 631 (2007).
65. А. Р. Хисамеева, А. В. Щепетильников, Г. А. Николаев и др., Письма в ЖЭТФ **118**, 55 (2023) [A. R. Khisameeva, A. V. Shchepetilnikov, G. A. Nikolaev et al., JETP Lett. **118**, 67 (2023)].
66. D. Tabrea, I. A. Dmitriev, S. I. Dorozhkin et al., Phys. Rev. B **102**, 115432 (2020).
67. M. Otteneder, I. A. Dmitriev, S. Candussio et al., Phys. Rev. B **98**, 245304 (2018).
68. E. Monch, D. A. Bandurin, I. A. Dmitriev et al., Nano Lett. **20**, 5943 (2020).
69. R. Yamashiro, L. V. Abdurakhimov, A. O. Badrutdinov, Y. P. Monarkha, and D. Konstantinov, Phys. Rev. Lett. **115**, 256802 (2015).
70. A. A. Zadorozhko, Y. P. Monarkha, and D. Konstantinov, Phys. Rev. Lett. **120**, 046802 (2018).
71. E. Mönch, P. Euringer, G.-M. Hüttner et al., Phys. Rev. B **106**, L161409 (2022).
72. E. Mönch, S. Schweiss, and I. Yahniuk, arXiv:2311.05468 (2023).

СВЕРХБЫСТРЫЙ ТРАНСПОРТ ЭКСИТОНОВ В ВАН-ДЕР-ВААЛЬСОВЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ

*М. М. Глазов**, *Р. А. Сурис*

*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 23 марта 2024 г.,
после переработки 23 марта 2024 г.
Принята к публикации 24 марта 2024 г.

Экситоны в ван-дер-ваальсовых гетероструктурах на основе атомарно-тонких дихалькогенидов переходных металлов рассматриваются в качестве потенциальных кандидатов для формирования сверхтекучего состояния в двумерных системах. В ряде работ сообщалось о наблюдении сверхбыстрого недиффузионного распространения экситонов в ван-дер-ваальсовых гетероструктурах, которое рассматривалось их авторами как возможное свидетельство коллективных эффектов в экситонных системах. В данной статье после краткого анализа режимов экситонного распространения в двумерных полупроводниках предлагается альтернативная модель сверхбыстрого транспорта экситонов, основанная на формировании волновых мод в ван-дер-ваальсовых гетероструктурах и распространении излучения по этим модам.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S0044451024070034

1. ВВЕДЕНИЕ

Обнаружение сверхтекучести жидкого гелия Петром Леонидовичем Капицей в 1937 г. [1] (см. также [2]) явилось мощным стимулом для развития физики конденсированных сред. Вместе с феноменологической теорией этого явления, принадлежащей Ландау [3], а также точно решаемой моделью слабонеидеального бозе-газа, предложенной Боголюбовым [4] и микроскопическими теориями Фейнмана [5], Пенроуза и Онзагера [6], установившими, в частности, связь между сверхтекучестью и статистикой Бозе–Эйнштейна атомов ^4He (см., например, [7]), замечательный эксперимент Капицы привел к формированию новой области исследований и к активному поиску других конденсированных сред, где возможна бозе-эйнштейновская конденсация и сверхтекучесть.

В полупроводниках и изоляторах кулоновское взаимодействие между электронами и дырками приводит к возникновению квазичастиц — экситонов, обладающих целым спином и, соответственно, подчиняющихся статистике Бозе–Эйнштейна [8–10].

После экспериментального обнаружения экситонов большого радиуса в закиси меди [11] ряд авторов обратили внимание на возможность конденсации, а значит, и сверхтекучести экситонов в полупроводниках [12–16]. В идеальных двумерных или квазидвумерных системах, где свободное движение частиц возможно лишь в плоскости, а движение в поперечном направлении квантуется, бозе-конденсация в строгом смысле этого термина невозможна. Однако при достаточно низкой температуре двумерный газ отталкивающихся бозонов испытывает переход Березинского – Костерлица – Таулесса в сверхтекучее состояние [17, 18]. Соответственно, возможно сверхтекучее состояние и двумерных экситонов [19]. Теоретически недиффузионный перенос экситонов в тонкой полупроводниковой пленке рассматривался в работе [15], в которой по аналогии с движением сверхтекучей жидкости в капиллярах в качестве предельной скорости использовалась скорость кольцевого вихря с характерным диаметром порядка толщины пленки. Эксперименты по поиску и исследованию коллективных экситонных эффектов в структурах с квантовыми ямами, в том числе помещенными в микрорезонаторы, активно ведутся последние 30 лет [20–30], в качестве обзоров см. [31–34].

* E-mail: glazov@coherent.ioffe.ru

Появление новой материальной платформы — ван-дер-ваальсовых гетероструктур на основе дихалькогенидов переходных металлов (ДПМ) [35, 36], оптические спектры которых определяются экситонами Ванье–Мотта с большой (100...500 мэВ) энергией связи, малым (~ 1 пс) временем излучательной рекомбинации, эффективной связью со светом [37] и необычной тонкой структурой энергетического спектра и динамикой [38–44], естественно, вызвало интерес исследователей к коллективным явлениям на экситонах и их сверхтекучести в таких системах [45–47]. Несмотря на заметные усилия, к настоящему времени, насколько нам известно, однозначных экспериментальных свидетельств сверхтекучести экситонов в гетероструктурах на основе ДПМ не получено. Подавляющее большинство экспериментов показывают диффузионное распространение экситонов в монослоях ДПМ и ван-дер-ваальсовых гетероструктурах на их основе, см. обзоры [48, 49].

Тем не менее в ряде работ наблюдалось эффективное «растекание» экситонов в плоскости структуры с моно- и бислоями ДПМ [50–53]. Весьма примечательным в этом отношении оказался эксперимент сингапурской группы [54], где авторы обнаружили, что в канале на основе MoS_2 экситоны распространяются со скоростью, составляющей около 6 % от скорости света в вакууме $c = 299792458$ м/с, причем их распространение хорошо описывается моделью невязкой жидкости. Такой сценарий, в принципе, возможен, но скорость распространения экситонов слишком велика: она превышает все характерные скорости, которые могут реализоваться в двумерных полупроводниках (в том числе и для сверхтекучих экситонов) [55].

В данной статье после обсуждения известных в литературе сценариев распространения экситонов в двумерных кристаллах (разд. 2) предложена модель (разд. 3), позволяющая, по крайней мере на качественном уровне, описать сверхбыстрое распространение экситонов в ван-дер-ваальсовых гетероструктурах на основе дихалькогенидов переходных металлов. В таких структурах, как показывают оценки, могут формироваться волноводные моды [56–58], распространяющиеся с большой скоростью, всего в несколько раз меньшей, чем скорость света в вакууме. Эти моды могут возбуждаться, например, при рекомбинации фоторожденных экситонов и, распространяясь в плоскости структуры, вызывать экситонную люминесценцию вдали от точки возбуждения. Тем самым, в принципе, распространение волноводных мод может быть ответственным за наблю-

даемый сверхбыстрый транспорт экситонов.

Отметим, что на возможность такой «вторичной» люминесценции указывалось ранее в связи с особенностями экспериментальных данных по транспорту экситонов в ставших уже классическими структурах с квантовыми ямами GaN [59]. Ускорение распространения экситонов в ДПМ в режиме их сильной связи с фотонными модами подложки обсуждалось, например, в работе [60], см. также статью [61], где подробно проанализированы режимы распространения экситонов и экситонных поляритонов в микрорезонаторах. Предлагаемый нами сценарий относится, однако, к режиму слабой связи экситона в двумерном полупроводнике и фотона в волноводной моде. Подчеркнем, что даже в этом режиме, когда поляритоны не формируются, многократное отражение света от интерфейсов ван-дер-ваальсовых гетероструктур значительно влияет на спектр экситонов и их время жизни за счет эффектов Парселла и Лэмба [62–65]. Формирование волноводных мод возможно и в других структурах на основе ДПМ, например, в нанотрубках [66].

2. РЕЖИМЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭКСИТОНОВ

Схематическое изображение рассматриваемой ван-дер-ваальсовой гетероструктуры на основе ДПМ приведено на рис. 1. Для примера показана

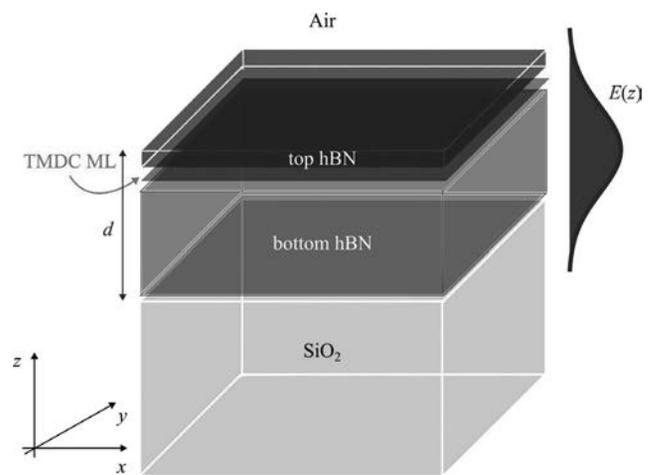


Рис. 1. (В цвете онлайн) Схематическая иллюстрация ван-дер-ваальсовой гетероструктуры с атомарно-тонким кристаллом (TMDC ML — монослой ДПМ), инкапсулированным в гексагональный нитрид бора ($h\text{BN}$) и размещенным на подложке SiO_2 (во многих экспериментах используется слой SiO_2 на кремнии). Справа показан профиль основной волноводной моды в структуре

структура с монослоем ДПМ (TMDC ML), однако все приведенные ниже соображения относятся и к структурам с гетеро- и гомобислоями ДПМ и, в принципе, к структурам с большим количеством атомарно-тонких слоев. Инкапсуляция монослоев ДПМ в гексагональный нитрид бора (hBN) приводит к значительному сужению экситонных линий во всех распространенных материалах: MoS_2 , $MoSe_2$, WS_2 и WSe_2 , причем даже при криогенных температурах уширение линий в основном является однородным [67]. Для основного оптически активного состояния экситона ($A:1s$) ширина его линии на полувысоте при температуре $T \approx 4$ К составляет единицы мэВ, что близко к радиационной ширине экситона [67]. С ростом температуры (при $T \lesssim 30 \dots 50$ К) экситонная линия уширяется практически линейно с угловым коэффициентом $5 \cdot 10^1 \dots 10^2$ мэВ/К. Это качественно и количественно соответствует уширению экситонного резонанса за счет взаимодействия с длинноволновыми акустическими фононами [68, 69], что подтверждает несущественную роль статического беспорядка в высококачественных гетероструктурах на основе ДПМ и позволяет анализировать распространение экситонов в рамках полуклассических моделей, предполагающих свободное распространение экситонов и их относительно редкое рассеяние на фононах. Эффектами локализации экситонов в таких структурах можно пренебречь.¹⁾

В полуклассическом подходе основным параметром, определяющим режим распространения квазичастиц, является отношение времени жизни экситона τ_r и времени его рассеяния τ_p . В типичных экспериментах, выполняемых в условиях, далеких от режима вырождения экситонного газа,

$$\tau_r \gg \tau_p, \quad (1)$$

поэтому экситон испытывает множество столкновений за время жизни [48, 70–74]. Таким образом, распространение экситонов на временных масштабах $t \sim \tau_r$ подчиняется закону диффузии. Среднеквадратичное смещение экситонов за время t описывается соотношением

$$\Delta\sigma^2(t) = 2Dt, \quad t \gg \tau_p, \quad (2)$$

где коэффициент диффузии D можно оценить как

$$D = \frac{k_B T}{M} \tau_p, \quad (3)$$

¹⁾ Мы оставляем за рамками данной работы гетероструктуры, где имеется муар. В таких системах экситонный транспорт может быть качественно иным.

а M — трансляционная масса экситона. По порядку величины $D \sim 1 \dots 10$ см²/с, и при временах жизни ансамбля экситонов в десятки-сотни пикосекунд характерное диффузионное расплывание экситонного пятна, $\Delta\sigma(\tau_r)$, составляет несколько микрометров. Такая ситуация типична во многих экспериментах, см. [48] и ссылки, приведенные там. В ряде работ [50–52], однако, наблюдается растекание экситонов на ~ 100 мкм. Также приведенные оценки не могут объяснить сверхбыстрое распространение экситонов в первые пикосекунды после возбуждения, наблюдаемое, например, в работе [53]: соответствующий коэффициент диффузии на начальном этапе превышает 1000 см²/с.

С увеличением мощности накачки и, соответственно, концентрации фоторожденных экситонов в игру вступают экситон-экситонные взаимодействия. Как в моно-, так и в бислоях ДПМ важную роль играет экситон-экситонная аннигиляция (оже-эффект), в результате которой один из двух сталкивающихся экситонов рекомбинирует, передавая свою энергию и импульс второму [75–79]. Это приводит к уменьшению τ_r и неэкспоненциальному спаду интенсивности экситонной люминесценции в зависимости от времени, а также к эффективному увеличению наблюдаемого коэффициента диффузии экситонов [80, 81]. В структурах с бислоями существенным оказывается и экситон-экситонное отталкивание, которое также приводит к увеличению коэффициента диффузии [74, 82]. По грубым оценкам при не слишком низких температурах экситонного газа ($T \gtrsim 10$ К) именно эти эффекты контролируют экситонный транспорт вплоть до концентраций, соответствующих переходу Мотта, что подтверждается, например, экспериментами на реконструированном гетеробислое $MoSe_2/WSe_2$ [74]. Дополнительными эффектами, которые могут играть роль в таких условиях, являются совместное распространение экситонов и электрон-дырочной плазмы [74, 83], а также сугубо неравновесные эффекты, связанные с возникновением дрейфовых потоков экситонов за счет эффекта Зеебека, фононного увлечения или фононного ветра [84, 85].

Как показывают оценки, по крайней мере при низких температурах $T \lesssim 4$ К имеется достаточно широкий диапазон концентраций экситонов N , при которых экситонный газ становится вырожденным, а оже-эффект — несущественным. При условии [45, 86]

$$T < T_{BKT}, \quad k_B T_{BKT} \sim \frac{\hbar^2 N}{M} \quad (4)$$

должен происходить переход Березинского–Костерлица–Таулесса, и экситонная жидкость должна становится сверхтекучей. При этом распространение экситонов становится недиффузионным, так как в сверхтекучей жидкости рассеяние подавлено. Растекание экситонов описывается линейным законом [87]

$$\Delta\sigma(t) = vt, \quad (5)$$

где скорость v по порядку величины — скорость звука (боголюбовских возбуждений) c_s в конденсате. Для слабозаимодействующих экситонов

$$c_s = \sqrt{\frac{U_0 N}{M}}, \quad (6)$$

где $U_0 > 0$ — константа межэкситонного отталкивания. Произведение $U_0 N$ — химический потенциал экситонов, он считается малым по сравнению с энергией связи экситона и, естественно, с шириной запрещенной зоны. Поэтому характерные скорости c_s значительно меньше «кейновской» скорости $v_{cv} = p_{cv}/m_0$ (p_{cv} — матричный элемент оператора импульса, m_0 — масса свободного электрона), которая соответствует междузонному матричному элементу оператора скорости в кристалле.²⁾ Последняя составляет несколько тысячных–сотых долей от скорости света в вакууме. В условиях эксперимента [54] величина c_s не превышает $10^{-3}c$, но за несколько пикосекунд экситоны растекаются на десятки микрометров, что соответствует $v \approx 6 \cdot 10^{-2}c$. Поэтому сверхтекучее распространение экситонов не может объяснить эксперимент [54].

3. ТРАНСПОРТ ЭКСИТОНОВ И ФОТОНОВ

Приведенные выше «общепринятые» сценарии транспорта не могут, как отмечалось, объяснить ряд экспериментальных результатов по сверхбыстрому распространению экситонов. В этом разделе мы проанализируем альтернативные сценарии, обусловленные светоэкситонным взаимодействием.

Для начала отметим, что даже в свободном монослое (без hBN и подложки) взаимодействие экситона с модами свободного электромагнитного поля существенно перенормирует его дисперсию. В основном перенормировку испытывает продольный экситон, микроскопический дипольный момент которого (осциллирующий на резонансной частоте экситона

$\omega_{exc} = \mathcal{E}/\hbar$) параллелен его волновому вектору \mathbf{k} . Его дисперсию можно записать в виде [88–93]

$$\mathcal{E}_L(\mathbf{k}) = \mathcal{E}_L(0) + \frac{\hbar\Gamma_0}{\mathcal{E}_L(0)}ck. \quad (7a)$$

Здесь $\mathcal{E}_L(0)$ — энергия экситона при нулевом волновом векторе в плоскости слоя, рассчитанная с учетом прямого кулоновского взаимодействия и короткодействующего обменного взаимодействия электрона и дырки, $\hbar\Gamma_0$ — радиационное затухание экситона (при $k = 0$) в энергетических единицах, а вкладом $\hbar^2 k^2/2M$ пренебрегается. Формула (7a) верна при $k \gg \omega_{exc}/c$ и описывает вклад дальнедействующего обменного взаимодействия между электроном и дыркой в энергию экситона. Появление линейной дисперсии можно интерпретировать как результат резонансного переноса возбуждения [94]. Из выражения (7a) следует, что групповая скорость продольного экситона

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{k} \frac{\hbar\Gamma_0}{\mathcal{E}_L(0)}c. \quad (7b)$$

В ван-дер-ваальсовых гетероструктурах, как показывают расчеты [95], дальнедействующее обменное взаимодействие экранируется, что приводит к некоторому уменьшению $\mathcal{E}_L(\mathbf{k})$ и $\mathbf{v}_L(\mathbf{k})$ по сравнению с формулами (7). Из (7b) следует, что скорость распространения продольных экситонов составляет порядка $10^{-3}c$,³⁾ что, как отмечалось в работе [54], недостаточно для объяснения эксперимента.

Обнаруженное в ряде экспериментов сверхбыстрое распространение экситонов, однако, может быть связано с распространением электромагнитного поля по волноводным модам, которые могут формироваться в ван-дер-ваальсовых гетероструктурах. Расчет дисперсии и скоростей распространения волноводных мод для модельной системы, представленной на рис. 1, несложно выполнить в рамках общей теории планарных волноводов [56, 57]. Для этого введем стандартные обозначения $n_c = 1$ для показателя преломления воздуха (покрывающий слой), $n_s = n_{SiO_2} = 1.46$ для показателя преломления подложки SiO_2 и $n_f = n_{hBN} = 2.2$ для показателя преломления пленки гексагонального нитрида бора (анизотропией его оптических свойств как и частотной дисперсией показателей преломления для простоты пренебрегаем) [96]. Вкладом в отражение

²⁾ В реальности скорость растекания может быть еще меньше и связана с формированием вихрей, ср. с [15].

³⁾ Как и для любых квазичастиц с линейной дисперсией, рассеяние продольного экситона на статических дефектах и фононах при $k \rightarrow 0$ подавляется, например, из-за уменьшения плотности состояний.

света от монослоя ДПМ также пренебрегаем.⁴⁾ Поскольку выполнено соотношение

$$n_f > n_s > n_c,$$

в слое нитрида бора действительно может формироваться волноводная мода. Параметры асимметрии волновода для ТЕ- и ТМ-мод записываются в виде

$$\alpha_{TE} = \frac{n_s^2 - n_c^2}{n_f^2 - n_s^2}, \quad \alpha_{TM} = \alpha_{TE} \frac{n_f^4}{n_c^4}. \quad (8)$$

Закон дисперсии для ТЕ-мод может быть представлен как [56, 57]

$$V\sqrt{1-b} = \pi m + \arctg \sqrt{b/(1-b)} + \arctg \sqrt{(b + \alpha_{TE})/(1-b)}, \quad (9)$$

где

$$V = \frac{\omega}{c} d \sqrt{n_f^2 - n_s^2}, \quad b = \frac{(ck/\omega)^2 - n_s^2}{n_f^2 - n_s^2}. \quad (10)$$

Здесь ω — частота моды, k — абсолютная величина волнового вектора в плоскости слоев, а $m = 0, 1, 2, \dots$ нумерует моды.

На рис. 2 а представлена дисперсия двух нижших по энергии волноводных мод ТЕ-поляризации в рассматриваемой структуре (сплошные кривые, маркированные $m = 0$ и $m = 1$), а также дисперсионные линии для света в воздухе (пунктир), в hBN (штриховая) и в SiO₂ (штрихпунктир). Дисперсия рассчитана по формуле (9). Видно, что волноводные моды присутствуют в широком диапазоне волновых векторов и энергий. Их энергия изменяется от энергии фотона в слое подложки ($\hbar ck/n_s$) при малых волновых векторах, когда поле в основном сосредоточено в слое SiO₂, до энергии $\hbar ck/n_f$ при больших k , когда поле локализуется в слое hBN. Энергии отсечки мод при малых k определяются условием «отрыва» дисперсионной кривой волноводной моды от светового конуса подложки, что соответствует $b = 0$ в (10). Согласно (9) получаем

$$\frac{\omega_{TE,TM}^{cut-off}}{c} = \frac{\sqrt{n_f^2 - n_s^2}}{d} (\pi m + \arctg \sqrt{\alpha_{TE,TM}}). \quad (11)$$

Для выбранных параметров структуры энергии отсечки двух нижших ТЕ-мод представлены на рис. 2 а горизонтальными пунктирными линиями. Зависимость энергий отсечки от толщины слоя нитрида

⁴⁾ Его можно учесть как небольшую перенормировку толщины d слоя нитрида бора.

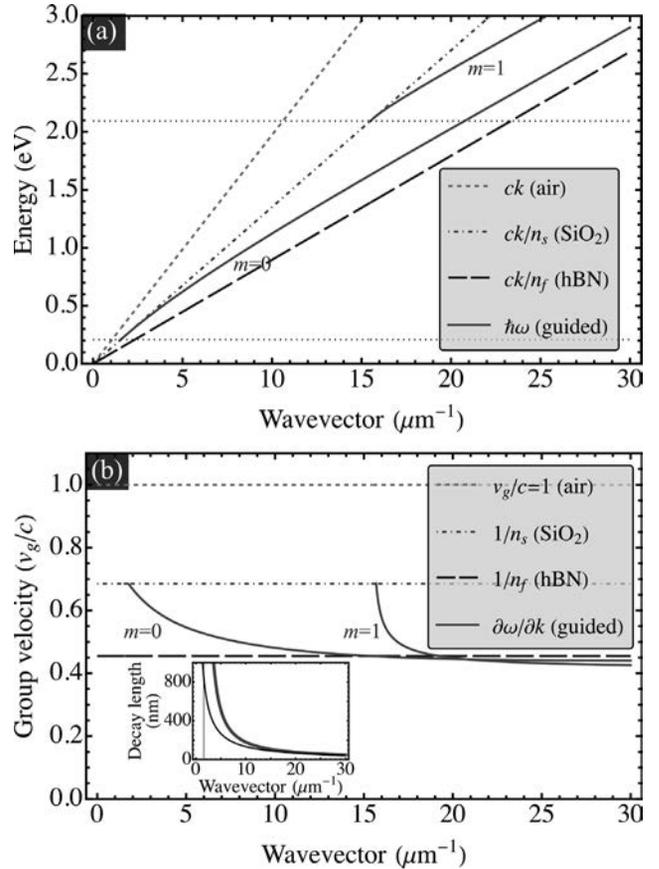


Рис. 2. (В цвете онлайн) а — Дисперсия двух нижних по энергии волноводных ТЕ-мод (сплошные кривые), рассчитанная путем решения уравнения (9) для структуры, представленной на рис. 1, а также дисперсия света в воздухе (пунктир), в волноводном слое нитрида бора (штриховая) и в подложке SiO₂ (штрихпунктир). Горизонтальные пунктиры — энергии отсечки мод, формула (11) и рис. 3. б — Групповая скорость мод, найденная по формуле (13). На вставке показана длина затухания основной волноводной моды в слое SiO₂: точный расчет согласно (12) — красная кривая; приближение больших волновых векторов — черная кривая. Толщина слоя гексагонального нитрида бора $d = 200$ нм. Показатели преломления $n_{hBN} = 2.2$, $n_{SiO_2} = 1.46$

бора проиллюстрирована на рис. 3 (сплошные линии соответствуют ТЕ-модам, штрихпунктирные — ТМ-модам). Глубина проникновения поля в подложку SiO₂, рассчитанная согласно формуле

$$\ell = \left[k^2 - \left(n_s \frac{\omega}{c} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (12)$$

показана на вставке к рис. 2 б красной кривой. Черная кривая — асимптотика (12) при больших k , когда $\omega = ck/n_f$.

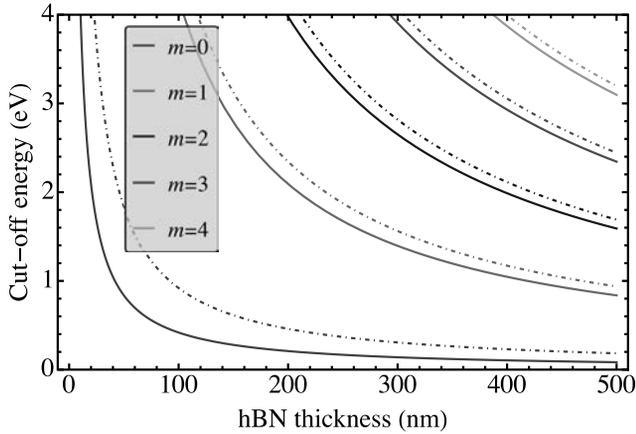


Рис. 3. (В цвете онлайн) Энергии отсечки пяти нижних по энергии мод в структуре, представленной на рис. 1, в зависимости от толщины слоя нитрида бора, рассчитанные по формуле (11). ТЕ-моды показаны сплошными кривыми, ТМ-моды — штрихпунктирными. Показатели преломления $n_{\text{hBN}} = 2.2$, $n_{\text{SiO}_2} = 1.46$

Рисунок 2b показывает групповую скорость распространения двух нижних по энергии волноводных ТЕ-мод ($m = 0, 1$)

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad (13)$$

рассчитанную по найденной из выражения (9) дисперсии. Групповая скорость волноводных мод меняется в диапазоне от скорости света в подложке SiO₂ (при малых волновых векторах) до примерно скорости света в гексагональном нитриде бора (при больших значениях k). Она составляет несколько десятых скорости света в вакууме. Таким образом, представленная на рис. 1 структура поддерживает сверхбыстрые (по сравнению с экситонами) оптические волноводные моды.

Эти моды, как видно на рис. 2, находятся ниже светового конуса в вакууме и не могут напрямую возбуждаться падающим на образец светом. В условиях экспериментов возбуждение волноводных мод может осуществляться за счет рассеяния света на неоднородностях самой структуры (характерные размеры изучаемых образцов составляют 10...100 мкм) или в виде вторичного излучения возбуждаемых падающим светом экситонов. При этом рассеяние на шероховатостях может быть подавлено вблизи частоты отсечки из-за большой глубины проникновения поля в SiO₂ (см. вставку на рис. 2 b). Нелинейные и пороговые эффекты при возникнове-

нии сверхбыстрого распространения экситонов, наблюдающиеся на опыте, могут быть связаны с изменением условий рассеяния света (например, из-за светоиндуцированного сдвига экситонной дисперсии) или с увеличением числа фотонов, попадающих в волноводную моду. Свет, распространяясь по волноводным модам, может порождать экситоны в монослое вдали от пятна возбуждения, которые, в свою очередь, порождают люминесценцию, детектируемую в эксперименте на частоте экситонного резонанса. Таким образом, процесс

$$\begin{aligned} &\text{падающий фотон} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{рассеяние (шероховатости, экситоны)} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{фотон в волноводной моде} \rightarrow \\ &\rightarrow \text{экситон/рассеяние} \rightarrow \text{вторичный фотон} \quad (14) \end{aligned}$$

может отвечать за кажущееся сверхбыстрое распространение экситонов. Фактически же энергия переносится светом в волноводной моде, а задержка в распространении складывается из собственно задержки в распространении света и задержек, связанных с формированием вторичной люминесценции. Подчеркнем, что в случае, когда волноводная мода заселяется за счет высвечивания фотовозбужденного экситона (рассеяние света на экситоне), вторичный фотон на частоте экситона может формироваться при рассеянии волноводного фотона на неоднородностях структуры.

Диффузионное распространение экситонов и сверхбыстрый перенос фотонов по волноводным модам приводит к различным профилям распределения интенсивности вторичного свечения. Рассмотрим для простоты одномерный случай. В случае диффузии распределение имеет гауссов вид:

$$I_{diff}(x, t) \propto \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (15a)$$

Напротив, для предлагаемого процесса (14) световой импульс распространяется с групповой скоростью v_g (13), а вторичное свечение появляется с некоторой задержкой на время релаксации всюду, где уже «прошла» волноводная мода:

$$I_{wg}(x, t) \propto \theta(|x| - v_g t), \quad (15b)$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Последнее выражение верно на временах, значительно превышающих время задержки. Рассеяние и поглощение волноводной моды приводит к умножению распределения (15b) на экспоненциальную функцию $\exp(-|x|/l)$, где l — длина затухания волноводной моды.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе дан краткий обзор режимов распространения экситонов в полупроводниковых гетероструктурах на основе атомарно-тонких полупроводников — дихалькогенидов переходных металлов. Перечислены особенности диффузионного и сверхтекучего распространения квазичастиц. На основе расчета фотонных мод в ван-дер-ваальсовых гетероструктурах предложен механизм, связанный с формированием волноводных мод в слое гексагонального нитрида бора, возбуждение которых за счет рассеяния света на неоднородностях структуры или экситонах, их распространение, последующая генерация экситонов и их излучение могут привести к сверхбыстрому — со скоростями, составляющими десятки доли скорости света в вакууме, — переносу энергии. Этот эффект может приводить к кажущемуся сверхбыстрому распространению экситонов.

Авторы не претендуют как на то, что предложенный механизм в полной мере отвечает за все наблюдения сверхбыстрого экситонного транспорта в ван-дер-ваальсовых гетероструктурах, так и, в частности, на количественное описание экспериментов [50–54]. Например, в структурах с более сложной подложкой $h\text{BN}/\text{SiO}_2/\text{Si}$ показатель преломления кремния превышает показатели преломления остальных слоев, поэтому волноводная мода будет затухать за счет туннелирования в кремниевую подложку, однако этот эффект подавляется при относительно больших волновых векторах. С другой стороны, если затухание волновой моды мало и для некоторых волновых векторов выполнены условия резонанса энергии экситона и волноводной моды, то возможен и режим сильной связи, сопровождающийся формированием экситонных поляритонов, наподобие рассмотренных в работах [60, 97] для структурированных подложек. В таком режиме ожидаются существенные перенормировки дисперсии и, естественно, изменения режимов распространения квазичастиц [61].

В заключение отметим, что возможность наличия волноводных мод следует учитывать при анализе транспортных эффектов на экситонах в ван-дер-ваальсовых гетероструктурах, а дальнейшие эксперименты и детальное моделирование позволят окончательно прояснить вопрос со сверхбыстрым распространением экситонов или фотонов в этих интересных объектах.

Благодарности. Авторы выражают благодарность А. Granados del Aguila за ценные обсуждения.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-12-00142.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Kapitza, *Nature* **141**, 74 (1938).
2. J. F. Allen and A. D. Misener, *Nature* **141**, 75 (1938).
3. L. D. Landau, *J. Phys. (USSR)* **5**, 71 (1941).
4. N. N. Bogolyubov, *J. Phys. (USSR)* **11**, 23 (1947).
5. R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **91**, 1291 (1953).
6. Oliver Penrose and Lars Onsager, *Phys. Rev.* **104**, 576 (1956).
7. L.P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford (2003).
8. J. Frenkel, *Phys. Rev.* **37**, 17 (1931).
9. G. H. Wannier, *Phys. Rev.* **52**, 191 (1937).
10. N. F. Mott, *Proc. Roy. Soc. A* **167**, 384 (1938).
11. E. F. Gross and N. A. Karrjew, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **84**, 471 (1952).
12. S. A. Moskalenko, *Sov. Phys. Solid State* **4**, 199 (1962).
13. J. M. Blatt, K. W. Böer, and W. Brandt, *Phys. Rev.* **126**, 1691 (1962).
14. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, *ЖЭТФ* **54**, 978 (1968) [L. V. Keldysh and A. N. Kozlov, *Sov. Phys. JETP* **27**, 521 (1968)].
15. В. А. Гергель, Р. Ф. Казаринов, Р. А. Сурис, *ЖЭТФ* **54**, 298 (1968) [V. A. Gergel', R. F. Kazarinov, and R. A. Suris, *Sov. Phys. JETP* **27**, 159 (1968)].
16. В. М. Агранович, Б. С. Тошич, *ЖЭТФ* **53** 149 (1967) [V. M. Agranovich and B. S. Toshich, *Sov. Phys. JETP* **26**, 104 (1968)].
17. В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **59**, 907 (1970) [V. L. Be-rezinskiĭ, *Sov. Phys. JETP* **32**, 493 (1971)].
18. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys. C* **6**, 1181 (1973).
19. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 556 (1975) [Yu. E. Lozovik and V. I. Yudson, *JETP Lett.* **22**, 274 (1975)].
20. L. V. Butov, A. Zrenner, G. Abstreiter, G. Böhm, and G. Weimann, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 304 (1994).

21. L. V. Butov, J. Phys.: Condens. Matter. **16**, R1577 (2004).
22. А. В. Горбунов, В. Б. Тимофеев, Письма в ЖЭТФ **84**, 390 (2006) [A. V. Gorbunov and V. B. Timofeev, JETP Lett. **84**, 329 (2006)].
23. J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymanska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and Le Si Dang, Nature **443**, 409 (2006).
24. S. Christopoulos, G. Baldassarri Höger von Högersthal, A. J. D. Grundy, P. G. Lagoudakis, A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Christmann, R. Butté, E. Feltn, J.-F. Carlin, and N. Grandjean, Phys. Rev. Lett. **98**, 126405 (2007).
25. K. G. Lagoudakis, M. Wouters, M. Richard, A. Baas, I. Carusotto, R. Andre, Le Si Dang, and B. Deveaud-Pledran, Nat. Phys. **4**, 706 (2008).
26. A. Amo, D. Sanvitto, F. P. Laussy, D. Ballarini, E. del Valle, M. D. Martin, A. Lemaitre, J. Bloch, D. N. Krizhanovskii, M. S. Skolnick, C. Tejedor, and L. Vina, Nature **457**, 291 (2009).
27. V. V. Belykh, N. N. Sibeldin, V. D. Kulakovskii, M. M. Glazov, M. A. Semina, C. Schneider, S. Höfling, M. Kamp, and A. Forchel, Phys. Rev. Lett. **110**, 137402 (2013).
28. M. Stern, V. Umansky, and I. Bar-Joseph, Science **343**, 55 (2014).
29. Y. Shilo, K. Cohen, B. Laikhtman, K. West, L. Pfeiffer, and R. Rapaport, Nat. Commun. **4**, 2335 (2013).
30. S. Misra, M. Stern, A. Joshua, V. Umansky, and I. Bar-Joseph, Phys. Rev. Lett. **120**, 047402 (2018).
31. I. Carusotto and C. Ciuti, Rev. Mod. Phys. **85**, 299 (2013).
32. A. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Malpuech, and F. P. Laussy, *Microcavities*, Oxford Univ. Press, UK (2011).
33. *Exciton Polaritons in Microcavities*, ed. by V. Timofeev and D. Sanvitto, Springer, Berlin (2012).
34. М. М. Глазов, Р. А. Сурис, УФН **190**, 1121 (2020) [M. M. Glazov and R. A. Suris, Physics-Uspekhi **63**, 1051 (2020)].
35. A. K. Geim and I. V. Grigorieva, Nature **499**, 419 (2013).
36. A. V. Kolobov and J. Tominaga. *Two-Dimensional Transition-Metal Dichalcogenides*. Springer Intern. Publ., Switzerland (2016).
37. C. Schneider, M. M. Glazov, T. Korn, S. Höfling, and B. Urbaszek, Nat. Commun. **9**, 2695 (2018).
38. A. Splendiani, L. Sun, Y. Zhang, T. Li, J. Kim, C.-Y. Chim, G. Galli, and F. Wang, Nano Lett. **10**, 1271 (2010).
39. K. F. Mak, C. Lee, J. Hone, J. Shan, and T. F. Heinz, Phys. Rev. Lett. **105**, 136805 (2010).
40. M. Selig, G. Berghäuser, A. Raja, P. Nagler, C. Schüller, T. F. Heinz, T. Korn, A. Chernikov, E. Malic, and A. Knorr, Nat. Commun. **7**, 13279 (2016).
41. G. Wang, A. Chernikov, M. M. Glazov, T. F. Heinz, X. Marie, T. Amand, and B. Urbaszek, Rev. Mod. Phys. **90**, 021001 (2018).
42. М. В. Дурнев, М. М. Глазов, УФН **188**, 913 (2018) [M. V. Durnev and M. M. Glazov, Physics-Uspekhi **61**, 825 (2018)].
43. М. М. Глазов, Е. Л. Ивченко, Письма в ЖЭТФ **113**, 10 (2021) [M. M. Glazov and E. L. Ivchenko, JETP Lett. **113**, 7 (2021)].
44. М. А. Семина, Р. А. Сурис, УФН **192**, 121 (2022) [M. A. Semina and R. A. Suris, Physics-Uspekhi **65**, 111 (2022)].
45. M. M. Fogler, L. V. Butov, and K. S. Novoselov, Nat. Commun. **5**, 4555 (2014).
46. O. L. Berman and R. Ya. Kezerashvili, Phys. Rev. B **93**, 245410 (2016).
47. S. Conti, M. Van der Donck, A. Perali, F. M. Peeters, and D. Neilson, Phys. Rev. B **101**, 220504 (2020).
48. A. Chernikov and M. M. Glazov, in *2D Excitonic Materials and Devices*, Ch. *Exciton Diffusion in 2D van der Waals Semiconductors*, ed. by P. B. Deotare and Z. Mi, Elsevier, Amsterdam (2023).
49. E. Malic, R. Perea-Causin, R. Rosati, D. Erckensten, and S. Brem, Nat. Commun. **14**, 3430 (2023).
50. L. H. Fowler-Gerace, D. J. Choksy, and L. V. Butov, Phys. Rev. B **104**, 165302 (2021).
51. L. H. Fowler-Gerace, Zhiwen Zhou, E. A. Szwed, and L. V. Butov, preprint arXiv:2204.09760 (2022).
52. L. H. Fowler-Gerace, Zhiwen Zhou, E. A. Szwed, D. J. Choksy, and L. V. Butov, preprint arXiv:2307.00702 (2023).
53. D. Beret, L. Ren, C. Robert, L. Foussat, P. Renucci, D. Lagarde, A. Balocchi, T. Amand, B. Urbaszek, K. Watanabe, T. Taniguchi, X. Marie, and L. Lombez, Phys. Rev. B **107**, 045420 (2023).

54. A. G. del Águila, Y. R. Wong, I. Wadgaonkar, A. Fieramosca, X. Liu, K. Vaklinova, S. Dal Forno, T. T. Ha Do, H. Y. Wei, K. Watanabe, T. Taniguchi, K. S. Novoselov, M. Koperski, M. Battiato, and Q. Xiong, *Nat. Nano.* **18**, 1012 (2023).
55. M. M. Glazov, *Nat. Nano.* **18**, 972 (2023).
56. T. Tamir, ed., *Guided-Wave Optoelectronics*, Springer, Berlin (1988).
57. K. J. Ebeling, *Integrated Optoelectronics*, Springer, Berlin (1993).
58. C. H. Henry, G. E. Blonder, and R. F. Kazarinov, *J. Lightwave Technol.* **7**, 1530 (1989).
59. F. Fedichkin, T. Guillet, P. Valvin, B. Jouault, C. Brimont, T. Bretagnon, L. Lahourcade, N. Grandjean, P. Lefebvre, and M. Vladimirova, *Phys. Rev. Appl.* **6**, 014011 (2016).
60. Q. Guo, B. Wu, R. Du, J. Ji, K. Wu, Y. Li, Z. Shi, S. Zhang, and H. Xu, *ACS Photonics* **9**, 2817 (2022).
61. A. N. Osipov, I. V. Iorsh, A. V. Yulin, and I. A. Shelykh, *Phys. Rev. B* **108**, 104202 (2023).
62. P. Back, S. Zeytinoglu, A. Ijaz, M. Kroner, and A. Imamoglu, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 037401 (2018).
63. J. Horng, Y.-H. Chou, T.-C. Chang, C.-Y. Hsu, T.-C. Lu, and H. Deng, *Optica* **6**, 1443 (2019).
64. H. H. Fang, B. Han, C. Robert, M. A. Semina, D. Lagarde, E. Courtade, T. Taniguchi, K. Watanabe, T. Amand, B. Urbaszek, M. M. Glazov, and X. Marie, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 067401 (2019).
65. L. Ren, C. Robert, M. Glazov, M. Semina, T. Amand, L. Lombez, D. Lagarde, T. Taniguchi, K. Watanabe, and X. Marie, *Phys. Rev. Lett.* **131**, 116901 (2023).
66. I. A. Eliseyev, B. R. Borodin, D. R. Kazanov, A. V. Poshakinskiy, M. Remskar, S. I. Pavlov, L. V. Kotova, P. A. Alekseev, A. V. Platonov, V. Yu. Davydov, and T. V. Shubina, *Adv. Opt. Mater.* **11**, 2202782 (2023).
67. F. Cadiz, E. Courtade, C. Robert, G. Wang, Y. Shen, H. Cai, T. Taniguchi, K. Watanabe, H. Carrere, D. Lagarde, M. Manca, T. Amand, P. Renucci, S. Tongay, X. Marie, and B. Urbaszek, *Phys. Rev. X* **7**, 021026 (2017).
68. D. Christiansen, M. Selig, G. Berghäuser, R. Schmidt, I. Niehues, R. Schneider, A. Arora, S. M. de Vasconcelos, R. Bratschitsch, E. Malic, and A. Knorr, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 187402 (2017).
69. S. Shree, M. Semina, C. Robert, B. Han, T. Amand, A. Balocchi, M. Manca, E. Courtade, X. Marie, T. Taniguchi, K. Watanabe, M. M. Glazov, and B. Urbaszek, *Phys. Rev. B* **98**, 035302 (2018).
70. M. M. Glazov, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 166802 (2020).
71. M. M. Glazov, Z. A. Iakovlev, and S. Refaely-Abramson, *Appl. Phys. Lett.* **121**, 192106 (2022).
72. K. Wagner, J. Zipfel, R. Rosati, E. Wietek, J. D. Ziegler, S. Brem, R. Perea-Causín, T. Taniguchi, K. Watanabe, M. M. Glazov, E. Malic, and A. Chernikov, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 076801 (2021).
73. K. Wagner, Z. A. Iakovlev, J. D. Ziegler, M. Cuccu, T. Taniguchi, K. Watanabe, M. M. Glazov, and A. Chernikov, *Nano Lett.* **23**, 4708 (2023).
74. E. Wietek, M. Florian, J. Göser, T. Taniguchi, K. Watanabe, A. Högele, M. M. Glazov, A. Steinhoff, and A. Chernikov, *Phys. Rev. Lett.* **132**, 016202 (2024).
75. M. Danovich, V. Zólyomi, V. I. Fal'ko, and I. L. Aleiner, *2D Mater.* **3**, 035011 (2016).
76. G. Moody, J. Schaibley, and X. Xu, *J. Opt. Soc. Am. B* **33**, C39 (2016).
77. M. Manca, M. M. Glazov, C. Robert, F. Cadiz, T. Taniguchi, K. Watanabe, E. Courtade, T. Amand, P. Renucci, X. Marie, G. Wang, and B. Urbaszek, *Nat. Commun.* **8**, 14927 (2017).
78. B. Han, C. Robert, E. Courtade, M. Manca, S. Shree, T. Amand, P. Renucci, T. Taniguchi, K. Watanabe, X. Marie, L. E. Golub, M. M. Glazov, and B. Urbaszek, *Phys. Rev. X* **8**, 031073 (2018).
79. K.-Q. Lin, C. S. Ong, S. Bange, P. E. Faria Jr., B. Peng, J. D. Ziegler, J. Zipfel, C. Bäuml, N. Paradiso, K. Watanabe, T. Taniguchi, C. Strunk, B. Monserrat, J. Fabian, A. Chernikov, D. Y. Qiu, S. G. Louie, and J. M. Lupton, *Nat. Commun.* **12**, 5500 (2021).
80. M. Kulig, J. Zipfel, P. Nagler, S. Blanter, C. Schüller, T. Korn, N. Paradiso, M. M. Glazov, and A. Chernikov, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 207401 (2018).
81. D. F. Cordovilla Leon, Z. Li, S. W. Jang, and P. B. Deotare, *Phys. Rev. B* **100**, 241401 (2019).
82. F. Tagarelli, E. Lopriore, D. Erckensten, R. Perea-Causín, S. Brem, J. Hagel, Z. Sun, G. Pasquale, K. Watanabe, T. Taniguchi, E. Malic, and A. Kis, *Nat. Phot.* **17**, 615 (2023).
83. J. Zipfel, M. Kulig, R. Perea-Causín, S. Brem, J. D. Ziegler, R. Rosati, T. Taniguchi, K. Watanabe, M. M. Glazov, E. Malic, and A. Chernikov, *Phys. Rev. B* **101**, 115430 (2020).

84. R. Perea-Causín, S. Brem, R. Rosati, R. Jago, M. Kulig, J. D. Ziegler, J. Zipfel, A. Chernikov, and E. Malic, *Nano Lett.* **19**, 7317 (2019).
85. M. M. Glazov, *Phys. Rev. B* **100**, 045426 (2019).
86. A. Filinov, N. V. Prokof'ev, and M. Bonitz, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 070401 (2010).
87. E. A. Кузнецов, М. Ю. Каган, ТМФ **202**, 458 (2020) [E. A. Kuznetsov and M. Yu. Kagan, *Theor. Math. Phys.* **202**, 399 (2020)].
88. Lucio Claudio Andreani and Franco Bassani, *Phys. Rev. B* **41**, 7536 (1990).
89. С. В. Гупалов, Е. Л. Ивченко, А. В. Кавокин, ЖЭТФ **113**, 703 (1998) [S. V. Goupalov, E. L. Ivchenko, and A. V. Kavokin, *JETP* **86**, 388 (1998)].
90. E. L. Ivchenko, *Optical Spectroscopy of Semiconductor Nanostructures*, Alpha Science, Harrow UK (2005).
91. M. M. Glazov, T. Amand, X. Marie, D. Lagarde, L. Bouet, and B. Urbaszek, *Phys. Rev. B* **89**, 201302 (2014).
92. H. Yu, G.-B. Liu, P. Gong, X. Xu, and W. Yao, *Nat. Commun.* **5**, 3876 (2014).
93. M. M. Glazov, E. L. Ivchenko, G. Wang, T. Amand, X. Marie, B. Urbaszek, and B. L. Liu, *Phys. Stat. Sol. (b)* **252**, 2349 (2015).
94. V. M. Agranovich and M. D. Galanin, *Electronic Excitation Energy Transfer in Condensed Matter*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1982).
95. A. I. Prazdnichnykh, M. M. Glazov, L. Ren, C. Robert, B. Urbaszek, and X. Marie, *Phys. Rev. B* **103**, 085302 (2021).
96. C. Robert, M. A. Semina, F. Cadiz, M. Manca, E. Courtade, T. Taniguchi, K. Watanabe, H. Cai, S. Tongay, B. Lassagne, P. Renucci, T. Amand, X. Marie, M. M. Glazov, and B. Urbaszek, *Phys. Rev. Mater.* **2**, 011001 (2018).
97. K. L. Koshelev, S. K. Sychev, Z. F. Sadrieva, A. A. Bogdanov, and I. V. Iorsh, *Phys. Rev. B* **98**, 161113 (2018).

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ЦЕПОЧКИ БОЗЕ-КОНДЕНСАТОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПИТАЕВСКОГО – ГРОССА

И. Н. Мосаки ^{a,b}, **А. В. Турлапов** ^{b,c,d*}

^a *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет
119991, Москва, Россия*

^b *ООО «Международный центр квантовой оптики и квантовых технологий»
121205, Москва, Россия*

^c *Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова Российской академии наук
603155, Нижний Новгород, Россия*

^d *Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 7 марта 2024 г.,
после переработки 7 марта 2024 г.
Принята к публикации 12 марта 2024 г.

Длинная цепочка бозе-конденсатов, высвобожденная из оптической решетки, свободно разлетается и интерферирует. Интерференционные полосы ясно различимы как при равных фазах конденсатов, так и в случае флуктуирующих фаз, вплоть до полного рассогласования фаз соседних конденсатов. В последнем случае положение полос также флуктуирует. Спектр пространственного распределения плотности, однако, воспроизводится, несмотря на флуктуации. Более того, в спектре ясно различимы два типа пиков. Один тип связан с флуктуациями фаз конденсатов, другой — с когерентностью между конденсатами. В рамках уравнения Питаевского–Гросса рассчитана интерференция цепочки конденсатов и проведено сравнение с экспериментом [Phys. Rev. Lett. **122**, 090403 (2019)]. Воспроизведено положение пиков в спектре, в том числе зависимость от межчастичного взаимодействия. Расчетные высоты пиков, однако, в ряде случаев отличаются от измеренных.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S0044451024070046

1. ВВЕДЕНИЕ

В традиционной оптике дифракция и интерференция возникают при прохождении света через структуру из вещества, например через дифракционную решетку. В атомной физике вещество и свет поменялись местами — наблюдается интерференция волн де Бройля, а начальное условие создается светом. Идейная основа для такой смены была заложена Капицей и Дираком, предсказавшими дифракцию электронов на стоячей световой волне [1]. Для атомов рассчитано, что короткое воздействие стоячей световой волны близкой к резонансу создает периодическую модуляцию волновой функции в про-

странстве [2]. Дифракция волн де Бройля атомов, возникающая вследствие такой модуляции, наблюдалась [3], часто используется и традиционно именуется дифракцией Капицы–Дирака.

Эффект Телбота [4] служит примером сходства между интерференцией света и волн де Бройля. В оптике эффект состоит в самоотображении длинной цепочки когерентных источников на определенном, не очень большом расстоянии. Подобное самоотображение обнаружено во многих системах — для акустических волн [5, 6], плазмонов [7], спиновых волн [8], поляритонов [9], волн де Бройля электронов [10, 11] и атомов [12]. В квантовой системе необходимое условие самоотображения — периодичность волновой функции $\psi(z+d) = \psi(z)$ или ее аналога. Для атомов и молекул эффект Телбота может возникать как частный случай дифракции Капицы–

* E-mail: turlapov@appl.sci-nnov.ru

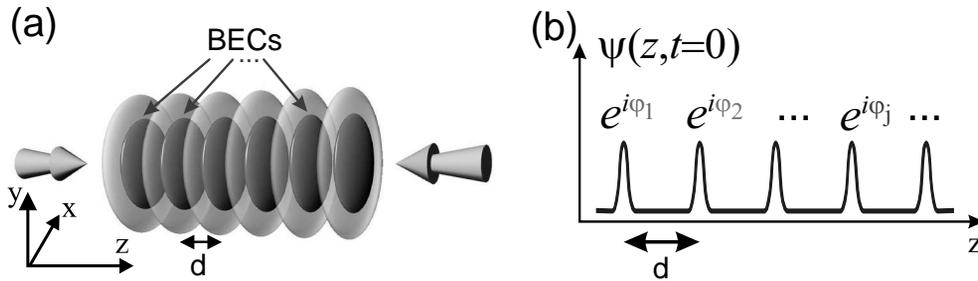


Рис. 1. *a* — Бозе-эйнштейновские конденсаты (BECs) в оптической решетке непосредственно перед ее отключением, началом разлета и интерференции. Конденсаты показаны темно-красным, а интенсивность стоячей оптической волны — светло-сиреневым. *b* — Начальная волновая функция конденсатов — модуль периодичен, а разности фаз соседей в общем случае произвольны

Дирака [13–15]. Для появления начальной модуляции $\psi(z)$ атомам не обязательно пролетать поперек стоячей волны. Можно оставить атомы почти неподвижными и на короткое время включить свет. Самоотображение $\psi(z)$ возникнет в том же месте спустя время Телбота $T_d = md^2/(\pi\hbar)$, где m — масса частицы.

Смена ролей света и материи в интерференции позволила расширить представление об эффекте Телбота. В качестве начального условия рассмотрим цепочку бозе-конденсатов, приготовленных в оптической решетке, в пучностях нерезонансной стоячей световой волны, как показано на рис. 1*a*. В момент времени $t = 0$ свет отключается, и конденсаты интерферируют в свободном пространстве. Если конденсаты когерентны друг с другом, то при $t = T_d$ происходит самовосстановление исходной цепочки конденсатов, т. е. наблюдается эффект Телбота [16, 17]. Когерентность между конденсатами можно снижать, увеличивая глубину решетки или температуру [17, 18], при этом сохраняя когерентность внутри каждого конденсата. Полосы от интерференции конденсатов остаются ясно различимы вплоть до полного разупорядочения фаз соседних конденсатов. В последнем случае положение и яркость полос и расстояние между полосами флуктуируют от одного повторения эксперимента к другому. Спектр пространственного распределения плотности, однако, воспроизводим, несмотря на флуктуации, и состоит из эквидистантных пиков, что указывает на пространственный порядок, хотя и с периодом отличным от начального d [17]. В классической оптике подобный порядок в интерференции цепочки с флуктуирующими фазами элементов не наблюдался. Если когерентность между конденсатами частичная, то в спектре ясно различимы два типа пи-

ков. Один тип возникает из-за флуктуаций фаз конденсатов, а другой вызван когерентностью между конденсатами и повторяет спектр, наблюдаемый в эффекте Телбота [17, 19].

В данной работе моделируется интерференция длинной цепочки бозе-конденсатов, происходящая после резкого отключения оптической решетки, в которой были приготовлены бозе-конденсаты. Интерференция рассчитана для произвольной когерентности между конденсатами. Модель основана на уравнении Питаевского–Гросса [20, 21]. Проведено сравнение с экспериментом [17]. Количественно воспроизведено положение пиков в спектре, в том числе сдвиг пиков, связанный с межчастичными взаимодействиями. Амплитуды пиков, однако, в ряде случаев отличаются от измеренных.

В разд. 2 описана модель и приближения. В разд. 3 обсуждаются общие свойства интерференционных полос и их пространственного спектра. В разд. 4 результаты моделирования сравниваются с экспериментом [17].

2. МОДЕЛЬ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Модель и начальные условия подберем так, чтобы они подходили к условиям эксперимента [17], где цепочка конденсатов приготовлена из газа молекул-бозонов ${}^6\text{Li}_2$. Конденсаты исходно удерживались в оптической решетке (рис. 1*a*) с потенциалом

$$V_s(\mathbf{r}) = sE_{rec} \left(1 - e^{-\frac{2mE_{rec}\rho^2}{(\hbar\lambda)^2} \cos^2\left(\frac{\pi z}{d}\right)} \right), \quad (1)$$

где s — безразмерная глубина решетки, $\lambda = 27.4$ — параметр анизотропии дископодобных микрловушек, m — масса бозона, $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$, $E_{rec} = \hbar^2\pi^2/(2md^2)$ — энергия фотонной отдачи

решетки. Разложение потенциала (1) до квадратичных по координате слагаемых дает частоты микроловушек $\omega_z = 2\sqrt{s}E_{rec}/\hbar$ и $\omega_\perp = \omega_z/\lambda$.

Необходим учет межчастичных взаимодействий, поскольку в эксперименте часть пиков в спектре была сдвинута относительно расчета для невзаимодействующих частиц. Учтем s -взаимодействия между бозонами и опишем динамику уравнением Питаевского – Гросса [20, 21] для волновой функции конденсата $\Psi(\mathbf{r}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + g |\Psi|^2 \Psi, \quad (2)$$

где $g \equiv 4\pi\hbar^2 a/m$, a — длина s -рассеяния бозонов. Уравнение применимо, поскольку взаимодействия невелики — $n_{max}^{1/3} a \lesssim 0.1$, где n_{max} — концентрация в центре одного облака.

При выборе начального условия $\Psi(\mathbf{r}, t=0)$ воспользуемся тем, что решетка достаточно глубокая и конденсаты не перекрываются. В характерных условиях эксперимента $\mu/(\hbar\omega_z) = 0.3$, где μ — химический потенциал бозонов, отсчитываемый от $\hbar\omega_z/2$. Таким образом, газ близок к кинематически двумерному — бозоны в основном населяют нижнее состояние гармонического осциллятора вдоль z . Поэтому $\Psi(\mathbf{r}, 0)$ представима в виде произведения продольной и радиальной частей: $\Psi(\mathbf{r}) = \psi(z, 0)\chi(\rho, 0)$.

Продольную часть $\psi(z, 0)$ выберем в виде суммы гауссовых функций с собственными фазами, как показано на рис. 1 b:

$$\psi(z, t=0) = \frac{N_0^{1/2}}{(2\pi)^{1/4} \sigma^{1/2}} \sum_{j=1}^K e^{-\frac{(z-jd)^2}{4\sigma^2}} e^{i\varphi_j}, \quad (3)$$

где N_0 — число бозонов в одном конденсате, K — число конденсатов в цепочке. Гауссова форма следует из близости к двумерности, а наличие собственных фаз φ_j — из локализации. Разности фаз соседних конденсатов $\varphi_j - \varphi_{j+1}$ будем считать случайными величинами с нормальным распределением. В этом случае корреляция фаз спадает экспоненциально, как при тепловых флуктуациях [22]:

$$\langle \cos(\varphi_j - \varphi_l) \rangle = \alpha^{|j-l|},$$

где

$$\alpha = \langle \cos(\varphi_j - \varphi_{j+1}) \rangle \simeq \overline{\cos(\varphi_j - \varphi_{j+1})}$$

— фактор когерентности, $\langle \dots \rangle$ — усреднение по повторениям эксперимента или по расчетам со случайными наборами фаз $\{\varphi_j\}$, обладающими одинаковым разбросом, а чертой обозначено усреднение по элементам цепочки.

Для радиальной части $\chi(\rho, 0)$ справедливо приближение Томаса – Ферми, поскольку $\mu/(\hbar\omega_\perp) \simeq 9 \gg 1$:

$$\chi(\rho, t=0) = \frac{1}{R_{TF}} \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{R_{TF}^2}\right)} \quad (4)$$

в пределах радиуса Томаса – Ферми, $\rho < R_{TF}$, и 0 при $\rho > R_{TF}$,

$$R_{TF} = 2l_\perp \left(\frac{2N_0 a}{\sqrt{\pi}\sigma}\right)^{1/4},$$

где $l_\perp = \sqrt{\hbar/(2m\omega_\perp)}$ — размер радиального осциллятора.

Радиальный и аксиальный размеры, R_{TF} и σ , взаимосвязаны. Учтем, что σ может быть больше среднеквадратичного размера осциллятора $l_z = \sqrt{\hbar/(2m\omega_z)}$ из-за взаимодействий, и вычислим R_{TF} и σ самосогласованно. Для этого подставим $\Psi(\mathbf{r}, 0) = \psi(z, 0)\chi(\rho, 0)$ в функционал энергии Питаевского – Гросса

$$\int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 + \frac{m(\omega_z^2 z^2 + \omega_\perp^2 \rho^2)}{2} |\Psi|^2 + \frac{g}{2} |\Psi|^4 \right) d^3\mathbf{r} \quad (5)$$

и минимизируем его по σ . Условие минимума

$$\left(\frac{\sigma}{l_z}\right)^4 - \frac{(8al_z^3 N_0)^{1/2}}{3\pi^{1/4} l_\perp^2} \left(\frac{\sigma}{l_z}\right)^{3/2} - 1 = 0 \quad (6)$$

приводит к величине $\sigma/l_z = 1.3$ – 1.5 для условий эксперимента [17].

Вследствие сильной анизотропии конденсатов разлет в радиальном направлении идет намного медленнее, чем в аксиальном, пренебрежем радиальным разлетом. Подстановка $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(z, t)\chi(\rho, t=0)$ в уравнение (2) с последующим усреднением по радиальной координате дает уравнение для $\psi(z, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{4\pi^{1/4}}{3} \left(\frac{2a\sigma}{N_0}\right)^{1/2} \hbar\omega_\perp |\psi|^2 \psi. \quad (7)$$

Уравнение (7), начальное условие (3) и уравнение для толщины конденсата (6) составляют модель, которая далее используется в расчетах. Цель моделирования — вычисление столбцовой концентрации $n_2(x, z)$ в момент времени t , поскольку эта величина измерима в эксперименте и прямо показывает результат интерференции. Искомая величина получается интегрированием локальной концентрации

$$n(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2 : \quad n_2(x, z) = \int n(\mathbf{r}) dy.$$

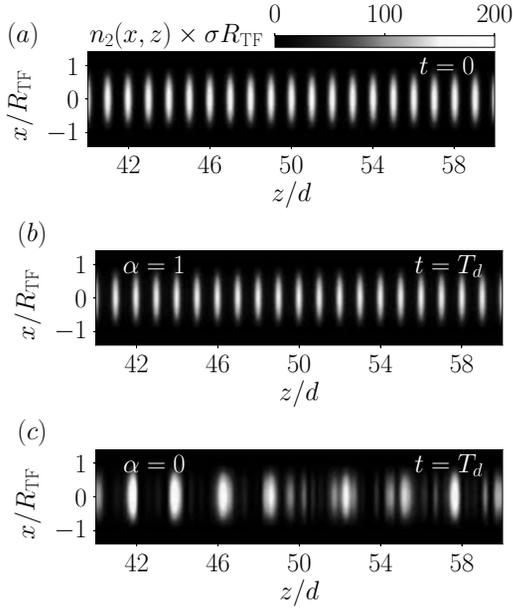


Рис. 2. Расчетная столбцовая концентрация цепочки конденсатов $n_2(x, z)$: в оптической решетке при $t = 0$ (a), при $t = T_d$ для одинаковых начальных фаз конденсатов ($\alpha = 1$) (b), при $t = T_d$ для полностью разупорядоченных начальных фаз ($\alpha = 0$) (c)

3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОЛОС И ИХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА

Покажем следующие из модели общие свойства интерференционных полос, образующихся в момент времени t после резкого отключения оптической решетки при $t = 0$ и последующей эволюции конденсатов в свободном пространстве.

Без взаимодействия и для равных фаз начальное распределение точно восстанавливается спустя период Телбота T_d : $\psi(z, 0) = \psi(z, T_d)$. Межчастичные взаимодействия приводят к исчезновению точной временной периодичности $\psi(z, t)$, однако при $t = T_d$ профиль плотности все же близок к начальному, что можно видеть на рис. 2a, b, где представлены результаты расчета столбцовой концентрации для $t = 0$ и T_d .

Разупорядочивание начальных фаз конденсатов $\{\varphi_j\}$ качественно меняет положение интерференционных полос, что видно на рис. 2c, где показан случай полного отсутствия когерентности ($\alpha = 0$). Четкие полосы сохраняются, хотя их положения зависят от конкретных значений фаз и при повторениях для нового набора $\{\varphi_j\}$ не воспроизводятся.

Закономерность для случая разупорядоченных фаз обнаруживается при анализе спектра интерфе-

ренционных полос

$$\tilde{n}_1(k, t) = \int n_1(z, t) e^{-ikz} dz, \quad (8)$$

рассчитанного по распределению линейной концентрации

$$n_1(z, t) = \int n_2(x, z, t) dx.$$

В рамках модели

$$\tilde{n}_1(k, t) = \int |\psi(z, t)|^2 e^{-ikz} dz.$$

На рис. 3 представлены расчетные спектры $\langle |\tilde{n}_1(k, T_d)| \rangle$ для различных уровней корреляции фаз конденсатов.

В расчете использованы характерные для эксперимента [17] параметры: $N_0 = 500$, $a = 1520$ бор, $s = 20$, $K = 50$, $d = 5.3$ мкм, которые в частности дают $\sigma = 1.36l_z$, а также выполнен расчет для $a = 0$. Для подавления мелкомасштабного шума спектры усреднены по 800 повторениям. Во всех случаях в спектре присутствуют пики, указывая на пространственную упорядоченность интерференционных полос.

При одинаковых фазах ($\alpha = 1$) спектр состоит из узких пиков при $k = 2\pi l/d$, $l \in \mathbb{Z}$, что видно на рис. 3a. Для полностью разупорядоченных конденсатов ($\alpha = 0$) и $a = 0$ ранее аналитически показано [17], что спектр снова состоит из эквидистантных пиков, которые, однако, шире и лежат при других импульсах $k = \pi l T_d / (td)$. Здесь результат численного счета, показанный на рис. 3c черной кривой, близок к аналитическому. Для частично разупорядоченных фаз спектр показан на рис. 3b. Сочетаются два типа спектра — узкие пики, отвечающие эффекту Телбота, и широкие пики, возникающие из-за флуктуации фаз. Относительный вклад этих двух типов спектра можно использовать для измерения фактора когерентности α .

Межчастичное взаимодействие по-разному воздействует на каждый из двух типов спектра, что видно из сравнения черных и оранжевых кривых на рис. 3. Положение узких пиков невосприимчиво к среднему полю. Центры широких пиков сдвинуты к меньшим импульсам из-за среднего поля.

4. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

В эксперименте [17] методом теневой съемки измеряется столбцовая концентрация газа $n_2(x, z)$. Примеры показаны на рис. 4a, c, повторяющие рис. 2b и рис. 3b из работы [17].

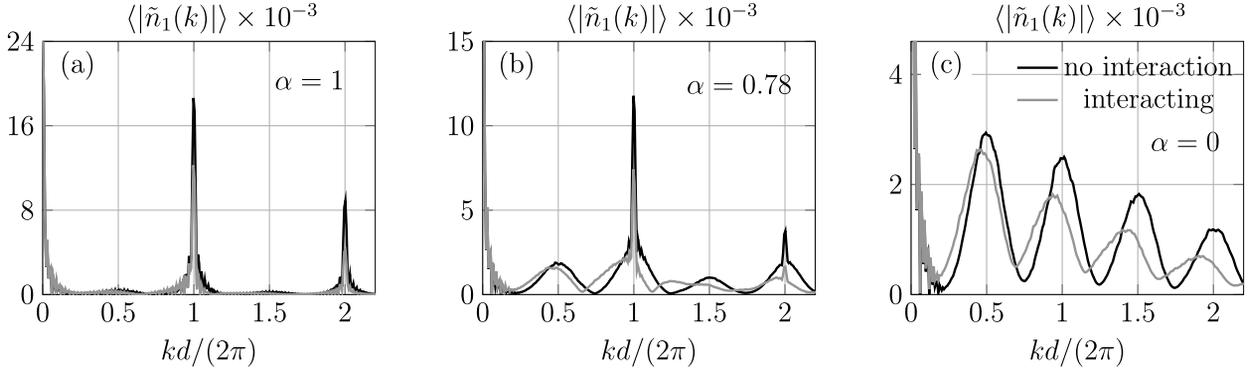


Рис. 3. Усредненный модуль спектра интерференционных полос $\langle |\tilde{n}_1(k, T_d)| \rangle$ при $t = T_d$ для различной степени упорядоченности начальных фаз: *a* — $\alpha = 1$, фазы одинаковы; *b* — $\alpha = 0.78$, фазы частично упорядочены; *c* — $\alpha = 0$, фазы полностью разупорядочены. Показаны расчеты со взаимодействием (interacting) и без взаимодействия (no interaction)

Nearly equal phases

Randomized phases

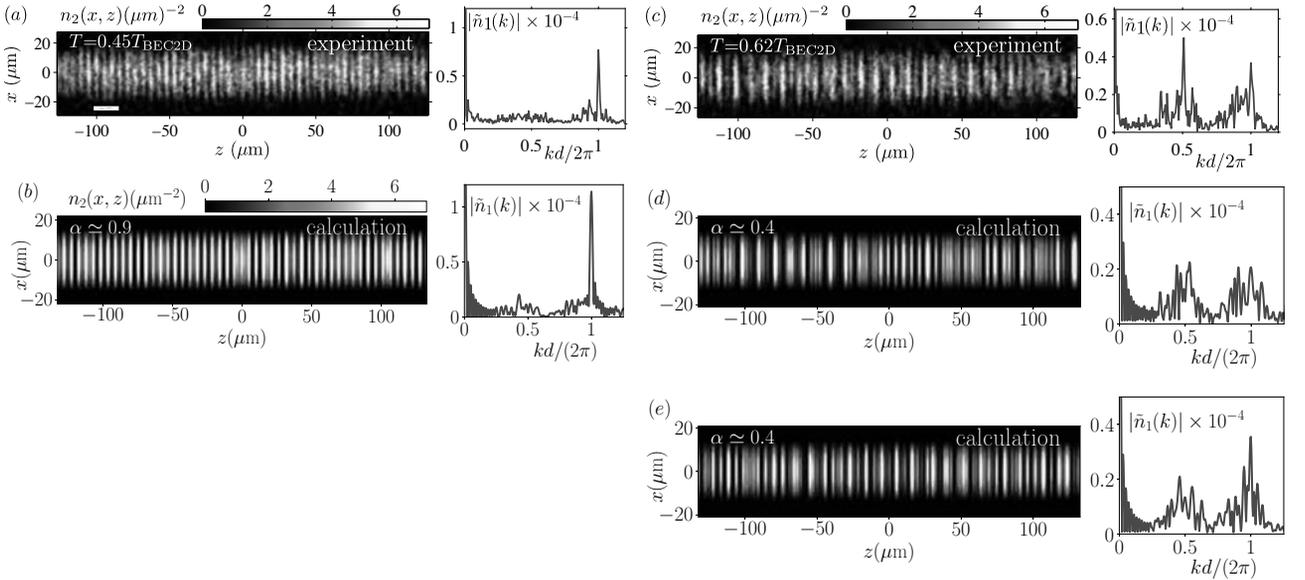


Рис. 4. *a, c* — Снимки интерференции из эксперимента [17] при $t = T_d$ и их спектры для цепочки бозе-конденсатов с температурой $T = 0.45T_{\text{BEC2D}}$ и $T = 0.62T_{\text{BEC2D}}$ соответственно. *b* — Моделирование данных с рис. *a*. *d, e* — Моделирование данных с рис. *c* с использованием двух разных наборов фаз $\{\varphi_j\}$ с одинаковым фактором когерентности α

Снимок может быть сделан в любой момент t , что приводит к разрушению квантового состояния. Новый снимок требует повторения эксперимента заново. На снимках на рис. 4 *a, c*, сделанных при $t = T_d$, интерференционные полосы параллельны, что указывает на отсутствие флуктуаций фазы внутри конденсатов и оправдывает введение в модельном распределении (3) единой фазы φ_j для j -го микроконденсата. По распределениям $n_2(x, z)$ рассчитаны спектры, также показанные на рис. 4 *a, c*. Уменьшение когерентности между соседними конденсатами и переход от эффекта Телбота к выраженным проявлениям некогерентности в спектре до-

стигнут увеличением температуры T , которая отмечена на рисунках в единицах критической температуры двумерного бозе-газа $T_{\text{BEC2D}} = \hbar\omega_{\perp}\sqrt{6N}/\pi$. Температура найдена по радиальному распределению концентрации, измеренному при $t = 0$. Для определения T/T_{BEC2D} радиальное распределение подогнано бимодальным профилем, что также дало N_0/N , где N — полное число частиц в одной дископодобной ловушке, включая неконденсированные.

Моделирование данных с рис. 4 *a* представлено на 4 *b*, а данных с 4 *c* — на 4 *d, e*. В расчетах использованы $K = 50$, $s = 23.3$, $a = 1520$ бор, $d = 5.3$ мкм, а также $N_0 = 463$ для рис. 4 *c* и $N_0 = 271$

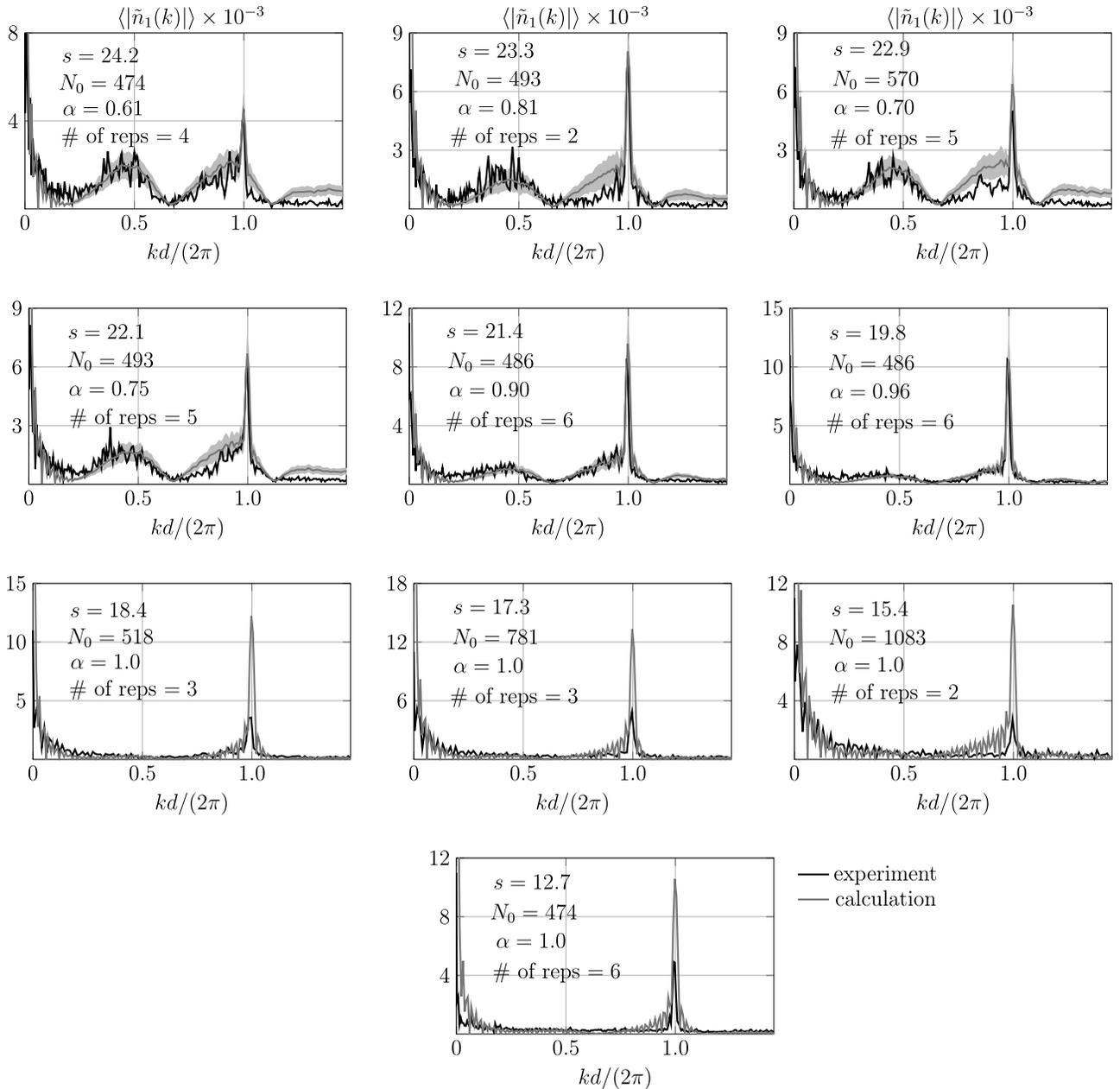


Рис. 5. Спектры линейного распределения концентрации, получившегося после эволюции конденсатов в свободном пространстве в течение периода Телбота T_d . Показаны результаты эксперимента [17] и расчета. Изменяемые параметры показаны на графиках, «# of reps» — число повторений эксперимента. Расчеты усреднены по 200 наборам $\{\varphi_j\}$, границы сиреневой заливки соответствуют \pm одному стандартному отклонению

для $4d, e$. Подстраиваемым параметром модели был фактор когерентности α , а наборы $\{\varphi_j\}$ для каждого рисунка выбирались произвольно, лишь с условием $\cos(\varphi_j - \varphi_{j+1}) = \alpha$. Подбором α получено сходство экспериментальных и расчетных спектров. При этом для сходства спектров не требуется идентичного воспроизведения интерференционных полос.

Мелкомасштабный шум присутствует и на экспериментальных, и на расчетных спектрах рис. 4.

В случае разупорядоченных фаз шум мешает установить, связан ли острый пик при $kd/(2\pi) = 1$ с эффектом Телбота или является шумовым выбросом. Эта сложность видна при сравнении спектров на рис. 4d и рис. 4e, рассчитанных для одинаковых α , но разных конкретных наборов фаз $\{\varphi_j\}$. Мелкомасштабный шум может быть подавлен усреднением по повторениям эксперимента или расчета, как на рис. 3 и 5.

Постепенный переход от интерференции с разупорядоченными фазами к эффекту Телбота можно наблюдать по данным и расчетам, представленным на рис. 5. Данные взяты с рис. 6 дополнительных материалов статьи [17]. Показан результат интерференции при $t = T_d$. И в данных, и при моделировании используется усреднение по повторениям эксперимента или расчета. На расчетных кривых величину мелкомасштабного шума можно видеть по сиреновой заливке. Ее границы соответствуют \pm одному стандартному отклонению. Усреднение позволяет верно идентифицировать пик, связанный с интерференцией по Телботу, и использовать его для подбора α . Фактор когерентности α зависит от температуры [22], что открывает возможность для термометрии, в том числе для температур существенно меньших критической, которые не могут быть найдены бимодальной подгонкой [19, 23].

Переход между двумя режимами интерференции, показанный на рис. 5, достигнут плавным изменением глубины решетки s . Для глубин $s \leq 18.4$ высота расчетного спектра очевидно превышает высоту экспериментального. Причина различия не ясна. Можно отметить, что приближение Питаевского–Гросса не учитывает обеднение конденсата из-за взаимодействий. Кроме того, при уменьшении s аксиальная волновая функция исходного конденсата отходит от гауссова профиля (3).

Широкие пики в спектре, отвечающие флуктуациям фаз, сдвинуты влево относительно положений, предсказанных моделью без взаимодействий. В случае $a = 0$ центры пиков на рис. 4 и 5 должны были бы находиться при $kd/(2\pi) = 0.5$ и 1.0 . Модель на основе уравнения Питаевского–Гросса хорошо воспроизводит сдвиг пиков. Важную роль для количественного сходства играет уширение конденсата, задаваемое формулой (6). Без этого уширения при $\sigma = l_z$ сдвиг в 2–3 раза меньше.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках уравнения Питаевского–Гросса рассчитана интерференция длинной цепочки конденсатов. Получены два режима интерференции и их комбинация. Сравнение спектра интерференционных полос с данными эксперимента показывает количественное согласие в положении и ширине пиков, в том числе — согласие в среднеполевых сдвигах. Касательно высот пиков есть рассогласование с частью данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. L. Kapitza and P. A. M. Dirac, *The Reflection of Electrons from Standing Light Waves*, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **29**, 297 (1933).
2. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *К квантовой теории резонансного рассеяния атомов светом*, Письма в ЖЭТФ **31**, 542 (1980) [JETP Lett. **31**, 509 (1980)].
3. P. L. Gould, G. A. Ruff, and D. E. Pritchard, *Diffraction of Atoms by Light: The Near-Resonant Kapitza–Dirac Effect*, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 827 (1986).
4. H. F. Talbot, *Facts Related to Optical Science*, *Philos. Mag.* **6**, 401 (1836).
5. N. Saiga and Y. Ichioka, *Visualization of the Strain Wave Front of a Progressive Acoustic Wave Based on the Talbot Effect*, *Appl. Opt.* **24**, 1459 (1985).
6. А. Н. Морозов, М. П. Крикунова, Б. Г. Скуйбин, Е. В. Смирнов, *Наблюдение эффекта Талбота для ультразвуковых волн*, Письма в ЖЭТФ **106**, 26 (2017) [JETP Lett. **106**, 23 (2017)].
7. W. Zhang, C. Zhao, J. Wang, and J. Zhang, *An Experimental Study of the Plasmonic Talbot Effect*, *Opt. Express* **17**, 19757 (2009).
8. S. Mansfeld, J. Topp, K. Martens, J. N. Toedt, W. Hansen, D. Heitmann, and S. Mendach, *Spin Wave Diffraction and Perfect Imaging of a Grating*, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 047204 (2012).
9. T. Gao, E. Estrecho, G. Li, O. A. Egorov, X. Ma, K. Winkler, M. Kamp, C. Schneider, S. Höfling, A. G. Truscott, and E. A. Ostrovskaya, *Talbot Effect for Exciton Polaritons*, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 097403 (2016).
10. V. L. Bratman, G. G. Denisov, N. S. Ginzburg, B. D. Kol'chugin, N. Y. Peskov, S. V. Samsonov, and A. B. Volkov, *Experimental Study of an FEM with a Microwave System of a New Type*, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **24**, 744 (1996).
11. T. G. A. Verhoeven, W. A. Bongers, V. L. Bratman, M. Caplan, G. G. Denisov, C. A. J. van der Geer, P. Manintveld, A. J. Poelman, J. Plomp, A. V. Savilov, P. H. M. Smeets, A. B. Sterk, and W. H. Urbanus, *First mm-Wave Generation in the FOM Free Electron Maser*, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **27**, 1084 (1999).

12. M. S. Chapman, C. R. Ekstrom, T. D. Hammond, J. Schmiedmayer, B. E. Tannian, S. Wehinger, and D. E. Pritchard, *Near-field Imaging of Atom Diffraction Gratings: The Atomic Talbot Effect*, Phys. Rev. A **51**, R14 (1995).
13. L. Deng, E. W. Hagley, J. Denschlag, J. E. Simsarian, M. Edwards, C. W. Clark, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *Temporal, Matter-Wave-Dispersion Talbot Effect*, Phys. Rev. Lett. **83**, 5407 (1999).
14. B. Santra, C. Baals, R. Labouvie, A. B. Bhattacharjee, A. Pelster, and H. Ott, *Measuring Finite-Range Phase Coherence in an Optical Lattice Using Talbot Interferometry*, Nature Comm. **8** 15601 (2017).
15. F. Wei, Z. Zhang, Y. Chen, H. Shui, Y. Liang, C. Li, and X. Zhou, *Temporal Talbot Interferometer of Strongly Interacting Molecular Bose-Einstein Condensate*, arXiv:2402.14629 (2024).
16. M. J. Mark, E. Haller, J. G. Danzl, K. Lauber, M. Gustavsson, and H.-C. Nägerl, *Demonstration of the Temporal Matter-Wave Talbot Effect for Trapped Matter Waves*, New J. of Phys. **13**, 085008 (2011).
17. V. Makhalov and A. Turlapov, *Order in the Interference of a Long Chain of Bose Condensates with Unrestricted Phases*, Phys. Rev. Lett. **122**, 090403 (2019).
18. Z. Hadzibabic, S. Stock, B. Battelier, V. Bretin, and J. Dalibard, *Interference of an Array of Independent Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **93**, 180403 (2004).
19. В. Б. Махалов, А. В. Турлапов, *Квантовый эффект Телбота для цепочки частично коррелированных конденсатов Бозе-Эйнштейна (Миниобзор)*, Письма в ЖЭТФ **109**, 564 (2019) [JETP Lett. **109**, 552 (2019)].
20. Л. П. Питаевский, *Вихревые линии в неидеальном бозе-газе*, ЖЭТФ **40**, 646 (1961) [JETP **13**, 451 (1961)].
21. E. P. Gross, *Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems*, Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).
22. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Thermal vs Quantum Decoherence in Double Well Trapped Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **87**, 180402 (2001).
23. R. Gati, B. Hemmerling, J. Fölling, M. Albiez, and M. K. Oberthaler, *Noise Thermometry with Two Weakly Coupled Bose-Einstein Condensates*, Phys. Rev. Lett. **96**, 130404 (2006).

ON THE MICROSCOPIC APPROACH TO THE ANDREEV CURRENT...

P. I. Arseev^{a*}, *N. S. Maslova*^b, *Yu. M. Bilinskii*^a

^a *P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences
119991, Moscow, Russia*

^b *M. V. Lomonosov Moscow State University
119991 Moscow, Russia*

Received March 30, 2024,
revised version March 30, 2024,
Accepted for publication March 31, 2024

It was shown how we can describe microscopically the Andreev current in a uniform way for a contact with direct coupling between N and S leads and with intermediate chain of atoms (multilayer system) inside the contact. Considering various types of connection of the normal lead to external thermal bath we reproduce various nonequilibrium distributions at the edge of the normal lead. It was shown what type of connection to the external reservoir corresponds to the classical result of Blonder, Klapwijk and Tinkham. Also we discuss difference in equilibrium and non equilibrium proximity effect, and it is clarified that the Andreev current arises due to the nonequilibrium effects which is much larger than the equilibrium one.

Contribution for the JETP special issue in honor of P. L. Kapitza's 130th anniversary

DOI: 10.31857/S0044451024070058

1. INTRODUCTION

One of the interesting manifestations of superconductivity is macroscopic quantum tunneling effects. In the case of a contact between two superconductors it is Josephson effect at first. In a junction between superconductor and normal metal macroscopic quantum nature of superconducting state also reveals as the Andreev current (These phenomena attracted attention rather long ago — see review by K.Likharev [1]). Usually qualitative explanation of the Andreev current in NS contacts is based on the process of the Andreev reflection [2] at the boundary described as reflection and transmission of quasiparticles at the tunneling barrier. In the widely cited paper by Blonder, Klapwijk and Tinkham (BTK) [3] one dimensional scattering model was used to write down the equation for the current. In this theory normal metal in the vicinity of the contact do not suppose to be in thermal equilibrium. That means that electron distribution function in the N region are not the Fermi function depended only on the energy

of the particles. The assumption of the authors of [3] was that electrons moving to the contact obey Fermi distribution

$$n_{\rightarrow}(\omega) = n_F(\omega - eV)$$

while reflected and moving out electrons are non equilibrium

$$n_{\leftarrow}(\omega) = An_F(\omega + eV) + Bn_F(\omega - eV),$$

with coefficients A and B calculated in the scattering theory. The question how this non equilibrium distribution forms if at some distance there should be thermal equilibrium distribution was out of consideration in that paper. Contrary to the scattering approach to the tunneling transport there is also a method based on nonequilibrium Green's functions [4]. In this approach a system is placed between two thermal baths with different chemical potentials and all transport characteristics and nonequilibrium distributions in the intermediate system are calculated using Green's functions. This formulation of the problem seems to be much more adequate for experimental setups. One of the first papers in this direction was written rather long ago [5], but this approach became widespread later in the 90s.

For superconductor structures there were rather many papers in which quasiclassical approach was used.

* E-mail: ars@td.lpi.ru

In dirty metals quasiclassical equations are simplified to the Usadel equations [6] which look easier than the Gorkov equations. Last years people were interested in complicated multiterminal problems, but initially some papers were devoted to a simple NS contact [8] [7].

Nowadays superconducting hybrid structures with very small dimensions are fabricated. To our opinion it is useful to return to the initial microscopic picture of the contacts not only to repeat the BTK result, but to try to understand for what systems it is valid, and how it is connected with microscopic language and nonequilibrium Green's function approach.

For contacts with superconductors such microscopic approach was used by Cuevas, Martin-Rodero and Levy-Yeyati in [9].

We present here theoretical approach for one dimensional or quasi one-dimensional (planar) contacts based on nonequilibrium diagram technique similar to [9] but taking into account all changes in electron properties at the edges of the contact. Besides we do not suppose that normal metal is a thermal bath itself, which allows to show the origin of nonequilibrium electron distribution. So a more general system than in [9] is considered with some intermediate region between the external reservoirs. This part of the present paper complements the old paper of the authors [10] in which normal current characteristics were considered in the NS contact with additional atomic state between the leads.

2. ONE DIMENSIONAL MODEL

The one dimensional model of NS contact is shown in Fig. 1 and can be described by the following Hamiltonian \hat{H}

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{i\sigma} \mu a_{i\sigma}^+ a_{i\sigma} + \sum_{i \geq 1, \sigma} t (a_{i,\sigma}^+ a_{i+1,\sigma} + \text{H.c.}) + \\ & + \sum_{i \geq 1, \sigma} t (c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + \text{H.c.}) + \sum_{i \geq 1, \sigma} (\Delta c_{i\uparrow}^+ c_{i\downarrow}^+ + \text{H.c.}) + \\ & + T (c_{1,\sigma}^+ a_{1,\sigma} + \text{H.c.}) \end{aligned} \quad (1)$$

In the both parts of the chain we number the sites from one to the left or to the right from the contact. The first line describes normal metal, the second line — superconductor and term in the third line describes the tunneling between normal and superconducting parts of the chain. We assume in what follows that all energies are counted from the chemical potential of superconductor, so in the equation (1) $\mu_{sp} = 0$, T — is the tunneling matrix amplitude between N and S parts. The hopping matrix element t in the chain is supposed to be the same in the superconducting and normal part

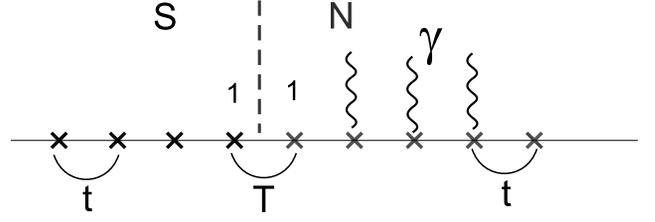


Fig. 1. One dimensional NS system with added relaxation in the normal part shown as a weak connection to external bath at each site (wavy lines)

of the chain. (Later we consider also modified formulas with different t_S, t_N). So the choice $T = t$ evidently corresponds to the «ideal transparency» of the contact. Operators c_i correspond to electrons in superconductor and a_i — to the normal metal in the site representation.

Tunneling current through the contact has the usual form (electrical current is eI):

$$I = iT [\langle c_1^+ a_1 \rangle - \langle a_1^+ c_1 \rangle] = T [G_{NS}^< - G_{SN}^<]. \quad (2)$$

Though the current is expressed only in terms of normal Green's functions, calculations with superconductors inevitably incorporate anomalous functions. It is convenient to use well known matrix representation in order to simplify calculations with superconductors

$$\Gamma^R(\omega) = \begin{pmatrix} G^R(\omega) & -F^R(\omega) \\ F^{+R}(\omega) & G^A(-\omega) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\Gamma^<(\omega) = \begin{pmatrix} G^<(\omega) & -F^<(\omega) \\ F^{+<}(\omega) & G^>(-\omega) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

We use the following definitions of Keldysh functions (here t and t' lie on the Keldysh contour):

$$\begin{aligned} G_{nm}(t, t') &= -i \langle T_c c_{n\uparrow}(t) c_{m\uparrow}^+(t') \rangle, \\ F_{nm}(t, t') &= i \langle T_c c_{n\uparrow}(t) c_{m\downarrow}(t') \rangle, \\ F_{nm}^+(t, t') &= i \langle T_c c_{n\downarrow}^+(t) c_{m\uparrow}^+(t') \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

In this representation tunneling interaction is proportional to the unity matrix

$$\hat{T} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Let us first calculate matrix Green's function for the normal and superconducting semi infinite chains. For infinite normal metal chain:

$$\begin{aligned} G_{nm}^{0R}(\omega) &= \\ &= a \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dk e^{ika(n-m)} \frac{1}{\omega + i\delta + \mu - 2t \cos(ka)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$G_{nm}^{0A}(\omega) = [G_{mn}^{0R}(\omega)]^*, \quad (8)$$

further on $\omega = \omega + \mu$

Exact calculation of integral in (7) gives

$$G_{nm}^{0R}(\omega) = -\frac{i}{2t} \frac{1}{\cos(\phi)} \times \left[(-i)^{|n-m|} e^{i|n-m|\phi} - (-i)^{(n+m)} e^{i(n+m)\phi} \right], \quad (9)$$

where $\sin \phi(\omega) = \omega/2t$

It is possible to emulate the behavior of a finite chain by using the infinite chain with infinitely strong point defects $U \rightarrow +\infty$ added at site 0. Then in matrix form Green's functions for semi infinite chain gives by

$$\Gamma_{nm}^R(\omega) \equiv \Gamma_{nm}^{0R}(\omega) - \Gamma_{n0}^{0R}(\omega) (\Gamma_{0,0}^{0R}(\omega))^{-1} \Gamma_{0,m}^{0R}(\omega). \quad (10)$$

For the normal metal chain which begins from the site number 1 this equation gives

$$G_{1m}^R(\omega) = -\frac{i}{t} (-i)^{(m-1)} e^{im\phi}. \quad (11)$$

If we add in the Hamiltonian (7) interaction with a bath at each site of the normal chain (which is shown symbolically as wavy lines in Fig. 1) it can be proved, that we have simply to replace $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$ Further on we shall use only single site diagonal Green's functions G_{11}, F_{11} and omit this site index (11) using matrix representation

$$\hat{\Gamma}_N^{0R}(\omega) = \begin{pmatrix} G_{11}^{0R}(\omega) & 0 \\ 0 & G_{11}^{0A}(-\omega) \end{pmatrix} = -\frac{i}{t} e^{-\chi} e^{i\phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\sin(\phi) \operatorname{ch}(\chi) = \frac{\omega}{2t}, \quad \cos(\phi) \operatorname{sh}(\chi) = \frac{\gamma}{2t}.$$

For the superconductor chain we also start from Green's functions of infinite chain:

$$G_{nm}^{0R}(\omega) = a \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dk e^{ika(n-m)} \times \frac{\omega + 2t \cos(ka)}{(\omega + i\delta)^2 - (2t \cos(ka))^2 - \Delta^2}, \quad (13)$$

$$F_{nm}^{0R}(\omega) = a \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dk e^{ika(n-m)} \times \frac{\Delta}{(\omega + i\delta)^2 - (2t \cos(ka))^2 - \Delta^2}. \quad (14)$$

Similar calculations for the superconductor give for $\omega < \Delta$

$$\Gamma_S^{0R}(\omega) = \frac{-2e^{-\chi_0}}{(2t)^2 \operatorname{sh}(\chi_0)} \begin{pmatrix} \omega & -\Delta \\ \Delta & -\omega \end{pmatrix}, \quad (15)$$

where

$$\operatorname{sh}(\chi_0) = \frac{\sqrt{\Delta^2 - \omega^2}}{2t},$$

$$\operatorname{ch}(\chi_0) = \sqrt{1 + \frac{\Delta^2 - \omega^2}{(2t)^2}}.$$

In terms of the matrix functions (3,4) the current (2) is written as

$$I = T^2 [\Gamma_N^< \Gamma_S^{0A} - \Gamma_S^{0R} \Gamma_N^< + \Gamma_N^R \Gamma_S^{0<} - \Gamma_S^{0<} \Gamma_N^A]_{11}, \quad (16)$$

where the index (11) here means that at the end of the calculations we have to know only the element (11) of this matrix expression. In this formula Green's functions of superconductor are the initial ones without interaction with the normal part taking into account. But Green's functions of the normal chain should be calculated exactly with full account for the tunneling processes to the superconductor.

Note, that of course we can change this choice vice versa and can use completely symmetric expression as well

$$I = T^2 \left([R]^{-1} \Gamma_N^{0<} \Gamma_S^A - \Gamma_S^R \Gamma_N^{0<} [A]^{-1} + \Gamma_N^R \Gamma_S^{0<} [A]^{-1} - [R]^{-1} \Gamma_S^{0<} \Gamma_N^A \right)_{11}.$$

For our problem it is easier to use unperturbed Green's functions of superconductor because for energies in the superconducting gap (if $eV < \Delta$) all $\Gamma_S^{0<} = 0$. This simplifies significantly all calculations. Exact retarded function of the normal metal is equal to

$$\Gamma_N^R = [1 - \Gamma_N^{0R} T^2 \Gamma_S^{0R}]^{-1} \Gamma_N^{0R} \equiv [R]^{-1} \Gamma_N^{0R},$$

here short notation $[R]^{-1}$ is used which corresponds to the sum of the perturbation series on the tunneling interaction. Using the unperturbed Green's function of the normal and superconducting chain we obtain

$$[R] = \left[1 - iC \begin{pmatrix} \omega & -\Delta \\ -\Delta & \omega \end{pmatrix} \right],$$

where

$$C = \frac{1}{2t} \left(\frac{T^2}{t^2} \frac{e^{-\chi_0}}{\text{sh}(\chi_0)} \right) e^{i\phi} e^{-\chi}. \quad (17)$$

In the same notations, the exact $\Gamma_N^<$ is equal to

$$\Gamma_N^< = [R]^{-1} \Gamma_N^{0<} [A]^{-1} + \Gamma_N^R T^2 \Gamma_S^{0<} \Gamma_N^A.$$

Let us look at the anomalous part of the normal Green's function appeared due to the proximity effect. The Andreev current is determined only by this part and is in essence the Josephson current appeared due to the induced anomalous part:

$$\begin{aligned} [\Gamma_N^<]_{12} &= \\ &= -i \left\{ C \Delta [n(\omega - eV) - n(\omega + eV)] - \right. \\ &\quad \left. - C^2 \Delta \omega [n(\omega - eV) + n(\omega + eV)] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ |(1 - iC\omega)^2 + C^2 \Delta^2|^2 \right\}^{-1}. \quad (18) \end{aligned}$$

We choose the chemical potential of the superconductor to be zero and the chemical potential of the normal metal is shifted by the applied voltage $\mu_N = eV$. So the appearance of $n(\omega + eV)$ is connected with the element (22) of the matrix Green's function (4) since

$$\begin{aligned} G^>(-\omega) &\propto (n(-\omega) - 1) = \\ &= n_F(-\omega - eV) - 1 = -n_F(\omega + eV). \end{aligned}$$

Very interesting feature of eq.(18) is that it describes two different contributions to proximity effect. The second term proportional to C^2 corresponds to equilibrium proximity effect. And the first one is proportional to C but appears only in nonequilibrium situation, when $eV \neq 0$. Since $C \propto T^2$ the nonequilibrium contribution is usually much larger than equilibrium one for small transparency of the contact.

We should like to note that only nonequilibrium proximity effect is responsible for the Andreev current appearance.

If we are interested only in the Andreev current in the gap, let us suppose further that

$$\frac{\Delta}{2t} \ll 1, \quad \omega \leq \Delta.$$

The current (16) is

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\Delta^2}{t^2} \left(\frac{T^2}{t^2} \frac{e^{-\chi_0}}{\text{sh}(\chi_0)} \right)^2 \times \\ &\quad \times \frac{\cos^2(\phi)}{|(1 - iC\omega)^2 + C^2 \Delta^2|^2} \times \\ &\quad \times [n(\omega - eV) - n(\omega + eV)], \quad (19) \end{aligned}$$

where C given by Eq.(17) is some function of ω and contains information about the tunneling amplitude and density of states at the edges of the contact.

For small $\gamma/2t$ and $\Delta/2t$ it simplifies to

$$C = \left(\frac{T^2}{t^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 - \omega^2}}$$

and the current density $I(\omega)$ becomes

$$I(\omega) = \frac{4\Delta^2 \left(\frac{T^2}{t^2} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{T^2}{t^2} \right)^2 \right]^2 (\Delta^2 - \omega^2) + 4 \left(\frac{T^2}{t^2} \right)^2 \omega^2}. \quad (20)$$

This formula is in agreement with the BTK equation (see Ref. [9] as well). Of course in any case the Andreev current is proportional to T^4 , the square of a «tunneling transparency», because it appears only due to the proximity effect. Note once more, that it is only nonequilibrium part of the proximity effect which makes contribution to the Andreev current. Tunneling conductivity for small bias is equal to

$$\frac{dI}{dV}(0) = I(\omega = 0) = \frac{4(T^2/t^2)^2}{\left[1 + (T^2/t^2)^2 \right]}. \quad (21)$$

The case of ideal transparency is formulated in this model as a condition $T = t$ which corresponds to the ideal metal chain one half of which is superconducting. In this case the current (20) does not depend on energy ω inside the gap:

$$\frac{dI}{dV}(\omega) = 2, \quad (22)$$

as in the paper [3].

Of course it is not obligatory that normal and superconducting parts are the same material, so hopping matrix elements t in the Hamiltonian (1) can be different for the normal and superconducting chains. In this case the current (20) looks like

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \\ &= \frac{4\Delta^2 \left(\frac{T^2}{t_S t_N} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{T^2}{t_S t_N} \right)^2 \right]^2 (\Delta^2 - \omega^2) + 4 \left(\frac{T^2}{t_S t_N} \right)^2 \omega^2}. \quad (23) \end{aligned}$$

Formally for $T^2 = t_S t_N$ we again reproduce the case of ideal transparency, but it is doubtful that it makes some physical sense.

So we see that the system, in which BTK consideration is literally valid, is the NS contact with very small relaxation rate to equilibrium state spatially spread from the contact to infinity along the normal chain. In this case far from the contact we have thermal equilibrium distribution in the normal metal with the chemical potential $\mu = eV$ and in the vicinity of the contact this distribution is distorted so, that BTK non equilibrium distribution needed for the Andreev current appears.

3. CONTACT WITH INTERMEDIATE REGION

In this section we consider a more general tunneling system with some intermediate region as it is shown in Fig. 2. Superconductor is connected to one dimensional chain, but this chain consists of finite number of sites L . The other end of the chain is connected to massive thermal bath with γ_0 be the tunneling rate to the bath. For the unperturbed (without interaction with the superconductor) retarded Green's function we obtain

$$G_{11}^{0R}(\omega) = -\frac{i}{t} \frac{1}{sch_{L+1}(\phi)} \times \left[sch_L(\phi) - (-1)^{L+1} \left(\frac{\gamma_0}{t} \right) \times \frac{sch_1^2(\phi)}{sch_{L+1}(\phi) + \left(\frac{\gamma_0}{t} \right) sch_L(\phi)} \right] \quad (24)$$

This is the Green's function in site representation for the edge site (site number 1) of the normal chain. For brevity we introduced the notation

$$sch_L(\phi) = e^{-iL\phi} - (-1)^L e^{iL\phi}.$$

Denominator of the G^R describes resonances in the intermediate system. Without relaxation these resonances are simply size quantised states in a finite chain determined by the condition $sch_L(\phi) = 0$. Clearly there are two different limiting cases

$$\chi L = (\gamma/2t)L \gg 1 \quad \text{and} \quad \chi L = (\gamma/2t)L \ll 1.$$

(Remind that χ is determined by the intensity of the spread along the chain relaxation γ (12).) In the first case

$$sch_L(\phi) \simeq e^{L\gamma/2t} \gg 1,$$

and we return to the semi-infinite chain, because uniformly distributed along the chain relaxation γ almost

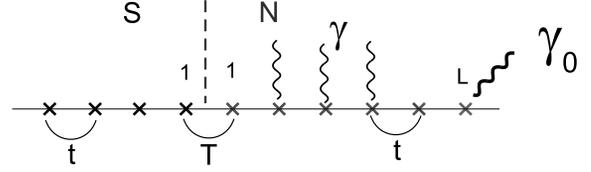


Fig. 2. Tunneling system with an intermediate region. Normal chain is of L sites length and at the end it is connected to a massive reservoir. The tunneling rate from the last site L to the reservoir is denoted as γ_0

completely «takes away» electron flow before it reaches the opposite end and the second contact to reservoir plays no role. Contrary to this in the second case we have a system of several sites (atoms) placed between the contacts which serve as thermal baths.

For $L = 1$ the general formula (24) gives exactly the Green's function of a single site (atom).

$$G_{11}^{0R}(\omega) = \frac{1}{\omega + i\gamma_0}.$$

For $L = 2$ Eq. (24) gives the function for two sites and so on.

Equation (24) is written for the chemical potential equal to the site energy level, but can be easily modified for general case. If chemical potential does not coincide with atom level ε , then ω should be replaced by $\omega - \varepsilon$.

Now we have some new functions G_{11}^{0R} and consequently new equations for $C(\omega)$. But this is the only needed modification, all equations of the previous section are valid with replacement by the new function $C(\omega)$. For example for a single site in the contact

$$C = -\frac{i}{(\omega - \varepsilon_0) + i\gamma_0} \left(\frac{T^2}{t_S^2} \frac{e^{-\chi_0}}{2 \text{sh}(\chi_0)} \right). \quad (25)$$

This value of C leads for $\Delta \ll t_S$ to simplified expressions analogous to (21)

$$\frac{dI}{dV}(0) = I(\omega = 0) = \frac{4(t_S^2/\gamma_0^2) (T^2/t_S^2)^2}{\left[1 + (t_S^2/\gamma_0^2) (T^2/t_S^2)^2 \right]^2}. \quad (26)$$

Conductivity at the edge of the gap in this case does not depend on T and band width $2t_S$

$$\frac{dI}{dV}(\Delta) = I(\omega = \Delta) = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2}{\gamma_0^2 + \Delta^2}. \quad (27)$$

If γ_0 is small enough so, that $\gamma_0/t_S \ll (T/t_S)^2 \leq 1$, then conductivity (26) is suppressed compared to (21),

$$\frac{dI}{dV}(0) = \frac{4(t_S^2\gamma_0^2)}{T^4}. \quad (28)$$

But it is possible also that $\gamma_0/t_S \ll 1$, but $\gamma_0/t_S \gg (T/t_S)^2$ for small tunneling transparency. Then

$$\frac{dI}{dV}(0) = \frac{4T^4}{(t_S^2\gamma_0^2)}. \quad (29)$$

Compared to (21), a resonant enhancing factor (t_S^2/γ_0^2) appears. Equations (26), (27) shows that tunneling conductivity is less than in the direct NS contact and increases with bias increasing even in the case $T = t_S$.

Let us look briefly at the chain with two atoms ($L = 2$), because it is the simplest example of intermediate system with several levels. For two atoms we have

$$G_{11}^{0R}(\omega) = \frac{\omega - \varepsilon + i\gamma}{(\omega - \varepsilon)^2 - t^2 + i\gamma_0\omega}, \quad (30)$$

$$C = i \frac{\omega + i\gamma_0}{\omega^2 - t^2 + i\gamma_0\omega} \left(\frac{T^2}{t_s^2} \frac{e^{-\chi_0}}{2 \operatorname{sh}(\chi_0)} \right). \quad (31)$$

Substituting this value of the function C in our equations we get

$$\frac{dI}{dV}(0) = \frac{4(\gamma_0^2/t_s^2) (T^2/t^2)^2}{[1 + (\gamma_0^2/t_s^2) (T^2/t^2)^2]^2}, \quad (32)$$

$$\frac{dI}{dV}(\Delta) = \frac{1}{2} \frac{\gamma_0^2 t^4}{(\gamma_0^2 + \Delta^2) ((\Delta^2 - t^2)^2 + \gamma_0^2 \Delta^2)}. \quad (33)$$

We see that for γ_0 and t there are critical values, determined by the condition

$$\frac{\gamma_0}{t^2} = \frac{t_S}{T^2}.$$

For γ_0 less than this critical value the conductivity is suppressed while for large values we have some enhancement. Equation (33) shows that we return to the single atom situation for $t \gg \Delta$ when discrete levels are out of the superconducting gap. For $t \simeq \gamma_0 \ll \Delta$

$$\frac{dI}{dV}(\Delta) \simeq \frac{\gamma_0^2 t^4}{\Delta^6} \quad (34)$$

is negligibly small under these conditions.

So varying the parameters of intermediate system (several atoms chain) we theoretically can enhance Andreev conductivity in some limited bias region. But the more general situation is that the Andreev current is suppressed.

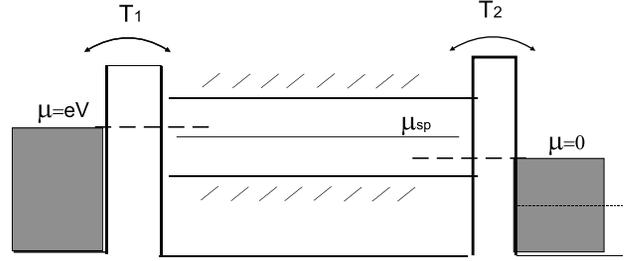


Fig. 3. The NSN structure with superconductor connected only to the two normal leads. The position of the chemical potential of superconductor between chemical potentials of the normal leads is determined by the current conservation law and is not symmetric for different tunneling amplitudes T_1 and T_2

4. NSN JUNCTION

Up to now it was supposed that the chemical potential of superconductor is fixed. For example the superconductor is grounded and relaxation in superconductor is quick enough to fix $\mu = 0$.

In a double junction NSN system we can not set $\mu = 0$ in superconductor. We control only the difference of chemical potentials of the normal contacts by applying some bias. Such system is shown in Fig. 3. Previous consideration shows that the Andreev current is determined only by the difference of chemical potentials of N and S system at a contact. For the energies in the superconductor gap and enough long superconductor this current «does not feel» other contact at the second end of the superconductor. Of course this is seeming uncertainty because of the following. If superconductor is under some external fields, then we have to take into account that superconducting order parameter also changed [11]. In our case the main effect is in changing the phase of Δ . This additional phase changes should be rewritten as additional voltage bias using gauge transformation. Then using the self consistency equations for superconductor these phase changes can in principal be connected with the external bias. But it is known, that this procedure is completely equivalent to the current conservation law. Thus the current conservation condition

$$I_1(eV - \mu) = I_2(\mu),$$

where I_1 and I_2 are the Andreev currents (19) in the left and right junctions, is the condition which determines the value of μ in superconductor. So in the NSN system the current and all properties of intermediate system is also completely determined by the two external baths as in a normal system, but with additional complication connected with indirect procedure of phase determination.

5. CONCLUSION

The microscopic approach of [9] was extended to a more general situation when normal metal in NS one dimensional contact is not supposed to be a reservoir. Normal chain in our calculations is connected to external thermal bath in different ways. This makes it possible to describe the nonequilibrium distribution of electrons in the vicinity of the contact and to determine the dependence of the tunneling characteristics on the method of connecting the normal metal to the external reservoir. So we found that BTK solution for the Andreev current corresponds to spatially spread along the chain weak connection to external thermal bath at each site.

Within our approach we have unified description of the contacts of various types: from direct NS contact to a contact with some normal multilevel system in between the S and N sides. This intermediate system, as we have seen for a single and double level examples, mostly suppresses the Andreev current, although there are some parameter relations that can increase Andreev conductivity in some bias range.

We should like to pay attention to the following. Quasiparticles themselves of course give no contribution to the Andreev current for energies inside the superconducting gap, so the «scattering approach» by BTK is only an indirect method to calculate proximity effect and to describe anomalous parts induced in the normal metal. If we calculate the proximity effect directly using Green's function methods, we see that besides equilibrium contribution to the proximity effect there is also a nonequilibrium part. To our opinion it is less discussed, that proximity effect consists of two contributions and the nonequilibrium contribution is much larger than the equilibrium one. Within microscopic approach based on nonequilibrium diagram technique we see that the Andreev current appears only due to the nonequilibrium proximity effect and is in essence the «induced Josephson current».

This approach can be easily extended to the case of a planar contact. In the mixed representation for Green's functions we can use functions $G_{mn}(p, \omega)$ where p is a momentum along the plane of the contact and m, n are site numbers in perpendicular direction.

The only modification required is to add the momentum integral in all formulas for the current.

Acknowledgements. We are grateful to A.Melnikov, S.Sharov and V.Khrapai for helpfull discussions. The authors thank for support grant RSF 23-22-00289.

REFERENCES

1. K. K. Likharev, Rev. Mod. Phys. **51**, 101 (1979).
2. A. F. Andreev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **46**, 1823 (1964) [Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964)]; Zh. Eksp. Teor. Fiz. **49**, 655 (1966) [Sov. Phys. JETP **22**, 455 (1966)].
3. G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B **25**, 4515 (1982).
4. L. V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1964).
5. C. Caroli, R. Combescot, P. Nozieres et al., J. Phys. C: Solid State Phys. **4**, 916 (1971).
6. K. D. Usadel, Phys. Rev. Lett. **25**, 507 (1970).
7. J. C. Cuevas and M. Fogelstrom, Phys. Rev. B **64**, 104502 (2001).
8. S. Gueron, H. Pothier, N. O. Birge et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 3025 (1996); N. Moussy, H. Courtois, and B. Pannetier, Europhys. Lett. **55**, 861 (2001); H. Courtois, P. Charlat, Ph. Gandit et al., J. Low Temp. Phys. **116**, 187 (1999); P. Dubos, H. Courtois, B. Pannetier et al., Phys. Rev. B **63**, 064502 (2001).
9. C. Cuevas, A. Martin-Rodero, and A. Levy-Yeyati, Phys. Rev. B **54**, 7366 (1996).
10. N.S.Maslova, P.I.Arseev, Sol.St.Comm.,**108**, 717, (1998).
11. P.I.Arseev,S.O. Loiko, N.K. Fedorov, Uspekhi Fizicheskikh Nauk, **176**, 3 (2006) [Physics–Uspekhi **49** (1) (2006)]

ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КЕЛДЫША

Э.З. Кучинский*, М.В. Садовский**

*Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук
620016, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 15 января 2024 г.,
после переработки 15 января 2024 г.
Принята к публикации 1 марта 2024 г.

Рассматривается некоторый класс точно решаемых моделей, описывающих спектральные свойства электрона, движущегося в случайном по времени внешнем поле с разными статистическими характеристиками. Электрон может быть зонным или находиться в квантовых ямах. Известная динамическая модель Келдыша обобщается на случай полей с конечным временем корреляции флуктуаций и на случай ненулевой передаваемой частоты этих флуктуаций. Во всех случаях удается осуществить полное суммирование всех фейнмановских диаграмм для соответствующего ряда теории возмущений для функции Грина. Это удается сделать либо сведением этого ряда к некоторой цепной дроби, либо с использованием обобщенного тождества Уорда, из которого выводятся рекуррентные уравнения для функции Грина. В случае случайного поля с ненулевой передаваемой частотой возникают интересные эффекты модуляции спектральной плотности и плотности состояний.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S004445102407006X

1. ВВЕДЕНИЕ

Будучи выдающимся физиком-экспериментатором, П. Л. Капица иногда уделял внимание и чисто теоретическим проблемам. Хорошо известно предложенное им изящное решение задачи о движении классической частицы в быстро осциллирующем поле [1], где он, по сути дела, описал это движение как движение в случайном поле с соответствующим усреднением по времени. Такие поля и процессы встречаются во многих задачах статистической радиофизики и радиотехники, где им посвящена обширная литература [2, 3]. В квантовой теории также имеется множество задач такого типа.

В данной работе будет рассмотрен некоторый класс точно решаемых квантовомеханических задач, относящихся, в основном, к теории электронов в неупорядоченных системах и квантовых структурах, который является динамическим обобщением так называемой модели Келдыша.

Исходная модель была введена Л.В. Келдышем в его неопубликованной диссертации в 1965 г. [4]. Ча-

стично эти результаты были использованы А.Л. Эфросом в работе [5], посвященной легированным полупроводникам. Подробное изложение разных аспектов этой модели в общем контексте электронной теории неупорядоченных систем было дано в книге [6], где и было введено понятие «модель Келдыша».

В дальнейшем, в литературе были предложены различные модели подобного типа, в частности для описания псевдощели, возникающей при рассеянии электронов на флуктуациях ближнего порядка в одномерных моделях [6–12], которые были обобщены на двумерный случай для описания псевдощели в высокотемпературных сверхпроводниках [13–17].

Динамическое обобщение исходной модели Келдыша для случая рассеяния электрона на случайных *временных* флуктуациях поля было предложено в работе Кикоина и Киселева [18], где рассматривались электроны в квантовых точках. Подробное изложение различных результатов для таких моделей было дано в [19]. Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию и обобщению моделей этого типа как для случая электронов в квантовых точках, так и для зонных электронов в проводниках разных размерностей, находящихся под воздействием динамических случайных полей.

* E-mail: kuchinsk@iep.uran.ru

** E-mail: sadovski@iep.uran.ru

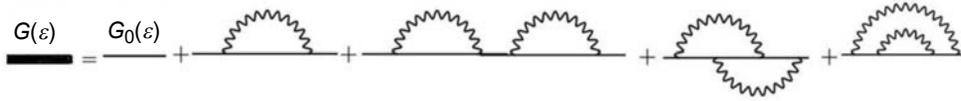


Рис. 1. Диаграммное разложение для функции Грина. Двойная линия соответствует «одетой» функции Грина, волнистая линия соответствует коррелятору гауссова случайного поля

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КЕЛДЫША

Рассматриваемая нами модель была предложена Келдышем в 1965 г. [4] как некий предельный случай в задаче о рассеянии электронов в поле статических случайно расположенных примесей в неупорядоченной системе [6, 20].

Келдыш показал, что одноэлектронная функция Грина в случайном гауссовом поле $V(r)$, рассеивающем «вперед» (т. е. с нулевым передаваемым импульсом, что соответствует предельно большому пространственному масштабу рассеивающих флуктуаций случайного потенциала) и описываемом коррелятором (d – размерность пространства)

$$D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle V(\mathbf{r})V(\mathbf{r}') \rangle = \Delta^2 \rightarrow \rightarrow D(\mathbf{q}) = (2\pi)^d \Delta^2 \delta(\mathbf{q}), \quad (1)$$

может быть найдена точно полным суммированием всех диаграмм фейнмановского ряда. В самом деле, согласно обычным диаграммным правилам в задаче о рассеянии на случайном статическом беспорядке [6, 20], диаграмма порядка N содержит N линий взаимодействия с гауссовым случайным полем (обозначаемых волнистыми линиями), $2N + 1$ сплошных линий, соответствующих гриновским функциям и $2N$ вершин. Полное число диаграмм в данном порядке теории возмущений A_N соответствует полному числу способов, которыми можно соединить $2N$ вершин N линиями взаимодействия, оно равно [6, 21]:

$$A_N = (2N - 1)!! = \frac{(2N - 1)!}{2^{N-1}(N - 1)!}. \quad (2)$$

Диаграммные вклады низших порядков в ряду для одноэлектронной функции Грина показаны на рис. 1. В данной модели все фейнмановские диаграммы в заданном порядке N приводят к одинаковым вкладам в гриновскую функцию, так что полный ряд для нее имеет вид

$$G(E) = G_0(E) \left\{ 1 + \sum_{N=1}^{\infty} (2N - 1)!! G_0^{2N}(E) \Delta^{2N} \right\}. \quad (3)$$

Далее для краткости используем обозначение $E = \epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}}$, где $\epsilon_{\mathbf{p}}$ – спектр свободного электрона,

так что «голая» функция Грина записывается как $G_0(E) = 1/E$. Используя интегральное представление Γ -функции, можем записать

$$(2N - 1)!! = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt t^{2N-2} e^{-t^2/2}, \quad (4)$$

так что запаздывающая функция Грина (после суммирования геометрической прогрессии) может быть записана в виде

$$G^R(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{e^{-V^2/2\Delta^2}}{E - V + i\delta} \quad (5)$$

Это уравнение имеет очевидный и наглядный смысл [6] – электрон распространяется в гауссовом случайном поле однородном по пространству.

Существует и другой способ вывода этого изящного результата, предложенный Келдышем [4] и позднее Эфросом [5], основанный на выводе, с помощью точного тождества Уорда, дифференциального уравнения для функции Грина. Это уравнение имеет вид

$$\Delta^2 \frac{dG(E)}{dE} + EG(E) = 1. \quad (6)$$

Решение этого уравнения с граничным условием $G(E \rightarrow \infty) = 1/E$ немедленно дает (5) [6].

Прямым следствием полученного решения является возникновение гауссова «хвоста» в плотности состояний электрона в области энергий $\epsilon < 0$ [6].

В работах [18, 19] модель Келдыша была переформулирована для случая рассеяния электрона на предельно медленных *временных* флуктуациях случайного потенциала. Соответствующая динамическая модель Келдыша может быть обобщена также и для случая рассеяния на многокомпонентных гауссовых немарковских случайных полях [19].

В качестве примера, следуя [18, 19], рассмотрим электрон в одиночной квантовой яме (точке), которая образована соответствующим удерживающим потенциалом, как показано на рис. 2.

Затвор создает внешний шум, который медленно меняет удерживающий потенциал ямы.

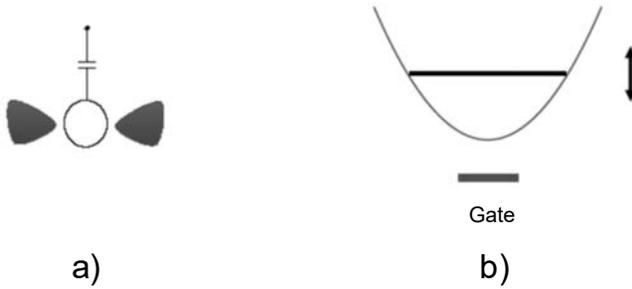


Рис. 2. *a* — Одиночная квантовая точка, на которой создается шум за счет внешних электродов (затвора), *b* — соответствующая квантовая яма с флуктуирующим уровнем

Одночастичный гамильтониан для этой задачи имеет вид

$$H = [\epsilon_0 + V(t)] n, \quad (7)$$

где $n = c^\dagger c$, а c^\dagger , c есть операторы рождения и уничтожения электрона на уровне в яме. Для простоты рассматриваются бесспиновые (спин-поляризованные) электроны. Классический случайный по времени (гауссов) потенциал $V(t)$ определяется своим средним значением и парной корреляционной функцией

$$\langle V(t) \rangle = 0, \quad \langle V(t)V(t') \rangle = D(t-t'). \quad (8)$$

Для этой функции принимаем вид

$$D(t-t') = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|}, \quad (9)$$

где $\gamma = 1/\tau$, τ определяется характерное время корреляции флуктуаций потенциала, а Δ — амплитуда шума. Можно рассмотреть два предельных случая:

$$\gamma \rightarrow \infty: \quad D(t-t') \rightarrow \Delta^2 \delta(t-t'), \quad (10)$$

$$\gamma \rightarrow 0: \quad D(\omega) \rightarrow 2\pi\Delta^2 \delta(\omega). \quad (11)$$

Здесь $D(\omega)$ — фурье-образ $D(t-t')$. Первый случай соответствует максимально «быстрому» шуму («белый» шум) и соответствует марковскому случайному процессу. Второй случай соответствует медленному шуму, а модель Келдыша представляет собой наиболее медленную его реализацию с (бесконечно) большим временем корреляции флуктуаций (предельно немарковский процесс).

Одноэлектронная (запаздывающая) функция Грина электрона в яме для заданной реализации потенциала есть

$$G^R(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 - V + i\delta}, \quad (12)$$

где ϵ_0 — энергия уровня в яме, а усреднение по времени опять сводится к взятию гауссова интеграла от этого выражения с функцией распределения $P(V) = 1/\sqrt{2\pi\Delta^2} \exp(-V^2/(2\Delta^2))$:

$$G^R(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{e^{-V^2/2\Delta^2}}{\epsilon - \epsilon_0 - V + i\delta}. \quad (13)$$

Аналогично можно рассмотреть электрон не в яме, а в зоне системы (система в «конденсаторе», на обкладках которого создается случайный шум) произвольной размерности. Для этого достаточно сделать замену $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_{\mathbf{p}}$, где $\epsilon_{\mathbf{p}}$ — зонный спектр электрона с квазиимпульсом \mathbf{p} .

Модель с одной ямой достаточно легко обобщается на случай нескольких ям [18, 19], что приводит к модели Келдыша с многокомпонентным шумом. В частности, большой интерес представляет модель двух квантовых ям, которая оказывается (в ее зонном варианте) тесно связанной с точно решаемой моделью псевдощелевого состояния [7–12]. Однако ниже мы будем рассматривать только модель с одной ямой, оставляя рассмотрение двухъямного случая (псевдощелевых флуктуаций) для отдельной работы.

3. МОДЕЛЬ КЕЛДЫША И ФЛУКТУАЦИИ С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ КОРРЕЛЯЦИЙ

В данной работе мы покажем, что точное решение для одноэлектронной функции Грина может быть получено и для модели Келдыша с конечным временем корреляции флуктуации $\tau = \gamma^{-1}$. Это решение легко получается применением метода, предложенного одним из авторов в работе [11], где рассматривалась модель псевдощели в одномерных системах.

Фурье-образ (9), который соответствует на диаграммах линиям взаимодействия, может быть записан как

$$D(\omega) = 2\pi\Delta^2 \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} = 2\pi\Delta^2 \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega + i\gamma)(\omega - i\gamma)}. \quad (14)$$

При $\gamma \rightarrow 0$ это естественно сводится ко второму выражению в (11). Попробуем разобраться, как вычисляется вклад диаграммы произвольного порядка. Фактически, эту задачу можно решить точно. В качестве примера на рис. 3 приведены некоторые типичные диаграммы третьего порядка. Мы можем

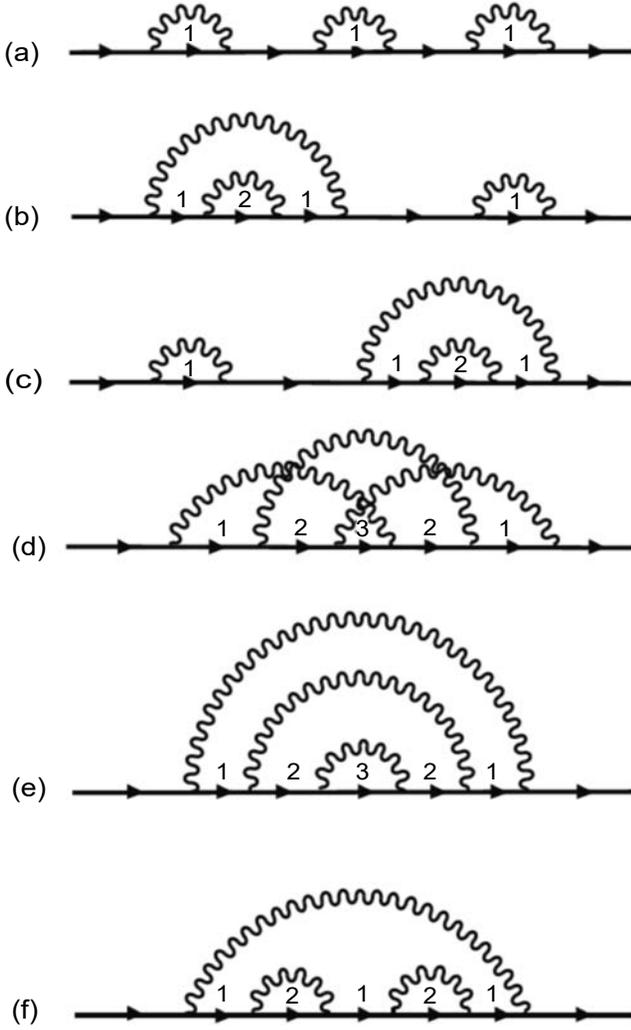


Рис. 3. Типичные диаграммы третьего порядка

без труда рассчитать вклад произвольной диаграммы, поскольку можем гарантировать, что ненулевой вклад в интегралы (по передаваемой частоте) возникает только от полюсов лоренцианов¹⁾ $D(\omega)$. Например, элементарные вычисления показывают, что вклад диаграммы рис. 3 d в запаздывающую функцию Грина имеет вид

$$\Delta^6 \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 + i\gamma} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 + 2i\gamma} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 + 3i\gamma} \times \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 + 2i\gamma} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 + i\gamma} \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0}. \quad (15)$$

¹⁾ В задаче, рассматривавшейся в [11], это утверждение является приближенным [21]. Здесь все вычисления (интегрирования по частотам) проводятся точно.

Вклады произвольных диаграмм вполне аналогичны: числа k , выписанные над электронными линиями на рис. 3, указывают на то, сколько раз член типа $i\gamma$ возникает в соответствующем знаменателе. Заметим, что вклад диаграммы с перекрещивающимися линиями взаимодействия на рис. 3 d в точности равен вкладу диаграммы без пересечений, показанной на рис. 3 e. Это является проявлением общего свойства — вклад любой диаграммы с перекрещивающимися линиями взаимодействия равен вкладу некоторой диаграммы без пересечений [11]. Именно это обстоятельство и позволяет предложить точный алгоритм суммирования всего фейнмановского ряда.

Подробно комбинаторика диаграмм и правила сведения диаграмм с пересекающимися линиями взаимодействия к непересекающимся были рассмотрены в работе [11] (см. также [6])²⁾. Можно убедиться, что число неприводимых диаграмм для собственно-энергетической части, равных заданной диаграмме без пересечений линий взаимодействия, равно произведению некоторых комбинаторных множителей $v(k)$ (k есть число вкладов $i\gamma$ в знаменателе функции Грина, находящейся под k линиями взаимодействия в диаграмме без пересечений), которые соответствуют последовательным линиям взаимодействия данной диаграммы. Соответственно, все дальнейшие рассуждения можно вести в терминах диаграмм без пересечений линий взаимодействия, линиям взаимодействия которых приписаны дополнительные множители $v(k)$. В данном случае эти множители $v(k) = k$ [11].

Тогда без труда выводится рекуррентное уравнение, определяющее неприводимую собственно-энергетическую часть, включающую все диаграммы соответствующего фейнмановского ряда [6, 11]:

$$\Sigma_k(\epsilon, \epsilon_0) = \frac{\Delta^2 v(k)}{\epsilon - \epsilon_0 + ik\gamma - \Sigma_{k+1}(\epsilon, \epsilon_0)}, \quad (16)$$

$$v(k) = k.$$

Отсюда сразу же получается рекуррентное уравнение и для самой функции Грина:

$$G_k(\epsilon, \epsilon_0) = \{\epsilon - \epsilon_0 + ik\gamma - \Delta^2 v(k+1)G_{k+1}(\epsilon, \epsilon_0)\}^{-1}, \quad (17)$$

причем физическая функция Грина определяется как $G(\epsilon, \epsilon_0) \equiv G_{k=0}(\epsilon, \epsilon_0)$, что эквивалентно полной сумме всего фейнмановского диаграммного ряда для рассматриваемой модели. Фактически, эти

²⁾ В рассматриваемой задаче комбинаторика диаграмм сводится к соизмеримому случаю из работы [11].

рекуррентные уравнения дают представление одноэлектронной функции Грина в виде следующей *цепной дроби*:

$$G(\epsilon, \epsilon_0) = \frac{1}{\epsilon - \epsilon_0 - \frac{\Delta^2}{\epsilon - \epsilon_0 + i\gamma - \frac{2\Delta^2}{\epsilon - \epsilon_0 + 2i\gamma - \frac{3\Delta^2}{\epsilon - \epsilon_0 + 3i\gamma - \dots}}}} \quad (18)$$

Символически, наше рекуррентное уравнение может быть представлено в виде «уравнения Дайсона», показанного графически на рис. 4.

При $\gamma = 0$ мы можем воспользоваться известным представлением неполной (верхней) Γ -функции в виде цепной дроби

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty dt e^{-t} t^{\alpha-1} = \frac{x^\alpha}{x + \frac{1-\alpha}{x + \frac{1}{1+\dots}}} \quad (19)$$

чтобы убедиться, что (18) воспроизводит полученный выше точный результат суммирования всех диаграмм (13).

4. ФЛУКТУАЦИИ С КОНЕЧНОЙ ПЕРЕДАВАЕМОЙ ЧАСТОТОЙ И КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ КОРРЕЛЯЦИЙ

Рассмотрим теперь более общий случай флуктуаций с конечной характерной частотой ω_0 . Снова будем рассматривать классический случайный по времени гауссов потенциал $V(t)$ (8) с парной корреляционной функцией:

$$D(t-t') = \Delta^2 e^{-\gamma|t-t'|} \cos[\omega_0(t-t')] = \frac{\Delta^2}{2} e^{-\gamma|t-t'|} \left[e^{i\omega_0(t-t')} + e^{-i\omega_0(t-t')} \right]. \quad (20)$$

При $\omega_0 = 0$ получаем коррелятор (9) и рассмотренную выше модель с нулевой передаваемой частотой.

Фурье-образ коррелятора (20) имеет вид

$$D(\omega) = 2\pi \frac{\Delta^2}{2} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega + \omega_0)^2 + \gamma^2} \right]. \quad (21)$$

Таким образом, в диаграммной технике получаем два вида линий взаимодействия — волнистую и штриховую, передающие частоты $+\omega_0$ и $-\omega_0$ соответственно. Обе линии взаимодействия приводят

также к добавлению $i\gamma$ к энергии ϵ в каждой электронной функции Грина, оказавшейся под линией взаимодействия. На рис. 5 приведены типичные диаграммы второго порядка. Как легко видеть, в данной модели вклад диаграммы с перекрещивающимися линиями взаимодействия не обязательно совпадает с вкладом некой диаграммы без такого пересечения. Тем не менее точное решение для одноэлектронной функции Грина и в такой модели удастся получить с использованием обобщенного тождества Уорда.

4.1. Обобщенное тождество Уорда и рекуррентные уравнения для функции Грина

Одноэлектронная функция Грина G может быть легко определена через полную двухчастичную функцию Φ :

$$G(\epsilon) = G_0(\epsilon) + G_0(\epsilon) \frac{\Delta^2}{2} \left\{ \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega_0) + \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(-\omega_0) \right\}. \quad (22)$$

Здесь Φ — полная двухчастичная функция Грина, включающая в себя четыре внешние электронные линии и вклад, соответствующий произведению двух «одетых» одночастичных функций Грина G . Чтобы не загромождать дальнейший анализ, проведем замену $\epsilon - \epsilon_0 \rightarrow \epsilon$, т.е. будем считать, что энергия у нас отсчитывается от энергии уровня в яме ϵ_0 , тогда $G_0(\epsilon) = 1/\epsilon$. Диаграммное представление уравнения (22) для функции Грина приведено на рис. 6.

Для нахождения двухчастичных функций Грина Φ , входящих в (22), воспользуемся обобщенным тождеством Уорда [22], которое в нашей чисто динамической модели принимает вид

$$G(\epsilon + \omega) - G(\epsilon) = - \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega) \{ G_0^{-1}(\epsilon' + \omega) - G_0^{-1}(\epsilon') \}. \quad (23)$$

Множитель в фигурных скобках

$$G_0^{-1}(\epsilon' + \omega) - G_0^{-1}(\epsilon') = \epsilon' + \omega - \epsilon' = \omega$$

не зависит от ϵ' , поэтому сразу получаем

$$\sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega) = - \frac{G(\epsilon + \omega) - G(\epsilon)}{\omega}. \quad (24)$$

В данной задаче любая линия взаимодействия также добавляет $i\gamma$ к энергии электронных линий,

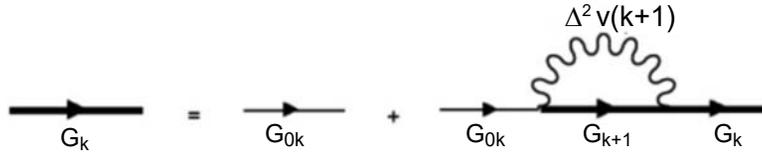


Рис. 4. Представление рекуррентного уравнения для функции Грина в виде «уравнения Дайсона». Здесь введена $G_{0k} = [\epsilon - \epsilon_0 + ik\gamma]^{-1}$

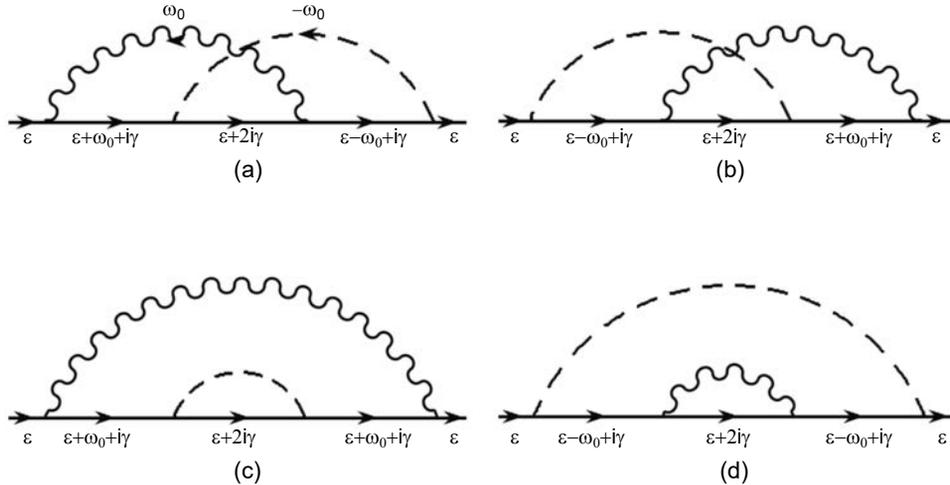


Рис. 5. Типичные диаграммы второго порядка

находящихся под ней, т.е. эффективно наши линии взаимодействия передают комплексную частоту $\pm\omega_0 + i\gamma$. Тогда тождество Уорда (23) для вершины с $+\omega_0$ принимает вид

$$G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma) - G(\epsilon) = - \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega_0)(\epsilon' + \omega_0 + (k+1)i\gamma - (\epsilon' + ki\gamma)) = -(\omega_0 + i\gamma) \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega_0). \quad (25)$$

В результате, для двухчастичной функции Грина с вершиной с $+\omega_0$ получаем

$$\sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega_0) = - \frac{G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma) - G(\epsilon)}{\omega_0 + i\gamma}. \quad (26)$$

Аналогичным образом для Φ с вершиной с $-\omega_0$ получаем

$$\sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(-\omega_0) = - \frac{G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma) - G(\epsilon)}{-\omega_0 + i\gamma}. \quad (27)$$

Подставляя полученные двухчастичные функции (26) и (27) в уравнение (22), получаем функциональное уравнение для функции Грина:

$$G(\epsilon) = G_0(\epsilon) - G_0(\epsilon) \frac{\Delta^2}{2} \times \left\{ \frac{G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma) - G(\epsilon)}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma) - G(\epsilon)}{-\omega_0 + i\gamma} \right\}, \quad (28)$$

так что

$$G(\epsilon) = \frac{1 - \frac{\Delta^2}{2} \left[\frac{G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma)}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma)}{-\omega_0 + i\gamma} \right]}{G_0^{-1}(\epsilon) + \Delta^2 \frac{i\gamma}{\omega_0^2 + \gamma^2}}. \quad (29)$$

Необходимо отметить, что с использованием обобщенного тождества Уорда (23) удастся точно решить (свести к интегральному уравнению) задачу нахождения одночастичной функции Грина $G(\epsilon)$ электрона в случайном гауссовом потенциале с

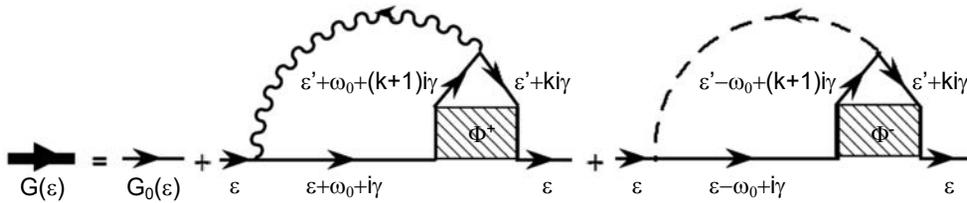


Рис. 6. Диаграммное представление уравнения для функции Грина

произвольным коррелятором $D(\omega)$. Уравнение для функции Грина в этом случае имеет вид

$$G(\epsilon) = G_0(\epsilon) + G_0(\epsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} D(\omega) \sum_{\epsilon'} \Phi_{\epsilon\epsilon'}(\omega). \quad (30)$$

С использованием тождества Уорда (23) сразу получаем (24) и интегральное уравнение для функции Грина:

$$G(\epsilon) = G_0(\epsilon) - G_0(\epsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} D(\omega) \frac{G(\epsilon + \omega) - G(\epsilon)}{\omega}. \quad (31)$$

Если в качестве $D(\omega)$ использовать коррелятор (21), то интеграл по частоте легко берется. Второй множитель в подынтегральном выражении не содержит полюса при $\omega = 0$, а также является аналитичным в верхней полуплоскости комплексной ω , поэтому, замыкая контур сверху, мы имеем вклад в интеграл лишь от полюсов $\omega = \pm\omega_0 + i\gamma$ двух лоренцианов в (21) и сразу получаем (28), а значит, и функциональное уравнение (29).

Решая уравнение (29) итерациями, используя в качестве начального приближения

$$\tilde{G}_0(\epsilon) = \frac{1}{G_0^{-1}(\epsilon) + \Delta^2 \frac{i\gamma}{\omega_0^2 + \gamma^2}}, \quad (32)$$

легко убедиться, что на каждой итерации к энергии (кроме $\pm\omega_0$) добавляется очередной вклад $i\gamma$. Поэтому можно ввести обозначения

$$G_n(\epsilon) \equiv G(\epsilon + ni\gamma), \\ G_{0n}(\epsilon) \equiv G_0(\epsilon + ni\gamma) = \frac{1}{\epsilon + ni\gamma}, \quad (33)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ и применить уравнение (29) для энергии $\epsilon + ni\gamma$, сделав замену $\epsilon \rightarrow \epsilon + ni\gamma$. Тогда в

обозначениях (33) уравнение (29) принимает вид³⁾

$$G_n(\epsilon) = \frac{1 - \frac{\Delta^2}{2} \left[\frac{G_{n+1}(\epsilon + \omega_0)}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{G_{n+1}(\epsilon - \omega_0)}{-\omega_0 + i\gamma} \right]}{G_{0n}^{-1}(\epsilon) + \Delta^2 \frac{i\gamma}{\omega_0^2 + \gamma^2}}. \quad (34)$$

В результате, получаем рекуррентную процедуру, на каждом «этаже» n которой G_n зависит лишь от вещественной энергии. Численная реализация такой процедуры достаточно проста. На некотором высоком «этаже» $n = N \gg 1$ задаем массив значений $G_N(\epsilon)$, например $G_N(\epsilon) = 0$. По нему с помощью (34) и интерполяции находим массив значений $G_{N-1}(\epsilon)$ и т. д., пока не придем к физической $G(\epsilon) = G_{n=0}(\epsilon)$.

При $\omega_0 = 0$ мы возвращаемся к описанной выше модели с нулевой передаваемой частотой и конечным временем корреляций. В этом пределе рекуррентное уравнение (34) принимает вид

$$G_n(\epsilon) = \frac{1 + i\frac{\Delta^2}{\gamma} G_{n+1}(\epsilon)}{G_{0n}^{-1}(\epsilon) + i\frac{\Delta^2}{\gamma}}. \quad (35)$$

Внешне рекуррентная процедура (35) не имеет ничего общего с процедурой (17), приводящей к представлению G в виде цепной дроби (18). Однако прямой численный счет показывает, что они дают абсолютно совпадающие результаты для физической функции Грина $G_{n=0}(\epsilon)$ (в пределе стартового «этажа» $N \rightarrow \infty$).

При $\gamma = 0$ в пределе $\omega_0 \rightarrow 0$ уравнение (28) сразу же приводит к дифференциальному уравнению (6) для функции Грина в обычной модели Келдыша, поскольку

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{G(\epsilon + \omega_0) - G(\epsilon)}{\omega_0} = \\ = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{G(\epsilon - \omega_0) - G(\epsilon)}{-\omega_0} = \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon}.$$

³⁾ Естественно, уравнение (34) можно получить и непосредственно из подхода с использованием обобщенного тождества Уорда, описанного выше, применив его для энергии $\epsilon + ni\gamma$.

Функция Грина $G(\epsilon)$ аналитична в верхней полуплоскости комплексной энергии ϵ и производная $dG(\epsilon)/d\epsilon$ дает одинаковый результат по разным направлениям $d\epsilon$ в этой полуплоскости. Поэтому при другом предельном переходе $\omega_0 = 0$, $\gamma \rightarrow 0$ из (28) также сразу получаем дифференциальное уравнение (6). Действительно, аналитичность функции Грина позволяет записать ее (в верхней полуплоскости ϵ) в виде

$$G(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \frac{\rho(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon'}, \quad (36)$$

где

$$\rho(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G(\epsilon)$$

— спектральная плотность (плотность состояний квантовой точки). Тогда в этом пределе в уравнении (28) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{G(\epsilon + i\gamma) - G(\epsilon)}{i\gamma} &= \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{i\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \rho(\epsilon') \left[\frac{1}{\epsilon + i\gamma - \epsilon'} - \frac{1}{\epsilon - \epsilon'} \right] = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \frac{\rho(\epsilon')}{(\epsilon - \epsilon')^2} = \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon}. \end{aligned} \quad (37)$$

Аналитические свойства (36) функции Грина позволяют свести функциональное уравнение (29) к интегральному уравнению для спектральной плотности $\rho(\epsilon)$. Перепишем функциональное уравнение (29) в виде

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \tilde{G}_0(\epsilon) - \tilde{G}_0(\epsilon) \frac{\Delta^2}{2} \times \\ &\times \left[\frac{G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma)}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma)}{-\omega_0 + i\gamma} \right], \end{aligned} \quad (38)$$

где $\tilde{G}_0(\epsilon)$, определяемую (32), можно записать в виде

$$\tilde{G}_0(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon + i\Gamma}. \quad (39)$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{\Delta^2 \gamma}{\omega_0^2 + \gamma^2} \quad (40)$$

— эффективное непертурбативное затухание, вызываемое случайным полем. Тогда для спектральной плотности сразу получаем

$$\begin{aligned} \rho(\epsilon) &= \tilde{\rho}_0(\epsilon) + \frac{\Delta^2}{2\pi} \times \\ &\times \text{Im} \left\{ \tilde{G}_0(\epsilon) \left[\frac{G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma)}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma)}{-\omega_0 + i\gamma} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\tilde{\rho}_0(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } \tilde{G}_0(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{\epsilon^2 + \Gamma^2}$$

— эффективная затравочная спектральная плотность (плотность состояний). Уравнение (41) легко численно решается итерациями, стартуя с начального приближения $\rho(\epsilon) = \tilde{\rho}_0(\epsilon)$.

4.2. Точное решение для функции Грина в виде бесконечного ряда

Уравнение (38) можно решать итерациями, стартуя с $\tilde{G}_0(\epsilon)$. Если результат каждой итерации раскладывать на простые дроби (избавляясь от ϵ в коэффициентах), то нетрудно убедиться, что функция Грина G представляется в виде суммы $\tilde{G}_0(\epsilon + (n - m)\omega_0 + (n + m)i\gamma)$, где n, m — целые числа с коэффициентами, не зависящими от ϵ . Таким образом, функцию Грина надо искать в виде

$$G(\epsilon) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{\epsilon + (n - m)\omega_0 + (n + m)i\gamma + i\Gamma}, \quad (42)$$

где коэффициенты A_{nm} от ϵ не зависят, и их можно найти, подставляя (42) в (38). Тогда имеем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(\epsilon)G(\epsilon + \omega_0 + i\gamma) &= \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{\epsilon + i\Gamma} \frac{1}{\epsilon + i\Gamma + (n + 1 - m)\omega_0 + (n + 1 + m)i\gamma} = \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{(n + 1)(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\epsilon + i\Gamma} - \frac{1}{\epsilon + i\Gamma + (n + 1)(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} \right], \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0(\epsilon)G(\epsilon - \omega_0 + i\gamma) &= \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{n(\omega_0 + i\gamma) + (m + 1)(-\omega_0 + i\gamma)} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\epsilon + i\Gamma} - \frac{1}{\epsilon + i\Gamma + n(\omega_0 + i\gamma) + (m + 1)(-\omega_0 + i\gamma)} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Подставляя (43), (44) в (38), для коэффициента A_{00} при $\frac{1}{\epsilon + i\Gamma}$ получаем:

$$\begin{aligned} A_{00} &= 1 - \frac{\Delta^2}{2} \times \\ &\times \left[\frac{1}{\omega_0 + i\gamma} \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{(n + 1)(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{-\omega_0 + i\gamma} \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \frac{1}{n(\omega_0 + i\gamma) + (m + 1)(-\omega_0 + i\gamma)} \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Для других коэффициентов имеем

$$A_{nm} = \frac{\Delta^2}{2} \frac{1}{n(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} \times \left[\frac{A_{n-1m}}{\omega_0 + i\gamma} + \frac{A_{nm-1}}{-\omega_0 + i\gamma} \right]. \quad (46)$$

Естественно $A_{-1m} = A_{n-1} = 0$.

Соотношение (46) позволяет получить весь набор коэффициентов на «этаже» $n_f = n + m$ по коэффициентам на «этаже» $n_f - 1$, а значит, в итоге выразить все коэффициенты через A_{00} . Коэффициенты, полученные на нескольких нижних «этажах», позволяют предположить, что коэффициенты имеют следующий вид:

$$A_{nm} = \frac{A_{00}}{n!m!} \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)^{n+m} \times \frac{1}{(\omega_0 + i\gamma)^{2n}(-\omega_0 + i\gamma)^{2m}}. \quad (47)$$

Подстановка коэффициентов A_{nm} из (47) в уравнение (46) подтверждает предположение.

Теперь, используя (45), можно найти A_{00} :

$$A_{00} = 1 - \frac{\Delta^2}{2} \times \left[\frac{1}{\omega_0 + i\gamma} \sum_{n=1, m=0}^{\infty} A_{n-1m} \frac{1}{n(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} + \frac{1}{-\omega_0 + i\gamma} \sum_{n=0, m=1}^{\infty} A_{nm-1} \frac{1}{n(\omega_0 + i\gamma) + m(-\omega_0 + i\gamma)} \right]. \quad (48)$$

Используя (46) и (47), получаем

$$A_{00} = 1 - \sum_{\substack{n, m \\ n+m \neq 0}} A_{nm} = 1 - \sum_{\substack{n, m \\ n+m \neq 0}} \frac{A_{00}}{n!m!} \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)^{n+m} \frac{1}{(\omega_0 + i\gamma)^{2n}(-\omega_0 + i\gamma)^{2m}}. \quad (49)$$

Окончательно A_{00} имеет вид

$$A_{00} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)^n \frac{1}{(\omega_0 + i\gamma)^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)^m \frac{1}{(-\omega_0 + i\gamma)^{2m}}} = \exp \left\{ -\frac{\Delta^2}{2(\omega_0 + i\gamma)^2} \right\} \exp \left\{ -\frac{\Delta^2}{2(-\omega_0 + i\gamma)^2} \right\} = \exp \left\{ -\frac{\Delta^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}{(\omega_0^2 + \gamma^2)^2} \right\}. \quad (50)$$

В результате, для функции Грина (42) получаем

$$G(\epsilon) = \exp \left\{ -\frac{\Delta^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}{(\omega_0^2 + \gamma^2)^2} \right\} \times \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \frac{1}{(\omega_0 + i\gamma)^{2n}(-\omega_0 + i\gamma)^{2m}} \times \left(\frac{\Delta^2}{2} \right)^{n+m} \frac{1}{\epsilon + (n-m)\omega_0 + (n+m)i\gamma + i\Gamma}. \quad (51)$$

Кратко рассмотрим предельное поведение функции Грина и соответствующей ей спектральной плотности $\rho(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G(\epsilon)$, следующее из (51).

В пределе $\gamma \rightarrow 0$ получаем

$$G(\epsilon) = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^{n+m} \times \frac{1}{\epsilon + (n-m)\omega_0 + i\delta}, \quad (52)$$

а спектральная плотность имеет вид

$$\rho(\epsilon) = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^{n+m} \delta(\epsilon + (n-m)\omega_0) \quad (53)$$

и представляет из себя совокупность δ пиков при $\epsilon = \pm k\omega_0$. Веса этих пиков (коэффициент перед соответствующей δ -функцией) имеют вид

$$S^{(+k)} = S^{(-k)} = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+k)!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^{2n+k} = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} I_k \left(\frac{\Delta^2}{\omega_0^2} \right), \quad (54)$$

где I_k — модифицированная (мнимого аргумента) функция Бесселя. Суммарная площадь всех пиков равна

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^{(k)} = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^{n+m} = e^{-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\Delta^2}{2\omega_0^2} \right)^m = 1, \quad (55)$$

как и должно быть.

В пределе $\omega_0 \rightarrow 0$ мы возвращаемся к рассмотренной выше модели флуктуации с конечным временем корреляций и из (51) получаем

$$G(\epsilon) = e^{\frac{\Delta^2}{\gamma^2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \left(-\frac{\Delta^2}{2\gamma^2} \right)^{n+m} \frac{1}{\epsilon + (n+m)i\gamma + i\frac{\Delta^2}{\gamma}} = e^{\frac{\Delta^2}{\gamma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^k \frac{1}{n!(k-n)!} \right] \left(-\frac{\Delta^2}{2\gamma^2} \right)^k \frac{1}{\epsilon + ki\gamma + i\frac{\Delta^2}{\gamma}}. \quad (56)$$

Поскольку

$$\sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} = 2^k,$$

для функции Грина получаем

$$G(\epsilon) = e^{\frac{\Delta^2}{\gamma^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\Delta^2}{\gamma^2}\right)^k \frac{1}{\epsilon + ki\gamma + i\frac{\Delta^2}{\gamma}} = \quad (57)$$

$$= e^{\frac{\Delta^2}{\gamma^2}} \frac{1}{i\gamma} \left(\frac{\Delta^2}{\gamma^2}\right)^{-\left(\frac{\epsilon}{i\gamma} + \frac{\Delta^2}{\gamma^2}\right)} \gamma \left(\frac{\epsilon}{i\gamma} + \frac{\Delta^2}{\gamma^2}, \frac{\Delta^2}{\gamma^2}\right), \quad (58)$$

где

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x dt e^{-t} t^{\alpha-1} \quad (59)$$

— неполная (нижняя) Γ -функция. Выражения (57) и (58) могут служить представлением в виде ряда и интегральным представлением для цепной дроби (18).

Рассмотренная выше задача об электроны в гауссовом поле динамических флуктуаций с конечным временем корреляций оказывается тесно связанной с задачей о холстейновском поляроне в полупроводниках с малой электронной подвижностью, т. е. задаче нахождения одноэлектронной функции Грина в модели Холстейна [23] для электрона, взаимодействующего с оптической фононной модой с частотой Ω , в пределе, когда интеграл переноса на ближайших соседей $t \rightarrow 0$ ($t \ll \Omega$). Обычно такую задачу анализируют применяя к гамильтониану Холстейна [23] каноническое преобразование Ланга–Фирсова [24]. Однако диаграммная техника теории возмущений по электрон-фононному взаимодействию в такой модели полностью эквивалентна диаграммной технике нашей модели динамических флуктуации с конечным временем корреляций с учетом замены

$$\Delta \rightarrow g \quad i\gamma \rightarrow -\Omega, \quad (60)$$

где g — константа электрон-фононного взаимодействия. В такой диаграммной технике в знаменателе электронных функций Грина под линиями взаимодействия накапливается не $i\gamma$, а $-\Omega$, поскольку из двух слагаемых фононного пропагатора

$$D(\omega) = \frac{1}{\omega - \Omega + i\delta} - \frac{1}{\omega + \Omega - i\delta} \quad (61)$$

вклад в интеграл по частотам дает только первое слагаемое, вследствие того, что все электронные функции Грина в данной задаче являются запаздывающими.

Таким образом, функция Грина полярона Холстейна (при $t \rightarrow 0$) определяется цепной дробью (18)

с учетом замены (60). Впервые функция Грина полярона Холстейна в таком виде была получена в работе [25]. Полученное нами представление в виде ряда (57) функции Грина модели динамических флуктуации с конечным временем корреляций позволяет сразу (с учетом замены (60)) получить известный точный результат для функции Грина полярона Холстейна [24, 25]:

$$G(\epsilon) = e^{-\frac{g^2}{\Omega^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{g^2}{\Omega^2}\right)^k \frac{1}{\epsilon - k\Omega + \frac{g^2}{\Omega} + i\delta}. \quad (62)$$

Отметим, что использование нами тождества Уорда в некотором смысле эквивалентно преобразованию Ланга–Фирсова в задаче о поляроне Холстейна. Возникающая вследствие использования тождества Уорда эффективная затравочная функция Грина (39) с эффективным непertурбативным затуханием (40), которая в модели с $\omega_0 = 0$ имеет вид

$$\tilde{G}_0(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon + i\frac{\Delta^2}{\gamma}}, \quad (63)$$

в задаче о поляроне Холстейна после замены (60) принимает вид

$$\tilde{G}_0(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon + \frac{g^2}{\Omega} + i\delta}, \quad (64)$$

возникающей после преобразования Ланга–Фирсова эффективной затравочной функции Грина полярона с непertурбативным поляронным смещением основного состояния [24, 25]

$$\epsilon_0 = -\frac{g^2}{\Omega}$$

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Фактически для наиболее общей модели флуктуаций с конечными частотой и временем корреляций мы имеем три точных численных метода для нахождения функции Грина:

1. рекуррентная процедура (34);
2. интегральное уравнение для нахождения спектральной плотности (41);
3. представление в виде ряда (51).

Для широкой области параметров (Δ , γ , ω_0) модели численные расчеты показали, что все три процедуры дают абсолютно одинаковый результат для спектральной плотности (плотности состояний).

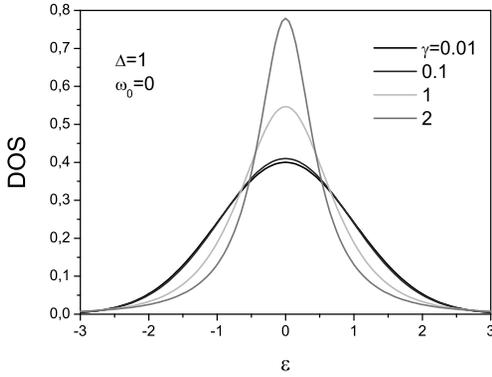


Рис. 7. Спектральная плотность (плотность состояний квантовой точки) в модели с конечным временем корреляций ($\omega_0 = 0$) при различных γ

Самой быстрой при численном анализе является рекуррентная процедура (34), однако при малых $\gamma \ll \Delta, \omega_0$ и $\omega_0 < 0.3\Delta$ она требует существенного роста как числа энергий в массиве, так и величины «этажа», с которого стартует эта процедура, а представление в виде ряда (51) в этой области параметров сходится хорошо. Однако представление в виде ряда не годится для прямого численного анализа области $\Delta \gg \gamma > \omega_0$, что связано как с большой величиной экспоненты перед рядом, так и большого числа членов ряда, которые надо учесть для компенсации этой экспоненты.

Перейдем к представлению численных результатов. На рис. 7 продемонстрирована эволюция спектральной плотности с ростом γ (т.е. с уменьшением характерного времени корреляций) в модели с $\omega_0 = 0$. При $\gamma = 0$ (в обычной модели Келдыша) спектральная плотность — гауссова с шириной Δ (дисперсия Δ^2). Рост γ приводит к эффективно уменьшению характерной ширины спектральной плотности с соответствующим ростом $\rho(0)$.

На рис. 8 приведены спектральные плотности (плотности состояний квантовой точки) в модели с конечной передаваемой частотой при $\Delta = 1$ и различных ω_0 и γ . Видим, что во всех случаях при малых γ наблюдаются существенные модуляции спектральной плотности с частотой ω_0 — пики в спектральной плотности на энергиях $\epsilon = \pm n\omega_0$, где n — целое. Высота пиков снижается с ростом n , и при $\epsilon > 3\Delta$ пики уже практически не видны. Рост γ приводит к снижению высоты пиков и, начиная с некоторых значений γ , модуляции с частотой ω_0 перестают наблюдаться. Дальнейший рост γ лишь несколько сужает гауссоподобную спектральную плотность, аналогично тому, как это наблю-

дается на рис. 7 для модели с $\omega_0 = 0$. При достаточно больших γ , при которых модуляции спектральной плотности с частотой ω_0 не наблюдается, и рост ω_0 достаточно слабо влияет на спектральную плотность (см. рис. 8 f), можно использовать более простую модель с $\omega_0 = 0$. Отметим, что область значений γ , для которых наблюдаются модуляции спектральной плотности, зависит от величины ω_0 . В частности, при $\omega_0 = 0.1$ (рис. 8 a) модуляции наблюдаются лишь при $\gamma = 0.0001$, а при $\omega_0 = 0.5$ (рис. 8 c) модуляции видны уже при $\gamma = 0.05$.

Как уже отмечалось выше, нетрудно обобщить нашу модель и рассмотреть не одну квантовую точку в динамическом гауссовом случайном поле, а d -мерную кристаллическую решетку (параметр решетки далее принимаем за единицу $a \equiv 1$) с интегралом переноса t между ближайшими соседями, помещенную в конденсатор, обкладки которого создают динамическое случайное поле, одинаковое для всех узлов решетки. Поскольку поле постоянно в пространстве, то импульс в процессе рассеяния на этом поле не изменяется и учет перескоков между узлами сводится к замене $\epsilon \rightarrow \epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}}$, где $\epsilon_{\mathbf{p}}$ — зонный спектр электрона с квазиимпульсом \mathbf{p} . В такой модели функция Грина имеет вид

$$G(\epsilon, \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \frac{\rho(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon' + i\delta}, \quad (65)$$

где $\rho(\epsilon)$ — уже полученная нами спектральная плотность (плотность состояний) в задаче с одной квантовой точкой. Тогда для плотности состояний d -мерной системы в динамическом случайном поле получаем

$$N_d(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{\mathbf{p}} G(\epsilon, \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi N_{0d}(\xi) \rho(\epsilon - \xi), \quad (66)$$

где

$$N_{0d}(\xi) = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\xi - \epsilon_{\mathbf{p}})$$

— «затравочная» плотность состояний d -мерной системы в отсутствие случайного поля. Для одномерной цепочки

$$\epsilon_p = -2t \cos(p). \quad (67)$$

«Затравочная» плотность состояний в этом случае

$$N_{0d1}(\epsilon) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4t^2 - \epsilon^2}} \quad (68)$$

расходится на краях зоны. Полученные в такой модели полные плотности состояний для зоны шириной $W = 4t = 1$ и различных значениях параметров

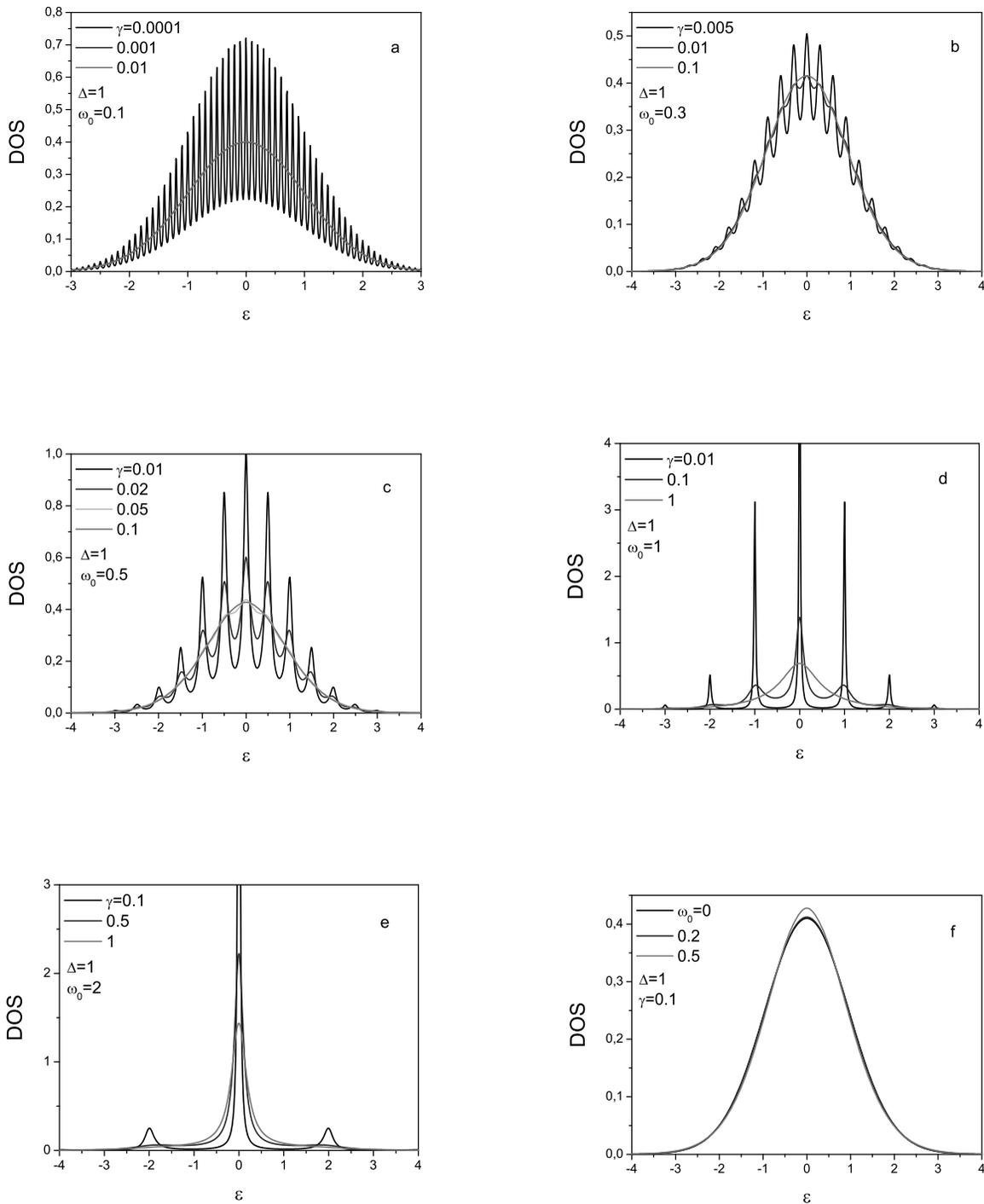


Рис. 8. Спектральная плотность (плотность состояний) квантовой точки в модели с конечными передаваемой частотой и временем корреляции при $\Delta = 1$ и различных ω_0 и γ

случайного поля приведены на рис. 9. Для двумерной решетки

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = -2t(\cos(p_x) + \cos(p_y)). \quad (69)$$

«Затравочная» плотность состояний в этом случае имеет ступеньки на краях зоны и ван-хововскую ло-

гарифмическую расходимость в центре зоны. Полученные в такой модели полные плотности состояний для зоны шириной $W = 8t = 1$ и различных значениях параметров случайного поля приведены на рис. 10. Для анализа трехмерной системы в качестве «затравочной» мы использовали модельную

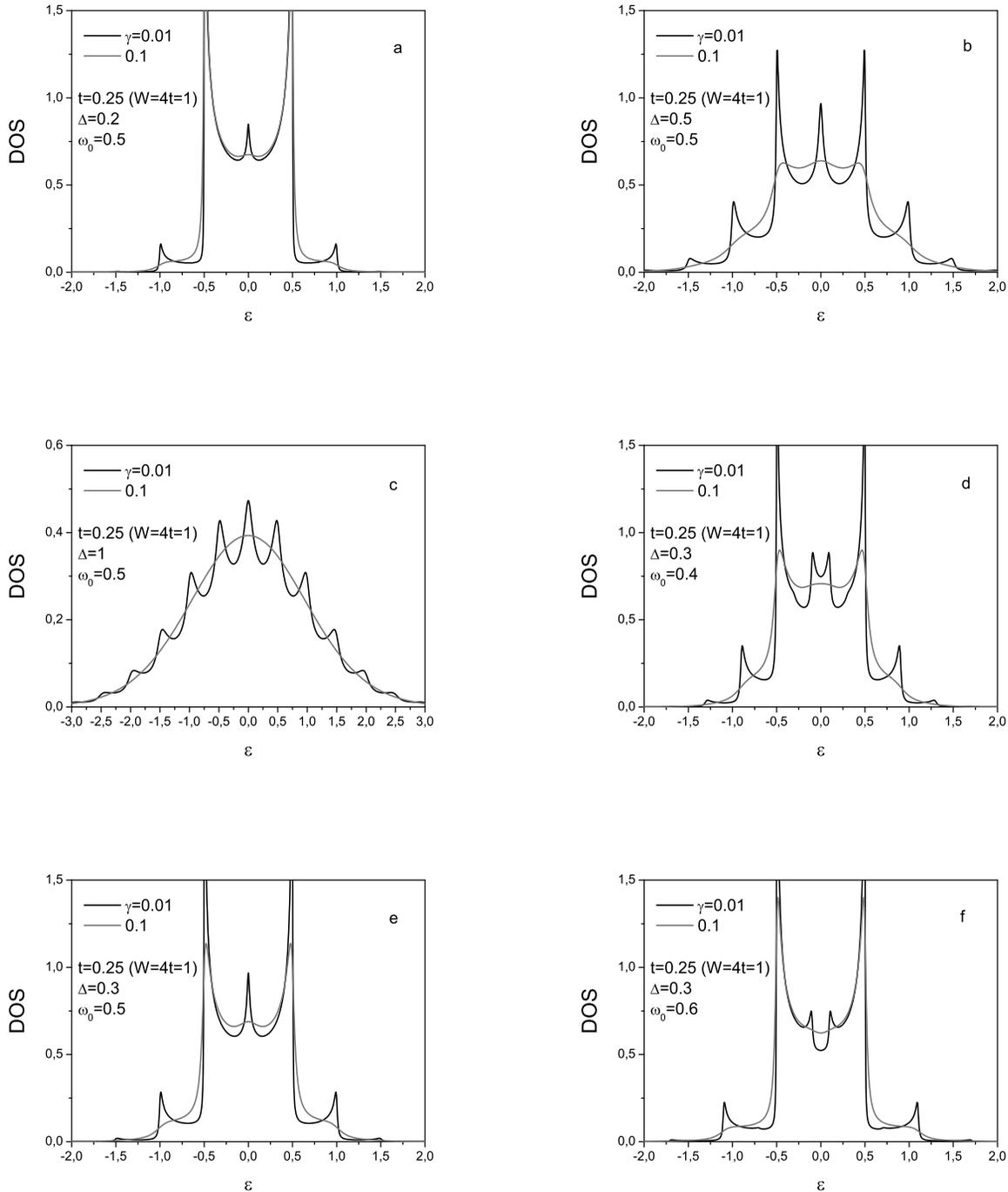


Рис. 9. Плотность состояний для одномерной цепочки с шириной затравочной зоны $W = 4t = 1$ при различных Δ , ω_0 и γ

полуэллиптическую плотность состояний

$$N_{0d3}(\epsilon) = \frac{2}{\pi D^2} \sqrt{D^2 - \epsilon^2}, \quad (70)$$

где D — полуширина зоны. Такая модель обеспечивает правильное для $d = 3$ поведение (пропорциональное $\epsilon^{1/2}$) «затравочной» плотности состояний у краев зоны.

Полученные в такой модели полные плотности состояний для зоны шириной $W = 2D = 1$ и различных значениях параметров случайного поля приведены на рис. 11.

Видим, что во всех моделях при маленькой γ наблюдаются модуляции плотности состояний с частотой ω_0 . Рост γ приводит к резкому ослаблению модуляций. Рост амплитуды случайного поля

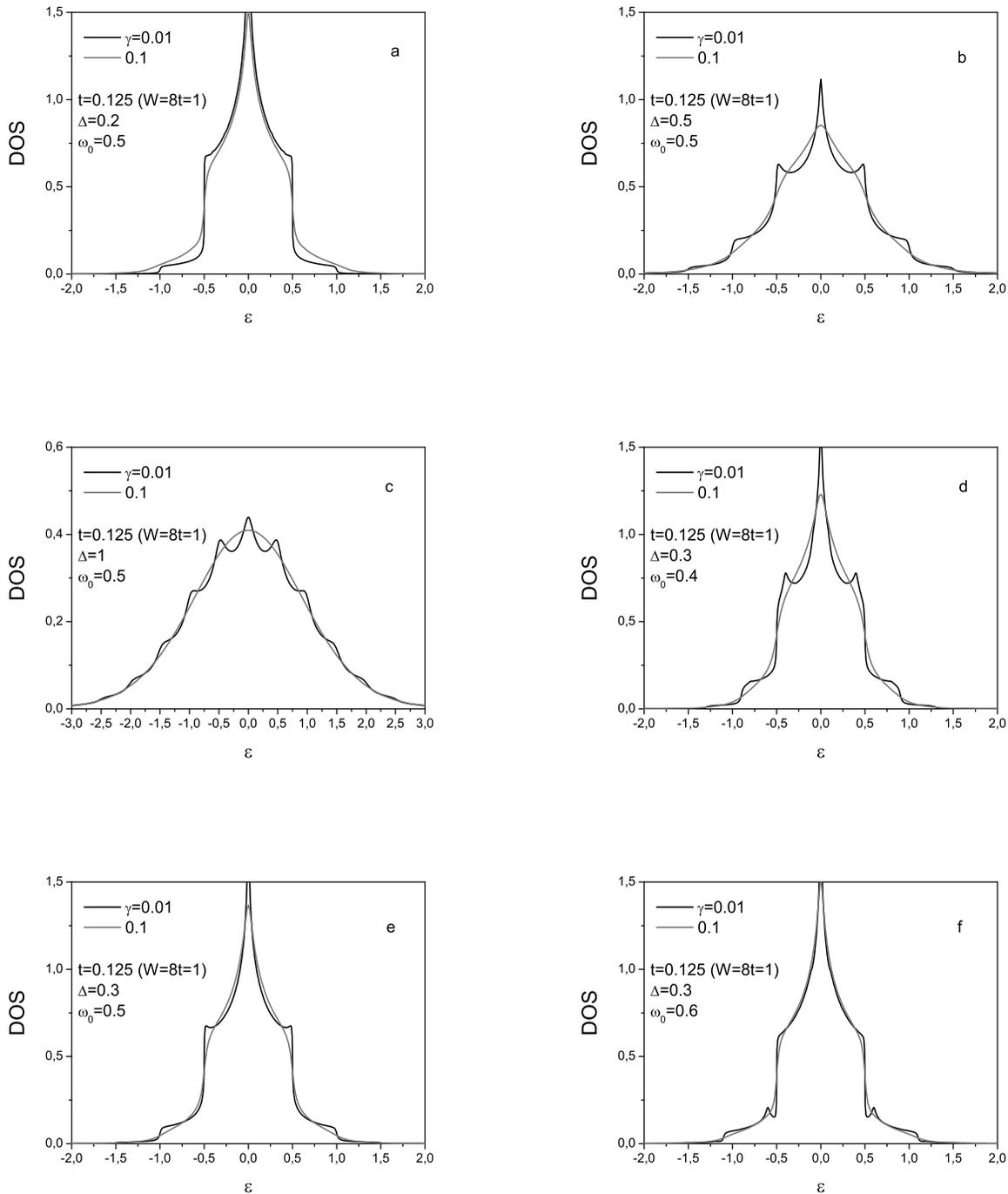


Рис. 10. Плотность состояний для двумерной решетки с шириной затравочной зоны $W=8t=1$ при различных Δ , ω_0 и γ

Δ (рис. 9,10,11 a–c) приводит к некоторому росту амплитуды модуляций и ослаблению особенностей (ван-хововские особенности, поведение у края зоны и т.д.), связанных с «затравочной» плотностью состояний. При $\Delta = W$ (рис. 9,10,11 c) плотность состояний практически «забывает» затравочную. Рост размерности d приводит к ослаблению величины модуляций.

В одномерной цепочке (рис. 9) при $\omega_0 = 0.5$ пики при $\epsilon = \pm\omega_0$ приходятся на края зоны, где затравочная плотность состояний (68) расходится, а пик при $\epsilon = 0$ приходится на минимум затравочной плотности состояний. Поэтому пики при $\epsilon = \pm\omega_0$ эффективно усиливаются и могут даже превышать ослабленный пик при $\epsilon = 0$ (рис. 9 a, b, e). Такое взаимовлияние одномерной расходимости затравочной

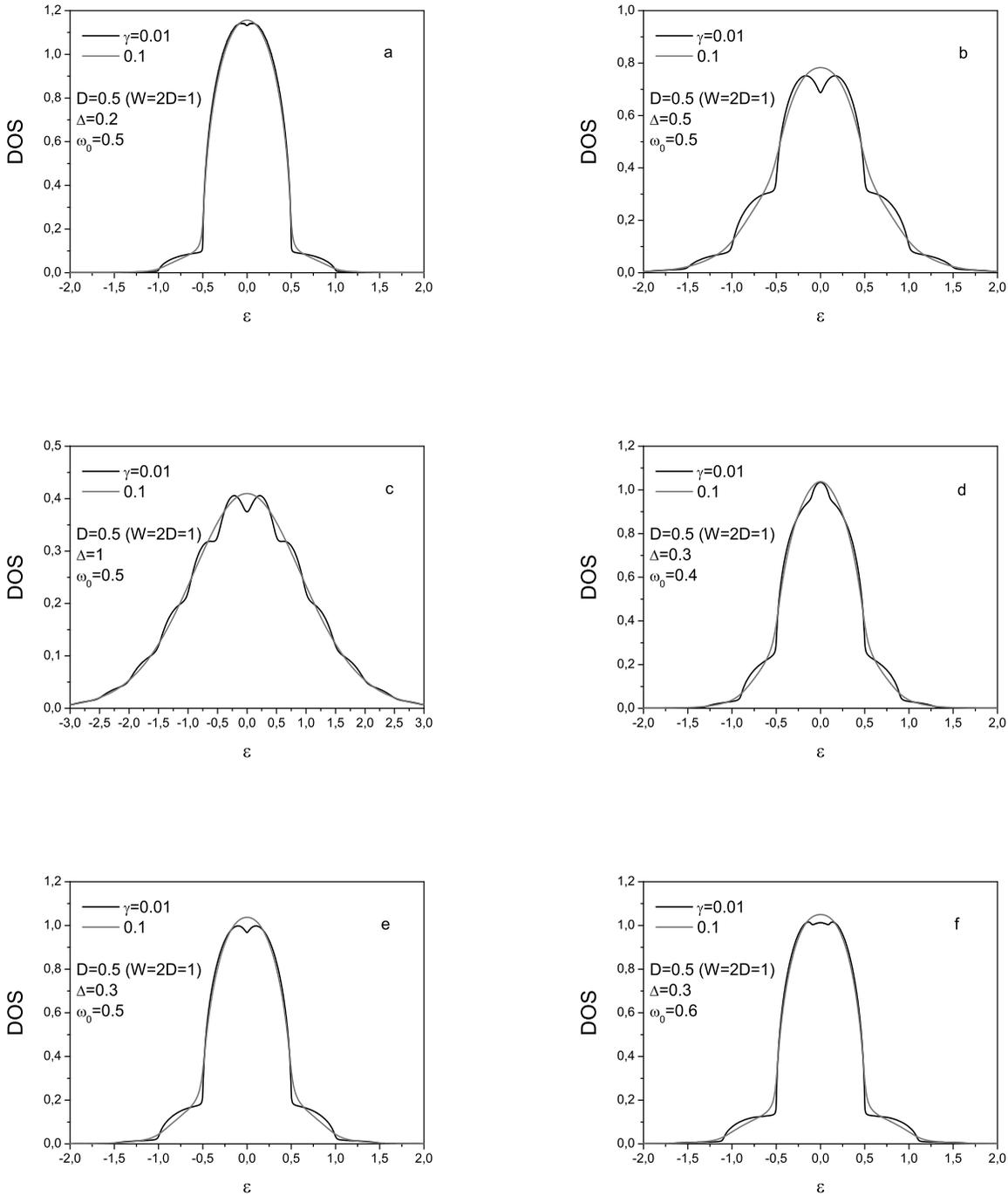


Рис. 11. Плотность состояний трехмерной системы с затравочной полуэллиптической плотностью состояний с шириной зоны $W = 2D = 1$ при различных Δ , ω_0 и γ

плотности состояний на краях зоны и модуляций с частотой ω_0 приводит к заметному изменению величины и формы центрального (при $\epsilon = 0$) пика при небольшом изменении ω_0 вблизи $\omega_0 = 0.5$ (рис. 9 d-f).

Для двумерной решетки ван-хововская расходимость приходится на центр зоны, поэтому центральный пик модуляций всегда заметно превышает пики при $\epsilon = \pm\omega_0$ и форма центрального пика слабо изменяется при небольшом изменении ω_0 вблизи $\omega_0 = 0.5$ (рис. 10 d-f).

Для трехмерной модели модуляции плотности состояний с частотой ω_0 достаточно слабы, и для $\omega_0 = 0.5$ в центре зоны (при $\epsilon = 0$) в плотности состояний наблюдается даже небольшой провал (рис. 11 *a-c, e*). Небольшие изменения ω_0 вблизи $\omega_0 = 0.5$ заметно изменяют форму этой слабой особенности вблизи центра зоны (рис. 11 *d-f*).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное рассмотрение показывает, насколько богатые результаты могут быть получены даже для достаточно простого варианта обобщенной динамической модели Келдыша для случая случайных полей с конечной передаваемой частотой. Представляется очевидным, что данная модель может иметь прямое отношение к ситуации, реализующейся в реальных системах с квантовыми точками, в составе тех или иных устройств микроэлектроники, а частота ω_0 может быть связана с тактовой частотой соответствующих систем. Разумеется, данная простейшая модель является упрощенной, однако можно надеяться, что полученные результаты могут оказаться полезными и при анализе процессов в реальных устройствах.

Вопрос об экспериментальной реализации рассмотренной модели остается открытым. В принципе, изучение квантовых точек в специально создаваемом (например электротехническими средствами) случайном поле представляется вполне возможным, но при этом нужно еще специально подбирать актуальные значения параметров взаимодействия с таким полем, с тем чтобы сделать обсуждаемые эффекты наблюдаемыми. Все это имеет прямое отношение и к обсуждавшимся выше электронным системам (решеткам) разной размерности, находящимся в случайном поле, создаваемом на «обкладках конденсатора».

В реальных физических системах динамические случайные поля могут создаваться, например, фононами в классическом пределе, когда температура заметно превышает характерную частоту этих фононов ω_0 . Например, речь может идти о процессах рассеяния электронов на фононах на интерфейсе металлической пленки и диэлектрической подложки. Хорошо известно, что рассеяние на малые импульсы («почти вперед») может возникать на интерфейсе металлического монослоя FeSe на подложке из ионного диэлектрика SrTiO₃ [26], что приводит к

интересным моделям усиления сверхпроводимости в этой системе [27]. К сожалению, к данной системе проведенное выше рассмотрение непосредственно неприменимо, поскольку частота соответствующего оптического фонона в SrTiO₃ весьма высока и он не может рассматриваться в классическом пределе (как случайное внешнее поле). Тем не менее нельзя исключить существования аналогичных систем (структур) с достаточно «мягкими» оптическими фононами.

Как уже отмечалось выше, рассмотренная модель с одной квантовой ямой достаточно легко обобщается на случай нескольких ям [18, 19], что приводит к варианту модели Келдыша с многокомпонентным шумом. В частности, большой интерес представляют модель двух квантовых ям, которая оказывается (в ее зонном варианте) тесно связанной с точно решаемой моделью псевдощелевого состояния [7–12]. Различные модели подобного типа активно применялись для описания псевдощели, возникающей при рассеянии электронов на флуктуациях ближнего порядка в одномерных моделях [6–12], а затем были обобщены на двумерный случай для описания псевдощели в высокотемпературных сверхпроводниках [13–17]. При этом, как правило, рассмотрение ограничивалось квазистатическими флуктуациями. Представляет очень большой интерес провести обобщение этих моделей на случай динамических флуктуаций с конечной передаваемой частотой, создаваемых соответствующими «мягкими» модами. Ясно, что рассмотрение таких моделей требует существенного развития методов, использованных в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, Москва (1973).
2. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, Наука, Москва (1966).
3. Б. Р. Левин, *Теоретические основы статистической радиотехники*, Советское радио, Москва (1969).
4. Л. В. Келдыш, *Полупроводники в сильном электрическом поле*, Диссертация, ФИАН, Москва, 1965; [L. V. Keldysh, *Semiconductors in Strong Electric Field*, Dr. Sci. Thesis, Lebedev Institute, Moscow, 1965].

5. А. Л. Эфрос, *Теория электронных состояний в сильно легированных полупроводниках*, ЖЭТФ **59**, 880 (1970); [A. L. Efros, *Theory of the electron states in heavily doped semiconductors*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **59**, 880 (1970) Sov. Phys. JETP **32**, 479 (1971)].
6. М. В. Садовский, *Диаграмматика*, изд. 3, ИКИ-РХД, Москва–Ижевск, 2019; [M. V. Sadovskii. *Diagrammatics*, World Scientific, Singapore, 2nd ed., 2019].
7. М. В. Садовский, *Об одной модели неупорядоченной системы (К теории «жидких полупроводников»)*, ЖЭТФ **66**, 1720 (1974); [M. V. Sadovskii. *A model of a disordered system (A contribution to the theory of «liquid semiconductors»)*. Sov. Phys. JETP **39**, 845 (1974)].
8. М. В. Садовский, *Теория квазиодномерных систем, испытывающих пайерлсовский переход*, ФТТ **16**, 2504 (1974); [M. V. Sadovskii. *Quasi-one-dimensional systems undergoing a Peierls transition*. Sov. Phys. Solid State **16**, 1632 (1974)],
9. W. Wonneberger and R. Lautenschlager, *Theory of Infrared Absorption of Linear Conductors*, J. Phys. C: Solid State Phys. **9**, 2865 (1976).
10. W. Wonneberger, *Infrared Absorption of Incommensurate Linear Conductors*, J. Phys. C: Solid State Phys. **10**, 1073 (1977).
11. М. В. Садовский, *Точное решение для электронной плотности состояний в одной модели неупорядоченной системы*, ЖЭТФ **77**, 2070 (1979); [M. V. Sadovskii. *Exact Solution for the Density of Electronic States in a Model of a Disordered System*, Sov. Phys. JETP **50**, 989 (1979)],
12. M. V. Sadovskii and A. A. Timofeev, *The Two-Particle Green Function in a Model of a One-Dimensional Disordered System: An Exact Solution?*, J. Moscow Phys. Soc. **1**, 391 (1991).
13. J. Schmalian, D. Pines, and B. Stojkovic, *Weak Pseudogap Behavior in the Underdoped Cuprate Superconductors*, Phys. Rev. Lett. **80**, 3839 (1998).
14. J. Schmalian, D. Pines, and B. Stojkovic, *Microscopic Theory of Weak Pseudogap Behavior in the Underdoped Cuprate Superconductors: General Theory and Quasiparticle Properties*, Phys. Rev. B **60**, 667 (1999).
15. Э. З. Кучинский, М. В. Садовский, *Модели псевдощелевого состояния двумерных систем*, ЖЭТФ **115**, 1765 (1999); [E. Z. Kuchinskii and M. V. Sadovskii, *Models of the Pseudogap State of Two-Dimensional Systems*, JETP **88**, 968 (1999)].
16. М. В. Садовский, *Псевдощель в высокотемпературных сверхпроводниках*, УФН **171**, 539 (2001); [M. V. Sadovskii. *Pseudogap in High-Temperature Superconductors*, Physics–Uspekhi **44**, 515 (2001)].
17. М. В. Садовский, *Модели псевдощелевого состояния в высокотемпературных сверхпроводниках*, в сб. *Струны, браны, решетки, сетки, псевдощели и пылинки*, Научный Мир, Москва (2007); [M. V. Sadovskii, *Models of the Pseudogap State in High-Temperature Superconductors*, ArXiv:cond-mat/0408489].
18. M. N. Kiselev and K. Kikoin, *Scalar and Vector Keldysh Models in the Time Domain*, JETP Letters, **89**, 133 (2009).
19. D. V. Efremov and M. N. Kiselev, *Seven Études on Dynamical Keldysh model*, SciPost Phys. Lect. Notes **65**, doi:10.21468/SciPostPhysLectNotes65.
20. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1963); [A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1963)].
21. М. В. Садовский, Э. З. Кучинский, *Комбинаторика фейнмановских диаграмм в задачах с гауссовым случайным полем*, ЖЭТФ **113**, 664 (1998); [E. Z. Kuchinskii, M. V. Sadovskii, *Combinatorics of Feynman Diagrams for the Problems With Gaussian Random Field*, JETP **113**, 664 (1999)].
22. E. Z. Kuchinskii, I. A. Nekrasov, and M. V. Sadovskii, *Pseudogaps in Strongly Correlated Metals: Optical Conductivity within the Generalized Dynamical Mean-Field Theory Approach*, Phys. Rev. B **75**, 115102 (2007).

23. T. Holstein, *Studies of Polaron Motion*, Ann. Phys. **8**, 325 (1959); *ibid* **8**, 343 (1959).
24. И. Г. Ланг, Ю. А. Фирсов, ЖЭТФ **43**, 1843 (1963); [I. G. Lang and Yu. A. Firsov. *Kinetic Theory of Semiconductors with Low Mobility*, Sov. Phys. JETP **16**, 1301 (1963)]. .
25. G. L. Goodvin, M. Berciu, and G. A. Sawatzky, *The Green's Function of the Holstein Polaron*, Phys. Rev. B **74**, 245104 (2006).
26. J. J. Lee, F. T. Schmitt, R. G. Moore, S. Johnston, Y. T. Cui, W. Li, Z. K. Liu, M. Hashimoto, Y. Zhang, D. H. Lu, T. P. Devereaux, D. H. Lee, and Z. X. Shen, *Interfacial Mode Coupling as the Origin of the Enhancement of T_c in Fese Films on SrTiO₃*, Nature **515**, 245 (2014).
27. М. В. Садовский, *Высокотемпературная сверхпроводимость в монослоях FeSe*, УФН **186**, 1035 (2016); [M.V. Sadovskii. *High-Temperature Superconductivity in Fese Monolayers*, Physics–Uspekhi **59**, 947 (2016)].

СПИНОВЫЙ РЕЗОНАНС ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВОДИМОСТИ В МЕТАЛЛАХ В УСЛОВИЯХ СПИНОВОГО ЭФФЕКТА ХОЛЛА

В. В. Устинов^{a,b}, И. А. Ясюевич^{a**}*

^a *Институт физики металлов им. М. Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук
620137, Екатеринбург, Россия*

^b *Институт естественных наук и математики,
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина
620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 29 февраля 2024 г.,
после переработки 29 февраля 2024 г.
Принята к публикации 25 марта 2024 г.

Исследовано влияние спин-орбитального взаимодействия (СОВ) на распределение спиновых и зарядовых токов, индуцируемых в немагнитном проводнике падающей на него электромагнитной волной. Описано влияние СОВ на спиновый резонанс электронов проводимости (СРЭП) в металлах. Установлено, что СОВ может значительно изменять форму линии СРЭП. Показано, что это обстоятельство может быть использовано для определения величины СОВ в металле с помощью прецизионных измерений асимметрии линии СРЭП. Предсказано существование эффекта усиления СРЭП в металлах с сильным СОВ. Показано, что СОВ может приводить к эффекту усиления селективной спиновой прозрачности и что в немагнитном металле может возникать обусловленная СОВ инверсия потока энергии электромагнитной волны — эффект, заключающийся в возникновении в глубине металла потока энергии электромагнитного поля, направленного к поверхности металла.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S0044451024070071

1. ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитная волна, падающая на проводник, индуцирует в нем высокочастотный электрический ток, который препятствует ее проникновению вглубь проводника. Эффект уменьшения амплитуды электромагнитных волн по мере их проникновения вглубь проводника получил название скин-эффекта [1–3].

Важной особенностью немагнитных металлов с сильным спин-орбитальным взаимодействием (СОВ) является возникновение в таких металлах связи спиновых и зарядовых токов [4–12]. Спин-орбитальное взаимодействие приводит к тому, что протекание электрического тока в немагнитном металле вызывает появление поперечного чисто спинового тока, который не сопровождается пе-

реносом электрического заряда. Данный эффект получил название спинового эффекта Холла. При обратном спиновом эффекте Холла протекание чисто спинового тока в немагнитном металле приводит к возникновению поперечного тока электрического заряда.

Можно ожидать, что в металлах с сильным спин-орбитальным взаимодействием индуцированные падающей на металл электромагнитной волной высокочастотные электрические токи будут порождать переменные спиновые токи (высокочастотный спиновый эффект Холла), которые будут порождать дополнительные высокочастотные электрические токи (высокочастотный обратный спиновый эффект Холла). Возникновение в проводнике дополнительных высокочастотных электрических токов из-за наличия спин-орбитального взаимодействия приведет к изменению поверхностного импеданса металла — величины, отражающей связь электрического тока в проводнике с величиной электрического поля на его поверхности.

* E-mail: ustinov@imp.uran.ru

** E-mail: yasyulevich@imp.uran.ru

Как известно, поверхностный импеданс определяет мощность радиочастотной энергии, поглощаемой металлом в единицу времени на единице площади поверхности. Производная мощности поглощения энергии падающей электромагнитной волны по магнитному полю может быть найдена с помощью экспериментов по исследованию спинового резонанса электронов проводимости.

Спиновый резонанс электронов проводимости (СРЭП) в металлах, в которых спин-орбитальное взаимодействие пренебрежимо мало, был изучен как теоретически [13–23], так и экспериментально [24–36]. В работах [37–44] было показано, что рост величины спин-орбитального взаимодействия электронов с примесями приводит к уменьшению времени спин-решеточной релаксации, поскольку часть столкновений с примесями меняет направление спина электрона. Как следствие, уменьшение времени спин-решеточной релаксации приводит к уширению линии СРЭП. В работе [45] был проведен упрощенный теоретический анализ влияния спин-орбитального взаимодействия на распределение высокочастотных электрических токов в проводящей пластине. Для упрощения расчетов авторы полагали, что на электроны проводимости в металле действует только переменное электрическое поле, пренебрегая при этом действием переменного магнитного поля. Используя такую модель, авторы обнаружили, что спин-орбитальное взаимодействие может оказывать влияние на поверхностный импеданс образца.

Цель настоящей работы — разработать теорию, позволяющую последовательно описать влияние спин-орбитального взаимодействия на распределение высокочастотных электрических и спиновых токов, индуцированных в металле падающей электромагнитной волной, и дать на ее основе описание влияния спин-орбитального взаимодействия на спиновый резонанс электронов проводимости в металлах.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения, описывающие электронный спиновый транспорт в проводящих материалах с учетом СОВ электронов проводимости с рассеивателями, сформулированы в рамках микроскопического подхода в работах [46–48]. Здесь мы приведем эти уравнения для случая, когда на электроны проводимости в немагнитных проводниках действуют электрическое \mathbf{E} и магнитное \mathbf{B} поля, величина и направ-

ление которых зависят от координаты \mathbf{r} и времени t . Без существенного ограничения общности будем считать газ электронов проводимости в металле выродженным. В указанных приближениях уравнения [46–48] для плотности электронов проводимости N , вектора плотности спинового момента электронов \mathbf{S} , вектора плотности потока электронов \mathbf{I} и тензора плотности спинового тока \mathbf{J} принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t} N + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{I} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{J} + \gamma [\mathbf{S} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{\tau_S} \delta \mathbf{S} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{I} + \frac{v_F^2}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta N - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} N + \\ + \frac{e}{m_e c} [\mathbf{B} \times \mathbf{I}] + \frac{\hbar \gamma}{2m_e} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \otimes \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{S} + \\ + \frac{1}{\tau_O} \mathbf{I} + \frac{1}{\tau_{SO}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} + \frac{v_F^2}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \otimes \delta \mathbf{S} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \otimes \mathbf{S} + \\ + \frac{e}{m_e c} [\mathbf{B} \times \mathbf{J}] + \gamma [\mathbf{J} \times \mathbf{B}] + \\ + \frac{\hbar \gamma}{2m_e} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \otimes \mathbf{B} \right) \delta N + \frac{1}{\tau_O} \mathbf{J} + \frac{1}{\tau_{SO}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{I} = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Фигурирующая в уравнениях (1)–(4) величина $\delta N = N - N_0$ — это отклонение электронной плотности N от своего равновесного значения N_0 , которое мы считаем не зависящим от координаты \mathbf{r} , $\delta \mathbf{S} = \mathbf{S} - \mathbf{S}_L$ — отклонение спиновой плотности \mathbf{S} от своего локально-равновесного значения $\mathbf{S}_L = -\chi \mathbf{B} / \mu$, где χ — магнитная восприимчивость Паули электронного газа, $\mu = g \mu_B / 2$ — магнитный момент электрона, фактор Ланде которого равен g , μ_B — магнетон Бора, $\gamma = 2\mu / \hbar$ — гиромангнитное отношение; величины $e = -|e|$, m_e и v_F — заряд, масса и скорость Ферми электронов проводимости соответственно; τ_O — время релаксации импульса при орбитальном движении электронов, τ_S — время спиновой релаксации, τ_{SO} — величина размерности времени, характеризующая «косое» (skew) спиновое рассеяние электронов, обусловленное СОВ. Символ $\boldsymbol{\epsilon}$ обозначает абсолютно антисимметричный единичный тензор 3-го ранга, знаки « \otimes », « \cdot » и « $\cdot \cdot$ » используются для обозначения математических операций тензорного, скалярного и двойного скалярного произведения векторов и тензоров соответственно.

Фигурирующие в уравнениях (1)–(4) электрическое \mathbf{E} и магнитное \mathbf{B} поля могут быть найдены из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi e}{c} \mathbf{I} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}, \quad (6)$$

в которых индукция магнитного поля \mathbf{B} и напряженность поля \mathbf{H} связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{m}, \quad (7)$$

где $\mathbf{m} = -\mu \mathbf{S}$ — намагниченность электронов проводимости.

Из уравнений (5)–(7) вытекает следующее уравнение для поля \mathbf{E} :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(e \mathbf{I} + c \operatorname{rot} \mathbf{m} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right). \quad (8)$$

В правой части уравнения (8) в круглых скобках фигурирует сумма трех слагаемых. Первое из них, $e \mathbf{I}$, есть не что иное, как плотность электрического тока, т. е. плотность потока электрического заряда, переносимого электронами проводимости. Второе слагаемое, $c \operatorname{rot} \mathbf{m}$, также можно интерпретировать как плотность некоторого тока, который получил в литературе специальное название «ток намагничивания». Наконец, третье слагаемое, $-(1/4\pi) \partial \mathbf{E} / \partial t$, представляет так называемый «ток смещения». Численная величина тока смещения для рассматриваемого нами диапазона частот изменения электрического поля во времени пренебрежимо мала и в дальнейшем рассмотрении мы опустим этот малый член в уравнении (8).

Пусть в металле, занимающем полупространство $z \leq 0$, действуют электрическое поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(\omega)}(z) e^{-i\omega t}$$

и магнитное поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}^{(\omega)}(z) e^{-i\omega t},$$

где \mathbf{B}_0 — постоянное однородное магнитное поле, ω — частота изменения переменных компонент электрического и магнитного полей. Ниже мы ограничимся рассмотрением случая, когда векторы $\mathbf{E}^{(\omega)}$ и $\mathbf{B}^{(\omega)}$ лежат в плоскости $z = 0$, а $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль оси z . В рассматриваемой геометрии координатная зависимость величин $\delta \mathbf{S}$, \mathbf{I} и \mathbf{J} сводится к их зависимости только от координаты z .

Мы ограничимся рассмотрением систем, для которых можно пренебречь их отклонением от состояния электронейтральности и считать отклонение δN пренебрежимо малым по сравнению с N_0 . Для проводников с металлическим характером проводимости это условие выполняется с высокой точностью. Существенное упрощение при описании спиновой электронной кинетики возможно в условиях, когда мы можем пренебречь эффектами временной дисперсии при решении уравнений (3) и (4), считая $\omega \ll 1/\tau_0$. Будем, кроме того, полагать, что частота прецессии спина электрона в постоянном магнитном поле $\Omega = \gamma B_0$ и циклотронная частота $\Omega_C = |e| B_0 / m_e c$ также малы по сравнению с частотой столкновений $1/\tau_0$. При записи уравнений (3) и (4) мы опустим члены, описывающие действие на спин электрона сил, обусловленных неоднородностью поля \mathbf{B} . Эти эффекты, подробно рассмотренные ранее в работе [47], не играют, в силу своей малости, принципиальной роли в настоящем описании эффектов СОВ. В результате система уравнений (1)–(4) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{J} + \gamma [\delta \mathbf{S} \times \mathbf{B}] + \frac{1}{\tau_S} \delta \mathbf{S} = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{I} = \frac{\sigma_0}{e} \mathbf{E} - \xi \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}, \quad (10)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma_0}{e N_0} \mathbf{E} \otimes \mathbf{S} - D_0 \mathbf{e}_z \otimes \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathbf{S} - \xi \mathbf{e} \cdot \mathbf{I}, \quad (11)$$

где $\sigma_0 = N_0 e^2 \tau_0 / m_e$ — удельная проводимость свободного электронного газа, $D_0 = v_F^2 \tau_0 / 3$ — коэффициент электронной диффузии, $\xi = \tau_0 / \tau_{SO}$ — параметр, характеризующий относительную интенсивность скорости косоугольного спинового рассеяния электронов проводимости (по отношению к скорости релаксации импульса). В литературе, посвященной описанию спинового эффекта Холла (Spin Hall Effect, SHE), для характеристики косоугольного спинового рассеяния часто используется термин «спиновый угол Холла», который обозначается как Θ_{SHE} . Как правило, для реальных металлов $|\Theta_{SHE}| \ll 1$ и тогда введенный нами параметр ξ и спиновый угол Холла Θ_{SHE} можно просто отождествить: $\xi \equiv \Theta_{SHE}$.

Уравнение (11) наглядно описывает «прямой» спиновый эффект Холла [4–12]: поток электронов проводимости \mathbf{I} , фигурирующий в последнем члене правой части уравнения (11), задающего спиновый ток \mathbf{J} , индуцирует за счет СОВ добавку к спиновому току, равную $-\xi \mathbf{e} \cdot \mathbf{I}$. Соответственно, уравнение (10) описывает обратный спиновый эффект Холла: спиновый ток \mathbf{J} , фигурирующий в последнем члене правой части уравнения (10) для \mathbf{I} , при наличии

СОВ индуцирует добавку к потоку электронов, равную $-\xi \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}$.

Уравнения (10), (11) можно рассматривать как систему уравнений для токов \mathbf{I} и \mathbf{J} при заданных \mathbf{E} и \mathbf{S} . Решение этой системы, описанное в работе авторов [48], может быть представлено в виде

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma}{N_0 e} \mathbf{E} \otimes \mathbf{S} - D \mathbf{e}_z \otimes \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathbf{S} - \xi \frac{\sigma}{e} \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}, \quad (12)$$

$$\mathbf{I} = \frac{\sigma}{e} \mathbf{E} - \xi D \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathbf{S} \right] + \xi \frac{\sigma}{N_0 e} [\mathbf{E} \times \mathbf{S}], \quad (13)$$

где $\sigma = \sigma_0 / (1 + 2\xi^2)$ и $D = D_0 / (1 + 2\xi^2)$ — перенормированные спин-орбитальным взаимодействием проводимость и коэффициент диффузии соответственно. При получении (12) мы пренебрегли несущественной для целей настоящей работы слабой анизотропией коэффициента диффузии, вызванной СОВ.

В дальнейшем рассмотрении мы будем полагать, что выполняется условие $\xi \chi |B_0| / \mu N_0 \ll 1$, и будем проводить линеаризацию всех уравнений по величинам $\mathbf{E}^{(\omega)}$, $\mathbf{B}^{(\omega)}$ и $\delta \mathbf{S}$, что позволяет записать исходя из (13) выражение для \mathbf{I} в виде

$$\mathbf{I} \simeq \frac{\sigma}{e} \mathbf{E} - \xi D \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathbf{S} \right]. \quad (14)$$

Используя (14), фигурирующую в уравнении (8) сумму тока проводимости и тока намагничивания ($e\mathbf{I} + c \text{rot } \mathbf{m}$) можно представить в виде

$$\sigma \mathbf{E} + (1 + \xi e D / \mu c) c \text{rot } \mathbf{m}.$$

Это означает, что учет СОВ при записи уравнения для поля \mathbf{E} сводится к перенормировке плотности тока намагничивания $c \text{rot } \mathbf{m}$ множителем $(1 + \xi e D / \mu c)$. Другими словами, учет СОВ сводится к замене фигурирующей в уравнении (8) величины магнитного момента электрона μ на величину

$$\tilde{\mu} = \mu (1 + \xi e D / \mu c).$$

Подставляя в уравнение (2) выражение (12) для спинового тока \mathbf{J} и представляя спиновую плотность \mathbf{S} в виде

$$\mathbf{S} = -\chi \mathbf{B} / \mu + \delta \mathbf{S},$$

можно убедиться в том, что учет СОВ сводится к перенормировке фигурирующей в уравнении (2) величины восприимчивости Паули χ множителем $(1 + \xi \sigma \mu / \chi c e)$, т. е. к замене χ на

$$\tilde{\chi} = \chi (1 + \xi \sigma \mu / \chi c e).$$

С учетом явного вида величин D , σ и χ для металла с вырожденным газом электронов легко показать, что перенормированные величины $\tilde{\mu}$, $\tilde{\chi}$ можно записать как

$$\tilde{\mu} = \mu (1 - \tilde{\xi}), \quad \tilde{\chi} = \chi (1 - \tilde{\xi}).$$

Перенормировка обеих величин $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\chi}$ определяется одним и тем же параметром $\tilde{\xi}$, который можно записать в виде $\tilde{\xi} = \xi / \Xi$, где вновь введенный параметр Ξ определяется выражением

$$\Xi = \frac{3g}{8} \frac{\hbar}{\tau_0 \varepsilon_F}, \quad (15)$$

в котором ε_F — энергия Ферми электронов проводимости.

Подставляя выражения (12) и (13) в уравнения (2) и (8), с учетом

$$\delta \mathbf{S} = \delta \mathbf{S}^{(\omega)}(z) e^{-i\omega t},$$

после линеаризации по величинам $\delta \mathbf{S}^{(\omega)}$ и $\mathbf{E}^{(\omega)}$ получаем для них следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} L_S^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta \mathbf{S}^{(\omega)} - (1 - i\omega \tau_S) \delta \mathbf{S}^{(\omega)} - \\ - \Omega \tau_S [\delta \mathbf{S}^{(\omega)} \times \mathbf{e}_z] - \\ - L_S^2 \frac{\tilde{\chi} c}{\mu D} \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}^{(\omega)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E}^{(\omega)} + 2i \mathbf{E}^{(\omega)} - \\ - \frac{2i \tilde{\mu} c}{\sigma} \left[\mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathbf{S}^{(\omega)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $L_S = \sqrt{D \tau_S}$ — спин-диффузионная длина в металле с учетом СОВ, $\delta = c / \sqrt{2\pi\omega\sigma}$ — глубина скин-слоя при нормальном скин-эффекте, определяемая электропроводностью σ .

Систему уравнений (16), (17) необходимо дополнить двумя граничными условиями, определяющими поведение поля $\mathbf{E}^{(\omega)}(z)$ и спиновой плотности $\delta \mathbf{S}^{(\omega)}(z)$ на границе $z = 0$. Будем полагать, что на поверхности металла $z = 0$ задано значение электрического поля, равное $\mathbf{E}_0^{(\omega)}$. Тогда первое из названных выше граничных условий можно записать в виде

$$\mathbf{E}^{(\omega)}(z) \Big|_{z=0} = \mathbf{E}_0^{(\omega)}. \quad (18)$$

Будем считать, что на поверхности металла нет процессов рассеяния электронов проводимости с переоротом спина. Это условие может быть записано

как условие равенства нулю на поверхности $z = 0$ спинового тока $\mathbf{J}(z)$, текущего в направлении \mathbf{e}_z :

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{J}(z)|_{z=0} = 0.$$

С учетом (12) и (18) это граничное условие запишется как

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathbf{S}^{(\omega)} \right|_{z=0} = \tilde{\xi} \frac{\chi c}{\mu D} \left[\mathbf{E}_0^{(\omega)} \times \mathbf{e}_z \right]. \quad (19)$$

Для решения системы уравнений (16), (17) перейдем к циркулярным компонентам электрического поля

$$E_{\pm} = E_x^{(\omega)} \pm i E_y^{(\omega)}$$

и неравновесной намагниченности электронов проводимости

$$\delta m_{\pm} = -\mu \left(\delta S_x^{(\omega)} \pm i \delta S_y^{(\omega)} \right).$$

С учетом граничных условий (18), (19) получим

$$\delta m_{\pm} = \mp \frac{\Phi_{1(\pm)}}{\kappa_{1(\pm)}} \Psi_{1(\pm)} e^{\kappa_{1(\pm)} z} \mp \frac{\Phi_{2(\pm)}}{\kappa_{2(\pm)}} \Psi_{2(\pm)} e^{\kappa_{2(\pm)} z}, \quad (20)$$

$$E_{\pm} = \Psi_{1(\pm)} e^{\kappa_{1(\pm)} z} + \Psi_{2(\pm)} e^{\kappa_{2(\pm)} z}. \quad (21)$$

Здесь

$$\Psi_{1(\pm)} = -\frac{E_{\pm}(0)}{\Phi_{1(\pm)} - \Phi_{2(\pm)}} \left(\Phi_{2(\pm)} + i \tilde{\xi} \frac{\chi c}{D} \right),$$

$$\Psi_{2(\pm)} = \frac{E_{\pm}(0)}{\Phi_{1(\pm)} - \Phi_{2(\pm)}} \left(\Phi_{1(\pm)} + i \tilde{\xi} \frac{\chi c}{D} \right),$$

$$\Phi_{j(\pm)} = \frac{i l_{\chi(\pm)} \kappa_{j(\pm)}^2}{\mathcal{L}_{S(\pm)}^2 \kappa_{j(\pm)}^2 - 1},$$

где

$$\kappa_{1(\pm)} = (1 + \lambda_{\pm}) / \mathcal{L}_{\delta}, \quad \kappa_{2(\pm)} = (1 - \lambda_{\pm}) / \mathcal{L}_{S(\pm)},$$

$$\lambda_{\pm} = l_{\sigma} l_{\chi(\pm)} / 2 \left(\mathcal{L}_{S(\pm)}^2 - \mathcal{L}_{\delta}^2 \right),$$

$$l_{\chi(\pm)} = c \mathcal{L}_{S(\pm)}^2 \tilde{\chi} / D, \quad l_{\sigma} = (1 - \tilde{\xi}) c / \sigma,$$

$$\mathcal{L}_{\delta} = -\delta \sqrt{i/2}, \quad \mathcal{L}_{S(\pm)} = L_S / \sqrt{1 \mp i \tau_S (\Omega \pm \omega)}.$$

Решения для δm_{\pm} и E_{\pm} в виде (20), (21) получены нами для случая, когда выполняется условие $|\lambda_{\pm}| \ll 1$. Легко видеть, что для того, чтобы удовлетворить этому условию, достаточно потребовать выполнения неравенства $\Xi \ll 1$, где Ξ — параметр,

введенный соотношением (15). Последнее неравенство накладывает ограничение сверху на величину частоты электронных столкновений $1/\tau_0$. Численные оценки параметра Ξ , приведенные в разд. 4, показывают, что неравенство $\Xi \ll 1$ выполняется с достаточной точностью для всех металлов в интересующих нас условиях.

3. СПИНОВЫЙ РЕЗОНАНС ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВОДИМОСТИ В МЕТАЛЛЕ С СИЛЬНЫМ СПИН-ОРБИТАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Циркулярные компоненты поверхностного импеданса ς_{\pm} связаны с циркулярными компонентами электрического поля E_{\pm} и циркулярными компонентами магнитного поля $H_{\pm} = H_x^{(\omega)} \pm i H_y^{(\omega)}$ соотношением

$$\varsigma_{\pm} = \mp i \frac{E_{\pm}(0)}{H_{\pm}(0)}. \quad (22)$$

С учетом явного вида решений (20) и (21) для δm_{\pm} и E_{\pm} мы можем найти выражение для поля $H_{\pm}(0)$, входящего в определение импеданса (22). В результате для поверхностного импеданса ς_{\pm} немагнитного металла с учетом СОВ получим

$$\varsigma_{\pm} = \varsigma_0 + \Delta \varsigma_{\pm}, \quad (23)$$

$$\varsigma_0 = (1 - i) \frac{\omega \delta}{2c}, \quad (24)$$

$$\Delta \varsigma_{-} = -\pi \chi \frac{\omega^2 \delta^3}{cD} \frac{1 + i}{(1 - i + r\sqrt{1 + i\alpha})^2} \times \left[\left(1 - \tilde{\xi}\right)^2 - 2 \left(\frac{1}{r\sqrt{1 + i\alpha}} + \frac{i}{1 + i} \tilde{\xi}^2 \right) \times \right. \\ \left. \times (1 - i + r\sqrt{1 + i\alpha}) \right], \quad (25)$$

где $\alpha = (\Omega - \omega) \tau_S$ — параметр, определяющий зависимость поверхностного импеданса от внешнего магнитного поля, $r = \delta / L_S$ — параметр, характеризующий соотношение глубины скин-слоя δ и спиндиффузионной длины L_S . Выражение для $\Delta \varsigma_{+}$ может быть получено из формулы (25) путем замены Ω на $-\Omega$ в выражении для α .

Мощность энергии, поглощаемая металлом в единицу времени на единице площади его поверхности, может быть найдена по формуле

$$P = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [\varsigma_0 + \eta_{+} \Delta \varsigma_{+} + \eta_{-} \Delta \varsigma_{-}] \left| \mathbf{H}^{(\omega)}(0) \right|^2. \quad (26)$$

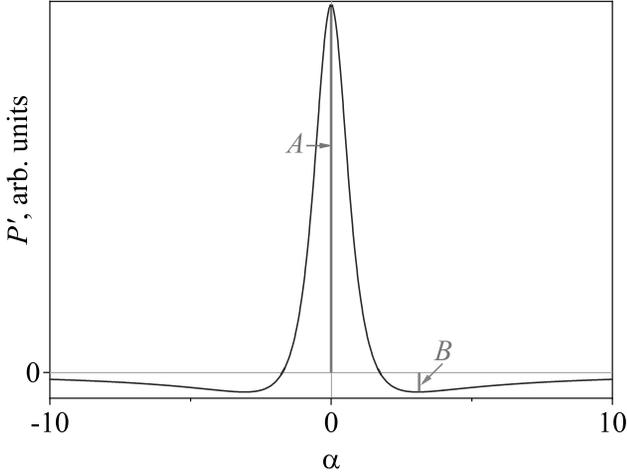


Рис. 1. Производная поглощаемой образцом мощности по магнитному полю $P'(\alpha)$ в условиях СРЭП в металле при $\delta \ll L_S$

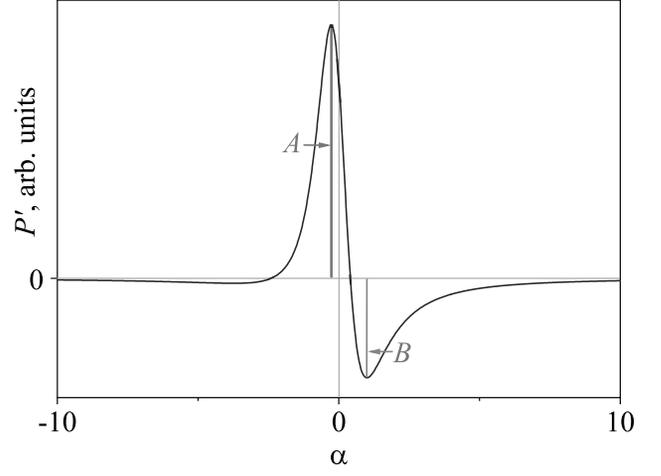


Рис. 2. Производная поглощаемой образцом мощности по магнитному полю $P'(\alpha)$ в условиях СРЭП в металле при $\delta \gg L_S$ и $\xi^2 \ll L_S/\delta$

Здесь η_{\pm} — вещественные числа, определяемые через вектор поляризации переменного магнитного поля на границе $\mathbf{h}^{(\omega)}(0) \equiv \mathbf{h}^{(\omega)}$ соотношениями

$$\eta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \mp i\mathbf{h} \cdot \left[\mathbf{h}^{(\omega)} \times \mathbf{h}^{(\omega)*} \right] \right),$$

$$\mathbf{h}^{(\omega)} \cdot \mathbf{h}^{(\omega)*} = 1,$$

где \mathbf{h} — единичный вектор, сонаправленный с вектором постоянного однородного магнитного поля, знак «*» означает операцию комплексного сопряжения. Для линейной поляризации поля $\mathbf{H}^{(\omega)}$ величины $\eta_{\pm} = 1/2$.

Экспериментально наблюдаемой величиной обычно является производная поглощаемой образцом мощности по магнитному полю $P' = dP/dB_0$, имеющая особенность как функция магнитного поля вблизи резонансного значения B_r , определяемого из условия $\gamma B_r = \omega$. Вблизи резонанса вклад плавно меняющейся функции $\Delta\zeta_+$ в P' мал и сигнал P' как функция магнитного поля B_0 , выраженного в безразмерных переменных $\alpha = \gamma\tau_S(B_0 - B_r)$, пропорционален производной по α от действительной части импеданса $\Delta\zeta_-$:

$$P'(\alpha) \sim \frac{d}{d\alpha} \text{Re}\Delta\zeta_-. \quad (27)$$

Проанализируем влияние СОВ на форму сигнала $P'(\alpha)$, получаемую при подстановке в (27) выражения (25).

Пусть глубина скин-слоя δ мала по сравнению с длиной спиновой диффузии L_S . Тогда $r \ll 1$ и в

основном приближении по малому параметру r получаем

$$P'(\alpha) \sim \frac{d}{d\alpha} \text{Re} \frac{i}{\sqrt{1+i\alpha}}. \quad (28)$$

В этом случае спин-орбитальное взаимодействие практически не влияет на форму сигнала $P'(\alpha)$. Форма кривой сигнала СРЭП, задаваемая выражением (28), впервые была описана Дайсоном [13] и поэтому в дальнейшем получила название «дайсоновой». На рис.1 приведена линия сигнала СРЭП $P'(\alpha)$, построенная с использованием выражения (28).

Дайсонова линия сигнала СРЭП $P'(\alpha)$ на рис. 1 представляет собой кривую, симметричную относительно оси ординат $\alpha = 0$ и асимметричную относительно оси абсцисс $P' = 0$. Указанная выше асимметрия характеризуется A/B , где A — «высота» максимума кривой $P'(\alpha)$, а B — «глубина» минимума, лежащего в области значений магнитного поля, больших резонансного ($\alpha > 0$). Длины A и B выделены на рис. 1 красным и зеленым цветом соответственно. Для дайсоновой формы сигнала СРЭП $P'(\alpha)$ показатель асимметрии сигнала $A/B \approx 18$.

Пусть глубина скин-слоя δ велика по сравнению с длиной спиновой диффузии L_S , тогда параметр $r \gg 1$.

В случае, когда $r \gg 1$, а интенсивность СОВ предельно мала, так что выполняется условие $\xi^2 \ll 1/r \ll 1$, из формулы (25) получаем, что

$$P' \sim \frac{d}{d\alpha} \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}. \quad (29)$$

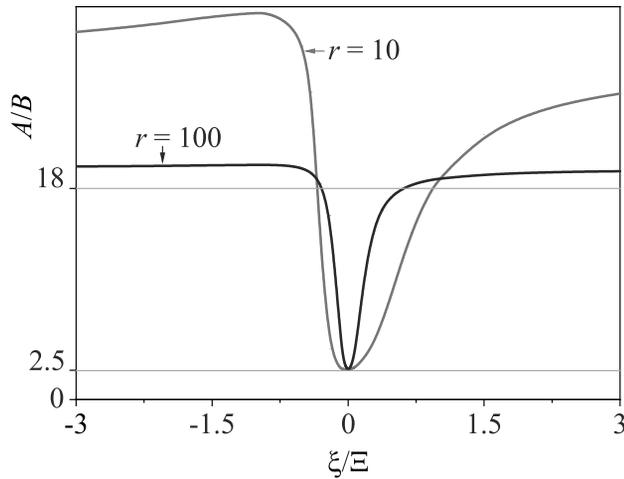


Рис. 3. Влияние спин-орбитального взаимодействия на показатель асимметрии линии A/B при $r = 10$ (красная кривая) и $r = 100$ (синяя кривая)

В этом предельном случае влияние СОВ на форму линии СРЭП также не является сколь-нибудь существенным. Форма линии сигнала СРЭП, описываемого формулой (29), получила название «лоренцевой». На рис. 2 приведена лоренцева форма сигнала СРЭП $P'(\alpha)$, задаваемого выражением (29). Для лоренцевой формы сигнала СРЭП $P'(\alpha)$ величина показателя асимметрии резонансной линии $A/B \approx 2.5$.

В случае, когда $r \gg 1$, а интенсивность СОВ достаточно велика, так что выполняется условие $\tilde{\xi}^2 \gg 1/r$, из формулы (25) получаем

$$P' \sim \tilde{\xi}^2 \frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re} \frac{i}{\sqrt{1+i\alpha}}. \quad (30)$$

В этом случае СОВ оказывает самое существенное влияние на форму линии и амплитуду сигнала СРЭП: форма сигнала СРЭП в этом случае близка к дайсоновой, а величина сигнала P' прямо пропорциональна квадрату спинового угла Холла. Таким образом, если $\delta \gg L_S$, то в проводниках с сильным спин-орбитальным взаимодействием при выполнении условия $\tilde{\xi}^2 \gg L_S/\delta$ может наблюдаться эффект усиления СРЭП.

В случае произвольного соотношения величин параметров $\tilde{\xi}^2$ и $1/r$ из (25) следует, что

$$P' \sim \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1+2\tilde{\xi}^2-\tilde{\xi}^2}{2r} \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2} + \tilde{\xi}^2 \operatorname{Re} \frac{i}{\sqrt{1+i\alpha}} \right). \quad (31)$$

Сигнал СРЭП в этом случае, согласно (31), есть сумма двух сигналов: сигнала лоренцевой формы

(первый член в скобках в выражении (31)) и сигнала дайсоновой формы (второй член в скобках). Относительная величина этих сигналов определяется соотношением параметров $\tilde{\xi}^2$ и $1/r$. Очевидно, что показатель асимметрии линии СРЭП (31) будет существенно меняться с изменением $\tilde{\xi}$, причем характер этой зависимости будет определяться величиной отношения $r = \delta/L_S$. Результаты численного расчета зависимости показателя асимметрии A/B от $\tilde{\xi}$ приведены на рис. 3.

Рисунок 3 наглядно демонстрирует тот факт, что измерения показателя асимметрии A/B линии СРЭП могут дать количественную информацию о величине спин-орбитального взаимодействия в проводнике, определяющего значение спинового угла Холла ξ .

Сравнивая форму линии СРЭП в двух предельных случаях: $\delta \gg L_S$ и $\delta \ll L_S$, отметим важную закономерность. Если спин-орбитальное взаимодействие достаточно велико, так что при условии $\delta \gg L_S$ выполняется неравенство $\xi \gg \Xi \sqrt{L_S/\delta}$, то теория предсказывает, что в каждом из упомянутых выше предельных случаев форма линии СРЭП будет близка к дайсоновой. Поэтому экспериментальное наблюдение в металле сигнала СРЭП, форма которого близка к дайсоновой при любых соотношениях глубины скин-слоя и спин-диффузионной длины, может качественно трактоваться как наличие в этом металле сильного спин-орбитального взаимодействия.

4. ВЛИЯНИЕ СПИН-ОРБИТАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА СЕЛЕКТИВНУЮ СПИНОВУЮ ПРОЗРАЧНОСТЬ МЕТАЛЛА

Селективная спиновая прозрачность — это явление проникновения электромагнитного поля в проводник на глубину, значительно превышающую глубину скин-слоя, из-за наличия диффузионного переноса неравновесной намагниченности электронов проводимости вглубь металла [14–16, 49–51]. Явление селективной спиновой прозрачности наблюдается в условиях СРЭП, когда частота прецессии в магнитном поле спина электрона Ω близка к частоте переменного поля ω . Из двух найденных нами циркулярных компонент электрического поля E_+ и E_- только компонента E_- демонстрирует поведение, характерное для явления селективной спиновой прозрачности.

Для компоненты поля E_- из выражения (21) в случае, когда $\delta \ll L_S$, с учетом выполнения условия

$|\lambda_-| \ll 1$ получим

$$E_-(z) = E_-(0) \left\{ \left[1 - \left(1 - \tilde{\xi} \right) \Xi^2 \right] e^{z/L_\delta} + \left(1 - \tilde{\xi} \right) \Xi^2 e^{z/L_{S(-)}} \right\}. \quad (32)$$

Видно, что в рассматриваемых условиях электрическое поле E_- можно представить как сумму двух частей: большой быстро затухающей (на расстояниях порядка δ),

$$E_-(0) e^{z/L_\delta},$$

и малой медленно затухающей (на расстояниях порядка L_S),

$$E_-(0) \Xi^2 \left(1 - \tilde{\xi} \right) e^{z/L_{S(-)}}.$$

Малая медленно затухающая часть возникает из-за диффузионного переноса неравновесной спиновой плотности электронов проводимости вглубь металла на расстояния, существенно превышающие глубину скин-слоя.

Из результата (32) следует, что СОВ существенно влияет на величину малой медленно затухающей части электрического поля. В проводниках с отрицательным спиновым углом Холла $\xi < 0$ или проводниках, в которых $\xi > 2\Xi$, медленно затухающая часть будет заведомо больше, чем в проводниках, в которых СОВ пренебрежимо мало. Таким образом, металлы с отрицательным спиновым углом Холла и металлы, в которых спиновый угол Холла превышает значение 2Ξ , могут демонстрировать эффект усиления селективной спиновой прозрачности.

Рассмотрим, как СОВ влияет на проникновение в металл потока энергии электромагнитного поля в условиях СРЭП. Для этой цели рассчитаем зависимость от координаты z вектора Умова – Пойнтинга

$$\mathbf{U} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

Усредненная по времени z -компонента вектора Умова – Пойнтинга \bar{U}_z в условиях резонанса (при $\alpha = 0$) в случае, когда $\delta \ll L_S$, может быть записана в виде

$$\bar{U}_z(z) \approx -\bar{U}_z(0) \left[e^{2z/\delta} + \left(1 - \tilde{\xi} \right) \Xi^4 \frac{2L_S}{\delta} e^{2z/L_S} \right]. \quad (33)$$

Из (33) следует, что: 1) усредненный по времени поток энергии электромагнитного поля вблизи поверхности металла на расстояниях порядка скин-глубины ($|z| \leq \delta$) направлен вглубь металла; 2) на расстояниях, существенно превышающих глубину скин-слоя, но сравнимых со спин-диффузионной

длиной ($\delta \ll |z| \leq L_S$), усредненный по времени поток энергии электромагнитного поля может протекать в разных направлениях в зависимости от величины спинового угла Холла ξ . Если спиновый угол Холла ξ положителен и мал по сравнению с величиной параметра Ξ или отрицателен, то усредненный по времени поток энергии при $\delta \ll |z| \leq L_S$ направлен вглубь металла. Если же СОВ достаточно велико, так что $\xi > \Xi$, то названный выше поток направлен к поверхности металла.

Таким образом, СОВ достаточной величины может быть причиной эффекта инверсии направления потока энергии электромагнитной волны в глубине металла в условиях селективной спиновой прозрачности. Физической причиной эффекта инверсии направления потока энергии электромагнитной волны является то обстоятельство, что индуцируемый в металле спиновый ток порождает в силу действия обратного спинового эффекта Холла дополнительный электрический ток, который противоположен току намагничивания, возникающему под действием переменного электромагнитного поля. В случае, когда $\xi > \Xi$, на глубинах $\delta \ll |z| \leq L_S$ возникающий из-за СОВ дополнительный электрический ток превышает по величине ток намагничивания, из-за чего и возникает поток энергии электромагнитного поля, направленный противоположно потоку энергии электромагнитного поля, текущему в пределах скин-слоя.

Выполним численные оценки параметра Ξ и параметра $\tilde{\xi} = \xi/\Xi$ для некоторых немагнитных металлов, для которых значения спинового угла Холла определены экспериментально. Таблица содержит характеристики металлов Al, Cu, Nb, Ag, Pt и Au, которые мы будем использовать для численной оценки интересующих нас параметров.

Во втором столбце таблицы приведены данные о концентрации носителей заряда N_0 в металле. Третий столбец содержит значения удельного электропроводности металла. Значения электросопротивления в Al, Cu, Nb, Ag и Au приведены для температуры 273 К, а в Pt — для температуры 300 К. Четвертый столбец содержит данные о величине спинового угла Холла Θ_{SHE} в металле. Данные о значениях N_0 и ρ для Al, Cu, Nb, Ag и Au взяты из [52], для Pt — из [53]. Данные о значениях Θ_{SHE} для всех металлов взяты из обзора [11].

Для оценок по порядку величины будем считать электронный газ вырожденным, закон дисперсии электронов — изотропным и квадратичным, эффективную массу электронов положим равной массе свободного электрона m_e , а значение g -фактора —

Таблица. Данные по характеристикам металлов Al, Cu, Nb, Ag, Pt и Au

Металл	N_0 , см ⁻³	ρ , мкОм·см	Θ_{SHE}	Ξ	$\tilde{\xi}$
Al	$18.1 \cdot 10^{22}$	2.4	$0.0001 \div 0.0003$	$5 \cdot 10^{-3}$	$0.02 \div 0.06$
Cu	$8.5 \cdot 10^{22}$	1.6	0.003	$3 \cdot 10^{-3}$	1
Nb	$5.6 \cdot 10^{22}$	15.2	-0.0087	$22 \cdot 10^{-3}$	-0.39
Ag	$5.9 \cdot 10^{22}$	1.5	0.007	$2 \cdot 10^{-3}$	3.5
Pt	$1.6 \cdot 10^{22}$	16.8	$0.004 \div 0.1$	$16 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \div 6.25$
Au	$5.9 \cdot 10^{22}$	2	$0.002 \div 0.11$	$3 \cdot 10^{-3}$	$0.67 \div 36.67$

равным 2. В этой простейшей модели энергия Ферми газа свободных электронов

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 N_0)^{2/3}}{2m_e}.$$

Из формулы Друде для проводимости электронного газа получаем оценку для времени релаксации электронного импульса $\tau_O = m_e / \rho e^2 N_0$. В таблице представлены значения параметра $\Xi = 3g\hbar / 8\tau_O \varepsilon_F$, рассчитанные с использованием данных для N_0 и ρ , приведенных в таблице. Для нахождения параметра $\tilde{\xi}$ используем выражение $\tilde{\xi} = \Theta_{SHE} / \Xi$.

Из таблицы следует, что для всех рассматриваемых металлов выполняется сильное неравенство $\Xi \ll 1$, использованное нами при выводе аналитических выражений для полей.

Из таблицы следует также, что в таких металлах, как Cu, Nb, Ag, Pt и Au, параметр $\tilde{\xi}$ может принимать значительную величину и, следовательно, в этих металлах влияние СОВ на форму линии СРЭП может быть обнаружено экспериментально.

Оценки, приведенные в таблице, показывают, что в таких металлах, как Nb, Pt и Au, может быть обнаружен эффект усиления селективной спиновой прозрачности.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная теория позволила описать влияние спин-орбитального взаимодействия на распределение высокочастотных электрических и спиновых токов, индуцированных в немагнитном металле падающей на него электромагнитной волной. Показано, что: 1) СОВ является причиной возникновения дополнительной спиновой плотности, конкурирующей со спиновой плотностью, возникающей в металле под действием переменного магнитного поля; 2)

переменный спиновый ток, индуцируемый волной в металле под влиянием СОВ, в силу действия обратного спинового эффекта Холла порождает дополнительный электрический ток, который противопоставлен току намагничивания, возникающему под действием электромагнитного поля.

Рассчитан поверхностный импеданс металла с учетом СОВ, описаны обусловленные действием СОВ особенности формы линии спинового резонанса электронов проводимости. Показано, что спин-орбитальное взаимодействие в условиях СРЭП может оказывать значительное влияние на форму линии производной поглощаемой образцом мощности по магнитному полю. Исследовано влияние СОВ на показатель асимметрии линии производной поглощаемой образцом мощности по магнитному полю, в результате чего продемонстрировано, что прецизионные измерения формы линии СРЭП могут дать информацию о величине СОВ в исследуемом металле.

Показано, что СОВ может приводить к эффекту усиления селективной спиновой прозрачности — эффекту, заключающемуся в росте амплитуды медленно затухающей части электрического поля, возникающей из-за диффузионного переноса неравновесной спиновой плотности электронов проводимости вглубь металла на расстояния, существенно превышающие глубину скин-слоя.

Исследовано влияние СОВ на плотность потока энергии электромагнитного поля, проникающего в металл. Показано, что в полуграниченном немагнитном металле может возникать обусловленная СОВ инверсия направления потока энергии электромагнитной волны — эффект, заключающийся в возникновении в глубине металла потока энергии электромагнитного поля, направленного к поверхности металла. Природа этого эффекта заключается

в том, что спиновый ток, индуцируемый в металле электромагнитной волной под влиянием СОВ, в условиях действия обратного спинового эффекта Холла порождает дополнительный электрический ток, вектор плотности которого направлен против вектора плотности тока намагничивания, а модуль вектора которого превышает таковой тока намагничивания.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания МИНОБРНАУКИ России (тема «Спин», № 122021000036-3). И. А. Ясюлевич благодарит Институт физики металлов им. М. Н. Михеева за поддержку его работы по государственному заданию МИНОБРНАУКИ России по теме «Спин», которая выполнялась в рамках молодежного проекта ИФМ УрО РАН № м 2-23.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, УФН **87**, 389 (1965).
2. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, УФН **89**, 367 (1966).
3. Э. А. Канер, В. Ф. Гантмахер, УФН **94**, 193 (1968).
4. М. И. Дьяконов, В. И. Перель, Письма в ЖЭТФ **13**, 657 (1971).
5. M. I. Dyakonov and V. I. Perel, Phys. Lett. A **35**, 459 (1971).
6. J.-N. Chazalviel, Phys. Rev. B **11**, 3918 (1975).
7. J. E. Hirsch, Phys. Rev. Lett. **83**, 1834 (1999).
8. S. Zhang, Phys. Rev. Lett. **85**, 393 (2000).
9. A. Hoffmann, IEEE Trans. Magn. **49**, 5172 (2013).
10. Y. Niimi and Y. Otani, Rep. Prog. Phys. **78**, 124501 (2015).
11. J. Sinova, S. O. Valenzuela, J. Wunderlich, C. H. Back, and T. Jungwirth, Rev. Mod. Phys. **87**, 1213 (2015).
12. *Spin Physics in Semiconductors*, ed. by M. I. Dyakonov, Springer Int. Publ., Cham (2017), p. 532.
13. F. J. Dyson, Phys. Rev. **98**, 349 (1955).
14. I. M. Lifshitz, M. Ya. Azbel', and V. I. Gerasimenko, J. Phys. Chem. Solids **1**, 164 (1956).
15. М. Я. Азбель, В. И. Герасименко, И. М. Лифшиц, ЖЭТФ **32**, 1212 (1957).
16. М. Я. Азбель, В. И. Герасименко, И. М. Лифшиц, ЖЭТФ **31**, 357 (1957).
17. M. Lampe and P. M. Platzman, Phys. Rev. **150**, 340 (1966).
18. M. B. Walker, Can. J. Phys. **48**, 111 (1970).
19. M. B. Walker, Phys. Rev. B **3**, 30 (1971).
20. Б. М. Хабибуллин, Э. Г. Харахашьян, УФН **111**, 483 (1973).
21. W. S. Glaunsinger and M. J. Sienko, J. Magn. Reson. **1969** **10**, 253 (1973).
22. В. В. Устинов, Физ. мет. и металловед. **45**, 473 (1978).
23. V. V. Ustinov and D. Z. Khusainov, Phys. Status Solidi B **110**, 363 (1982).
24. T. W. Griswold, A. F. Kip, and C. Kittel, Phys. Rev. **88**, 951 (1952).
25. G. Feher and A. F. Kip, Phys. Rev. **98**, 337 (1955).
26. J. Konopka, Phys. Lett. A **26**, 29 (1967).
27. J. H. Pifer and R. Magno, Phys. Rev. B **3**, 663 (1971).
28. R. Magno and J. H. Pifer, Phys. Rev. B **10**, 3727 (1974).
29. P. Damay and M. J. Sienko, Phys. Rev. B **13**, 603 (1976).
30. J. E. Wertz and J. R. Bolton, *Electron Spin Resonance: Elementary Theory and Practical Applications*, Chapman and Hall, New York (1986), p. 500.
31. M. Fanciulli, T. Lei, and T. D. Moustakas, Phys. Rev. B **48**, 15144 (1993).
32. A. Janossy, O. Chauvet, S. Pekker, J. R. Cooper, and L. Forro, Phys. Rev. Lett. **71**, 1091 (1993).
33. M. Danilczuk, A. Lund, J. Sadlo, H. Yamada, and J. Michalik, Spectrochim. Acta A: Mol. Biomol. Spectrosc. **63**, 189 (2006).
34. K. Tadyszak, R. Strzelczyk, E. Coy, M. Mackowiak, and M. A. Augustyniak-Jablokow, Magn. Reson. Chem. **54**, 239 (2016).

35. P. G. Baranov, H. J. Von Bardeleben, F. Jelezko, and J. Wrachtrup, *Magnetic Resonance of Semiconductors and Their Nanostructures: Basic and Advanced Applications*, Springer Vienna, Vienna (2017), p. 524.
36. J. A. Bau, A.-H. Emwas, and M. Rueping, *iScience* **25**, 105360 (2022).
37. R. N. Edmonds, M. R. Harrison, and P. P. Edwards, *Annu. Rep. Sect. C Phys. Chem.* **82**, 265 (1985).
38. J. R. Asik, M. A. Ball, and C. P. Slichter, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 740 (1966).
39. J. R. Asik, M. A. Ball, and C. P. Slichter, *Phys. Rev.* **181**, 645 (1969).
40. M. A. Ball, J. R. Asik, and C. P. Slichter, *Phys. Rev.* **181**, 662 (1969).
41. J. H. Pifer, *Phys. Rev. B* **12**, 4391 (1975).
42. V. Zarifis and T. G. Castner, *Phys. Rev. B* **36**, 6198 (1987).
43. V. Zarifis and T. G. Castner, *Phys. Rev. B* **57**, 14600 (1998).
44. Р. Б. Моргунов, А. И. Дмитриев, Ф. Б. Мушенок, О. Л. Казакова, *Физика и техника полупроводников* **43**, 928 (2009).
45. P. S. Alekseev and M. I. Dyakonov, *Phys. Rev. B* **100**, 081301 (2019).
46. В. В. Устинов, И. А. Ясюлевич, *Физ. мет. и металловед.* **121**, 257 (2020).
47. V. V. Ustinov and I. A. Yasyulevich, *Phys. Rev. B* **102**, 134431 (2020).
48. V. V. Ustinov, I. A. Yasyulevich, and N. G. Bebenin, *Phys. Met. Met.* **124**, 1745 (2023).
49. N. S. VanderVen and R. T. Schumacher, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 695 (1964).
50. R. B. Lewis and T. R. Carver, *Phys. Rev.* **155**, 309 (1967).
51. Л. И. Медведев, Р. Г. Мустафин, И. Г. Замале-ев, Э. Г. Харахашьян, *Письма в ЖЭТФ* **38**, 232 (1983).
52. Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва (1979), т. 1, с. 399.
53. G. Fischer, H. Hoffmann, and J. Vancea, *Phys. Rev. B* **22**, 6065 (1980).

ПРОГРЕСС, ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ КОМНАТНО-ТЕМПЕРАТУРНОЙ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

И. А. Троян^a, Д. В. Семенов^b, А. В. Садаков^c, И. С. Любутин^a, В. М. Пудалов^{c,d}*

^a *Институт кристаллографии им. А. В. Шубникова,
Курчатовский комплекс кристаллографии и фотоники, НИЦ «Курчатовский институт»
Москва 119333, Россия*

^b *Center for High Pressure Science and Technology Advanced Research (HPSTAR)
Beijing 100094, China*

^c *Центр исследований высокотемпературной сверхпроводимости и квантовых материалов им. В. Л. Гинзбурга,
Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
Москва 119333, Россия*

^d *Научно-исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Москва 101000, Россия*

Поступила в редакцию 8 мая 2024 г.,
после переработки 14 мая 2024 г.
Принята к публикации 15 мая 2024 г.

Обнаружение сверхпроводимости при мегабарных (МБ) давлениях в сероводороде H_3S , затем в полигидридах металлов, начиная с бинарных, LaH_{10} и др., и заканчивая тройными, в том числе $(\text{La}, \text{Y})\text{H}_{10}$, произвело революцию в области физики конденсированного состояния. Эти открытия укрепляют надежду на решение столетней проблемы создания материалов, обладающих сверхпроводимостью при комнатной температуре. В экспериментах, выполненных при МБ-давлениях в последние 5 лет, помимо самого синтеза гидридов, их физические свойства исследовались с использованием методов оптической, рентгеновской и мессбауэровской спектроскопии, а также гальваномагнитных измерений. Мы приводим основные результаты гальваномагнитных измерений, включая измерения в сильных статических (до 21 Тл) и импульсных (до 70 Тл) магнитных полях. Измерения падения сопротивления до исчезающе малых значений при температурах ниже критической T_c , уменьшение критической температуры T_c с ростом магнитного поля, а также диамагнитное экранирование свидетельствуют о сверхпроводящем состоянии полигидридов. Результаты измерений изотопического эффекта, в совокупности с эффектом влияния магнитных примесей на T_c , свидетельствуют об электрон-фононном механизме спаривания электронов. Однако межэлектронные корреляции в полигидридах отнюдь не малы как в сверхпроводящем, так и в нормальном состояниях. Возможно, что именно с этим связаны необычные свойства полигидридов, не получившие пока удовлетворительного объяснения, такие как линейная температурная зависимость второго критического поля $H_{c2}(T)$, линейная зависимость сопротивления $\rho(T)$, а также линейное магнитосопротивление, весьма похожее на обнаруженное П. Л. Капицей в 1929 г.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S0044451024070083

Эту статью авторы посвящают памяти П. Л. Капицы, эксперименты которого в 1920-30-е годы стимулировали в России исследования в сильных магнитных полях и при низких температурах.

Один из авторов (В. М. П.) благодарен П. Л. Капице за возможность проработать несколько лет в незабываемой творческой атмосфере Института физических проблем.

* E-mail: pudalovvm@lebedev.ru

1. ИСТОРИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ. КРАТКАЯ ХРОНОЛОГИЯ ОТКРЫТИЙ

История сверхпроводимости (СП) началась с ожижения в 1908 г. Камерлингом-Оннесом гелия и последующего (1911 г.) обнаружения им исчезновения сопротивления в ртутной проволоке, погруженной в жидкий гелий.

В последовавшие полсотни лет, вплоть до 1960-х годов прошлого столетия было открыто множество сверхпроводящих металлов и интерметаллических сверхпроводящих соединений. Наиболее широко применяемые интерметаллиды NbTi ($T_c = 9.8$ К) и Nb₃Sn ($T_c = 18$ К) являются представителями сверхпроводников второго рода, открытого Л. В. Шубниковым в 1930-е годы. Наконец, в 1986 г. К. Мюллер и Г. Беднорц открыли сверхпроводимость в керамических соединениях на основе оксида меди. В этом классе соединений рекордно высокая $T_c = 138$ К принадлежит соединению HgBaCaCuO(F), в то время как для широкого применения на практике используются YBa₂Cu₃O_{7-x} и GdBa₂Cu₃O_{7-x}, которые имеют критическую температуру ~ 93 К.

Самый известный и распространенный механизм куперовского спаривания электронов за счет электрон-фононного взаимодействия, очевидно, приводит к зависимости T_c от массы атомов кристаллической решетки. Поскольку наиболее легкий элемент — водород, внимание исследователей давно было сфокусировано именно на нем. Возможность перехода в металл сильно сжатого водорода была впервые предположена в 1935 г. [1], а в 1968 г. Ашкрофт [2], а затем в 1989 г. Барби с соавторами [3] предсказали, что критическая температура перехода металлической фазы водорода в СП-состояние может достигать порядка 200–400 К. Атомарный металлический водород в твердом виде пока не удается получить в статических условиях, так как для этой цели требуются гигантские давления порядка 400–500 ГПа.

В 2004 г. Ашкрофт предложил, что богатые водородом соединения могут иметь высокие критические температуры [4], а требуемые для этого давления должны быть существенно более низкими, чем давления, необходимые для перевода водорода в металлическое сверхпроводящее состояние. В 2006 г. в работе [5] была предсказана высокотемпературная сверхпроводимость в силане SiH₄. Данное предсказание подтвердилось лишь частично: силан действительно демонстрировал сверхпроводящее состояние при давлении 100 ГПа, однако его

критическая температура оказалась всего лишь 17 К [6]. Тем не менее, предложение Ашкрофта стимулировало интенсивные экспериментальные поиски сверхпроводящих гидридов, которые увенчались в 2015 г. открытием сверхпроводимости в H₃S группой М. Е. Еремца [7, 8]. Повышение критической температуры ($T_c = 205$ К) более чем на 60 К по сравнению с достигаемой в оксидах меди продемонстрировало потенциальные возможности сверхпроводящих гидридов и дало мощный импульс их дальнейшим исследованиям.

На сегодняшний день открыты уже множество гидридов металлов, которые при высоком давлении становятся сверхпроводящими с критическими температурами вплоть до 250–260 К, в результате сверхпроводимость полигидридов сформировалась как отдельная и интереснейшая область исследований.

2. КЛЮЧЕВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПОЛИГИДРИДОВ

2.1. Исчезновение электрического сопротивления

В гидридах лантана, иттрия, тория и др. наблюдается резкое падение электрического сопротивления при понижении температуры ниже критической T_c , при этом значение T_c зависит от давления. При использовании 4-х зондового метода измерение сопротивления при $T < T_c$ дает значение на уровне шума, менее 0.1 мОм [9, 10] (рис. 1).

Приложение внешнего магнитного поля уменьшает температуру сверхпроводящего перехода, а также уширяет сам переход. Ввиду крайне высоких значений верхнего критического магнитного поля (которое разрушает сверхпроводимость) уширение становится заметным, начиная лишь с больших полей. Рисунок 2 демонстрирует влияние магнитного поля на сверхпроводящий переход в (La, Y)H₁₀ [9].

2.2. Изотопический эффект

Одним из важнейших результатов, указывающих на электрон-фононный механизм сверхпроводимости в гидридах, является изотопический эффект. Этот эффект проявляется в уменьшении температуры сверхпроводящего перехода при замене водорода на более тяжелые атомы дейтерия в структуре соединения. Такой эффект наблюдался для H₃S [7], LaH₁₀ [11], YH₆ [12], YH₉ [13], CeH₉₋₁₀ [14]

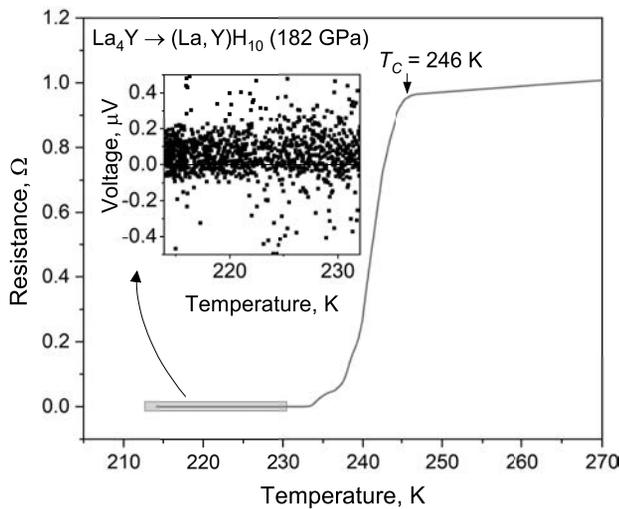


Рис. 1. Температурная зависимость сопротивления при сверхпроводящем переходе в $(\text{La}, \text{Y})\text{H}_{10}$ при давлении 182 ГПа. Вставка показывает в увеличенном масштабе падение напряжения на потенциальных контактах в сверхпроводящем состоянии при измерительном токе 1 мА

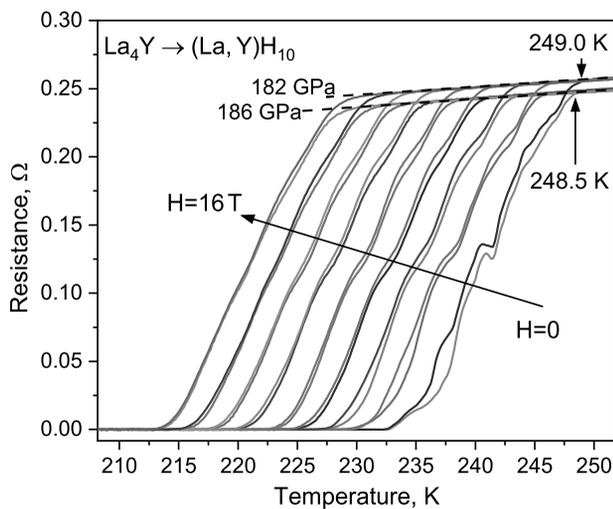


Рис. 2. Изменение температурной зависимости сопротивления во внешнем магнитном поле ниже критического значения в $(\text{La}, \text{Y})\text{H}_{10}$. Результаты показаны для двух значений давления, 182 и 186 ГПа. Внешнее магнитное поле изменяется (по стрелке, справа налево) от 0 до 16 Тл ступенями по 2 Тл, Цифры с вертикальными стрелками вверх кривых отмечают значения критической температуры при $H = 0$ для 2-х значение давления. Адаптировано из работы [9]

и ряда других соединений. Во всех случаях изотопический коэффициент $\alpha = -\ln(T_c)/\ln(M)$, где M — масса атома, находится в пределах $-0.3 - 0.6$, в разумном согласии с предсказанием теории БКШ

($\alpha = -0.5$).

Определенную сложность в анализ вносит тот факт, что ионный радиус и энергия связей дейтерия и водорода отличаются, а пределы стабильности на шкале давлений и области искажения структур гидридов и дейтеридов не совпадают в еще большей степени. По этой причине сравнение значений T_c для гидридов и дейтеридов при одном и том же давлении иногда является некорректным, так как они могут иметь разную кристаллическую структуру. Другим фактором, осложняющим сравнение, является существенно меньшее влияние ангармонизма на сверхпроводимость в дейтеридах.

В целом, дейтериды проявляют те же свойства, что и гидриды, а именно, сверхпроводящий переход смещается в зависимости от приложенного магнитного поля; верхнее критическое поле $H_{c2}(0)$, будучи пропорциональным T_c , в дейтеридах, как правило, существенно меньше, чем в гидридах, наконец, существует критический ток, значение которого также зависит от магнитного поля. При снижении давления критическая температура СП-перехода в дейтеридах заметно снижается, а затем соединение разлагается с образованием низших дейтеридов и D_2 [10].

В качестве примера, на рис. 3 показано, что критическая температура снижается при замене водорода на более тяжелый элемент, и это соотношение выполняется в широком диапазоне давлений от 175 до 250 ГПа.

2.3. Влияние магнитных и немагнитных примесей на критическую температуру

2.3.1. Магнитные примеси

Введение примесей в сверхпроводник является важным инструментом изучения симметрии и механизма спаривания. Согласно теореме Андерсона [15, 16], немагнитные примеси не оказывают влияния на изотропный синглетный s -волновой параметр порядка в обычных сверхпроводниках БКШ-типа [17], тогда как рассеяние на парамагнитных центрах эффективно разрушает спаривание s -волнового типа [16, 18].

В работе [19] была синтезирована серия тройных полигидридов состава $(\text{La}, \text{Nd})\text{H}_{10}$, содержащих 8–20 ат. % Nd. Ионы Nd^{3+} имеют внешнюю электронную оболочку $4f^3$ и магнитный момент $3.62 \mu_B/\text{атом}$. Поскольку атомы Nd случайно расположены в решетке, их можно рассматривать как парамагнитные примеси. Основная идея данного эксперимента состояла в том, что Nd должен эффек-

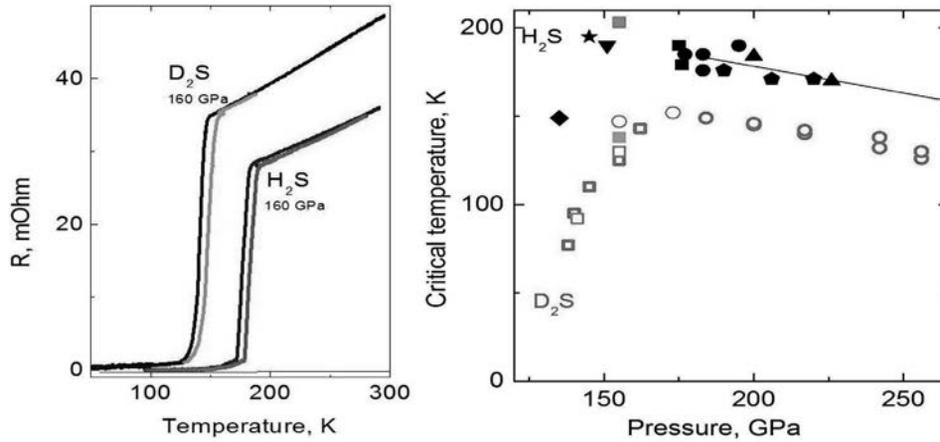


Рис. 3. Кривые сверхпроводящего перехода по сопротивлению (левая панель) и зависимости критической температуры от давления (правая панель) для H_2S и D_2S . Адаптировано из работы [7]

тивно подавлять сверхпроводимость в LaH_{10} , тогда как его структура $Fm\bar{3}m$ остается практически неизменной из-за большого сходства физических свойств атомов La и Nd.

Для малой концентрации магнитных примесей, $x \ll 1$, теория Абрикосова – Горькова предсказывает линейную зависимость T_c от концентрации x [16,18]:

$$T_c(0) - T_c(x) = \frac{\pi\hbar}{4k_B\tau}x, \quad (1)$$

где τ — время столкновений при рассеянии на случайном примесном потенциале.

В случае $(La, Nd)H_{10}$ значение $\tau \approx 5.4 \cdot 10^{-15}c$ [19]. Согласно (1), каждый процент содержания примеси Nd должен понижать T_c в LaH_{10} на $\Delta T_c \approx 10$ К, или, в относительных единицах, $\Delta T_c(1\%Nd)/T_c(LaH_{10}) = 0.044$. Сопоставляя это с экспериментальными данными, показанными на рис. 4, мы видим неплохое согласие предсказаний теории с экспериментальными данными. Установлено, что сверхпроводимость полностью исчезает приблизительно при 20-% содержании примеси Nd (см. [19], Supporting Materials).

Для сопоставления с обычными низкотемпературными БКШ-сверхпроводниками отметим, что в работе [20] также изучалось подавление сверхпроводимости металлического La при введении магнитных примесей Eu и Gd. Было найдено согласие с теорией [18], если учитывать поправки на уменьшенное сечение рассеяния на примесях Eu по сравнению с примесями Gd (за счет меньшего обменного интеграла перекрытия $4f-5d$ -состояний).

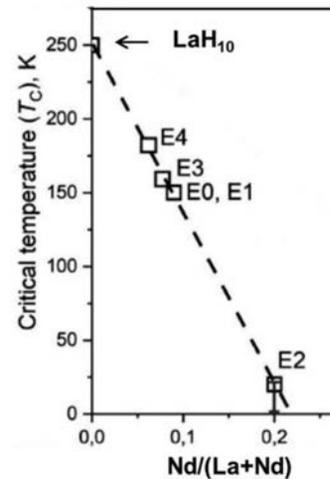


Рис. 4. Зависимость критической температуры $(La, Nd)H_{10}$ от относительной концентрации примесей Nd. Стрелкой отмечено значение T_c для стехиометрического LaH_{10} . Адаптировано из работы [19]

2.3.2. Немагнитные примеси

Что касается немагнитных примесей, известно, что введение небольшой концентрации углерода в La не влияет на критическую температуру сверхпроводимости в $C:LaH_{10}$, $T_c \approx 245$ К (см. замечание в работе [19]). Многочисленные эксперименты со сборкой камеры высокого давления на воздухе с металлами Y, La Y, La Nd, при неизбежном присутствии пленки окисла на поверхности металлов, качественно подтверждают отсутствие влияния немагнитных примесей кислорода на критическую температуру гидридов.

Еще одним примером является недавняя работа по введению серы в полигидриды иттрия [21], в результате которого авторами были обнаружены ступеньки на температурной зависимости электрического сопротивления, соответствующие $T_c = 235$ К и около 210–215 К. Эти значения согласуются с ранее полученными результатами для YH_6 и YH_9 , указывая на отсутствие влияния немагнитной серы на критическую температуру гидридов иттрия. Косвенным подтверждением отсутствия влияния немагнитных примесей являются также почти одинаковые значения $T_c = (176 - 203)$ К в соединениях $R\bar{3}m-(La, Y)H_{20}$ и $Pm\bar{3}m-(La, Y)H_{12}$ (см. табл. 2 в работе [19]), отличающихся, в данном контексте, концентрацией немагнитных атомов.

Наиболее важным влиянием примесей на полигидриды является изменение области их динамической и термодинамической стабильности. Ярким примером является синтез гидридов лантана-церия $(La, Ce)H_{9-10}$, которые демонстрируют в настоящий момент наиболее высокую T_c при наиболее низком давлении: $T_c > 200$ К при 100 ГПа [22, 23].

Среди патологических сообщений (о материалах, которые теперь принято называть «неопознанные сверхпроводящие объекты», USO) отметим недавнее объявление о «чудотворном» влиянии допирования углеродом на сверхпроводимость H_3S [24]. Последующие экспериментальные работы не подтвердили данный результат [25, 26], анализ самих экспериментальных данных выявил их поддельность [27], и соответствующее сообщение было изъято из журнала.

Отдельно следует обсудить соединение LuH_xN_y . Сообщение о том, что это соединение при легировании немагнитными атомами азота переходит в сверхпроводящее состояния с $T_c = 294$ К при давлении всего 10 кБар [28] также оказалось недостоверным. Оно было опровергнуто последующими работами и соответствующая статья была изъята [29].

Однако интересным является теоретически предсказываемый позитивный результат легирования на величину T_c . Согласно расчетам зонной структуры [30], он достигается при внедрении атомов азота не в случайные, а в правильные позиции кристаллической решетки, замещая 1/4 атомов водорода. В результате такого специального замещения уровень Ферми в $LuH_{2.75}N_{0.25}$ понижается на ≈ 1.8 эВ по сравнению с LuH_3 . Одновременно плотность состояний на уровне Ферми возрастает почти вдвое. Остается, однако, неясным, осуществимо ли такое замещение на практике.

2.4. Эффект Мейснера и диамагнитное экранирование

Измерения падения электрического сопротивления (рис. 1, 5) являются необходимыми, но не достаточными для доказательства существования сверхпроводимости. Помимо них необходимо прямое наблюдение эффекта выталкивания магнитного поля из объема образца (эффект Мейснера) во внешнем магнитном поле. Однако измерения эффекта Мейснера с помощью SQUID магнитометра или индуктивным методом при давлениях выше 130 ГПа затруднительны, так сигнал от образца, находящегося в камере с алмазными наковальнями, как правило, на порядки меньше сигнала от материалов, из которых изготовлены камера и гаскета. Тем не менее, эксперименты по наблюдению диамагнитного экранирования в гидридах были выполнены с помощью СКВИД-магнитометрии [8, 31–35], измерений магнитной восприимчивости на переменном токе [32, 33] и мессбауэровской спектроскопии [36].

Во всех экспериментах до сих пор удавалось наблюдать лишь отсутствие магнитного поля в объеме образца, предварительно охлажденного в нулевом поле (режим ZFC). Очевидно, это является проявлением эффекта «диамагнитного экранирования». По отмеченной выше причине до сих пор еще не удалось наблюдать истинное выталкивание магнитного поля из образца при охлаждении его в присутствии поля (FC) [37]. Следует отметить, что в то время как сверхпроводящий переход ярко выражен в измерениях ZFC, его признаки едва различимы или почти не обнаруживаются при измерениях с охлаждением в магнитном поле (FC) [31].

Помимо технических проблем, связанных с магнитными измерениями в камерах с алмазными наковальнями, есть еще и особенности в вытеснении слабого магнитного потока в сверхпроводниках второго рода, связанные с сильным пиннингом вихрей [38]. Сильный пиннинг препятствует продвижению вихрей внутрь образца и выходу из него ниже значения $H_{c1}(T)$. Как показано в работах [39, 40], в сверхпроводнике второго рода (каковыми, безусловно, являются СП-гидриды) вихри Абрикосова и магнитное поле в центре образца отсутствуют, пока внешнее поле меньше поля полного проникновения H_p . Соответствующий анализ этого эффекта для конкретных измерений с H_3S был проведен в работе [10]. Было показано, что в диапазоне полей $H_{c1} < H < H_p$ распределение вихрей Абрикосова в образце должно быть неоднородным, как у всех сверхпроводников второго рода, и плотность магнитного потока умень-

шается от краев образца к центру. Поэтому формулы для однородного поля неприменимы к таким экспериментам, так как используют завышенную оценку H_{c1} . Полученные в результате анализа [10] значения H_{c1} и критического тока j_c для H_3S вполне соответствуют аналогичным параметрам для других сверхпроводников второго рода.

В работе [36] была использована иная методика детектирования диамагнитных свойств сверхпроводящего сероводорода, находящегося при высоких давлениях, а именно, мессбауэровская спектроскопия [41, 42]. Детектором магнитного поля являлась тонкая оловянная фольга, обогащенная мессбауэровским изотопом Sn-119. Магнитные моменты ядер Sn-119 на порядок больше, чем у традиционно используемого мессбауэровского изотопа железа Fe-57, поэтому ядра Sn-119 более чувствительны к магнитному окружению, чем ядра Fe-57. При ядерном гамма-резонансе регистрируются мессбауэровские спектры при переходах между ядерными уровнями основного и возбужденного состояний ядер Sn-119 со спином $1/2$ и $3/2$, соответственно.

Синхротронные эксперименты были выполнены в режиме ядерного резонансного рассеяния вперед (Nuclear Resonance Forward Scattering — NRS или NFS) для двух направлений магнитного поля — параллельно и перпендикулярно плоскости образца. В этом режиме синхротронное излучение состоит из пикосекундных импульсов, временной интервал между которыми может достигать 800 нс и более. За этот период регистрируется затухание во времени излучения от ядер мессбауэровского изотопа после импульсного резонансного возбуждения. При этом форма спектров зависит от магнитного состояния образца. В отсутствие магнитного поля на образце сигнал ядерного рассеяния имеет экспоненциально затухающую форму. В присутствии магнитного поля появляются так называемые квантовые биения, обусловленные интерференцией излучения при переходах между основным и возбужденным состояниями ядер Sn-119, расщепленными магнитным полем. В спектрах резонансного ядерного рассеяния это проявляется в виде осцилляций амплитуды сигнала.

В этих измерениях [36] мессбауэровский датчик показывал величину магнитного поля, которое проникло в образец при данной температуре. Было установлено, что в интервале температур 4.7–90 К сверхпроводник H_3S полностью экранирует мессбауэровский датчик от магнитного поля. Выше этой температуры внешнее магнитное поле частично проникает в образец, однако полное проникновение по-

ля происходит лишь выше 145 К. Полученные данные подтверждают эффект диамагнитного экранирования в H_3S магнитного поля 0.7 Тл до температур 90–100 К. Частичное экранирование магнитного поля сохраняется примерно до 145 К. Это подтверждает, что гидрид серы H_3S , сжатый до 150 ГПа, является сверхпроводником второго рода с очень высокими критическими параметрами.

При анализе результатов исследования диамагнитного экранирования в образцах LaH_{10} и H_3S с использованием СКВИД-магнетометра нужно учесть, что образцы гидридов, вероятно, пористые и состоят из микроскопических зерен (порядка 0.05–0.5 мкм). В этом случае коэффициент размагничивания N должен вычисляться для случайной упаковки сферических частиц и составляет от 0.33 до 0.5 [43, 44]. Магнитное поле проникает в образец между отдельными зернами, поэтому не наблюдается изменения намагниченности образца при температурах около T_c при охлаждении в поле (FC). Таким образом, найденные значения поля проникновения $H_p(0) = 96$ мТл для H_3S и 41 мТл для LaH_{10} являются нижней границей $H_{c1}(0)$, а более реалистичная оценка дает $H_{c1}(0) \sim H_p(0)/(1-N) = (1.5-2) \cdot H_p(0)$.

3. НЕОБЫЧНЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ СВОЙСТВА ГИДРИДОВ В S И N СОСТОЯНИЯХ

3.1. Верхнее критическое поле

В теории Гинзбурга–Ландау [45] верхнее критическое поле равно

$$H_{c2}(T=0) = \frac{\phi_0}{2\pi\xi_0^2}, \quad (2)$$

где ϕ_0 — квант магнитного потока и ξ_0 — длина когерентности.

Ввиду крайне высоких значений верхнего критического поля $H_{c2}(T=0)$, влияние магнитного поля на сверхпроводящий переход в гидридах удастся проследить, как правило, лишь в области высоких температур, вблизи T_c . Для изучения зависимости $H_{c2}(T)$ в более широком диапазоне нормированных значений T/T_c в работе [46] было исследовано соединение SnH_4 со сравнительно низким значением $T_c \approx 72$ К (см. рис. 5 и 6). Одной из возможных причин столь низкого значения T_c является малая плотность электронных состояний на уровне Ферми [46].

Температурная зависимость H_{c2} , измеренная в постоянном поле сверхпроводящего магнита, показана на рис. 6 а. При $T \rightarrow 0$ эта зависимость экстраполируется к $H_{c2}(T=0) \approx 16$ Тл; столь низкое

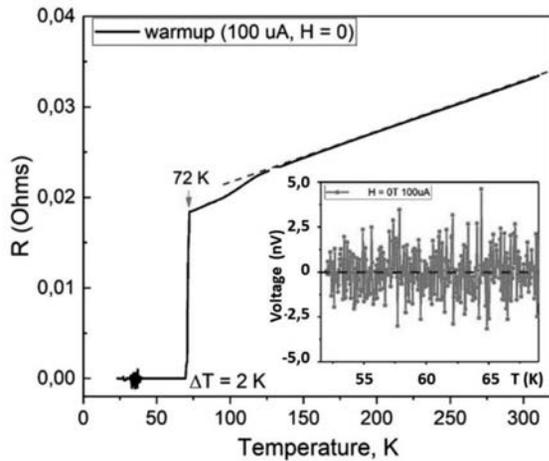


Рис. 5. Кривая сверхпроводящего перехода по сопротивлению для гидрида олова при давлении 180 ГПа. Вставка — падение напряжения между потенциальными контактами к образцу в сверхпроводящем состоянии при измерительном токе 100 мкА. Адаптировано из работы [46]

значение $H_{c2}(0)$ позволило измерить данную зависимость во всем интервале полей, от 0 до $H_{c2}(T=0)$. Уширение перехода по температуре, показанное на рис. 6 *b*, иллюстрирует сказанное выше о том, что $\Delta T_c/T_c$ в малых полях изменяется слабо, но затем резко возрастает по мере увеличения поля.

Наиболее интересным и необычным результатом является функциональная зависимость $H_{c2}(T)$: она практически линейна во всем диапазоне температур вплоть до T_c . При измерениях в импульсном поле до 68 Тл также была обнаружена линейная зависимость $H_{c2}(T) \propto (T_c - T)$ [19]. Для сверхпроводников, описываемых теорией Бардина – Купера – Шриффера (BCS), общепринятой моделью зависимости $H_{c2}(T)$ является модель Вертхамера – Гельфанда – Хоэнберга (WHH), которая предсказывает уплощение $H_{c2}(T)$ зависимости при низких температурах [47].

Линейная зависимость $H_{c2}(T)$ присуща не только SnH_4 , она наблюдается во многих других полигидридах, например, в YN_4 , LaH_x и др. Подобная линейная или квазилинейная зависимость $H_{c2}(T)$ наблюдалась также в пниктидах железа [48–50], и в ряде случаев ее удавалось объяснить присутствием нескольких сверхпроводящих щелей в спектре [48–51]. Пример попытки описания измеренной зависимости $H_{c2}(T)$ в рамках двухкомпонентной так называемой альфа-модели сверхпроводящего конденсата показан на рис. 7 (см. [46], Supplementary Information).

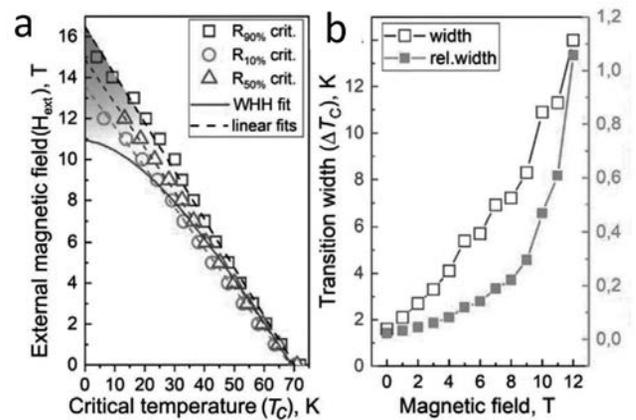


Рис. 6. *a* — Зависимость верхнего критического поля от температуры для SnH_4 при использовании трех различных критериев определения значения H_{c2} ; сплошная линия показывает приближение по формуле WHH [47]. *b* — Зависимость ширины перехода ΔT_c и относительного уширения перехода $\Delta T_c/T_c$ от магнитного поля. Адаптировано из работы [46]

Действительно, для большинства полигидридов, вследствие большого количества электронов на ячейку, заполненными оказываются много зон и поверхность Ферми (ПФ) является многозонной. Кроме того, для ряда полигидридов (LaH_{10} , YN_{10} , YN_9) теоретически предсказано существование двухкомпонентного СП-конденсата [52–54]. Однако такое объяснение не является универсальным, поскольку сверхпроводимость, например, в CaH_6 , согласно теоретическим результатам [55], является однощелевой.

Альтернативным объяснением линейной зависимости $H_{c2}(T)$ может быть мезоскопическая неоднородность образцов, в объеме которых присутствуют области с несколько различным составом и различными значениями T_c и H_{c2} [19, 56, 57]. Действительно, несмотря на то, что резкое падение сопротивления при сверхпроводящем переходе, а также проводимый экспериментаторами рентгеновский анализ свидетельствуют о макроскопической однородности СП-гидридов, существование неоднородностей на мезоскопических масштабах нельзя исключить. Теоретические модели полностью не объясняют линейную зависимость $H_{c2}(T)$. Более того, в работе [56] предсказывается некоторое спрямление стандартной БКШ-зависимости вследствие появления участка с положительной кривизной на зависимости $T_c(H)$. В модели [57] предсказывается увеличение H_{c2} при $T \rightarrow 0$. До тех пор, пока сверхпроводящие области в объеме образца связаны джозефсо-

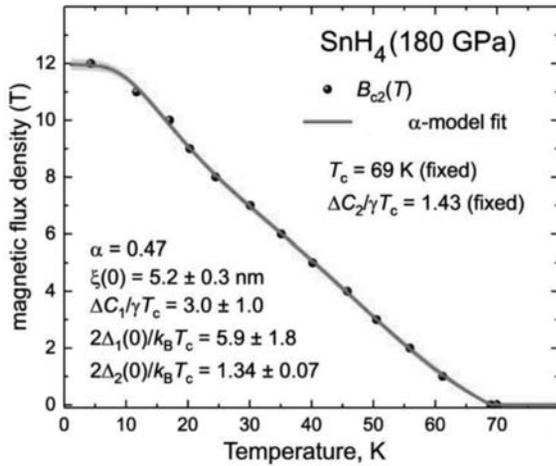


Рис. 7. Пример аппроксимации измеренной зависимости $H_{c2}(T)$ в рамках двухкомпонентной так называемой альфа-модели СП-конденсата. Параметры модели указаны на рисунке. Адаптировано из [46], Supplemental information

новской туннельной связью, сверхпроводимость будет проявляться в объеме образца.

Линейная зависимость $H_{c2}(T)$ ранее наблюдалась в пленках InO, и для ее объяснения в работе [58] было выдвинуто предложение о том, что СП-состояние является состоянием вихревого стекла, тепловые флуктуации в котором приводят к такой зависимости. Для СП-гидридов скейлинговый анализ критического тока в ThH₁₀ [59] выявил зависимость $j_c \propto (1 - T/T_g)^{1.6}$, где T_g интерпретировалась как температура перехода в состояние вихревого стекла. Зависимость с таким показателем степени не противоречит результату теории Гинзбурга–Ландау $j_c \propto \rho_s/\xi_{GL} \propto (1 - T/T_c)^{3/2}$, однако подобная интерпретация и ее применимость к результатам для полигидридов требуют более подробного изучения.

Отметим также, что для типичного гидрида CeH_{9–10} температура Ферми $T_F \approx 6.5 \cdot 10^4$ К. Поэтому отношение $T_c/T_F \sim 1.5 \cdot 10^{-3}$ не мало, в отличие от простых сверхпроводящих металлов (например, Sn, In и т. д.), у которых это отношение $\sim 10^{-5}$. Для более высокотемпературных гидридов отношение T_c/T_F скорее близко к сверхпроводникам на основе пниктидов железа и купратным сверхпроводникам. Точно так же не мало и отношение $2\Delta(0)/T_c \approx 4$ [60]. По этим причинам СП-гидриды следует рассматривать как сверхпроводники с умеренно сильной связью.

3.2. Линейная температурная зависимость сопротивления

В нормальном состоянии транспортные свойства СП-гидридов также пока не вполне понятны. Во

многих гидридах в широком диапазоне температур $T > T_c$ в отсутствие магнитного поля наблюдается линейная температурная зависимость сопротивления: эта зависимость видна на рис. 5 в диапазоне $T = 120 - 320$ К.

Аналогичная температурная зависимость $R(T)$ наблюдалась в LaH₁₀ [19, 61], в CeH_{9–10} [62] и в ряде других гидридов. Во всех случаях она является линейной, например, для CeH_{9–10} — в диапазоне $\sim 110 - 300$ К [62]. Также во всех этих случаях линейная зависимость сопротивления не может быть аппроксимирована зависимостью Блоха–Грюнайзена [63] для рассеяния электронов на фононах. Действительно, попытка применения такой аппроксимации для SnH₄ приводит к нереалистично низкому значению температуры Дебая, приблизительно 100 К [46], которое противоречит фоновым спектрам гидридов с мощными пиками колебаний атомов водорода на высоких частотах.

Таланцев [60] успешно аппроксимировал $\rho(T)$ для (Ln, Nd)H₁₀ зависимостью T^5 и получил правдоподобную оценку значения $\theta_D = 1150$ К. Однако экспериментальные данные $\rho(T)$ для этого соединения слабо отличались от линейной зависимости, что делает результат аппроксимации мало надежным. Заметим, что во многих других случаях (пример показан на рис. 5) отличие измеренной $R(T)$ от линейной функции еще меньше. Например, для SnH₄ при аппроксимации экспериментальных данных $\rho(T)$ функцией $R = R_0 + AT^n$ с подгоночным параметром n в работе [46] было получено значение $n = 0.9$, что находится в противоречии с ожидаемым значением $n = 5$ (см. рис.22 в работе [46], Supplemental Materials).

Более того, если бы зависимость $R(T)$ в нулевом магнитном поле возникала вследствие рассеяния на фононах и описывалась формулой Блоха–Грюнайзена, то приложение магнитного поля не оказывало бы на нее никакого влияния. Действительно, магнитное поле не изменяет ни фоновый спектр, ни матричный элемент электрон-фононного рассеяния. Однако экспериментально установлено [64], что приложение поля 20 Тл к (La, Ce)H₁₀ при 148 ГПа меняет ситуацию и «выпрямляет» зависимость $R(T)$ до линейной, исключая тем самым возможность ее аппроксимации $\propto T^5$. Поэтому данный результат (спрямление $R(T, H \neq 0)$) указывает на нефоновый механизм линейной зависимости $R(T)$.

Известно не так много физических механизмов, которые приводят к линейной температурной зависимости сопротивления металлов. Для оценки их применимости заметим, что рассматриваемые

мые гидриды в нормальном состоянии имеют энергию Ферми $T_F \approx (3 - 10) \cdot 10^4$ К, концентрацию носителей $n = (20 - 60) \cdot 10^{21}$ см⁻³ и являются хорошими металлами, $E_F\tau/\hbar \gg 1$. Безразмерный параметр электрон-электронного взаимодействия $r_s = E_{ee}/E_F$ в нормальном состоянии для гидридов не мал, например, для CeH₉ [62] он составляет $r_s \approx 2.5$. Для сильнокоррелированного нормального металла положительная температурная зависимость $d\rho/dT > 0$, в принципе, может возникать за счет рассеяния на примесях с учетом электрон-электронного взаимодействия. Для оцененной выше концентрации ферми-жидкостная константа $F_0^a \approx -0.2$, поэтому ферми-жидкостные эффекты должны быть не малы [65]. Однако только для двумерного случая они приводят к линейной зависимости $\rho(T) \propto T$ [66] и только в баллистическом режиме взаимодействия $k_B T\tau/\hbar \gg 1$, тогда как для трехмерного случая — к зависимости $\propto T^{1/2}$ [65], которая не соответствует наблюдаемой линейной.

Для общности отметим, что линейная зависимость $\rho(T)$ существует в нормальном состоянии не только в гидридах, но и в других ВТСП-материалах — пниктидах железа (FeSe_{1-y}S_y), никелатах La₃Ni₂O₇ [67] и купратах (La_{2-x}Sr_xCuO₄) [68]. Во всех случаях она пока также не нашла удовлетворительного объяснения.

3.3. Линейное магнитосопротивление

Во многих полигидридах в нормальном состоянии в слабых магнитных полях электрическое сопротивление квадратично возрастает с ростом поля (см. рис. 8), что является типичным для многозонного металла (можно даже сказать, что такое магнитосопротивление указывает на многозонную ПФ). Однако при дальнейшем увеличении поля эта зависимость изменяется и сопротивление начинает линейно возрастать и продолжает так расти вплоть до максимальных значений поля, доступных в лаборатории.

Линейная зависимость магнитосопротивления от поля была обнаружена П. Л. Капицей в 1929 г. [69] для поликристаллических образцов. Дрейзин и Дыхне [70] объяснили линейное магнитосопротивление учетом рассеяния на границах кристаллитов в сильных магнитных полях $\omega_c\tau \gg 1$. Кроме этого, закон Капицы в поликристаллах возникает в результате усреднения по углам полярной диаграммы магнитосопротивления для тех металлов, у которых имеются открытые участки ПФ (например, Cu, Ag, Au, In, Pb). В гидридах наличие открытых участков

ПФ, действительно, следует из вычислений зонной структуры для ряда соединений, например, LaH₁₀ и YH₆ [71, 72], но экспериментально открытые участки ПФ пока не выявлены.

Кроме гидридов, линейная зависимость $R(H)$ наблюдается в квазидвумерных «плохих металлах» — SrZnSb₂ [73], в полуметаллах — Ni₃In₂S₂ [74], а также в ферромагнитном MnBi [75]. В соединениях с волной зарядовой плотности (CDW) и с неполным нестингом поверхности Ферми также наблюдается линейное магнитосопротивление при температурах ниже температуры установления CDW: в квазидвумерных соединениях (например, NbSe₃ [76]), в квазидвумерных дихалькогенидах переходных металлов (например, 2H-NbSe₂ и 2H-TaSe₂ [77]) и в трителлуридах редкоземельных металлов (например, TbTe₃ и HoTe₃ [78]). Такая зависимость связывается с рассеянием носителей заряда на флуктуациях параметра порядка CDW [78].

Полигидриды, однако, в нормальном состоянии являются хорошими металлами; им не присущи одномерный или двумерный характер спектра, так же как и ферромагнетизм. На температурной зависимости сопротивления полигидридов не наблюдаются признаки перехода в состояние CDW.

Наконец, линейное магнитосопротивление наблюдается в материалах с дираковским спектром, например, в графене, бесщелевых полупроводниках или слоистых полуметаллах с очень малой концентрацией носителей [79, 80], однако такой спектр и столь малая концентрация носителей также не присущи полигидридам.

Недавно было обнаружено, что многие полигидриды, например, La₄H₂₃ [81], CeH₁₀ [82], ThH₉ и (La, Ce)H₁₀ демонстрируют отрицательное магнитосопротивление выше сверхпроводящего перехода в сильных магнитных полях. Можно предположить, что такое поведение связано с наличием псевдощелевого состояния в гидридах, точно так же, как это наблюдается в купратных сверхпроводниках.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сверхпроводящие полигидриды с критическими температурами около комнатных значений, как совсем «молодые» материалы, привлекают пристальное внимание исследователей. Наиболее явными и допускающими простую интерпретацию являются результаты измерения транспортных и магнитных свойств. В многочисленных гальваномангнитных измерениях документированы и воспроизводились ре-

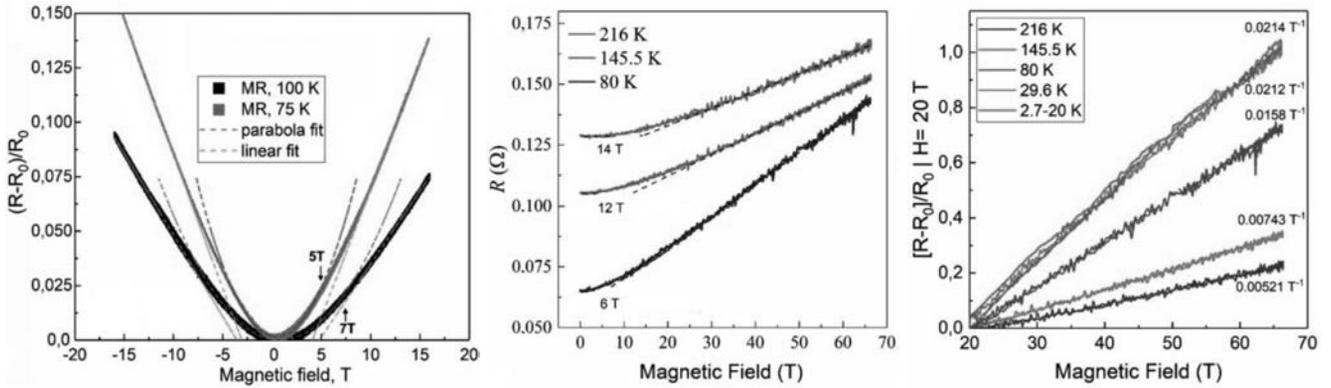


Рис. 8. Зависимость сопротивления SnH_4 от магнитного поля при 180 ГПа. $R(H)$ в слабых полях до 16 Тл при $T = 75$ и 100 К (левая панель). $R(H)$ в нормальном состоянии при $T > T_c = 70$ К (средняя панель). Линейная часть сопротивления, нормированная на значение в нулевом поле, отложенная в полях выше 20 Тл (правая панель). Цифры у кривых указывают наклон $\Delta R(H)/(R_0 H)$. Вследствие перегрева вихревыми токами в импульсном поле наименьшая температура образца достигает ≈ 20 К. Адаптировано из работы [46]

зультаты измерения падения сопротивления при температуре ниже критического значения T_c , указывающие на сверхпроводящий переход. При увеличении внешнего магнитного поля значение критической температуры снижается, а сверхпроводящий переход упирается, что также согласуется с такой интерпретацией.

В магнитных измерениях также неоднократно наблюдалось статическое диамагнитное экранирование при приложении внешнего поля к образцу, охлажденному в нулевом поле (ZFC). Эти эксперименты осуществлялись с помощью измерений магнитного момента и магнитной восприимчивости СКВИД-магнитометром и с помощью эффекта Мессбауэра — при использовании синхротронного излучения гамма-квантов. Ввиду технических сложностей измерений малого сигнала, к сожалению, пока не удалось надежно зарегистрировать выталкивание магнитного поля из объема образца при его охлаждении в магнитном поле (FC), т. е. истинный эффект Мейснера. Такие измерения были бы весьма важными для доказательства истинно сверхпроводящего состояния. Наблюдение изотопического эффекта в сверхпроводящих гидридах является убедительным свидетельством электрон-фононного механизма спаривания электронов. Эксперименты по влиянию рассеяния магнитными примесями на критическую температуру находятся в согласии с теорией Абрикосова–Ларкина и доказывают синглетный характер сверхпроводящего спаривания.

В результате перечисленных экспериментальных результатов, независимо воспроизведенных в нескольких лабораториях, в настоящее время при-

нято считать, что гидриды относятся к обычным сверхпроводникам с синглетным спариванием и с умеренно сильной связью. До недавнего времени считалось, что их поведение в нормальном состоянии может быть описано в рамках модели обычной ферми-жидкости.

Постепенно накапливающиеся экспериментальные данные ставят под сомнение эту точку зрения. Наиболее явными противоречиями со свойствами БКШ-сверхпроводников и нормальных металлов являются представленные в данной статье: (i) линейная зависимость второго критического поля от температуры, (ii) линейная температурная зависимость сопротивления в нормальном состоянии, (iii) линейное положительное магнитосопротивление в сильном магнитном поле $\omega_c \tau \gg 1$ и (iv) отрицательное магнитосопротивление в сильных магнитных полях.

Каждый из перечисленных эффектов, в принципе, встречался ранее для разных классов материалов и находил свое индивидуальное объяснение. Однако в совокупности эти аномальные свойства встречаются лишь у купратных ВТСП [83–85] и не находят пока удовлетворительного микроскопического объяснения. Такое состояние при $T > T_c$ в купратах феноменологически связывается с так называемым «странным металлом», а сверхпроводящее состояние при $T < T_c$ — со сверхпроводником с умеренно сильной связью.

Прогресс в синтезе новых сверхпроводящих гидридов происходит так быстро, что уместно задаться вопросом, существует ли предел повышения критической температуры сверхпроводимости. В начале

21 века В. Л. Гинзбург отвечал на этот вопрос отрицательно, имея в виду отсутствие теоретических ограничений на достижение критической температурой значения 293 К. Накопленные к настоящему времени данные позволяют сделать более четкую оценку. В рамках теории Элиашберга – МакМиллана для грязных сверхпроводников с сильной связью и фононным механизмом спаривания критическая температура зависит от трех параметров — «средней» частоты фононов $\langle\omega_{\log}\rangle$, константы электрон-фононного взаимодействия λ и кулоновского псевдопотенциала μ^* .

Согласно полуэмпирической формуле МакМиллана,

$$k_B T_c \approx \frac{\hbar\omega_{\log}}{1.2} \exp\left[-\frac{1.04(1+\lambda)}{\lambda - \mu^*(1+0.62\lambda)}\right]. \quad (3)$$

Эта формула, уточненная Алленом и Дайнсом для режима не слишком сильной связи $\lambda < 1.5$, с двумя поправочными функциями $f_1, f_2(\lambda, \omega_{\log}, \omega_2, \mu)$, имеет следующий вид [86]:

$$k_B T_c \approx f_1 f_2 \frac{\hbar\omega_{\log}}{1.2} \exp\left[-\frac{1.04(1+\lambda)}{\lambda - \mu^*(1+0.62\lambda)}\right], \quad (4)$$

где ω_{\log} — логарифмически средняя частота и ω_2 — среднеквадратичная частота.

Кулоновский псевдопотенциал μ^* в случае сильной связи уменьшается примерно вдвое вследствие ослабления кулоновского взаимодействия так называемым толмачевским логарифмом [87, 88]:

$$\mu^* = \frac{\mu}{1 + \mu \ln(E_F/\hbar\omega_D)}, \quad (5)$$

где μ — усредненный потенциал кулоновского взаимодействия электронов в металле, ω_D — характерная энергия фононов (например, дебаевская частота). В результате кулоновский псевдопотенциал принимает значения $\mu^* \approx 0.1 - 0.15$, определяемые из численных расчетов.

Константа электрон-фононного взаимодействия

$$\lambda = 2 \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 F(\omega)}{\omega} d\omega, \quad (6)$$

средняя логарифмическая частота

$$\omega_{\log} = \exp\left[\frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^2 F(\omega)}{\omega} \ln \omega d\omega\right] \quad (7)$$

и среднеквадратичная частота

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda} \int_0^{\omega_{\max}} \left[\frac{2\alpha^2 F(\omega)}{\omega}\right] \omega^2 d\omega} \quad (8)$$

вычисляются через спектральную функцию Элиашберга $\alpha^2 F(\omega)$.

Как видно из формул (4), (7), (8), важнейшим параметром является константа электрон-фононного взаимодействия λ . Гипотетически, в режиме предельно сильной связи $\lambda \gg 1$, экспоненциальная зависимость $T_c(\lambda)$ (4) должна превратиться в корневую $T_c \sim \lambda^{1/2} \tilde{\omega}$ [88], где $\tilde{\omega} = \langle\omega^2\rangle^{1/2}$. Однако максимальное значение λ может ограничиваться стабильностью системы и трансляционной инвариантностью решетки.

В литературе многократно обсуждались возможные ограничения на максимально допустимую величину λ_{max} , связанные с нарушением адиабатического приближения, теоремы Мигдала и теории Мигдала – Элиашберга в целом [89]. Первоначально, в рамках гамильтониана Фрелиха, было получено ограничение $\lambda < 0.5$ для обеспечения стабильности фононного спектра (положительности фононной частоты). Но это ограничение получено для неадиабатического случая $\hbar\tilde{\omega} \gg E_F$ [89], который не имеет отношения к большинству сверхпроводников. Аналогично этому, биполярная нестабильность при $\lambda \simeq 1$ [90] соответствует неадиабатическому случаю.

Другое ограничение, $\lambda = 2$, на первый взгляд, возникает из максимизации T_c по формуле МакМиллана (3), поскольку максимум T_c (т. е. $\partial T_c/\partial \lambda = 0$) достигается именно при $\lambda = 2$. Однако это ограничение — тоже кажущееся, поскольку сама формула справедлива только при $\lambda \leq 1.5$ [88]. К настоящему времени для многих полигидридов из численных расчетов были определены существенно большие значения λ , например, 1.84–2.3 (для H_3S , в зависимости от значения давления) [91, 92], 2.06 (для LaH_{10}) [94], 2.41 (для YH_{10}) [94], 2.76 (для LaH_{10}) [93, 95] и, наконец, 3.87 (также для $(\text{La}, \text{Y})\text{H}_{10}$) [96].

В рамках этого же подхода можно было бы заняться и обратной задачей — оптимизацией спектрального состава функции Элиашберга. Дело в том, что в гидридах $\alpha^2 F(\omega)$ имеет два мощных пика: пик на низких частотах, $\omega_1 \sim (5 - 10)$ ТГц, связан с акустическими колебаниями металлических атомов и почти не влияет на значение T_c , а высокочастотный пик, $\omega_2 \sim 60$ ТГц, связан с модами колебаний водорода [97, 98]. В этом контексте высокое давление способствует повышению частоты колебаний атомов водорода. Протяженная промежуточная спектральная область почти пуста, что негативно отражается на значениях ω_{\log} и T_c . Вычисленные значения средней логарифмической частоты для известных полигидридов составляют 1080 К (H_3S), 1340 К (YH_{10}), 1210 К (ThH_{10}), 1330 К (YH_6) [54]. В

качестве примера конструирования эффективной спектральной функции рассмотрим модельную прямоугольную функцию $\alpha^2 F(\omega) = \text{const} = a$ в интервале частот от $\omega_{(1)}$ до $\omega_{(2)}$ и равную 0 вне этого интервала. Тогда $\omega_{\log} = (\omega_{(1)}\omega_{(2)})^{1/2}$ и $\lambda = 2a \ln(\omega_{(2)}/\omega_{(1)}) = 3.6a \leq 3.6$.

Согласно современной теории, значение λ_{max} ограничивается нарушением трансляционной симметрии решетки и образованием щели вблизи уровня Ферми [99, 100]. В последней работе была получена наиболее «оптимистическая» численная оценка значения $\lambda_{max} \approx 3.0 - 3.7$, выше которого решетка теряет устойчивость. Как видно, эта оценка выводит рассматриваемую проблему далеко за пределы стандартной БКШ теории слабой связи $\lambda \ll 1$.

Из приведенного выше краткого исторического рассмотрения видно, что в экспериментально открываемых новых сверхпроводниках константа связи λ неоднократно превосходила теоретические пределы, которые оказывались связанными с ограниченной применимостью моделей. Заметим, что уже значения $\lambda \approx 3$ достаточно для получения сверхпроводимости при комнатной температуре.

Относительно максимальной возможной фононной частоты можно также привести оценку, основанную на максимальной скорости звука в кристаллах [101]:

$$\frac{v_s}{c} = \alpha \left(\frac{m_e}{2m_p} \right)^{1/2}, \quad (9)$$

где α — постоянная тонкой структуры, m_e , m_p — масса электрона и протона, соответственно. Отсюда получаем $v_s < 36.1 \cdot 10^5$ см/с и оценку на максимальное значение $\omega_{\log} \sim 2500$ К. Используя эти оценки на максимально возможные параметры получаем грубую оценку для $T_c^{max} \sim 600 - 900$ К.

Благодарности. Работа И. Т. частично поддержана грантом РФФ 22-12-00163. Д. С. выражает благодарность за финансовую поддержку исследований Национальному фонду естественных наук Китая (NSFC, грант № 1231101238) и Пекинскому фонду естественных наук (грант № IS23017). Измерения проведены с использованием оборудования ЦКП ФИАН. Исследования выполнены в рамках государственных заданий НИЦ «Курчатовский институт» и ФИАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Wigner and H. B. Huntington, *J. Chem. Phys.* **3**, 764 (1935).
2. N. W. Ashcroft, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1748 (1968).
3. T. W. Barbee et al., *Nature* **340**, 369 (1989).
4. N. W. Ashcroft, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 187002 (2004).
5. J. Feng, W. Grochala, T. Jaron, R. Hoffmann, A. Bergara, and N. W. Ashcroft, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 017006 (2006).
6. M. I. Eremets, I. A. Trojan, S. A. Medvedev, J. S. Tse, and Y. Yao, *Science* **319**, 1506 (2008). <https://doi.org/10.1126/science.1153282>
7. A. P. Drozdov, M. I. Eremets, I. A. Troyan, V. Ksenofontov, and S. I. Shylin, *Nature* **525**, 73 (2015).
8. М. И. Еремец, А. П. Дроздов, *УФН* **186**, 1257 (2016).
9. D. V. Semenov, I. A. Troyan, A. G. Ivanova, A. G. Kvashnin, I. A. Kruglov, M. Hanfland, A. V. Sadakov, O. A. Sobolevskiy, K. S. Pervakov, I. S. Lyubutin, K. V. Glazyrin, N. Giordano, D. N. Karimov, A. L. Vasiliev, R. Akashi, V. M. Pudalov, and A. R. Oganov, *Materials Today* **48**, 18 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.mattod.2021.03.025>.
10. И. А. Троян, Д. В. Семенов, А. Г. Иванова, А. Г. Квашнин, Д. Джоу, А. В. Садаков, О. А. Соболевский, В. М. Пудалов, И. С. Любутин, А. Р. Оганов, *УФН* **192**, 799 (2022).
11. A. P. Drozdov et al., *Nature* **569**, 528 (2019).
12. I. A. Troyan, D. V. Semenov, A. G. Kvashnin, A. V. Sadakov, O. A. Sobolevskiy, V. M. Pudalov, A. G. Ivanova, V. B. Prakapenka, E. Greenberg, A. G. Gavriluk, I. S. Lyubutin, V. V. Struzhkin, A. Bergara, I. Errea, R. Bianco, M. Calandra, F. Mauri, L. Monacelli, R. Akashi, and A. R. Oganov, *Adv. Mater.* **33**, 2006832 (2021).
13. P. Kong, V. S. Minkov, M. A. Kuzovnikov, A. P. Drozdov, S. P. Besedin, S. Mozaffari, L. Balicas, F. F. Balakirev, V. B. Prakapenka, S. Chariton, D. A. Knyazev, E. Greenberg, and M. I. Eremets, *Nat. Commun.* **12**, 5075 (2021).
14. W. Chen, D. V. Semenov, X. Huang, H. Shu, X. Li, D. Duan, T. Cui, and A. R. Oganov, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 117001 (2021).
15. P. W. Anderson, *J. Phys. Chem. Solids* **11**, 26 (1959).

16. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
17. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
18. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, *ЖЭТФ* **39**, 178 (1960).
19. D. V. Semenov, I. A. Troyan, A. V. Sadakov, D. Zhou, M. Galasso, A. G. Kvashnin, A. G. Ivanova, I. A. Kruglov, A. A. Bykov, K. Y. Terent'ev, A. V. Cherepakhin, O. A. Sobolevskiy, K. S. Pervakov, A. Y. Seregin, T. Helm, T. Förster, A. D. Grockowiak, S. W. Tozer, Y. Nakamoto, K. Shimizu, V. M. Pudalov, I. S. Lyubutin, and A. R. Oganov, *Adv. Mater.* **34**, 2204038 (2022).
20. S. R. W. Legvold, B. J. Green, Beaudry, and J. E. Ostenson, *Solid State Commun.* **18**, 725 (1976).
21. K. Zhang, W. Chen, Y. Zhang et al., *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **67**, 238211 (2024), <https://doi.org/10.1007/s11433-023-2285-3>.
22. J. Bi, Y. Nakamoto, P. Zhang et al., *Nat. Commun.* **13**, 5952 (2022), <https://doi.org/10.1038/s41467-022-33743-6>.
23. W. Chen, X. Huang, D. V. Semenov et al., *Nat. Commun.* **14**, 2660 (2023), <https://doi.org/10.1038/s41467-023-38254-6>.
24. E. Snider, N. Dasenbrock-Gammon, R. McBride, M. Debessai, H. Vindana, K. Vencatasamy, K. V. Lawler, A. Salamat, and R. P. Dias, *Nature* **586**, 373 (2020).
25. A. F. Goncharov, E. Bykova, M. Bykov, X. Zhang, Y. Wang, S. Chariton, V. B. Praka-penka, and J. S. Smith, *J. Appl. Phys.* **131**, 025902 (2022).
26. А. В. Садаков, О. А. Соболевский, В. М. Пудалов, *УФН* **192**, 1409 (2022).
27. D. van der Marel and J. E. Hirsch, *Int. J. Mod. Phys.* **37**, 2375001 (2023).
28. N. Dasenbrock-Gammon, E. Snider, R. McBride, H. Pasan, D. Durkee, N. Khalvashi-Sutter, S. Munasinghe, S. E. Dissanayake, K. V. Lawler, A. Salamat, and R. P. Dias, *Nature* **615**, 244 (2023); <https://doi.org/10.1038/s41586-023-05742-0>.
29. Retraction note: <https://doi.org/10.1038/s41586-023-06774-2>
30. N. S. Pavlov, I. R. Shein, K. S. Pervakov, V. M. Pudalov, and I. A. Nekrasov, *Письма в ЖЭТФ* **118**, 707 (2023).
31. V. Minkov, S. L. Bud'ko, F. F. Balakirev, V. B. Prakapenka, S. Chariton, R. J. Husband, H. P. Liermann, and M. I. Erements, *Nature Commun.* **13**, 3194 (2022); <https://doi.org/10.1038/s41467-022-30782-x>.
32. V. Struzhkin, B. Li, C. Ji, X.-J. Chen, V. Praka-penka, E. Greenberg, I. Troyan, A. Gavriiliuk, and H.-k. Mao, *Matter Radiat. Extremes* **5**, 028201 (2020).
33. X. Huang et al., *Natl. Sci. Rev.* **6**, 713 (2019).
34. D. Semenov and A. R. Oganov, *Nat. Sci. Rev.* **6**, 856 (2019).
35. V. Struzhkin, *Science* **351**, 1260 (2016).
36. I. A. Troyan, A. Gavriiliuk, R. Rüffer, A. Chumakov, A. Mironovich, I. Lyubutin, D. Perekalin, A. P. Drozdov, and M. I. Erements, *Science* **351**, 1303 (2016).
37. J. E. Hirsch and F. Marsiglio, *J. Phys. C* **587**, 1353896 (2021).
38. Y. Tomioka, M. Naito, and K. Kitazawa, *Phys. C: Supercond.* **215**, 297 (1993).
39. D. M. Gokhfeld et al., *J. Appl. Phys.* **109**, 033904 (2011).
40. Д. М. Гохфельд, *Письма в ЖТФ* **45**, 3 (2019).
41. I. S. Lyubutin, in *Physical Crystallography*, ser. Problems of the Modern Crystallography, Nauka Pub., Moscow (1992), p.326.
42. I. S. Lyubutin and T. V. Dmitrieva, *JETP Lett.* **21**, 59 (1975).
43. R. Bjork and C. R. H. Bahl, *Appl. Phys. Lett.* **103**, 102403 (2013)
44. R. Prozorov et al., *Phys. Rev. Appl.* **10**, 014030 (2018).
45. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **20**, 1064 (1950).
46. I. A. Troyan, D. V. Semenov, A. G. Ivanova, A. V. Sadakov, Di Zhou, A. G. Kvashnin, I. A. Kruglov, O. A. Sobolevskiy, M. V. Lyubutina, D. S. Perekalin, T. Helm, S. W. Tozer,

- M. Bykov, A. F. Goncharov, V. M. Pudalov, and I. S. Lyubutin, *Advanced Science* **10**, 2303622 (2023).
47. N. R. Werthamer, E. Helfand, and P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **147**, 295 (1966).
48. F. Hunte, J. Jaroszynski, A. Gurevich, D. C. Larbalestier, R. Jin, A. S. Sefat, M. A. McGuire, B. C. Sales, D. K. Christen, and D. Mandrus, *Nature* **453**, 903 (2008); <https://doi.org/10.1038/nature07058>.
49. H. Q. Yuan, J. Singleton, F. F. Balakirev, S. A. Baily, G. F. Chen, J. L. Luo, and N. L. Wang, *Nature* **457**, 565 (2009), <https://doi.org/10.1038/nature07676>.
50. S. Khim, B. Lee, J. W. Kim, E. S. Choi, G. R. Stewart, and K. H. Kim, *Phys. Rev. B* **84**, 104502 (2011).
51. G. A. Ummarino and A. Bianconi, *Cond. Matter* **8**, 69 (2023); <https://doi.org/10.3390/condmat8030069>.
52. C. Wang, S. Yi, and J.-H. Cho, *Phys. Rev. B* **101**, 104506 (2020).
53. K. Kuroki, T. Higashida, and R. Arita, *Phys. Rev. B* **72**, 212509 (2005).
54. D. Semenok, *Computational design of new superconducting materials and their targeted experimental synthesis*, Doctoral Program in Materials Science and Engineering Thesis, Skoltech, Moscow (2022).
55. H. Jeon, C. Wang, S. Liu, J. M. Bok, Y. Bang, and J.-H. Cho, *New J. Phys.* **24**, 083048 (2022).
56. B. Spivak and F. Zhou, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2800 (1995).
57. V. M. Galitski and A. I. Larkin, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 087001 (2001).
58. B. Sacepe, J. Seidemann, F. Gay, K. Davenport, A. Rogachev, M. Ovadia, K. Michaeli, and M. V. Feigel'man, *Nature Phys.* **15**, 48 (2019); <https://doi.org/10.1038/s41567-018-0294-6>.
59. A. V. Sadakov, V. A. Vlasenko, D. V. Semenok, Di Zhou, I. A. Troyan, A. S. Usoltsev, and V. M. Pudalov, *ArXiv:2311.01318*.
60. E. F. Talantsev, *Supercond. Sci. and Technol.* **35**, 095008 (2022); <https://doi.org/10.1088/1361-6668/ac7d78>.
61. D. Sun, V. S. Minkov, S. Mozaffari, Y. Sun, Y. Ma, S. Chariton, V. B. Prakapenka, M. I. Erements, L. Balicas, and F. F. Balakirev, *Nat. Commun.* **12**, 6863 (2021).
62. D. Semenok, J. Guo, Di Zhou, W. Chen, T. Helm, A. Kvashnin, A. Sadakov, O. Sobolevsky, V. Pudalov, C. Xi, X. Huang, and I. Troyan, *ArXiv:2307.11742*.
63. F. Bloch, *Z. Physik* **59**, 208 (1930).
64. D. Semenok et al., to be published.
65. C. Castellani, C. DiCastro, H. Fukuyama, P. A. Lee, and M. Ma, *Phys. Rev. B* **33**, 7277 (1986).
66. G. Zala, B. N. Narozhny, and I. L. Aleiner, *Phys. Rev. B* **64**, 214204 (2001).
67. Yanan Zhang, Dajun Su, Yanen Huang, Zhaoyang Shan, Hualei Sun, Mengwu Huo, Kaixin Ye, Jiawen Zhang, Zihan Yang, Yongkang Xu, Yi Su, Rui Li, Michael Smidman, Meng Wang, Lin Jiao, and Huiqiu Yuan, *ArXiv:2307.14819v1*
68. R. A. Cooper, Y. Wang, B. Vignolle et al., *Science* **323**, 603 (2009).
69. P. Kapitza and E. Rutherford, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **123**, 292 (1929); П.Л. Капица, *Сильные магнитные поля*, Наука, Москва (1988).
70. Ю. А. Дрейзин, А. М. Дыхне, *ЖЭТФ* **63**, 242 (1972).
71. C. Heil, S. Di Cataldo, G. B. Bachelet, and L. Boeri, *Phys. Rev.* **99**, 220502(R) (2019).
72. Liu, C. Wang, S. Yi, K. W. Kim, J. Kim, and J.-H. Cho, *Phys. Rev. B* **99**, 140501 (2019).
73. K. Wang and C. Petrovic, *Appl. Phys. Lett.* **101**, 152102 (2012); <https://doi.org/10.1063/1.4758298>.
74. H. Fang, M. Lyu, Hao Su, J. Yuan, Y. Li et al. Preprint <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.05918>

75. Y. He, J. Gayles, M. Yao, T. Helm, T. Reimann, V. N. Strocov, W. Schnelle, M. Nicklas, Y. Sun, G. H. Fecher, and C. Felser, *Nat. Commun.* **12**, 4576 (2021).
76. J. Richard, P. Monceau, and M. Renard, *Phys. Rev. B* **35**, 4533 (1987).
77. M. Naito¹, and S. Tanaka, *J. Phys. Soc. Jpn.* **51**, 228 (1982).
78. A. A. Sinchenko, P. D. Grigoriev, P. Lejay, and P. Monceau, *Phys. Rev. B* **96**, 245129 (2017).
79. A. A. Abrikosov, *Phys. Rev. B* **58**, 2788 (1998).
80. A. A. Abrikosov, *Phys. Rev. B* **60**, 4231 (1999).
81. Jianning Guo, Dmitrii Semenov, Grigoriy Shutov, Di Zhou, Su Chen, Yulong Wang, Kexin Zhang, Xinyue Wu, Sven Luther, Toni Helm, Xiaoli Huang, and Tian Cui, *Natl. Sci. Rev.* nwael49 (2024); <https://doi.org/10.1093/nsr/nwae149>.
82. D. Semenov, J. Guo, Di Zhou, W. Chen, T. Helm, A. Kvashnin, A. Sadakov, O. Sobolevsky, V. Pudalov, C. Xi, X. Huang, and I. Troyan <https://arxiv.org/pdf/2307.11742>.
83. A. Legros, S. Benhabib, W. Tabis et al., *Nat. Phys.* **15**, 142 (2019).
84. A. Ataie, A. Gourgout, G. Grissonnanche et al., *Nat. Phys.* **18**, 1420 (2022).
85. R. L. Greene, P. R. Mandal, N. R. Poniatowski et al., *Ann. Rev. Cond. Matter Phys.* **11**, 213 (2020).
86. P. Allen and R. Dynes, *Phys. Rev. B* **12**, 905 (1975); <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.12.905>.
87. С. Тябликов, В. Толмачев, *ЖЭТФ* **34**, 1254 (1958).
88. V. Z. Kresin, A. G. Ovchinnikov, and S. A. Wolf, *Superconducting State*, Oxford Univ. Press (2021).
89. M. V. Sadovskii, *J. Supercond. Novel Magnetism*, **33**, 19 (2020).
90. A. S. Alexandrov and A. B. Krebs, *Usp. Fiz. Nauk* **162**, 1 (1992) [*Physics Uspekhi* **35**, 345 (1992)].
91. E. F. Talantsev and K. Stolze, *Superconductor Science and Technology* **34**, 064001 (2021).
92. I. Errea, M. Calandra, C. J. Pickard, J. R. Nelson, R. J. Needs, Y. Li, H. Liu, Y. Zhang, Y. Ma, and F. Mauri, *Nature* **532**, 81 (2016).
93. I. Errea, F. Belli, L. Monacelli et al., *Nature* **578**, 66 (2020); <https://doi.org/10.1038/s41586-020-1955-z>.
94. F. Peng, Y. Sun, C. J. Pickard, R. J. Needs, Q. Wu, and Y. Ma, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 107001 (2017)
95. E. F. Talantsev, *Superconductor Science and Technology* **33**, 094009 (2020).
96. P. Song, Z. Hou, P. Bd. Castro, K. Nakano, K. Hongo, Y. Takano, and R. Maezono, *Chem. Mater.* **33**, 9501 (2021).
97. C. J. Pickard, I. Errea, and M. I. Eremets, *Annu. Rev. Cond. Matter Phys.* **11**, 57 (2020).
98. W. E. Pickett, *Rev. Mod. Phys.* **95**, 021001 (2023), [arXiv:2204.05930v4](https://arxiv.org/abs/2204.05930v4).
99. I. Esterlis, B. Nosarzewski, E. W. Huang, D. Moritz, T. P. Devereux, D. J. Scalapino, and S. A. Kivelson, *Phys. Rev. B* **97**, 140501(R) (2018).
100. E. A. Yuzbashyan and B. L. Altshuler, *Phys. Rev. B* **106**, 054518 (2022).
101. K. Trachenko, B. Monserrat, C. J. Pickard, and V. V. Brazhkin, *Sci. Adv.* **6**, eabc8662 (2020).

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ И НЕОДНОРОДНЫЕ СОСТОЯНИЯ В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ВОДОРОДЕ И ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ С ПРИТЯЖЕНИЕМ

М. Ю. Каган^{a,b*}, Р. Ш. Ихсанов^{a,c}, И. А. Ковалев^a, А. В. Красавин^d, Е. А. Мазур^{d,e}

^a Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, Россия

^b Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук
119334 Москва, Россия

^c Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

^d Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Россия

^e Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 февраля 2024 г.,
после переработки 12 марта 2024 г.
Принята к публикации 13 марта 2024 г.

Рассмотрена сверхпроводимость и неоднородные состояния в металлическом водороде и ряде электронных систем с притяжением, описываемых неоднородной (пространственно-разделенной) ферми-бозе-смесью со сверхпроводящими кластерами или каплями параметра порядка в матрице неспаренных нормальных состояний. Пространственно-разделенная ферми-бозе-смесь реализуется в сверхпроводящих оксидах висмута ВаКВіО₃. Капли параметра порядка могут возникать в тонких пленках «грязного» (с большим количеством примесей) металла, описываемых двумерной моделью Хаббарда малой электронной плотности с сильным притяжением и сильным диагональным беспорядком. В металлическом водороде и гидридах металла капли и большие перколяционные кластеры могут формироваться в экспериментах с ударными волнами вблизи границы фазового перехода первого рода между жидкими (некристаллическими) металлической и диэлектрической фазами. Для однородной сверхпроводимости в металлическом водороде и гидридах металлов в рамках обобщенной системы уравнений Элиашберга получены новые результаты, демонстрирующие отрицательный знак производной $dT_c/dP < 0$, для интервала давлений от 60 до 100 ГПа в тройном гидриде LaBH₈. С точки зрения необычных физических свойств, как в нормальном, так и возможно в сверхтекучем («суперсолидном») состоянии подчеркнуты важные аналогии между металлическим водородом и квантовыми кристаллами.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S0044451024070095

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] была впервые сформулирована идея пространственно-разделенной ферми-бозе-смеси локальных бозонных кластеров или комплексов (со-

держащих компактные электронные или дырочные пары) в матрице неспаренных (ферми-жидкостных) состояний для объяснения механизма сверхпроводимости и природы электронного транспорта в нормальном состоянии в оксидах висмута ВаКВіО₃.

На рис. 1 приведена схема локальной кристаллической структуры в плоскости ВіО₂ исходного соединения ВаВіО₃, являющегося CDW-изолятором с шахматной структурой распределения октаэд-

* E-mail: kagan@kapitza.ras.ru

ров BiL_2O_6 и BiO_6 (левый рисунок), и локальной кристаллической структуры $\text{Ba}_{0.5}\text{K}_{0.5}\text{BiO}_3$ с диагональными цепочками комплексов BiO_6 , внедренных в большой перколяционный кластер октаэдров BiL_2O_6 (правый рисунок) [2].

Отметим, что возникновение дальнего порядка и макроскопической волновой функции сверхпроводящего состояния в $\text{Ba}_{1-x}\text{K}_x\text{BiO}_3$ обусловлено туннелированием локальных электронных пар из одного бозонного кластера BiO_6 в соседний BiO_6 кластер через туннельный барьер, образованный нормальными фермионными кластерами. Компоненты ферми-бозе-смеси в интервале металлических концентраций $0.37 < x < 0.5$ разделены в реальном пространстве, но не разделены в энергетическом пространстве (см. более детальное описание в [1, 2]).

Отметим также, что формирование металлических ферромагнитных наноразмерных капель в немагнитных (парамагнитных, антиферромагнитных и зарядово-упорядоченных) диэлектрических матрицах в магнитных оксидах было подробно рассмотрено в [3].

В данном мини-обзоре мы развиваем идеи, впервые сформулированные в работах [1–3] для оксидов висмута и манганитов, и обобщаем их на сверхпроводящие капли (капли параметра порядка), возникающие в тонких пленках «грязного» металла, описываемых двумерной моделью Хаббарда малой электронной плотности с сильным притяжением в присутствии сильного случайного потенциала.

В этой системе интересным также представляется перколяционный характер фазового перехода изолятор-сверхпроводник при формировании большого кластера из разветвленных капельных структур (имеющих форму «деревьев») при приближении к критической электронной концентрации.

Во второй части мини-обзора мы анализируем различные возможности усиления сверхпроводимости и уменьшения давления (поиска долгоживущих метастабильных фаз) в металлическом водороде и металло-гидридах, связанные, в частности, с более сложным характером (химическим составом) соединений.

Основным новым результатом здесь является демонстрация отрицательного знака производной критической температуры от давления, $dT_c/dP < 0$, для интервала давлений от 60 до 100 ГПа в тройном гидриде LaBH_8 .

Мы обращаем внимание также на возможное «затягивание» некоторых долгоживущих метастабильных фаз металлического водорода (таких

как нитевидная и планарная) в область малых давлений.

Наряду с описанием однородной сверхпроводимости в металлическом водороде, мы анализируем в обзоре неоднородные капельные состояния, возникающие вблизи фазовой границы перколяционного фазового перехода первого рода между жидкими (некристаллическими) металлической и диэлектрической фазами.

С нашей точки зрения, несмотря на конвенциональный характер сверхпроводимости в электронной подсистеме металлического водорода (по механизму Элиашберга), эта система обладает рядом необычных (уникальных) квантовых свойств.

Мы обращаем внимание на аналогии между низкоразмерными фазами металлического водорода и квантовыми кристаллами как с точки зрения параметра плавления Линдемана и параметра квантовости де Бюра, так и с точки зрения возможной «суперсолидности» металлического водорода с сосуществованием бозе-конденсатов куперовских пар в электронной подсистеме и би-протонных пар (как в нейтронных звездах) в ионной подсистеме.

2. КАПЛИ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА В ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМЕ МАЛОЙ ПЛОТНОСТИ С ПРИТЯЖЕНИЕМ В ПРИСУТСТВИИ СИЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В работах [4–6] нами рассчитаны свойства двумерной электронной системы с малой электронной плотностью ($n \ll 1$) и сильным локальным притяжением Хаббарда на узле $|U|/W \geq 1$ (W — ширина зоны) в присутствии сильного случайного потенциала (диагонального беспорядка) V , равномерно распределенного в диапазоне от $-V$ до $+V$. Учитывались электронные прыжки только на соседние узлы квадратной решетки с шириной зоны $W = 8t$. Расчеты осуществлялись на решетке 24×24 с периодическими граничными условиями.

В рамках подхода Боголюбова–де Женна наблюдалось появление неоднородных состояний пространственно-разделенной ферми-бозе-смеси куперовских пар и неспаренных электронов с образованием бозонных сверхпроводящих капель разного размера в матрице непарных нормальных электронных состояний (см. рис. 2).

Важным результатом работы является формирование большого перколяционного кластера с разветвленной капельной структурой, свидетельствующей

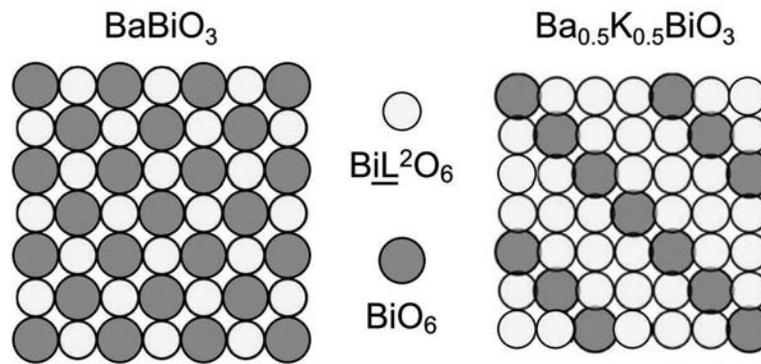


Рис. 1. Схема локальной кристаллической структуры в плоскости BiO_2 исходного соединения BaBiO_3 , являющегося CDW-изолятором с шахматной структурой распределения октаэдров BiL_2O_6 и BiO_6 (левый рисунок), и локальной кристаллической структуры $\text{Ba}_{0.5}\text{K}_{0.5}\text{BiO}_3$ с диагональными цепочками комплексов BiO_6 , внедренных в большой перколяционный кластер октаэдров BiL_2O_6 (правый рисунок) [2]

щей о переходе изолятор–сверхпроводник [4–6] при электронных плотностях $n_c \approx 0.31$.

Этот результат интересен как для понимания природы фазовых переходов и фазовой диаграммы тонких пленок «грязного» металла [7–9], в частности сверхпроводящих полосок наноструктурированного алюминия [10], так и для экспериментальной реализации сверхпроводящих флакс-кубитов.

3. ОТКРЫТИЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ В ГИДРИДАХ МЕТАЛЛОВ

Прорыв в повышении температуры сверхпроводящего перехода на пути от высокотемпературной сверхпроводимости к сверхпроводимости при комнатной температуре датируется 2014 годом, когда исследователи из Германии, России и Китая открыли сверхпроводимость в сероводороде (H_2S) [11–15]. При высоких давлениях H_2S вначале металлизировается, а затем при давлении $P = 1$ Мбар переходит в сверхпроводящее состояние с $T_c \approx 192$ К.

Причем, если высокотемпературные сверхпроводники на основе медь–кислород, по-видимому, описываются нетрадиционными механизмами сверхпроводимости, основанными на электрон-электронном взаимодействии, то сверхпроводимость в гидриде серы имеет традиционный характер и описывается теорией Элиашберга [16, 17] для сильного электрон-фононного взаимодействия.

Отметим, что такие высокие давления в диапазоне от одного до нескольких мегабар могут быть созданы в специальных очень тяжелых (многотонных) алмазных наковальнях. Такие алмазные наковальни

имеются в институтах Франции, США и некоторых других стран. В нашей стране такие давления могут быть созданы в Институте физики высоких давлений РАН в Троицке [11].

Далее последовало открытие сверхпроводимости при высоких давлениях в H_2S при температуре $T_c = 203$ К, совпадающей с температурой на поверхности Антарктиды, и сверхпроводимость в гидридах лантана LaH_{10} с $T_c = 250 - 260$ К.

Наконец, в 2020 г. была открыта сверхпроводимость с рекордной на сегодняшний день температурой $T_c = 288$ К ($+15^\circ\text{C}$) в тройном гидриде H-C-S с доминированием водорода при давлении $P = 2.6$ Мбар [18]. Впрочем, этот результат не нашел независимого подтверждения.

Примерно в то же время на синхротронном источнике во Франции были проведены первые убедительные эксперименты, надежно свидетельствующие о переходе чистого атомарного водорода в металлическое состояние [19–21] при высоких давлениях порядка 425 ГПа [22].

4. ОБРАЗОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КАПЕЛЬ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПЕРВОГО РОДА МЕЖДУ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ И МОЛЕКУЛЯРНЫМ ВОДОРОДОМ В ЖИДКОМ (НЕКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ) СОСТОЯНИИ

Рассмотрим теперь возможность образования капель в металлическом водороде. На рис. 3 приведена $T - P$ -фазовая диаграмма молекулярного диэлектрического и атомарного (металлического) водорода при высоких давлениях. Фазовая диаграмма

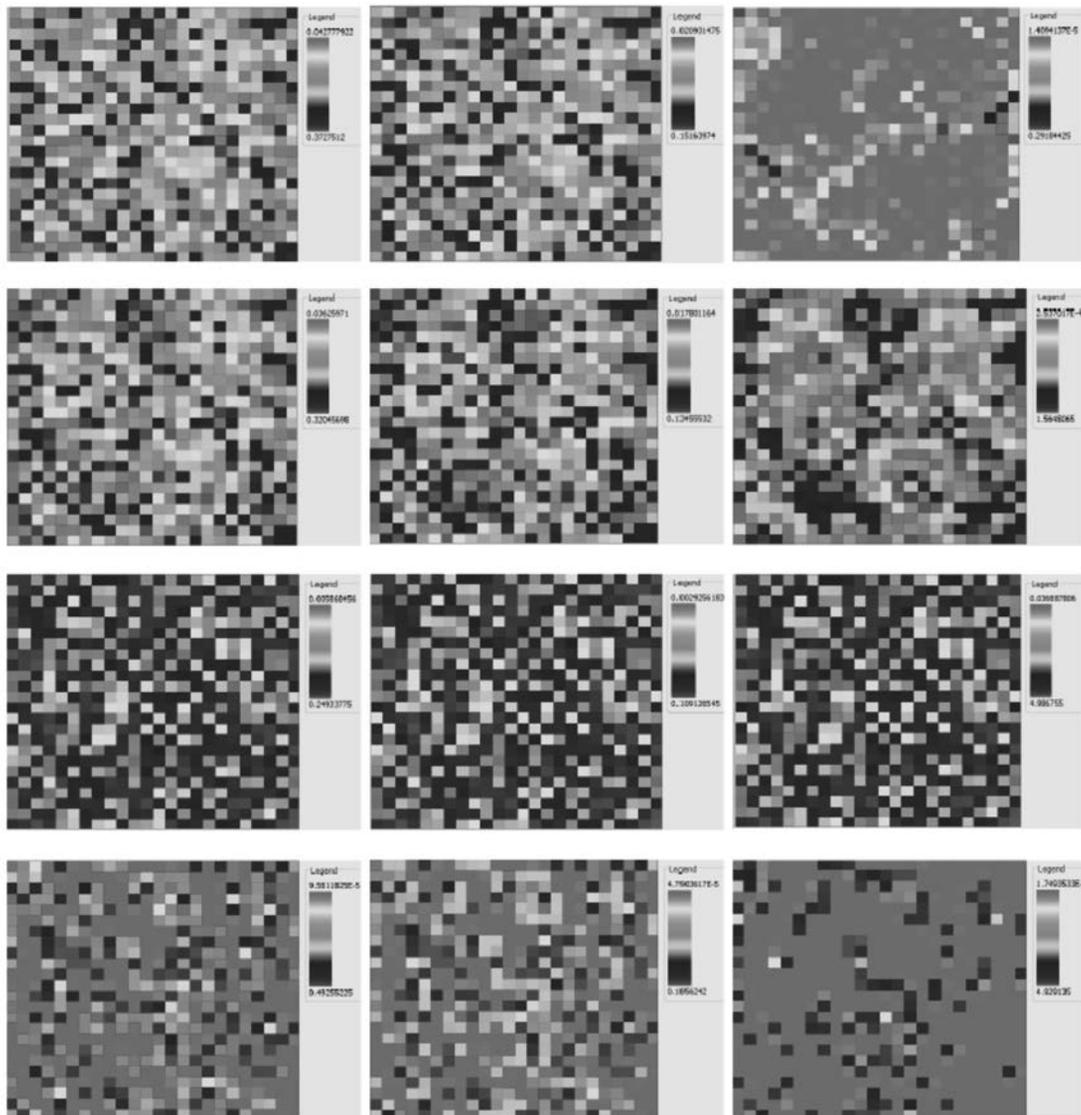


Рис. 2. Двумерное распределение электронной плотности (левый столбец), электронно-дырочного перемешивания (средний столбец), и параметра порядка (правый столбец) при $n = 0.15$ на 24×24 решетке с амплитудой беспорядка $V/t = 10.0$ [4–6]

содержит 4 интересные для нашего анализа фазы молекулярного и металлического водорода, а именно 2 фазы твердого (кристаллического) молекулярного и металлического водорода при высоких давлениях и низких температурах и две фазы жидкого молекулярного и металлического водорода при высоких давлениях и высоких температурах [11, 23].

Интересно, что при повышении температуры фазовый переход из кристаллической в жидкую фазу как для атомарного металлического водорода, так и для молекулярного (диэлектрического) водорода является фазовым переходом первого рода с обра-

зованием и ростом зародышей одной фазы внутри другой. Отметим, что образование жидких капель и маленьких «льдинок» вокруг положительных и отрицательных ионов хорошо известно в физике жидкого и твердого гелия.

Также фазовым переходом первого рода является при высоких температурах переход из диэлектрической жидкой фазы в металлическую жидкую фазу [11]. Этот переход имеет, по-видимому, перколяционный характер с образованием сложной структуры (большого кластера) металлических капель внутри диэлектрической матрицы. Эксперименталь-

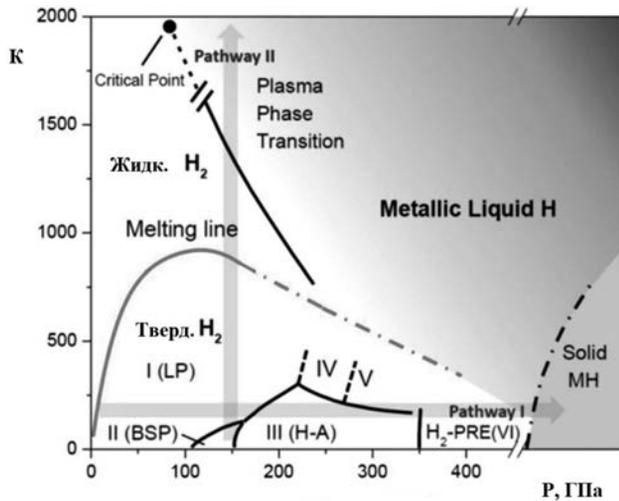


Рис. 3. $T - P$ -фазовая диаграмма молекулярного и атомарного металлического водорода при высоких давлениях. Фазовая диаграмма содержит 4 фазы молекулярного и металлического водорода, а именно: 2 фазы твердого (кристаллического) молекулярного и металлического водорода и 2 фазы жидкого молекулярного и металлического водорода при высоких давлениях [6, 11, 23]

ным подтверждением перколяционного характера фазового перехода и возникновения проводящих металлических капель являются эксперименты с ударными волнами для дейтериевых систем [21, 24–27].

5. БАЗОВЫЙ МЕХАНИЗМ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ВОДОРОДЕ И ГИДРИДАХ МЕТАЛЛОВ

Фононный механизм сверхпроводимости, усиленный за счет легкости ядра (малой массы протона) в атоме водорода, по-видимому, имеет место в металлическом водороде и в большинстве двойных и тройных гидридов металлов, таких как H_2S , H_3S , LaH_{10} , $H-C-S$ и др.

В то же время, в высокотемпературных сверхпроводниках на базе медь-кислород и в ряде сверхпроводящих систем малой электронной плотности доминирующими механизмами сверхпроводимости являются нетрадиционные нефононные механизмы, основанные не на электрон-ионном, а на электрон-электронном взаимодействии.

К нефононным механизмам относятся, в частности, механизм, основанный на АФМ-взаимодействии между спинами электронов меди в знаменитой $t - J$ -модели [28, 29] и плазмонный механизм Фрелиха

[30–32], основанный на обмене акустическими плазмонами, предсказанными Нозьером и Пайнсом [33].

Еще одним базовым механизмом нетрадиционной сверхпроводимости является механизм Кона – Латтинжера [34–36], основанный на наличии коновской особенности [37] (фриделевских осцилляций [38]) в эффективном взаимодействии двух электронов через поляризацию фермиевского фона.

Для металлического водорода базовый механизм сверхпроводимости описывается теорией сильного электрон-фононного взаимодействия в рамках теории Элиашберга [39–44]. Расчеты по теории Элиашберга группы Мазура, Ихсанова и Кагана [5, 6], а также других групп [45–48] предсказывают сверхпроводимость для гексагональной фазы металлического водорода при давлении $P = 5$ Мбар с критической температурой в интервале 215 – 217 К. Эти расчеты находятся в соответствии с более ранними идеями, высказанными Ашкрофтом в Соединенных Штатах еще в 1968 г. [49] о том, что металлический водород за счет легкой массы ядра (протона) и большой дебаевской частоты является очень перспективным кандидатом на реализацию в нем сверхпроводимости при комнатной температуре.

Отметим, что основной задачей физиков, химиков и материаловедов на сегодняшний день является не столько задача повышения критической температуры, сколько задача понижения давления и нахождения долгоживущих (пусть даже метастабильных) фаз металлического водорода и гидридов металлов, сверхпроводящих при нормальном атмосферном давлении.

Здесь очень перспективными являются предсказания Кагана, Бровмана и Холаса [50, 51], высказанные еще в 70-ые годы прошлого века, о том, что некоторые низкоразмерные фазы металлического водорода, в частности, квазиодномерная нитевидная фаза (протонные цепочки, погруженные в ферми-жидкость электронов) может быть стабилизирована не только при высоких давлениях порядка нескольких мегабар, но и реализована в эксперименте как долгоживущая метастабильная фаза при более низких давлениях и даже при атмосферном давлении.

Теоретические оценки Бурмистрова и Дубовского [52] в развитие идей Кагана, Бровмана и Холаса показывают, в частности, что для нитевидной фазы область долгоживущих метастабильных состояний затягивается, по крайней мере, до давлений $P \approx 0.1$ Мбар.

Отметим, что низкоразмерные фазы металлического водорода, в первую очередь нитевидная и пла-

нарная, имеют много общих черт с квантовыми кристаллами. В частности, с физикой супер-солидности квантовых кристаллов гелия и идеями классической работы Андреева–Лифшица [53] их роднят характерные значения параметра квантовости де Бура и параметра квантового плавления Линдемана.

В развитие идей Ашкрофта [54], одним из соавторов (М. Ю. К.) [55, 56] была высказана идея о возможности нетривиального сверхтекучего состояния в металлическом водороде при высоких давлениях, напоминающего сверхтекучесть нейтронных звезд.

В этом состоянии возможно сосуществование двух бозе-конденсатов — конденсата куперовских пар в электронной подсистеме и конденсата бипротонных пар на одной (или соседних) цепочках (плоскостях) в ионной подсистеме.

Отметим также, что дополнительные возможности для понижения давления в гидридах металлов на пути к техническим применениям комнатно-температурной сверхпроводимости открываются перед химиками.

Оказывается, что усложнение состава гидридов металла, и, в частности переход от двойных к тройным гидридам [28], способствует эффективному понижению давления при сохранении высоких критических температур.

Недавно (летом 2023 г.) южнокорейские технологи объявили о синтезировании металло-гидрида с комнатной критической температурой при атмосферном давлении. К сожалению, однако, их результаты не были подтверждены другими группами.

6. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО МЕТАЛЛИЧЕСКОМУ ВОДОРОДУ И ГИДРИДАМ МЕТАЛЛОВ

В этом разделе мы кратко анонсируем наши последние результаты, связанные с возможностью понижения давления в сложных гидридах металлов на примере LaVH_8 [28]. В частности, мы демонстрируем кривую зависимости критической температуры от давления с отрицательной производной (т. е. $dT_c/dP < 0$) для интервала давлений от 60 до 100 ГПа в тройном гидриде LaVH_8 .

Для расчетов T_c мы использовали систему уравнений Элиашберга [39–44] с поправкой к химическому потенциалу электронов [57, 58], которая позволяет описать эффект повышения T_c при приближении пика плотности состояний к энергии Ферми [58–60].

Независимой переменной в этой системе является частота ω , измеряемая в энергетических еди-

ницах (эВ). Зависимые переменные образуют набор $\{\varphi(\omega), Z(\omega), \chi(\omega)\}$, где φ — параметр порядка, Z — функция перенормировки массы электрона, χ — сдвиг химического потенциала. $[\varphi] = [\chi] = \text{эВ}$, Z — величина безразмерная. Числовые параметры системы образуют набор $\{T, \mu^*, \mu, \omega_c\}$, где T — температура, $[T] = K$; μ^* — экранированный кулоновский потенциал, $[\mu^*] = 1$; μ — химический потенциал электронов (принимая его равным энергии Ферми E_F), $[\mu] = \text{эВ}$; ω_c — энергетический диапазон эффективности кулоновского взаимодействия (обычно принимаем $\sim 3\omega_D$, где ω_D — частота Дебая). Функциональные параметры: $\{\alpha^2 F(\omega), N_0(E)\}$, где $\alpha^2 F(\omega)$ — функция Элиашберга; $N_0(E) = N(E)/N(0)$ — приведенная электронная плотность состояний, где $N(E)$ — плотность состояний, $N(0)$ — плотность состояний на уровне Ферми. Функции $\alpha^2 F(\omega)$ и $N_0(E)$ задаются в табулированном виде и рассчитывались заранее с помощью теории функционала плотности, реализованной в пакете Quantum Espresso [61]. В данной работе использовались псевдопотенциалы типа Optimized Norm-conserving Vanderbilt Pseudopotentials (ONCVSP) версии 0.4.1 [62] и обменно-корреляционный функционал PBE. Для расчета спектральной функции Элиашберга использовалась программа EPW для интерполяции электрон-фононной матрицы с помощью функций Ванье [63].

Для решения этой системы на оси частот выбирается сетка положительных мацубаровских частот

$$\{\omega_n = \pi k T (2n + 1)\}_{n=0}^M,$$

где $n \in [0, M]$, а переменные $\{\varphi(\omega), Z(\omega), \chi(\omega)\}$ вычисляются на этой сетке: $\{\varphi_n, Z_n, \chi_n\}_{n=0}^M$. Система уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{\pi}{\beta} \sum_{m=0}^M \{\lambda_{nm}^{(+)} - 2\mu^* \theta(\omega_c - |\omega_m|)\} \varphi_m \cdot N_m \\ Z_n &= 1 + \frac{\pi}{\beta} \frac{1}{\omega_n} \sum_{m=0}^M \lambda_{nm}^{(-)} \omega_m Z_m \cdot N_m \\ \chi_n &= -\frac{\pi}{\beta} \sum_{m=0}^M \{\lambda_{nm}^{(+)} - 2\mu^* \theta(\omega_c - |\omega_m|)\} \cdot P_m \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\beta = 1/kT,$$

$$\lambda_{nm}^{(\pm)} = \lambda(n - m) \pm \lambda(n + m + 1),$$

$$\lambda(n) = 2 \int_0^{\omega_D} \frac{\omega \cdot \alpha^2 F(\omega)}{\omega^2 + (2\pi n k_B T)^2} d\omega,$$

$$N_m = N_m(\varphi_m, Z_m, \chi_m),$$

$$P_m = P_m(\varphi_m, Z_m, \chi_m),$$

$$N_m(\varphi, Z, \chi) =$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\mu}^{+\infty} N_0(E) \frac{1}{(E + \chi)^2 + Z^2 \omega_m^2 + \varphi^2} dE,$$

$$P_m(\varphi, Z, \chi) =$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\mu}^{+\infty} N_0(E) \frac{E + \chi}{(E + \chi)^2 + Z^2 \omega_m^2 + \varphi^2} dE,$$

$[N_m] = \text{эВ}^{-1}$, P_m — величина безразмерная.

Искомой величиной, по которой определяется температура сверхпроводящего перехода T_c , является $\Delta_0 = \varphi(\omega_0)/Z(\omega_0)$, с размерностью эВ (T_c определяется из условия $\Delta_0(T) = 0$ при $T \geq T_c$).

Результаты расчетов T_c тройного гидрида LaBH_8 , сделанные для различных давлений, приведены на рис. 4, а приведенной плотности состояний $N_0(E)$ — на рис. 5. Расчеты проведены в диапазоне давлений от 60 до 100 ГПа. Для меньших давлений это соединение, возможно, неустойчиво. Расчеты проводились двумя методами: решением «классической» системы уравнений Элиашберга, в которой не учитывается поправка к химическому потенциалу электронов, а электронная плотность состояний в уравнениях не присутствует (см., например, работу [64]), и решением системы (1). Расчеты проводились для $\mu = 0.09, \omega_D = 0.25$ эВ и $M = 18$ (т.е. было взято 19 положительных мацубаровских частот).

Снижение T_c с увеличением давления, начиная с 80 ГПа, показали оба метода. Снижение T_c , причем даже в большем диапазоне давлений, показывают и результаты работы [28] (а результат работы [65] хорошо согласуется с нашими расчетами). Учет поправки к химическому потенциалу электронов дает повышение T_c для всех давлений. Это повышение вызвано наличием размытого пика в плотности электронных состояний, локализованного на расстоянии порядка энергии Дебая от уровня Ферми (см. рис. 5). Поведение $N_0(E)$ при энергиях, больших ω_D , на значение T_c практически не влияет. С понижением давления наблюдается рост этого пика и, соответственно, повышение расчетного значения T_c .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Надежды на реализацию комнатно-температурной сверхпроводимости и ее техни-

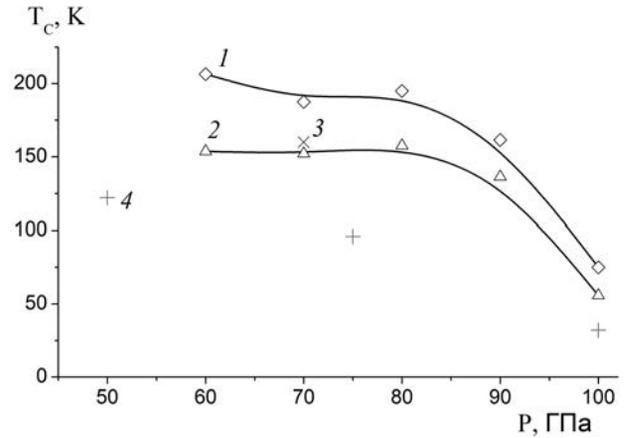


Рис. 4. Расчетная зависимость T_c от давления для LaBH_8 , рассчитанная различными способами: 1 — решение системы уравнений (1); 2 — решение системы уравнений Элиашберга без поправки к химическому потенциалу электронов; 3 — результаты работы [65]; 4 — результаты работы [28]

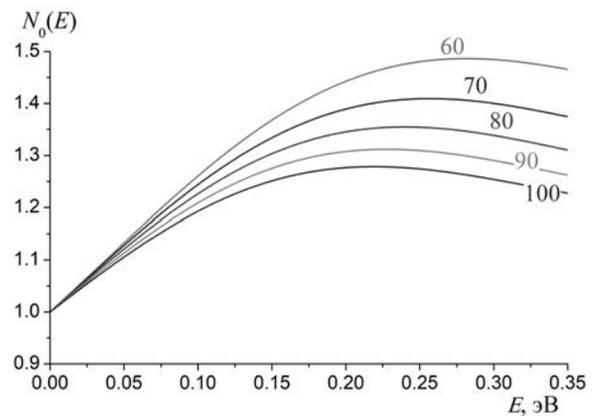


Рис. 5. Приведенная плотность состояний $N_0(E)$ для LaBH_8 , рассчитанная для различных давлений: значения давлений в ГПа указаны рядом с кривыми. Нуль энергии соответствует уровню Ферми

ческих применений требуют поиска стабильных или метастабильных фаз металлического водорода и гидридов металлов, сверхпроводящих при более низких давлениях. Понижение давления может быть связано как с усложнением химического состава гидридов металлов, так и с «затягиванием» низкоразмерных фаз чистого металлического водорода (в первую очередь нитевидной и планарной) в область метастабильных долгоживущих состояний уже при атмосферном давлении за счет требующего больших времен процессов квантового образования зародышей при туннелировании зародыша через высокий барьер в конфигурационном пространстве. В качестве первого результата на пути реализации

задачи по понижению давления в гидридах металлов мы демонстрируем отрицательный знак производной $dT_c/dP < 0$ для интервала давлений от 60 до 100 ГПа в тройном гидриде LaVH_8 .

Физика неоднородных капельных структур в перколяционных фазовых переходах между диэлектрической и проводящей фазами жидкого молекулярного и жидкого металлического водорода, как и переход диэлектрик–сверхпроводник в электронных системах малой плотности с притяжением и «грязных» металлических пленках [7–9], представляет большой интерес не только для астрофизических наблюдений [20, 25, 66] и экспериментов с ударными волнами в экстремальных состояниях вещества, но также и для сверхпроводящей наноэлектроники [10] и возможной сверхпроводящей реализации квантового компьютера.

Финансирование. Работа выполнена в рамках программы поддержки фундаментальных исследований НИУ ВШЭ. Исследование выполнено с использованием суперкомпьютерного комплекса НИУ ВШЭ [67], ресурсов высокопроизводительного вычислительного центра НИЯУ МИФИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Menushenkov, K. V. Klementev, A. V. Kuznetsov, and M. Yu. Kagan, *ZHETP* **120**, 700 (2001).
2. A. Menushenkov, A. V. Kuznetsov, K. V. Klementiev, and M. Yu. Kagan, *J. Supercond. Nov. Magn.* **29**, 701 (2016).
3. M. Yu. Kagan, K. I. Kugel, and A. L. Rakhmanov, *Phys. Reports* **916**, 1 (2021)
4. М. Ю. Каган, Е. А. Мазур, *ЖЭТФ* **159**, 696 (2021).
5. E. A. Mazur, R. Sh. Ikhsanov, and M. Yu. Kagan, *J. Phys.: Conf. Series*, **2036**, 012019 (2021).
6. М. Ю. Каган, С. В. Аксенов, А. В. Турлапов, Р. Ш. Ихсанов, К. И. Кугель, Е. А. Мазур и др., *Письма в ЖЭТФ* **117**, 754 (2023).
7. A. M. Goldman and N. Markovic, *Phys. Today* **51**, 39 (1998).
8. D. V. Haviland, Y. Liu, and A. M. Goldman, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2180 (1989).
9. Э.З. Кучинский, И.А.Некрасов, М.В.Садовский, *УФН* **53**, 325 (2012).
10. N. Grunhaupt et al., *Nature Mater.* **18**, 1816 (2019).
11. А. Н. Утюж, А. Михеенков, *УФН* **187**, 953 (2017).
12. И. А. Троян, Д. В. Семенов, А. Г. Иванова, А. Г. Квавшин, Д. Джоу, А. В. Садаков, О. А. Соболевский, В. М. Пудалов, И. Любутин, А. Р. Оганов, **192**, 799 (2022).
13. М. И. Еремец, А. П. Дроздов, *УФН* **186**, 1257 (2016).
14. D. Duan et al., *Sci. Rep.* **4**, 6968 (2014).
15. A. Drozdov et al., *Nature* **525**, 73 (2015).
16. Г. М. Элиашберг, *ЖЭТФ* **38**, 966 (1960).
17. М. В. Садовский, *arxiv cond-mat*. 2106.09948, 18 Jun (2021).
18. E. Snider et al., *Nature* **586**, 373 (2020).
19. E. Wigner and H. B. Huntington, *J. Chem. Phys.* **3**, 764 (1935)
20. А. А. Абрикосов, *Астрон. Ж.* **31**, 112 (1954).
21. R. Dias, I. F. Silvera, *Science* **355**, 715 (2017).
22. P. Loubyere et al., *Nature* **577**, 631 (2020).
23. M. Houtput, J. Tempere, and I. F. Silvera, *Phys. Rev. B* **100**, 134106 (2019).
24. M. D. Knudson et al., *Science* **348**, 1455 (2015).
25. V. E. Fortov et al., *Phys. Rev. Lett.* **99**, 185001 (2007).
26. G. W. Collins et al., *Science* **281**, 1178 (1998).
27. M. Celliers et al., *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5564 (2000).
28. S. D. Cataldo, Ch. Heil, W. von der Linden, and L. Boeri, *Phys. Rev. B* **104**, L020511 (2021).
29. М. Ю. Каган and Т. М. Rice, *J. Phys.: Condens. Matter* **6**, 3771 (1994).
30. H. Frohlich, *J. Phys. C* **1**, 544, Letters to Editor (1968).
31. J. Ruhman and P. A. Lee, *Phys. Rev. B* **96**, 235107 (2017).
32. J. Ruhman and P. A. Lee, *arxiv cond-mat* 1605.01737, 7 June (2016).
33. D. Pines, P. Nozieres, *The Theory of Quantum Liquids*, Benjamin, New York (1966).
34. М. Ю. Каган, М. М. Коровушкин, В. А. Мицкан, *УФН* **185**, 785 (2015).
35. М.Ю. Каган, А.В. Чубуков, *Письма в ЖЭТФ* **47**, 525 (1988).
36. W. Kohn and J. M. Luttinger, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 524 (1965).

37. W. Kohn, Phys. Rev. Lett. **2**, 393 (1959).
38. H. Friedel, Adv. Phys. **3**, 446 (1954).
39. O. V. Dolgov, R. K. Kremer, J. Kortus et al., Phys. Rev. B **72**, 024504 (2005).
40. Z. Zhang, T. Cui, M.J. Hutcheon et al., Phys. Rev. Lett. **128**, 047001 (2022).
41. P. B. Allen and R. C. A. Dynes, Tech. Rev. **7**, TCM4 (1974).
42. P. B. Allen and R. C. A. Dynes Phys. Rev. B **12**, 905 (1975).
43. F. Marsiglio and J. Carbotte, Physica C: Superconductivity **1**, 73 (2008).
44. J. Carbotte, Rev. Mod. Phys. **62**, 1027 (1990).
45. R. Szczesniak, Acta Physica Polonica A **109**, 179 (2006).
46. A. Durajski, Sci. Reports **6**, 38570 (2016).
47. Н. А. Кудряшов, А. А. Кутуков, Е. А. Мазур, Письма в ЖЭТФ **104**, 488 (2016).
48. I. A. Kruglov, D. Semenov, H. Song et al., Phys. Rev. B **101**, 024508 (2020).
49. N. W. Ashcroft, Phys. Rev. Lett. **21**, 1748 (1968).
50. Е. Г. Бровман, Ю. М. Каган, А. Холас, ЖЭТФ **61**, 2429 (1972).
51. Е. Г. Бровман, Ю. М. Каган, А. Холас, В. В. Пушкарёв, Письма в ЖЭТФ **18**, 269 (1973).
52. S. N. Bormistrov and L. B. Dubovskii, arxiv cond-mat 1611.02593, 8 November (2016).
53. А. Ф. Андреев, И. М. Лифшиц, ЖЭТФ **56**, 2057 (1969) [A. F. Andreev and I. M. Lifshitz, JETP **29**, 1107 (1969)].
54. N. W. Ashcroft, J. Phys. A **36**, 6137 (2003).
55. М. Ю. Каган, Письма в ЖЭТФ **103**, 822 (2016).
56. M. Yu. Kagan and A. Bianconi, Condens. Matter **4**, 51 (2019).
57. W. E. Pickett, Phys. Rev. B **26**, 1186 (1982).
58. В. Н. Гребенев, Е. А. Мазур, Физика низких температур **13**, 479 (1987).
59. А. С. Александров, В. Ф. Елесин, М. П. Казеко, Физика твердого тела **21**, 2062 (1979).
60. Н. А. Кудряшов, А. А. Кутуков, Е. А. Мазур, Письма в ЖЭТФ **104**, 488 (2016).
61. P. Giannozzi, S. Baroni, N. Bonini et al., J. Phys.: Condens. Matter **21**, 395502 (2009).
62. D. R. Hamann, Phys. Rev. B **88**, 085117 (2013).
63. S. Ponce, E.R. Margine, C. Verdi, and F. Giustino, Comput. Phys. Comm. **209**, 116 (2016).
64. Р. Ш. Ихсанов, Е. А. Мазур, М. Ю. Каган, Известия Уфимского научного центра РАН №1, 49 (2023).
65. Z. Zhang, T. Cui, and M. J. Hutcheon et al., Phys. Rev. Lett. **128**, 047001 (2022).
66. В.С. Филинов, В.Е. Фортон, М. Бониц, П.Р. Левашинов, Письма в ЖЭТФ **74**, 422 (2001).
67. S. Kostenetskiy, R. A. Chulkevich, V. I. Kozyrev, J. Phys.: Conf. Ser. **1740**, 012050 (2021).

JOSEPHSON BIFURCATION READOUT: BEYOND THE MONOCHROMATIC APPROXIMATION

Yu. Makhlin^{a,b*}, *A. B. Zorin*^c

^a *Condensed-Matter Physics Laboratory, HSE University
105066, Moscow, Russia*

^b *Landau Institute for Theoretical Physics
142432, Moscow Region, Chernogolovka, Russia*

^c *Department of Physics, Lomonosov Moscow State University
119991, Moscow, Russia*

Received May 5, 2024

revised version May 5, 2024

Accepted for publication May 25, 2024

We analyze properties of bifurcation quantum detectors based on weakly nonlinear superconducting resonance circuits, in particular, with application to quantum readout. The developed quantitative description demonstrates strong influence of higher harmonics on their characteristics. While this effect is relevant for various circuits, including the conventional Josephson bifurcation amplifier and the parametrically driven circuit, we first focus on the period-doubling bifurcation under a force driving. This kind of bifurcation is due to nominally quadratic nonlinearity, which enables parametric down-conversion of the driving signal at nearly double resonance frequency to the basic mode. We analyze the effect of higher harmonics on the dynamics of the basic mode, inherent in a nonlinear circuit, which in our case is based on a Josephson junction with a sinusoidal current-phase relation as the origin of nonlinearity. We demonstrate that effects beyond the monochromatic approximation significantly modify the bare characteristics and evaluate their contribution. Due to high sensitivity of this circuit to small variations of parameters, it can serve as an efficient detector of the quantum state of superconducting qubits.

Contribution for the JETP special issue in honor of P. L. Kapitza's 130th anniversary

DOI: 10.31857/S0044451024070101

1. INTRODUCTION

Further development of high-efficiency quantum detectors for solid-state quantum-information circuits, in particular, for Josephson quantum bits, is a task of high importance, relevant for realization of novel devices and investigation of quantum behavior of such circuits. Due to their high sensitivity and weak backaction, detectors based on bifurcation phenomena are extensively used (see, e. g., Ref. [1] for review). These circuits are generally based on a bistability between low- and high-amplitude forced oscillations at a frequency close to the basic frequency of a resonator with a cubic nonlinearity (equivalently, Kerr or $\chi^{(3)}$ -nonlinearity [2]). The dynamics of this circuit is described by the Duffing

equation [3]. A device using this method of operation was first proposed and developed by Siddiqi et al. [4]. In this device, known as a Josephson bifurcation amplifier (JBA), driving near the resonance frequency is used to induce oscillations, and at sufficiently strong driving the circuit bifurcates from a single-valued to a bistable regime. These two possible oscillation states have different amplitudes and phases, but the same frequency, equal to the drive frequency. When biased near the bifurcation point, this circuit is extremely sensitive to small changes of its parameters, especially its resonance frequency, which in its turn depends on the state of a coupled qubit. This device and its modifications, operating as threshold detectors, were investigated and used by various experimental groups [5–11].

A different threshold detector [12], termed a period-doubling bifurcation readout (PDBR), is based on a parametric period-doubling bifurcation in an

* E-mail: makhlin@itp.ac.ru

externally driven Josephson-junction-based resonator with a quadratic nonlinearity (also known as non-centrosymmetric or $\chi^{(2)}$ -nonlinearity [2]). A bistability in this circuit is developed between the zero state and an oscillation state at the basic frequency, whereas the drive is applied at a double frequency. A quadratic nonlinearity in the current-phase relation $I(\varphi)$ of the Josephson junction is provided by a dc current bias, $|I_0| < I_c$, where I_c is the critical current (see Fig. 1 *a*). Alternatively, such nonlinearity can be obtained using a constant-flux biased rf-SQUID [13], as shown in Fig. 1 *b*, or an asymmetric multi-junction SQUID or the so called SNAIL circuit [14]. This PDBR regime was experimentally realized in a microwave-driven superconducting Nb CPW resonator including an rf-SQUID [15]. A similar approach was used in a demonstration of a SNAIL cavity-based parametric amplifier with a large dynamic range [16].

Instead of nonlinearity-assisted pumping of the circuit, a period-doubling bifurcation may arise due to parametric modulation of the inductance or capacitance. This regime was studied by Dykman et al. [17, 18] and demonstrated experimentally in a superconducting coplanar waveguide cavity including a magnetic-flux modulated dc-SQUID by Wilson et al. [19] Eventually, a parameter-modulated nonlinear circuit can also be used to detect quantum states of Josephson qubits; as we show below, its analysis is similar and its properties are comparable to those presented earlier in Ref. [12]. Since such readout strategy also implies generation of oscillations at the half-frequency of the drive, below we refer to this kind of device as PDBR-2, while PDBR-1 is reserved for the PDBR with quadratic nonlinearity and a force drive [12]. All these bifurcation-based devices can be used as efficient quantum detectors, and it is important to accurately analyze their behavior.

To describe the behavior of such a detector, one needs to find stationary states of a driven system and then analyze their stability and relaxation toward stable states. This analysis requires a quantitative description of the device dynamics. For the simplest description of the circuit, one normally assumes that only oscillations at the basic frequency ω are induced (on top of a weak linear response at the drive frequency 2ω in the case of PDBR-1), cf. the literature cited above. To find the amplitude of these oscillations, one retains only the first harmonic of the evolution equation. This approach was referred to as ‘monochromatic approximation’ in Ref. [20] in the case of JBA, and we use this term also for the case of the drive at the double frequency (although in this case it also involves the

‘trivial’ weak response at 2ω mentioned above).

Here we demonstrate that the monochromatic approximation is not sufficiently accurate, in the following sense: in the effective equation of motion (EOM) for (the amplitude of) the basic harmonic the monochromatic approximation correctly yields the leading, linear term. For the PDBR, this term determines the parameter range, where the zero solution becomes unstable, and where the quantum measurement is at all possible. For the JBA, the linear term defines the response in the linear regime. However, subleading nonlinear terms govern development of the parametric instability in the PDBR regime as well as the full response for the JBA in the readout regime of interest. The monochromatic approximation, as we demonstrate, fails to provide accurate values of the subleading terms. We emphasize that the deviation is substantial, typically by a factor of order one, but in general it depends on the parameters of the effective potential of our nonlinear system and could be even stronger. Obviously, this modification of the nonlinear term needs to be accounted for in the description of the device operation. Such effects may generally appear in driven nonlinear resonators [3], and we develop a systematic approach to their quantitative description.

The effect considered here appears in generic nonlinear oscillators, but in our description below we have in mind circuits with a nonlinear Josephson inductance. The regimes of interest (i. e., JBA, PDBR-1, and PDBR-2) are described by similar equations, which differ only by the driving term. After setting the problem, we describe its solution for the PDBR-1 and summarize our results for the other two cases. We extend the general method of analysis of anharmonic oscillations [3] to account for various driving terms and higher nonlinearities. We also note that recently, effects of higher nonlinearities and multiple harmonics attracted attention in the field of Josephson-junction-based circuits. For instance, Ref. [21] analyzed their effect on the gain saturation in a Josephson parametric amplifier in the regime below bistability, while the so called harmonic balance analysis for parametric amplifiers was presented in Ref. [22].

The circuits under consideration contain a phase-biased Josephson junction, which provides for parametric frequency conversion due to quadratic nonlinearity in the current-phase relation. When the circuit is current-driven at a frequency close to the double basic frequency of the resonator (the case of PDBR-1), a sharp onset of oscillations may occur at half of the drive frequency, i. e., close to the basic frequency. The Kerr nonlinearity of the Josephson junction leads to a sig-

nificant amplitude of these oscillations. Exploiting this bistability between the zero state and finite-amplitude oscillations, one may efficiently detect small variations of the effective circuit capacitance or inductance, and therefore the quantum state of a coupled Josephson qubit. The dynamics of the nonlinear Josephson circuit was analyzed in Ref. [12] in a simplified model, where the renormalization corrections were introduced only at the final stage. However, full characterization of this and similar devices and their potential use for quantum-state detection requires an accurate quantitative description of its behavior. Here we investigate an important correction and its influence on the dynamics of the circuit. Let us first briefly indicate the origin of this correction.

Driving at frequency 2ω , close to the double basic frequency of the resonator with an ordinary quadratic nonlinearity, induces oscillations at frequency ω , close to its basic frequency. However, due to the inherent Kerr nonlinearity unaccounted oscillations at multiples $n\omega$ of this frequency are also induced, where $n = 0, 3, 4, 5, \dots$. In this article we analyze the feedback of these higher harmonics to the dynamics of the basic oscillations in the resonator. We derive the corresponding dynamic equations and show that their functional form is not modified, whereas the coefficients are changed, so we analytically find the contribution of the higher harmonics to these coefficients. We show that the non-dissipative part of the EOM is of Hamiltonian nature, which can be used to explain certain apparent coincidences of the coefficients and to find the most generic form of the low-order EOM describing small oscillations.

For the description of the circuit dynamics we use a version of the method of averaging or the method of slowly varying amplitudes, developed for the analysis of nonlinear systems (see, e. g., Refs. [23, 24]). A specific extension of this approach was developed by Peter Kapitza for the analysis of his seminal Kapitza pendulum [25–27] and is now part of the standard theoretical-physics toolbox (cf. Ref. [3, § 30]). For example, Arnold describes [28] interesting connections between Kapitza’s results and the Kolmogorov-Arnold-Moser theory (known as KAM theory) of quasi-periodic motions in Hamiltonian systems and their stability.

2. JOSEPHSON BIFURCATION DETECTORS AND MONOCHROMATIC APPROXIMATION

The conventional circuit of a period-doubling-bifurcation detector proposed in Ref. [12] PDBR-1 (see

Fig. 1 *a*) consists of a dc-current-biased Josephson junction with critical current I_c , capacitance C including both the self-capacitance of the junction and a possible external capacitance, linear conductance G , as well as an attached qubit, depicted here as a small capacitance C_q , presumably of quantum origin [29, 30]. The circuit is driven by a harmonic signal $I_{ac} = I_A \cos 2\omega t$ at a frequency close to the double frequency of small-amplitude plasma oscillations ω_p [31], i. e., $\omega \approx \omega_p$. The JBA can be represented by the same circuit with a different driving frequency, i. e. $I_{ac} = I_A \cos \omega t$. A possible modification of this universal circuit is shown in Fig. 1 *b*, where the dc-current-biased junction is replaced by a constant-flux-biased rf-SQUID with inductance L_g . In this case the effective linear inductance of the circuit L is expressed via the phase-bias dependent Josephson-junction inductance L_J , i. e., $L^{-1} = L_J^{-1} + L_g^{-1}$. Nonlinear properties of such an element (quite similar to those of a dc-biased Josephson junction) are given by Eq. (4) of Ref. [13]. In the third case of PDBR-2 (see Fig. 1 *c*) the driving signal also has the double frequency but a different nature, viz., it modulates a reactance parameter of the resonator (the effective Josephson inductance of the dc-SQUID).

In the absence of fluctuations, the dynamics of the bare system (shown in Fig. 1 *a*, excluding the signal source, whose quantum state only slightly changes the plasma frequency ω_p of the entire circuit) is governed by the model of a resistively shunted Josephson junction [32, 33]:

$$C \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + G \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin \varphi = I_0 + I_{ac}.$$

Here $\Phi_0 = h/2e$ is the magnetic flux quantum. A finite subcritical current bias, $|I_0| < I_c$, establishes a dc phase drop $\varphi_0 = \arcsin(I_0/I_c)$ across the Josephson junction. The small-signal expansion ($x = \varphi - \varphi_0 \ll 1$) of the Josephson supercurrent term includes the following dominant components:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin(\varphi_0 + x) \approx \\ &\approx \sin \varphi_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) + \cos \varphi_0 \left(x - \frac{x^3}{6} \right). \end{aligned}$$

The resonant frequency of small oscillations of φ around φ_0 is given by

$$\omega_p = (\cos \varphi_0)^{1/2} \omega_{p0},$$

see [31], where $\omega_{p0} = (L_{J0}C)^{-1/2}$ is the bare plasma frequency and the Josephson inductance of the unbiased junction $L_{J0} = \Phi_0/(2\pi I_c)$.

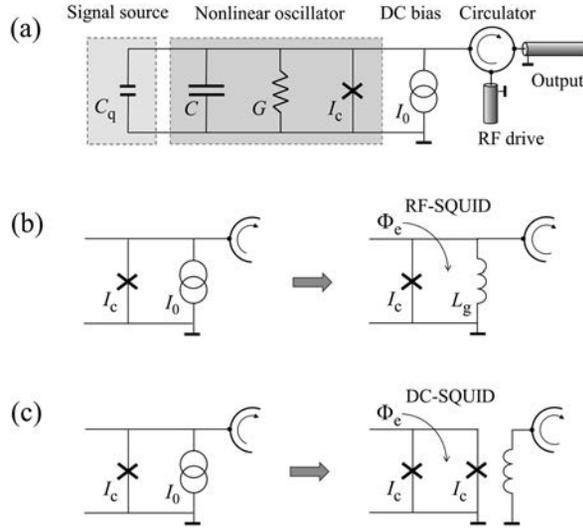


Fig. 1. *a* — Electric diagram of the period-doubling bifurcation detector including a resonator formed by an inductance $L_J = \Phi_0 / (2\pi I_c \cos \varphi_0) = L_{J0} / \cos \varphi_0$ of the Josephson junction with critical current I_c (denoted by a cross symbol), externally biased by a dc current I_0 , and capacitance C , which includes the self-capacitance of this junction. Its effective conductance G accounts for linear losses. The resonator is coupled to a signal source, e. g., a charge qubit with an effective quantum capacitance C_q , which depends on the state of the qubit [29, 30]. Both the microwave drive and readout are realized by means of a circulator. *b* — Modification of the generic circuit (*a*), where the current-biased Josephson junction is replaced by a flux-biased rf-SQUID with a screening parameter $\beta_L = L_g / L_{J0} < 1$. The drive at frequency $2\omega \approx 2\omega_p$ leads to the regime of period-doubling bifurcations (PDBR-1), while the drive at frequency $\omega \approx \omega_p$ leads the conventional bifurcations (JBA) in both types of circuits (*a*) and (*b*). *c* — The circuit based on a flux-driven symmetric dc-SQUID. For non-zero flux bias Φ_e , the ac flux drive at $2\omega \approx 2\omega_p$ may also lead to the period-doubling bifurcations due to periodic modulation of the effective SQUID inductance (the PDBR-2 regime, see text)

After the small-signal expansion, the equation of motion for the dimensionless phase x takes the form

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\theta \dot{x} + \chi_2 x^2 + \chi_3 x^3 - \chi_4 x^4 + \text{driving term}, \quad (1)$$

where the dots denote derivatives with respect to the dimensionless time $\tau = \omega t$. The dimensionless detuning and dissipation coefficients in Eq. (1) are

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - \bar{\omega}^{-2}, \quad |\xi| \ll 1, \\ \theta &= G/2\omega C \equiv 1/2Q \ll 1, \end{aligned} \quad (2)$$

respectively [12]. The normalized frequency

$$\bar{\omega} = \omega/\omega_p \quad (3)$$

approaches one, $\bar{\omega} \rightarrow 1$, on resonance. Expressions for the nonlinear coupling coefficients,

$$\chi_2 = 12\chi_4 = \tan \varphi_0 / 2\bar{\omega}^2, \quad \chi_3 = 1/6\bar{\omega}^2,$$

are particular cases of the general expression (5) below.

For the rf-SQUID configuration in Fig. 1*b*, the resonant frequency and nonlinear coefficients can be expressed in terms of the dimensionless screening parameter $\beta_L = L_g / L_{J0}$ [31, 34–36] as

$$\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 (\cos \varphi_0 + \beta_L^{-1}) = \ell^{-1} \omega_{p0}^2 \cos \varphi_0, \quad (4)$$

$$\chi_2 = 12\chi_4 = \ell \tan \varphi_0 / 2\bar{\omega}^2, \quad \text{and} \quad \chi_3 = \ell / 6\bar{\omega}^2. \quad (5)$$

Here a universal inductance renormalization factor ℓ is defined as

$$\ell = \begin{cases} 1, & \text{(PDBR-1a)} \\ \frac{\beta_L \cos \varphi_0}{1 + \beta_L \cos \varphi_0} = \frac{L_g}{L_g + L_J} = \frac{L}{L_J}, & \text{(PDBR-1b)} \end{cases} \quad (6)$$

where

$$L_J(\varphi_0) = L_{J0} / \cos \varphi_0.$$

With this definition, one can describe both PDBR-1a and PDBR-1b by the same Eqs. (1)–(6). In particular, for PDBR-1b we find

$$\begin{aligned} \chi_2 &= 12\chi_4 = (1/2\bar{\omega}^2) \beta_L \sin \varphi_0 (1 + \beta_L \cos \varphi_0)^{-1}, \\ \chi_3 &= (1/6\bar{\omega}^2) \beta_L \cos \varphi_0 (1 + \beta_L \cos \varphi_0)^{-1}. \end{aligned}$$

As expected, the expressions for PDBR-1a can be obtained from those for PDBR-1b at $L_g \rightarrow \infty$, which yields $\beta_L \rightarrow \infty$ and $\ell \rightarrow 1$.

In this rf-SQUID configuration, the dc phase bias φ_0 is set by an external magnetic flux Φ_e . It

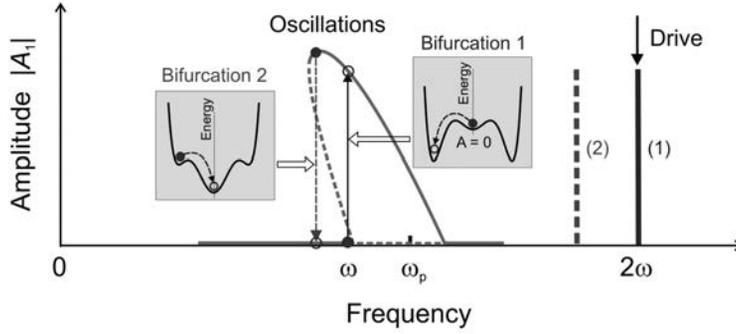


Fig. 2. Schematic plot of the parametric resonance curve (red): Amplitude $|A_1|$ of the fundamental-frequency Josephson-phase oscillations in PDBR-1 vs. frequency for a 2ω -drive signal with the drive amplitude above the bifurcation threshold. The negative slope of the response curve is shown for positive Kerr nonlinearity, $\chi_3 > 0$. At $\chi_3 < 0$, the regime accessible in PDBR-1 with an rf-SQUID biased by flux Φ_e not far from $\Phi_0/2$, the parametric-resonance curve has the opposite (positive) slope. The dashed red line indicates an unstable state. Increasing the drive frequency induces a PDB (solid vertical arrow); when this frequency decreases, the system switches back to the zero state (dashed vertical arrow). The insets schematically show transitions in the corresponding metapotentials [12]. Similar transitions may be induced by variation of other parameters, for instance, of the drive amplitude (which determines the width of the resonance peak), cf. Ref. [12]

can be found from the transcendental equation [31] $\varphi_0 + \beta_L \sin \varphi_0 = 2\pi\Phi_e/\Phi_0$, which has a single solution for arbitrary Φ_e in the non-hysteretic regime $\beta_L < 1$ [36], considered here. The external-flux dependence of the nonlinear coefficients χ_2 and χ_3 is shown, for instance, in Fig. 3 of Ref. [37]. Their values and signs can be efficiently controlled via Φ_e in the full range of phase bias, $-\pi \leq \varphi_0 < \pi \pmod{2\pi}$, without any risk of the circuit switching from the superconducting to resistive state (as in a stand-alone Josephson junction at $\varphi_0 \rightarrow \pi/2$ [34]). In particular, both the Kerr-free case, $\chi_2 \neq 0$ with $\chi_3 = 0$ (reached at $\varphi_0 = \pm\pi/2$), and the pure Kerr case, $\chi_3 \neq 0$ with $\chi_2 = 0$ (attained at $\varphi_0 = 0$ or π), are easily accessible by tuning the flux Φ_e .

Apart from the dynamics of PDBR-1, the generic nonlinear Eqs. (1)–(6) can also describe the JBA. The respective driving terms read

$$\begin{aligned} \text{driving term} &= 3P_2 \cos 2\tau, \\ \text{where } 3P_2 &= \frac{\ell}{\bar{\omega}^2 \cos \varphi_0} \frac{I_A}{I_c}, \\ &\text{(PDBR-1a,b; current drive),} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{driving term} &= P_1 \cos \tau, \\ \text{where } P_1 &= \frac{\ell}{\bar{\omega}^2 \cos \varphi_0} \frac{I_A}{I_c}, \\ &\text{(JBA-a,b; current drive),} \quad (8) \end{aligned}$$

where the subscript of the drive amplitude P indicates the drive frequency, and the factor 3 is introduced for

convenience in further analysis. The rf-SQUID resonator (see Fig. 1 b) can either be current-driven as above, or flux-driven by an additional ac flux applied to the SQUID loop, $\Phi_{ac}(t) = \Phi_A \cos 2\tau$ (PDBR-1b) or $\Phi_{ac}(t) = \Phi_A \cos \tau$ (JBA-b). In this case

$$\begin{aligned} \text{driving term} &= 3P_2 \cos 2\tau, \\ \text{where } 3P_2 &= \frac{\ell}{\bar{\omega}^2 \cos \varphi_0} \frac{2\pi \Phi_A}{\beta_L \Phi_0}, \\ &\text{(PDBR-1b; flux drive),} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{driving term} &= P_1 \cos \tau, \\ \text{where } P_1 &= \frac{\ell}{\bar{\omega}^2 \cos \varphi_0} \frac{2\pi \Phi_A}{\beta_L \Phi_0}, \\ &\text{(JBA-b; flux drive).} \quad (10) \end{aligned}$$

The evolution equation (1), formally, can also describe the PDBR-2 circuit with a dc-SQUID shown in Fig. 1 c. In contrast to PDBR-1 with forced oscillations, the frequency conversion in PDBR-2 occurs due to periodic modulation of the effective critical current, and hence inductance, of the dc-SQUID [17, 19, 23]. This modulation is controlled by an ac magnetic flux in the SQUID loop. Thus PDBR-2 can operate without quadratic nonlinearity, for instance, at zero current bias, $\varphi_0 = 0$. An optimal dc flux bias

$$\Phi_e = \Phi_e^{\text{opt}} \approx \pm\Phi_0/3$$

sets an effective critical current

$$I_c^{\text{eff}} = 2I_c |\cos(\pi\Phi_e/\Phi_0)| \approx I_c$$

and allows one to combine efficient, nearly linear modulation of the critical current ($\partial I_c^{\text{eff}}/\partial \Phi_e \neq 0$) with maximal possible swing. Expanding the current through the dc-SQUID at $\varphi_0 = 0$,

$$I = I_c^{\text{eff}} \sin \varphi = I_c^{\text{eff}}(\varphi - \varphi^3/6 + \dots),$$

we find the coefficients $\chi_3 = 1/6\bar{\omega}^2$ and $\chi_2 = 0$. An applied alternating flux

$$\Phi_{\text{ac}}(t) = \Phi_A \cos 2\tau$$

modulates the critical current

$$I_c^{\text{eff}} = I_c^{\text{eff}}(\Phi_e^0)[1 + f\Phi_{\text{ac}}(t)/\Phi_0]$$

(and thereby the SQUID inductance). At an optimal dc-flux bias point, $\pm\Phi_0/3$, we find the modulation parameter

$$f = \frac{\partial I_c^{\text{eff}}}{\partial \Phi_e} \frac{\Phi_0}{I_c^{\text{eff}}} \approx \mp\sqrt{3}\pi.$$

The resulting driving term for PDBR-2 takes the form

$$\begin{aligned} \text{driving term} &= P_2' x \cos 2\tau, \\ \text{where } P_2' &= \bar{\omega}^{-2} f \Phi_A / \Phi_0. \end{aligned} \quad (\text{PDBR-2}) \quad (11)$$

In some realistic circuits (for instance, a flux-driven asymmetric dc-SQUID with different junctions, $I_{c1} \neq I_{c2}$), the applied ac flux can simultaneously induce both the force- and parametric-driving terms, i. e., P_2 and P_2' terms in Eqs. (9) and (11), respectively. Since the effective evolution equations (23) and (29), derived below respectively for PDBR-1 and PDBR-2, are of the same form, to the lowest order in the drive one can simply add the respective contributions with P_2 and P_2' .

Thus Eq. (1) with appropriate driving terms allows us to consider both PDBR-1 and PDBR-2 circuits driven near the double resonant frequency and JBA circuits driven near the fundamental frequency. Below we focus mostly on the PDBR-1 circuits, whereas our results can be easily extended to the case of JBA and PDBR-2.

In the monochromatic approximation, one seeks a solution of Eq. (1) in the form

$$x \equiv (A_1 e^{-i\tau} + \text{c.c.}) - P_2 \cos 2\tau.$$

Substituting this expression in Eq. (1), one finds an evolution equation for the slow complex amplitude A_1 of the first harmonic, cf. Ref. [12], where it was presented as a pair of equations for its absolute value A and phase α :

$$A_1 = \frac{1}{2} A e^{i\alpha}.$$

Rewriting them as a single equation for A_1 , we thus find in the monochromatic approximation:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= - \left(\theta - i \frac{\xi}{2} \right) A_1 - \frac{i}{2} \chi_2 P_2 A_1^* + \\ &+ \frac{3i}{2} \chi_3 |A_1|^2 A_1 + i \chi_4 P_2 (3|A_1|^2 A_1^* + A_1^3). \end{aligned} \quad (12)$$

However, this derivation of Eq. (12) neglects possible deviations of the second harmonic from the pure drive $-P_2 \cos 2\tau$ as well as contributions of the other harmonics, with numbers $n = 0$ (dc) and $|n| > 2$. The dynamics of these harmonics (they all are loosely termed *higher harmonics* in this article) are coupled to the evolution of A_1 . We show below that their dynamics is faster than that governed by Eq. (12), and using separation of the time scales one can still derive a closed equation of motion for A_1 . Since the effect of the higher harmonics arises due to the weak nonlinearity, it does not modify the leading, linear terms in the equation for amplitude A_1 , but in general does modify the subleading terms. The linear terms determine the stability range of the zero solution, $A_1 = 0$, under parametric pumping, $P_2 \neq 0$. However, the subleading, nonlinear terms are crucial for understanding the development of the instability. Below we analyze the effect of the higher harmonics on the EOM (12). Surprisingly, we find that their effect does not modify the functional form of this equation for A_1 but only modifies its coefficients. This holds true also when one accounts for higher-order contributions in amplitude P_2 .

An illustration of the flow in the phase space (the plane of the complex amplitude A_1) is shown in Fig. 3. Before we proceed with the analysis, we note that Eq. (12) allows one to find stationary solutions and analyze their stability (see Fig. 2), as well as to study tunnel rates between the states in the bistable regime (illustrated in the insets). The latter are crucial quantities for the description of the quantum measurement using this detector [12].

3. EVOLUTION BEYOND THE MONOCHROMATIC APPROXIMATION

The drive at frequency 2ω generates, in the first place, oscillations at 2ω (in the linear response) and ω (under parametric instability). Due to nonlinearities these oscillations induce also a weaker response at other multiple frequencies $n\omega$, $|n| = 0, 3, 4, \dots$. This response should be self-consistently taken into account in order to derive the dynamics of the first harmonics in higher orders (due to nonlinear effects). In this section we perform this derivation.

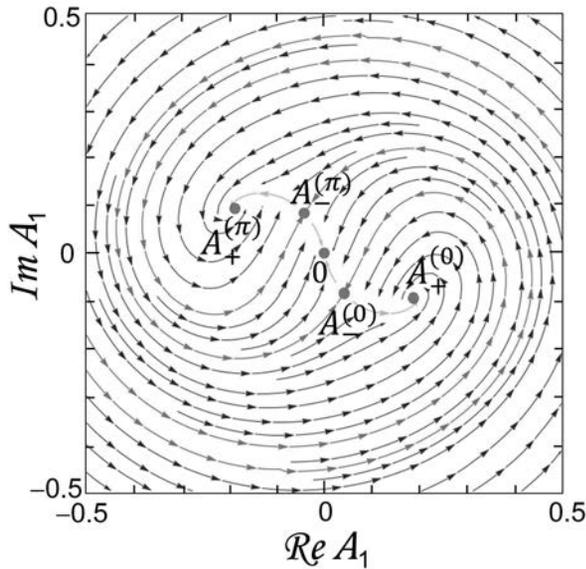


Fig. 3. Velocity field for the dynamics in the plane of the complex amplitude A_1 , governed by Eq. (12) and shown for a circuit with the quality factor $Q = \omega C/G = 25$, phase bias $\varphi_0 = 50^\circ$, and detuning $\xi = -0.045$. The five red dots indicate stationary solutions and are arranged symmetrically: the stable zero state, $A_1 = 0$, in the middle, two degenerate non-zero states A_+ with a relative π -shift on the outside, and two degenerate π -shifted unstable solutions A_- between them. The red separatrix lines passing through the unstable solutions $A_-^{(\pi)}$ and $A_-^{(0)}$ delimit the basins of attraction for three stable states, $A_+^{(\pi)}$, 0 , and $A_+^{(0)}$. During the evolution, fast relaxation towards the bottom of the valley connecting all five stationary states (green line) is followed by subsequent slow dynamics along this green line [12]

Let us derive the EOM for the amplitudes of all harmonics, induced by the 2ω -drive. We assume that the resulting oscillations are almost 2π -periodic, and the phase variable can be represented in the following form:

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(\tau) e^{-in\tau}, \quad (13)$$

where the amplitudes $A_n(\tau)$ are slowly varying functions on the scale of the oscillation period, $\tau = 2\pi$, so that the Fourier transform of $x(\tau)$ contains only frequencies close to integers. Since x is a real variable, the complex amplitudes A_n satisfy the relation $A_{-n} = A_n^*$.

Below we derive the EOM for the complex amplitudes $A_n(\tau)$. We find that the dynamics of $A_{\pm 1}$ is slower than that of the amplitudes with $n \neq \pm 1$, which allows us to find them as functions of $A_{\pm 1}$ in the adiabatic approximation. Thus we derive a closed EOM for complex amplitudes $A_{\pm 1}$.

3.1. Quasi-stationary values of higher harmonics

To proceed with the derivation, we start with Eq. (1) for x in the form (13). Assuming small values of the parameters ξ , θ , and P_2 and a small amplitude of oscillations, $A \ll 1$, we find that

$$\begin{aligned} (1 - n^2)A_n - 2in\dot{A}_n + \ddot{A}_n &= \\ &= (\xi + 2in\theta)A_n + (\chi_2 x^2 + \chi_3 x^3 - \chi_4 x^4)_n + \frac{3}{2}P_2 \delta_{n,\pm 2}, \end{aligned} \quad (14)$$

where the last term on the rhs enters only the equation for $n = \pm 2$, and the subscript n in the previous, higher-order term indicates that the n th term in the full Fourier series is taken, for instance,

$$(\chi_2 x^2)_n \equiv \chi_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k A_{n-k}.$$

This equation can be rewritten as a system of separate equations for each harmonic,

$$-2in\dot{A}_n + \ddot{A}_n = D_n(\{A_m\}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (15)$$

where the rhs of (15) is given by

$$\begin{aligned} D_n(\{A_m\}) &= (n^2 - 1 + \xi + 2in\theta)A_n + \\ &+ (\chi_2 x^2 + \chi_3 x^3 - \chi_4 x^4)_n + \frac{3}{2}P_2 \delta_{n,\pm 2}, \end{aligned} \quad (16)$$

and each D_n depends on all harmonics $\{A_m\}$ with positive and negative m due to nonlinear terms on the rhs.

Under the assumption that the amplitudes $A_n(\tau)$ are slow, the first term dominates on the lhs of Eq. (14) for all harmonics with $n \neq \pm 1$. All these harmonics relax or average out sufficiently fast (as compared to the dynamics of A_1) to their instantaneous quasi-stationary values determined by A_1 . These values can be deduced from the conditions $D_n(\{A_m\}) = 0$ for all $n \neq \pm 1$. We remark that strictly speaking the higher harmonics evolve at frequencies of order 1, which complicates separation into the modes in Eq. (13). However, when these higher harmonics are fixed to their quasi-stationary values, their dynamics just slowly follow that of A_1 , and that is sufficient for our purposes.

Thus, the amplitudes $A_{n \neq \pm 1}$ as functions of $A_{\pm 1}$ and P_2 can be deduced from the condition that $D_n = 0$ for all $n \neq \pm 1$, which amounts to solving the self-consistent equations

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{-1}{n^2 - 1 + \xi + 2in\theta} \times \\ &\times \left[(\chi_2 x^2 + \chi_3 x^3 - \chi_4 x^4)_n + \frac{3}{2}P_2 \delta_{n,\pm 2} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

The resulting expressions for $A_{n \neq \pm 1}$ in terms of $A_{\pm 1}$ should then be substituted to Eq. (14) with $n = 1$ to find the EOM for the amplitude A_1 (and its conjugate $A_{-1} = A_1^*$).

3.2. Hamiltonian form of EOM and gauge invariance

Before proceeding with the derivation, let us remark that the final equations turn out to be Hamiltonian (except for the dissipative θ -term, like in Eq. (12)). On one hand, the Hamiltonian form of the equation can be justified before the derivation; on the other hand, it constrains the form of the final equation.

Indeed, one can start from the Hamiltonian equations for position $x(t)$ and the corresponding momentum $p(t)$ and derive equations of motion for $A_1(\tau)$ by first changing x, p for the harmonics A_n and then integrating out all harmonics except $A_{\pm 1}$. This would give an effective Hamiltonian $H(A_1, A_1^*)$ for A_1 and the corresponding evolution equation,

$$\dot{A}_1 = \frac{i}{2} \frac{\partial H}{\partial A_1^*}. \quad (18)$$

The fact, that H is real, implies the following most general form of the lowest-order terms in the Hamiltonian

$$\begin{aligned} H(A_1, A_1^*) = & \xi |A_1|^2 - \frac{\chi_2 P_2}{2} [A_1^2 + (A_1^*)^2] + \\ & + \frac{3}{2} \chi_3 |A_1|^4 + 2\chi_4 P_2 |A_1|^2 [A_1^2 + (A_1^*)^2] + \\ & + \nu P_2^2 [A_1^4 + (A_1^*)^4], \quad (19) \end{aligned}$$

where $|A_1|^2 = A_1^* A_1$. The symmetry properties that we discuss in this section leave the coefficients in this Hamiltonian undetermined, and they need to be found by other means. However, our notations for these coefficients are in agreement with Eq. (12), see below.

Indeed, Eq. (19) includes all possible terms up to the 4-th order in A_1 , which are real and ‘gauge invariant’, i. e., invariant under a time translation. It implies that $A_1 \rightarrow A_1 e^{i\psi}$, $A_1^* \rightarrow A_1^* e^{-i\psi}$, $P_2 \rightarrow P_2 e^{2i\psi}$ (since P_2 is the second harmonic). Note, however, that all our equations are written in the gauge, where P_2 is real, whereas in general we could write, for instance, the second term on the rhs as $(\chi_2/2) P_2^* A_1^2 + \text{h.c.}$

All the coefficients in Eq. (19), ξ , χ_2 , χ_3 , χ_4 , and ν are functions of P_2 . Because of the gauge invariance, the expansions in small P_2 for the second and fourth terms (proportional to χ_2 and χ_4 , respectively) begin

with P_2 , while for the last term ($\propto \nu$) it begins with P_2^2 — hence it is small and appears only in higher orders. In fact, it does not appear in our low-order derivation, and is irrelevant for weak pumping P_2 .

One can see that Hamiltonian (19), without the last, high-order term, gives rise to EOM of the form (12). So, the Hamiltonian nature of the equations and their ‘gauge invariance’ imply that the corrections due to higher harmonics or higher-order terms in the pumping amplitude P_2 do not change the functional form of the equation for A_1 . Moreover, they also explain why the last two terms in Eq. (12) include the same coefficients χ_4 : indeed, they stem from two conjugate components of the χ_4 -term in Hamiltonian (19).

It is noteworthy that the effective Hamiltonian (19) for the basic harmonic A_1 is analogous to the effective potential for Kapitza’s inverted pendulum [3].

3.3. Corrections due to higher harmonics

To find the coefficients in Hamiltonian (19) to the leading order in P_2 , we solve the set of equations (17). To the lowest order in A_1 and P_2 a few first harmonics are found to be

$$A_0 = 2\chi_2 |A_1|^2 + \left(\frac{1}{3} \chi_2^2 - \frac{3}{2} \chi_3 \right) [P_2 A_1^2 + \text{c.c.}] + \dots, \quad (20)$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} P_2 - \frac{1}{3} \chi_2 A_1^2 + \left(\frac{7}{12} \chi_2^2 + \chi_3 \right) P_2 |A_1|^2 + \dots, \quad (21)$$

$$A_3 = \frac{1}{8} \chi_2 P_2 A_1 + \left(\frac{1}{12} \chi_2^2 - \frac{1}{8} \chi_3 \right) A_1^3 + \dots, \quad (22)$$

where «...» stands for terms of higher order in A_1 . In particular, the first term on the rhs of Eq. (20) describes an additional drive-dependent phase offset due to rectification of harmonic oscillations by quadratic nonlinearity. The harmonics A_n of higher order $|n| > 3$ do not contribute to the relevant terms of the EOM for A_1 , and we further neglect corrections of order ξ and θ . Substituting Eqs. (20)–(22) into Eq. (14) for $n = 1$ and keeping only terms up to third order in A_1 , we find the EOM for A_1 of the same form as Eq. (12),

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 = & - \left(\theta - i \frac{\tilde{\xi}}{2} \right) A_1 - \frac{i}{2} \tilde{\chi}_2 P_2 A_1^* + \frac{3i}{2} \tilde{\chi}_3 |A_1|^2 A_1 + \\ & + i \tilde{\chi}_4 P_2 (3|A_1|^2 A_1^* + A_1^3), \quad (23) \end{aligned}$$

with the modified coefficients (marked by the tilde sign),

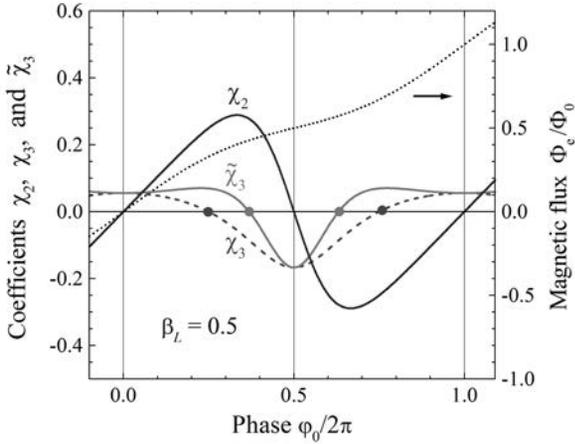


Fig. 4. Effective nonlinear coefficients χ_2 (blue), χ_3 (dashed green), and $\tilde{\chi}_3$ (red) vs. phase bias φ_0 for $\beta_L = 0.5$; since they are 2π -periodic, only one full period is shown. Due to corrections beyond the monochromatic approximation, the effective Kerr coefficient $\tilde{\chi}_3$ is negative in a shorter range of φ_0 -values around π than χ_3 . The phase bias φ_0 is determined by the external flux Φ_e (dotted line, right scale); for $\beta_L < 1$ the dependence $\varphi_0(\Phi_e)$ is single-valued, and the whole range of phase bias φ_0 is accessible

$$\tilde{\chi}_3 = \chi_3 + \frac{10}{9}\chi_2^2, \quad (24)$$

$$\tilde{\chi}_4 = \chi_4 - \frac{15}{16}\chi_2\chi_3 + \frac{7}{24}\chi_2^3, \quad (25)$$

while $\tilde{\xi} = \xi$ and $\tilde{\chi}_2 = \chi_2$ to the lowest order in P_2 . Using expressions (5) for χ_2 , χ_3 , and χ_4 via the phase bias φ_0 , we find

$$\tilde{\chi}_3 \approx \frac{\ell}{6} + \frac{5}{18}(\ell \tan \varphi_0)^2, \quad (26)$$

$$\tilde{\chi}_4 \approx \frac{\ell \tan \varphi_0}{192} [7(\ell \tan \varphi_0)^2 - 15\ell + 8], \quad (27)$$

since $\bar{\omega} \approx 1$ near resonance. Note that Eq. (24) is in agreement with the expression derived by Nayfeh [38]. According to Landau and Lifshitz [3] this result can be interpreted as an extra correction to the resonant frequency of the anharmonic oscillator due to quadratic nonlinearity.

For the rf-SQUID-based circuit (PDBR-1b), the behavior of the effective Kerr nonlinearity $\tilde{\chi}_3$ in (24) is illustrated in Fig. 4. Similar to χ_2 , its sign varies with the phase bias φ_0 , which can be controlled via the flux Φ_e applied to the SQUID loop. At the Kerr-free points, $\tilde{\chi}_3 = 0$ (red dot in Fig. 4), various phenomena based on pure three-wave mixing may be realized [16, 39, 40].

4. OTHER BIFURCATION DETECTORS

We now comment on the EOM for other bifurcation readout devices, such as the JBA (either in the conventional configuration with a dc-current-biased Josephson junction in Fig. 1 a, or in the rf-SQUID configuration in Fig. 1 b) and the PDBR-2 (based on a parametrically driven nonlinear resonator including a dc-SQUID shown in Fig. 1 c). For the JBA, similar analysis yields an equation, reminiscent of Eq. (12),

$$\dot{A}_1 = - \left(\theta - i \frac{\xi}{2} \right) A_1 + \frac{3i}{2} \left(\chi_3 + \frac{10}{9}\chi_2^2 \right) |A_1|^2 A_1 + \frac{i}{2} P_1, \quad (28)$$

where we keep only lowest-order terms, essential for the description of the resonance peak. Here the drive term $iP_1/2$ is induced by near-resonant pumping, used in the operation of the JBA. One can see that, as expected, the modified coefficient $\tilde{\chi}_3$ is again given by Eq. (24) derived for the PDBR-1, since it does not contain any details of the drive. Without this modification Eq. (28) coincides with (the low-order terms of) the respective equation for the JBA in the monochromatic approximation [20], while the modification generally gives a substantial correction.

Both circuits in Figs. 1 a and 1 b can also be operated in the JBA regime. In the latter case, the correction manifests itself in a shift of the Kerr-free points toward π and the corresponding narrowing of the interval with negative $\tilde{\chi}_3$, see Fig. 4. JBA with a negative Kerr nonlinearity was demonstrated [41] in a superconducting Nb coplanar-waveguide $\lambda/2$ -resonator with an rf-SQUID embedded in the central conductor [40]. In this case, the resonance curve exhibits a characteristic positive slope.

Finally, we also consider the evolution equation for the PDBR-2 with a parametric driving $\propto P_2'x$,

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\theta\dot{x} + \chi_2 x^2 + \chi_3 x^3 - \chi_4 x^4 + P_2' x \cos 2\tau. \quad (29)$$

In this case, analysis, similar to that performed above for PDBR-1, yields an EOM for the amplitude A_1 in the form

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 = & - \left(\theta - i \frac{\xi}{2} \right) A_1 + \frac{i}{4} P_2' A_1^* + \\ & + \frac{3i}{2} \left(\chi_3 + \frac{10}{9}\chi_2^2 \right) |A_1|^2 A_1 - \\ & - \frac{i}{32} \left(\chi_3 + \frac{14}{3}\chi_2^2 \right) [P_2'^* A_1^3 + 3P_2' |A_1|^2 A_1^*]. \quad (30) \end{aligned}$$

This equation was derived to the lowest orders in the amplitudes of the oscillations and the drive, A_1 and P'_2 , respectively. The second term ($\propto P'_2$) on the rhs of this equation induces parametric excitation similarly to the second term ($\propto \chi_2 P_2$) on the rhs of Eq. (12) originating from down-conversion of the drive in PDBR-1. Note that Eq. (30) also satisfies the constraints, set by the Hamiltonian nature of the non-dissipative terms.

5. DISCUSSION

In summary, we demonstrated the important role played by weak higher harmonics (with $n = 0$ and $|n| \geq 2$) in the dynamics of the basic oscillations ($n = \pm 1$) of a nonlinear resonator. Nonlinearities create these higher harmonics from the basic oscillations and couple them back to the evolution of the basic harmonic. We demonstrated that the equations of motion for the basic harmonic are of Hamiltonian nature (except the dissipative and noise terms), similar to the effective-potential description of the Kapitza inverted pendulum [3]. Time-translation invariance strongly limits the functional form of the Hamiltonian. The low-order terms in the Hamiltonian and dynamical equations are given by Eq. (23) for PDBR-1 (the period-doubling bifurcation readout with a current-biased junction, Fig. 1 *a*, or an rf-SQUID, Fig. 1 *b*), by Eq. (30) for PDBR-2 (PDBR in an dc-SQUID configuration of Fig. 1 *c*), and Eq. (28) for JBA, respectively. These results allow for accurate analysis of the stationary states and transitions between them, when control parameters of the circuit are varied. The relevant analysis of the Fokker-Planck equation and the switching process for PDBR-1, which defines the characteristics of this quantum detector, can be found in Ref. [12]. This analysis demonstrated that the PDBR has properties comparable to those of the JBA, and for some parameter regimes exceeding those of the JBA. We emphasize that the corrections beyond the monochromatic approximation that we found in this article, are essential for the quantitative description of various bifurcation quantum detectors, proposed and applied for readout of Josephson qubits.

We point out that nonlinear coefficients in these bifurcation readout circuits crucially depend on the bias point and can be efficiently tuned via the dc control current or external magnetic flux. This flexibility may be used for improving sensitivity and other characteristics of the bifurcation readout devices. For example, remarkable properties of the rf-SQUID-based bifurca-

tion circuit (PDBR-1b) allow one to tune the Kerr coefficient to a small value and ensure a sufficiently steep slope of the parametric resonance curve, which may notably improve resolution in reading out a qubit state.

We analyzed various bifurcation regimes using a lumped-element model of nonlinear resonant circuits. Experimentally, practical advantages, such as convenient control of the quality factor and a simple coplanar-waveguide design, were demonstrated in a cavity bifurcation amplifier (CBA) [11]. CBA is based on a cavity-type superconducting microwave resonator with an embedded nonlinear element, which in its turn is integrated with a qubit. Its behavior is normally described within the monochromatic approximation by an equivalent lumped-element circuit with effective parameters [1]. This model, however, is valid only in the vicinity of the fundamental resonant frequency of the microwave-driven cavity. For higher oscillating modes, parameters of equivalent resonant circuits differ for each mode [42], and thus analysis of the effect of these modes on the CBA requires modifications of the developed approach. In particular, dynamical equations for the modes are coupled via nonlinear terms. For cavity-based PDBR circuits, such as a coplanar-waveguide $\lambda/2$ -resonator with an embedded rf-SQUID [40], analysis beyond the monochromatic (single-mode) approximation is particularly important because in this case the microwave drive is normally almost in resonance with the λ -mode. Moreover, modifications of the resonator design toward strong coupling between the $\lambda/2$ - and λ -modes [40] enabled observation of the period-doubling regime at sufficiently weak microwave drive amplitudes. We leave the analysis of this case for a subsequent investigation.

Acknowledgements. We are grateful to B. Shteynas for his valuable contributions at an early stage of this work. We acknowledge valuable discussions with A. Shnirman and D. Zverevich.

REFERENCES

1. R. Vijay, M. H. Devoret, and I. Siddiqi, *Rev. Sci. Instrum.* **80**, 111101 (2009).
2. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, Orlando (2008).
3. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics, Course of Theoretical Physics*, vol. 1, Pergamon Press (1969).

4. I. Siddiqi, R. Vijay, F. Pierre, C. M. Wilson, M. Metcalfe, C. Rigetti, L. Frunzio, and M. H. Devoret, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 207002 (2004).
5. I. Siddiqi, R. Vijay, M. Metcalfe, E. Boaknin, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf, and M. H. Devoret, *Phys. Rev. B* **73**, 054510 (2006).
6. N. Boulant, G. Ithier, P. Meeson, F. Nguyen, D. Vion, D. Esteve, I. Siddiqi, R. Vijay, C. Rigetti, F. Pierre, and M. Devoret, *Phys. Rev. B* **76**, 014525 (2007).
7. F. Mallet, F. R. Ong, A. Palacios-Laloy, F. Nguyen, P. Bertet, D. Vion, and D. Esteve, *Nature Phys.* **5**, 791 (2009).
8. K. Kakuyanagi, S. Kagei, R. Koibuchi, S. Saito, A. Lupaşcu, K. Semba, and H. Nakano, *New J. Phys.* **15**, 043028 (2013).
9. V. Schmitt, X. Zhou, K. Juliusson, B. Royer, A. Blais, P. Bertet, D. Vion, and D. Esteve, *Phys. Rev. A* **90**(6), 062333 (2014).
10. S. Boutin, P. L. S. Lopes, A. Mu, U. C. Mendes, and I. Garate, *J. Appl. Phys.* **129**, 214302 (2021).
11. M. Metcalfe, E. Boaknin, V. Manucharyan, R. Vijay, I. Siddiqi, C. Rigetti, L. Frunzio, R. J. Schoelkopf, and M. H. Devoret, *Phys. Rev. B* **76**, 174516 (2007).
12. A. B. Zorin and Yu. Makhlin, *Phys. Rev. B* **83**, 224506 (2011).
13. A. B. Zorin, *Phys. Rev. Applied* **6**, 034006 (2016).
14. N. E. Frattini, U. Vool, S. Shankar, A. Narla, K. M. Sliwa, and M. H. Devoret, *Appl. Phys. Lett.* **110**, 222603 (2017).
15. K. E. Porsch, *Exploring the period doubling bifurcation in a superconducting resonator*, Phd Thesis, Royal Holloway, University of London (2017).
16. V. V. Sivak, N. E. Frattini, V. R. Joshi, A. Lingenfelter, S. Shankar, and M. H. Devoret, *Phys. Rev. Applied* **11**(5), 054060 (2019).
17. M. I. Dykman, C. M. Maloney, V. N. Smelyanskiy, and M. Silverstein, *Phys. Rev. E* **57**, 5202 (1998).
18. M. I. Dykman, in *Applications of Nonlinear Dynamics*, ed. by V. In, P. Longhini, and A. Palacios, Springer, Berlin (2000), p. 367.
19. C. M. Wilson, T. Duty, M. Sandberg, F. Persson, V. Shumeiko, and P. Delsing, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 233907 (2010).
20. G. Ithier, *Manipulation, Readout and Analysis of the Decoherence of a Superconducting Quantum Bit*, Phd Thesis, Université Paris 6 (2005).
21. B. A. Kochetov and A. Fedorov, *Phys. Rev. B* **92**, 224304 (2015).
22. D. Shiri, H. R. Nilsson, P. Telluri, A. F. Roudsari, V. Shumeiko, C. Fager, and P. Delsing, *Modeling and Harmonic Balance Analysis of Parametric Amplifiers for Qubit Read-Out* (2023), arXiv:2306.05177.
23. V. V. Migulin, V. I. Medvedev, E. R. Mustel, and V. N. Parygin, *Basic Theory of Oscillations*, Mir, Moscow (1983).
24. J. J. Stoker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, Interscience Publishers Inc. (1950).
25. P. L. Kapitza, *ZhETF* **21**, 588 (1951) [English translation in Ref. [27, p.714]].
26. P. L. Kapitza, *Usp. Fiz. Nauk* **44**, 7 (1951) [English translation in Ref. [27, p.726]].
27. *Collected papers of P.L. Kapitza*, Vol. 2, ed. by D. Ter Haar, Pergamon Press, Oxford (1965).
28. V. I. Arnold, *Mathematical Understanding of Nature: Essays on Amazing Physical Phenomena and Their Understanding by Mathematicians*, American Mathematical Society (2014).
29. T. Duty, G. Johansson, K. Bladh, D. Gunnarsson, C. Wilson, and P. Delsing, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 206807 (2005).
30. M. A. Sillanpää, T. Lehtinen, A. Paila, Yu. Makhlin, L. Roschier, and P. J. Hakonen, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 206806 (2005).
31. K. K. Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*, Gordon and Breach, New York (1986).

32. D. E. McCumber, *J. Appl. Phys.* **39**, 3113 (1968).
33. W. C. Stewart, *Appl. Phys. Lett.* **12**, 277 (1968).
34. M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, Dover, New York (2004).
35. A. Barone and G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, John Wiley and Sons, New York (1982).
36. *Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems, The SQUID Handbook*, vol. 1, ed. by J. Clarke and A. I. Braginski, Wiley-VCH, Weinheim (2004).
37. A. B. Zorin, *Appl. Phys. Lett.* **118**(22), 222601 (2021).
38. A. H. Nayfeh, *J. Sound Vib.* **96**(3), 333–340 (1984).
39. A. Miano, G. Liu, V. V. Sivak, N. E. Frattini, V. R. Joshi, W. Dai, L. Frunzio, and M. H. Devoret, *Appl. Phys. Lett.* **120**, 184002 (2022).
40. M. Khabipov, V. Gaydamachenko, C. Kissling, R. Dolata, and A. B. Zorin, *Supercond. Sci. Technol.* **35**, 065020 (2022).
41. M. Khabipov, private communication (2018).
42. D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, John Wiley and Sons, New York (2012).

ДВУМЕРНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЯЧЕЙКЕ

И. В. Колоколов^{}, В. В. Лебедев*

*НИУ Высшая школа экономики
101000, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 3 декабря 2023 г.,
после переработки 3 декабря 2023 г.
Принята к публикации 6 декабря 2023 г.

Представлена теория двумерной турбулентности, возбуждаемой внешней силой в тонких пленках жидкости на масштабах, превышающих толщину пленки. Основной особенностью двумерной турбулентности является тенденция к генерации движений все большего и большего масштаба благодаря нелинейному взаимодействию. Тенденция приводит к образованию так называемого обратного каскада и, при некоторых условиях, больших когерентных вихрей. Мы обсуждаем профиль средней скорости когерентных вихрей и флуктуации потока на фоне средней скорости для различных режимов. Мы демонстрируем, что режим сильно взаимодействующих флуктуаций приводит к анизотропному скейлингу внутри когерентных вихрей.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S0044451024070113

1. ВВЕДЕНИЕ

Для нас большая честь представить эту работу для выпуска, посвященного 130-летию П. Л. Капицы. Открытие Петром Леонидовичем сверхтекучести значительно расширило наши представления о возможных гидродинамических эффектах. Гидродинамика все еще продолжает удивлять нас разнообразием связанных с ней явлений. В этой статье мы излагаем современное состояние теории двумерной турбулентности, которая активно развивается в последние годы.

Мы рассматриваем турбулентные состояния тонких пленок жидкости, характеризующиеся интенсивными хаотическими течениями. На масштабах, превышающих толщину пленки, гидродинамические движения в таких пленках можно рассматривать как двумерные [1]. Другими системами, в которых можно эффективно создавать двумерные гидродинамические движения, являются свободно подвешенные мыльные или смектические пленки [2, 3]. Отметим также существование эффективно двумерной подсистемы быстро вращающейся трехмерной жидкости [4, 5]. Турбулентные состояния в упомя-

нутых системах существенно отличаются от трехмерной турбулентности.

Турбулентность может быть вызвана постоянно действующей силой или развиваться без внешнего воздействия. Первый случай называется вынужденной турбулентностью, а второй — затухающей турбулентностью. Затухающая турбулентность во многих аспектах аналогична вынужденной, однако имеет некоторые особенности, которые выходят за рамки нашей статьи. Здесь мы рассматриваем турбулентность, вызываемую внешней силой, которая может быть статической или может быть хаотической функцией времени. Во втором случае мы предполагаем, что сила обладает стационарными статистическими свойствами. Кроме того, можно рассматривать силу, периодически изменяющуюся во времени. Во всех этих случаях турбулентное состояние, будучи состоянием с сильными флуктуациями, обладает стационарными статистическими свойствами.

Уже первые теоретические работы, посвященные двумерной турбулентности [6–8], выявили ее принципиальное отличие от трехмерной. С теоретической точки зрения, различие связано с существованием двух квадратичных положительно определенных величин (кинетической энергии и энстрофии), сохраняемых двумерным уравнением Эйлера. Это приводит к формированию двух различных каска-

^{*} E-mail: igor.kolokolov@gmail.com

дов, возникающих в результате нелинейного взаимодействия: энтрофия переносится с масштаба накачки на меньшие масштабы (прямой каскад), тогда как энергия переносится на большие масштабы (обратный каскад). Энтрофия диссипирует вследствие вязкости на масштабах, меньших длины накачки, а энергия — вследствие трения о дно на масштабах, больших длины накачки.

Статистические свойства флуктуаций скорости в обратном каскаде изучались как экспериментально [9], так и численно [10]. Результаты этих работ хорошо согласуются с аналитической теорией, разработанной для неограниченной системы [11]. Замечательно, что в обратном каскаде наблюдается нормальный колмогоровский скейлинг [10]. Нормальный скейлинг в двумерном случае контрастирует с аномальным скейлингом, наблюдаемым в трехмерной турбулентности [12]. Прямой каскад (каскад энтрофии) характеризуется своими собственными скейлинговыми законами [13, 14].

Для трехмерного течения в жидкости единственным механизмом диссипации кинетической энергии является вязкость. Таким образом, существует единственный безразмерный параметр — число Рейнольдса, характеризующий степень нелинейности для несжимаемого потока. Напротив, при рассмотрении эффективно двумерных тонких пленок жидкости мы имеем дело с двумя диссипативными механизмами: вязкостью и трением о дно. Конечно, трение о дно также сводится к вязкости, но действующей на масштабах порядка толщины пленки. Поэтому при двумерном анализе вязкость и трение о дно следует разделять. Взаимная игра диссипативных механизмов приводит к более сложному характеру нелинейности течения в двумерной турбулентности.

Традиционным способом создания потока в двумерной гидродинамике является приложение к жидкости внешней периодической в пространстве статической силы (силы Колмогорова). Такая постановка задачи используется как в лабораторных экспериментах с тонкими пленками жидкости [9, 15–17], так и в численном моделировании [18–20]. Тогда переход к турбулентности оказывается сложным процессом. Это может быть плавный переход или скачок (в зависимости от соотношения между длиной накачки и размером ячейки), и он может проходить через несколько промежуточных стадий. Другой возможностью, реализуемой во многих численных экспериментах, является случайная сила с малым временем корреляции [10, 21–25].

При интенсивной накачке обратный каскад, переносящий энергию на большие масштабы, приводит к накоплению энергии на размере ячейки. Накопление может привести к образованию когерентных вихрей с размерами, сравнимым с размером ячейки. Когерентные вихри являются долгоживущими и обладают хорошо определенным средним профилем скорости. Как показывают численное моделирование и лабораторный эксперимент, профиль изотропен и соответствует дифференциальному вращению. Как было впервые продемонстрировано в работе [22], где была численно исследована модель коротко коррелированной по времени силы накачки, профиль скорости является плоским, т. е. средняя полярная скорость не зависит от расстояния до центра вихря. В дальнейшем это наблюдение было подтверждено численным моделированием [24] и лабораторным экспериментом [17], а также были представлены теоретические аргументы, объясняющие плоский профиль [26–29]. Условия, необходимые для возникновения когерентных вихрей, обсуждались в работе [20].

Приведем план нашего последующего изложения. В разд. 2 мы даем основные соотношения, касающиеся двумерных гидродинамических течений. В разд. 3 мы приводим сведения о двумерной турбулентности в неограниченных жидких пленках. В разд. 4 мы устанавливаем уравнения, описывающие когерентный вихрь. В разд. 5 мы анализируем флуктуации внутри когерентного вихря в так называемом квазилинейном режиме. В разд. 6 мы исследуем режим сильно взаимодействующих флуктуаций внутри когерентного вихря. В разд. 7 мы кратко излагаем результаты анализа, обсуждаем возможные перспективы и связь с другими физическими явлениями.

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Двумерное течение жидкости описывается его (двумерным) полем скоростей \mathbf{v} , которое является функцией времени и двух координат. Мы предполагаем, что течение несжимаемо: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Это свойство подразумевает, что число Маха v/c мало, где c — скорость звука. Это условие обычно хорошо выполняется в реальных турбулентных потоках. В данном разделе мы формулируем основные уравнения, описывающие двумерную гидродинамику несжимаемой жидкости.

Имея в виду динамику тонких пленок, мы используем двумерное уравнение Навье–Стокса, до-

полненное членом, относящимся к трению о дно:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = -\alpha \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{f} — внешняя сила (на единицу массы), p — давление (на единицу массы), ν — коэффициент кинематической вязкости, α — коэффициент трения о дно. Беря дивергенцию уравнения (1) и используя условие несжимаемости $\nabla \mathbf{v} = 0$, мы находим следующее соотношение для поля давления p :

$$\nabla^2 p = -(\partial_\lambda v_\mu)(\partial_\mu v_\lambda). \quad (2)$$

Здесь греческие индексы, пробегающие значения 1, 2, обозначают векторные компоненты вдоль двух ортогональных осей. При выводе соотношения (2) мы полагали, что $\nabla \mathbf{f} = 0$.

Мы считаем, что сила накачки \mathbf{f} имеет характерный волновой вектор k_f . Тогда νk_f^2 — вязкое затухание на масштабе накачки. Поучительно сравнить это затухание с α . Для тонких жидких пленок легко получить неравенство $\alpha \gg \nu k_f^2$, так как α оценивается как νh^{-2} , где h — толщина пленки. Характерная длина силы накачки должна быть больше, чем h (в противном случае течение нельзя рассматривать как двумерное), таким образом, $k_f h \gtrsim 1$. Это приводит к выводу $\alpha \gtrsim \nu k_f^2$.

Однако, чтобы наблюдать эффекты, связанные, скажем, с интенсивными крупномасштабными вихрями в турбулентном режиме, следует сделать α как можно меньше. Для достижения цели используются некоторые экспериментальные приемы, связанные с многослойными пленками [9, 16, 17]. Отметим также, что коэффициент α мал по сравнению с νk_f^2 для двумерной подсистемы быстро вращающейся трехмерной жидкости [4, 5], для которой эффективный коэффициент трения обусловлен конвективным движением, сопровождающимся формированием пограничных слоев Экмана [30]. Другими случаями, когда реализуются малые значения α , являются свободно подвешенные мыльные или смектические пленки, которые не контактируют с твердой поверхностью [2, 3].

В двух измерениях удобно описывать течение в терминах завихренности ϖ , определяемой как

$$\varpi = \text{curl } \mathbf{v} \equiv \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1. \quad (3)$$

Очевидно, что завихренность ϖ является скалярным (или, точнее, псевдоскалярным) полем. Уравнение, управляющее полем завихренности, получается взятием ротора от уравнения (1):

$$\partial_t \varpi + \mathbf{v} \nabla \varpi = -\alpha \varpi + \nu \nabla^2 \varpi + \phi, \quad (4)$$

где $\phi = \text{curl } \mathbf{f}$. Отметим, что давление p выпадает из уравнения (4) для завихренности.

Чтобы замкнуть уравнение (4), необходимо восстановить поле скоростей \mathbf{v} из поля завихренности ϖ . В силу условия несжимаемости $\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0$ можно ввести функцию тока ψ , связанную с компонентами скорости и завихренностью, как

$$v_1 = \partial_2 \psi, \quad v_2 = -\partial_1 \psi, \quad \varpi = -\nabla^2 \psi. \quad (5)$$

Чтобы выразить функцию тока через ϖ , необходимо решить уравнение Лапласа $\nabla^2 \psi = -\varpi$. Вообще говоря, это уравнение должно решаться с подходящими граничными условиями. Для неограниченной системы можно использовать соотношение

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int d^2 x \varpi(\mathbf{x}) \ln |\mathbf{r} - \mathbf{x}|. \quad (6)$$

После вычисления интеграла компоненты скорости находятся в соответствии с уравнением (5), таким образом выражая скорость в терминах завихренности.

Для слабого внешнего воздействия нелинейным членом $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ в уравнении (1) можно пренебречь, и мы приходим к линейному уравнению. В терминах завихренности оно принимает вид

$$(\partial_t + \alpha - \nu \nabla^2) \varpi = \phi. \quad (7)$$

Это уравнение описывает ламинарный поток, вызываемый внешним воздействием. Из-за наличия диссипации (вязкости и трения о дно) после некоторого переходного процесса течение становится стационарным, если сила \mathbf{f} постоянна. Если сила \mathbf{f} случайна со статистикой, стационарной во времени, то скорость \mathbf{v} в ламинарном режиме также будет случайной со статистикой, стационарной во времени.

Влияние внешней силы на течение можно охарактеризовать ее средней мощностью (на единицу массы) $\epsilon = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rangle$, где угловые скобки означают усреднение по времени. Величину ϵ часто называют потоком энергии. Как правило, среднее значение $\langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rangle$ зависит от координат. Мы предполагаем, что эта зависимость плавная, т. е. ее характерная длина больше характерных масштабов турбулентных пульсаций. Тогда неоднородность ϵ не существенна для теоретической схемы.

Простой анализ роли нелинейности, основанный на размерных оценках, показывает, что имеются два безразмерных параметра, характеризующих силу гидродинамического нелинейного взаимодействия,

$$\beta_\nu = \frac{\epsilon}{\nu^3 k_f^4}, \quad \beta_\alpha = \frac{\epsilon k_f^2}{\alpha^3}. \quad (8)$$

Первый параметр β_ν в уравнении (8) является степенью числа Рейнольдса, взятого на длине накачки k_f^{-1} . Второй параметр β_α в уравнении (8) связан с трением о дно и характеризует его роль на той же длине накачки.

Если выполняются неравенства $\beta_\alpha \gg 1$ и $\beta_\nu \gg 1$, то возбуждается развитая турбулентность и возникают пульсации разного масштаба за счет нелинейного взаимодействия флуктуаций потока. Энергия, производимая внешней силой на масштабе k_f^{-1} , течет к большим масштабам, в то время как энтрофия, производимая той же силой на масштабе k_f^{-1} , течет на малые масштабы [6–8]. Таким образом, образуются два каскада: каскад энергии (обратный каскад), реализуемый в масштабах, больших, чем масштаб накачки k_f^{-1} , и каскад энтрофии (прямой каскад), реализуемый в масштабах, меньших, чем масштаб накачки k_f^{-1} .

3. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СИСТЕМЕ

Здесь мы рассматриваем двумерную турбулентность в большой ячейке, где ее конечные размеры не играют существенной роли. Для описания турбулентности в данном случае можно использовать модель изотропной и однородной в пространстве и времени турбулентности. Конечно, тогда сила накачки также должна быть изотропной и однородной в пространстве и времени, по крайней мере, в статистическом смысле.

Умножая динамическое уравнение (1) на \mathbf{v} и усредняя его, мы получаем баланс энергии

$$\epsilon \equiv \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle v^2 \rangle + \nu \langle (\nabla_\alpha \mathbf{v})^2 \rangle. \quad (9)$$

Напомним, что угловые скобки означают усреднение по времени или, что более удобно при теоретическом анализе, усреднение по статистике системы. При выводе уравнения (9) мы опустили все полные производные по времени и координатам, имея в виду однородность в пространстве и времени. Соотношение (9) имеет простой физический смысл: энергия, закачиваемая в жидкость внешней силой, диссипирует за счет трения о дно и вязкости.

Аналогично, умножая уравнение (4) на ϖ и усредняя, получаем еще одно уравнение баланса

$$\eta \equiv \langle \phi \varpi \rangle = \alpha \langle \varpi^2 \rangle + \nu \langle (\nabla \varpi)^2 \rangle. \quad (10)$$

Опять же, при выводе уравнения (10) мы опустили все полные производные по времени и координатам, имея в виду однородность в пространстве и времени.

Величину η часто называют потоком энтрофии, ее можно оценить как $\eta \sim \epsilon k_f^2$. Соотношение (10) имеет простой физический смысл: энтрофия, закачиваемая в жидкость, диссипирует за счет трения о дно и вязкости.

Можно вывести важные соотношения для каскадов энергии и энтрофии, следуя схеме Колмогорова [31, 32]. В случае изотропной, однородной в пространстве турбулентности для обратного каскада энергии имеет место соотношение [6–8]

$$\left\langle \left\{ \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_2)] \right\}^3 \right\rangle = \frac{3}{2} \epsilon r, \quad (11)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $r \gg k_f^{-1}$ и угловые скобки, как и выше, означают усреднение по времени. Аналогичное соотношение для прямого каскада энтрофии имеет вид

$$\left\langle \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_2)] [\varpi(\mathbf{r}_1) - \varpi(\mathbf{r}_2)]^2 \right\rangle = -2\eta r. \quad (12)$$

Здесь $r \ll k_f^{-1}$. Отметим противоположные знаки в правых частях уравнений (11), (12), отражающие противоположные направления потоков энергии и энтрофии.

Основываясь на соотношении (11), можно сформулировать следующую оценку для разности скоростей в области обратного каскада:

$$|\mathbf{v}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_2)| \sim (\epsilon r)^{1/3}, \quad (13)$$

где $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Справедливость оценки (13) подтверждается лабораторным экспериментом и численным моделированием [9, 10]. В этом состоит отличие двумерной турбулентности от трехмерной, где наблюдается аномальный скейлинг [12]. Для прямого каскада оценка разности скоростей, основанная на соотношении (12), выглядит следующим образом:

$$|\mathbf{v}(\mathbf{r}_1) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_2)| \sim (\epsilon k_f^2)^{1/3} r. \quad (14)$$

Оценка (14) справедлива с точностью до логарифмических поправок [13, 14].

Сравнивая нелинейный член и член с трением о дно в уравнении (1), мы находим из соотношения (13), что каскад энергии завершается на масштабе порядка L_α ,

$$L_\alpha = \epsilon^{1/2} \alpha^{-3/2}. \quad (15)$$

Аналогично, сравнивая нелинейный член и «вязкий» член в уравнении (1) и используя оценку (14), мы приходим к выводу, что каскад энтрофии завершается из-за вязкости на масштабе порядка L_ν ,

$$L_\nu = \nu^{1/2} \eta^{-1/6} \sim \nu^{1/2} (\epsilon k_f^2)^{-1/6}. \quad (16)$$

Неравенства $\beta_\alpha \gg 1$ и $\beta_\nu \gg 1$ эквивалентны неравенствам $k_f L_\alpha \gg 1$ и $k_f L_\nu \ll 1$. Таким образом, существуют области выше и ниже длины накачки k_f^{-1} , где реализуются обратный и прямой каскады.

В соответствии с оценками (11), (12) градиент скорости не зависит от масштаба в прямом каскаде и уменьшается по мере увеличения масштаба в обратном каскаде. Кроме того, флуктуации скорости увеличиваются по мере увеличения масштаба в обратном каскаде. Вот почему в энергетическом балансе (9) второй член в правой части пренебрежимо мал, что объясняется условием $k_f L_\alpha \gg 1$. Другими словами, энергия диссипирует главным образом за счет трения о дно на масштабе L_α . И наоборот, энтропия диссипирует главным образом за счет вязкости на малом масштабе L_ν . Следовательно, первый член в правой части уравнения (10) пренебрежимо мал, что объясняется условием $k_f L_\nu \ll 1$.

Сформулируем критерии применимости соотношений, приведенных в этом разделе. Мы установили, что турбулентные пульсации имеют масштабы между L_α и L_ν . Таким образом, для применимости картины неограниченной системы размер ячейки L должен быть намного больше максимального размера флуктуаций течения L_α (15), $L \gg L_\alpha$. При этом толщина пленки h должна быть намного меньше вязкой длины L_ν (16), $h \ll L_\nu$.

4. КОГЕРЕНТНЫЙ ВИХРЬ

Теперь мы обратимся к случаю больших значений L_α , $L_\alpha \gg L$. Это условие может быть достигнуто, скажем, за счет увеличения мощности силы ϵ , см. выражение (15). Кроме того, мы предполагаем, что размер ячейки L намного больше длины накачки, $k_f L \gg 1$. Тогда есть место для обратного каскада, передающего энергию от длины накачки k_f^{-1} на масштаб L . Однако обратный каскад существенно деформирован в случае $L_\alpha \gg L$ по сравнению с неограниченной системой.

Поскольку энергия, производимая силой накачки, не может поступать на масштабы, превышающих L , поток энергии там останавливается и энергия накапливается до тех пор, пока поступающий поток энергии не будет компенсирован трением о дно. Таким образом, мы приходим к оценке $v \sim \sqrt{\epsilon/\alpha}$ для флуктуаций скорости на масштабе L , следующей из баланса энергии (9). Величина $\sqrt{\epsilon/\alpha}$ много больше, чем колмогоровская оценка $(\epsilon L)^{1/3}$ (13), поскольку такая амплитуда скорости характер-

на для масштаба L_α для неограниченной системы, и $L_\alpha \gg L$.

Крупномасштабные флуктуации могут быть хаотичными, тогда мы имеем дело со случайным крупномасштабным движением [20]. Однако при некоторых условиях возникают когерентные вихри, представляющие собой долгоживущие структуры размером порядка размера ячейки L . Такие когерентные вихри наблюдались как в лабораторных экспериментах [16, 17], так и при численном моделировании [22, 24, 33]. Когерентный вихрь обладает хорошо определенным профилем средней скорости, определенным в системе отсчета, связанной с центром вихря. Обратим внимание на то, что центр вихря движется с некоторой случайной скоростью.

Основываясь на экспериментальных и численных результатах, можно утверждать, что вихрь в среднем изотропен. Другими словами, мы имеем дело с дифференциальным вращением, описываемым полярной скоростью $U(r)$, где r — расстояние между точкой наблюдения и центром вихря. Средняя завихренность когерентного вихря $\Omega = \partial_r U + U/r$ также является функцией расстояния r . Величина $\Omega(r)$ максимальна в центре когерентного вихря.

Уравнение для U может быть получено из базового уравнения (1), где необходимо разделить средний поток и флуктуации на его фоне. Ниже мы обозначаем как \mathbf{v} скорость флуктуаций, в отличие от предыдущих разделов. Взяв полярную составляющую уравнения (1) и усреднив ее по времени, можно найти

$$\alpha U = - \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \langle v_r v_\varphi \rangle + \nu \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) U, \quad (17)$$

где v_r и v_φ — радиальная и полярная составляющие флуктуаций скорости. При выводе уравнения (17) мы предположили, что средняя сила накачки равна нулю. Среднее значение $\langle v_r v_\varphi \rangle$ в уравнении (17) — это не что иное, как недиагональная составляющая тензора напряжений Рейнольдса [34].

Вязкий член в уравнении (17) существенен в области вблизи центра вихря, размер которой можно оценить как $\sqrt{\nu/\alpha}$. Внутри этой области, в ядре вихря, доминирует вязкий член, приводящий к твердотельному вращению $U \propto r$: такая зависимость обнуляет вязкий член в уравнении (17). Вне ядра вязкий член в уравнении (17) пренебрежимо мал. Тогда средний профиль U определяется балансом между трением о дно и силой, связанной с тензором напряжений Рейнольдса, генерируемым флуктуациями.

Разделяя в уравнении (1) среднее течение и флуктуации, можно получить следующее уравнение для флуктуирующей скорости

$$\begin{aligned} \partial_t v_\lambda + [(\mathbf{v} \cdot \nabla) v_\lambda] + \partial_\lambda p + \\ + \frac{U}{r} \partial_\varphi v_\lambda - \frac{U}{r} \varepsilon_{\lambda\mu} v_\mu - v_r \Sigma \frac{\varepsilon_{\lambda\mu} r_\mu}{r} = \\ = -\alpha v_\lambda + \nu \nabla^2 v_\lambda + f_\lambda, \end{aligned} \quad (18)$$

где $[A] = A - \langle A \rangle$, $\varepsilon_{\lambda\mu}$ — двумерный антисимметричный символ Леви-Чивиты и

$$\Sigma = r \partial_r (U/r) = \partial_r U - U/r. \quad (19)$$

Величина (19) является локальной скоростью сдвига среднего течения. Теперь давление p удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \nabla^2 p = -\partial_\lambda \partial_\mu [v_\mu v_\lambda] + \\ + \frac{2}{r} [U \varpi + \Sigma (v_\varphi - \partial_\varphi v_r)] \end{aligned} \quad (20)$$

вместо уравнения (2). Здесь $\varpi = \text{curl } \mathbf{v}$ — флуктуирующая составляющая завихренности.

Выведем аналог энергетического баланса (9) для внутренней части вихря. Умножая уравнение (18) на \mathbf{v} и усредняя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \partial_r [r \langle v_r (p + v^2/2) \rangle] + \Sigma \langle v_r v_\varphi \rangle = \\ = \epsilon - \alpha \langle v^2 \rangle + \nu \langle \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что соотношение (21) корректно даже для неоднородного воздействия, поскольку из-за случайных движений вихря неоднородность эффективно усредняется. Поэтому в этом случае ϵ в уравнении (21) — это среднее значение по ячейке.

Уравнение для флуктуирующей составляющей завихренности ϖ внутри когерентного вихря имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t \varpi + \frac{U}{r} \partial_\varphi \varpi + v_r \partial_r \Omega + [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varpi] = \\ = -\alpha \varpi + \nu \nabla^2 \varpi + \phi, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\Omega = \partial_r U + U/r$ — средняя завихренность и $\phi = \text{curl } \mathbf{f}$, как и выше. Уравнение (22) может быть получено действием curl на (18) или напрямую из уравнения (4) разделением завихренности и скорости на среднюю и флуктуирующую компоненты.

Для расстояний r от центра вихря, значительно превышающих характерные длины флуктуаций, слагаемым, содержащим Ω в (22), можно пренебречь. Переходя в систему отсчета, вращающуюся с

угловой скоростью $U(R)/R$, для расстояний r , близких к R , из (22) получим

$$\begin{aligned} \partial_t \varpi + \frac{\Sigma(R)}{R} (r - R) \partial_\varphi \varpi + [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \varpi] = \\ = -\alpha \varpi + \nu \nabla^2 \varpi + \phi. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, влияние среднего течения на флуктуации сводится к их взаимодействию с эффективным сдвиговым потоком.

5. ФЛУКТУАЦИИ ВНУТРИ КОГЕРЕНТНОГО ВИХРЯ: КВАЗИЛИНЕЙНЫЙ РЕЖИМ

Среднее вихревое течение подавляет флуктуации внутри когерентного вихря. Это приводит к уменьшению нелинейного взаимодействия флуктуаций. Мы рассматриваем расстояния r , удовлетворяющие условию $k_f r \gg 1$. Тогда флуктуации можно рассматривать как живущие в сдвиговом потоке со скоростью сдвига (19). Как было продемонстрировано в работах [35–37], эффект подавления существует, если

$$\Sigma \gg \nu k_f^2, \quad \Sigma^2 \gg \alpha^3 / (\nu k_f^2). \quad (24)$$

Условия (24) означают, что флуктуации размера k_f^{-1} , создаваемые силой накачки, существенно деформируются сдвиговым потоком, прежде чем они затухнут за счет диссипации (вязкости и трения о дно).

Анализ поправок к корреляционным функциям флуктуаций завихренности [35, 37] показывает, что параметром, определяющим силу взаимодействия флуктуаций, является

$$\beta = \frac{\epsilon}{\nu \Sigma^2} \quad (25)$$

при условиях (24). Взаимодействие флуктуаций слабо при условии, что β мало. Обратим внимание на то, что коэффициент трения о дно α не входит в выражение для константы взаимодействия β (25), хотя α фигурирует в условиях (24). Параметр (25) может быть представлен как отношение величин $\epsilon / (\nu k_f^2)$ и $\Sigma^2 k_f^2$. В этом отношении числитель — не что иное, как квадрат типичной скорости, производимой накачкой при наличии вязкости, а знаменатель — квадрат разности скоростей на масштабе накачки, производимой сдвиговым течением с темпом сдвига Σ .

Если взаимодействие флуктуаций слабо, то можно пренебречь нелинейным членом в уравнении (23). В результате получится линейное уравнение для

флуктуационной завихренности ϖ . В литературе такая ситуация называется квазилинейной. В квазилинейном приближении можно последовательно вычислять корреляционные функции ϖ , выражая ϖ через ϕ и проводя усреднение, используя заданную статистику накачки ϕ [26–29, 38]. Далее можно восстановить корреляционные функции поля скорости. Поправки к корреляционным функциям, возникающие за счет нелинейного взаимодействия флуктуаций, изучены в работах [36, 37].

Поскольку нелинейное взаимодействие флуктуаций не играет роли в квазилинейном режиме, прямой и обратный каскады внутри когерентного вихря отсутствуют. Масштаб флуктуаций течения, создаваемых силой накачки, может быть оценен как k_f^{-1} в радиальном направлении. Однако их характерный размер в угловом направлении намного больше, поскольку среднее течение растягивает флуктуации в угловом направлении. Степень растяжения зависит от времени жизни флуктуаций. Скажем, парная корреляционная функция завихренности формируется за время

$$\tau_* = (\Sigma^2 \nu k_f^2)^{-1/3}. \quad (26)$$

Следовательно, характерный угловой размер флуктуаций равен

$$\Sigma \tau_* k_f^{-1} = \left(\frac{\Sigma}{\nu k_f^2} \right)^{1/3} k_f^{-1}. \quad (27)$$

Этот размер намного больше радиального размера благодаря первому условию в (24).

Один из результатов вычислений в квазилинейном приближении касается корреляционной функции $\langle v_r v_\varphi \rangle$, фигурирующей в уравнении (17). Как было продемонстрировано в работах [26, 27],

$$\langle v_r v_\varphi \rangle = \epsilon / \Sigma. \quad (28)$$

Подставляя выражение (28) в уравнение (17), мы находим замкнутое уравнение для средней скорости U , поскольку Σ выражается через U в соответствии с уравнением (19). За пределами «вязкого» ядра, где членом с вязкостью в уравнении (17) можно пренебречь, мы находим решение уравнения

$$U = \sqrt{3\epsilon/\alpha}, \quad (29)$$

не зависящее от r . Плоский профиль скорости (29) наблюдался при численном моделировании [22], где соблюдался квазилинейный режим. Обратим внимание на то, что выражение (29) соответствует оценке $(\epsilon/\alpha)^{1/2}$ для крупномасштабных флуктуаций, найденных в разд. 4.

Вычисляя среднюю завихренность Ω , соответствующую плоскому профилю скорости (29), мы находим

$$\Omega = \sqrt{3\epsilon/\alpha} r^{-1}.$$

Таким образом, завихренность растет по мере уменьшения r и при малых r становится намного больше, чем типичная завихренность крупномасштабных флуктуаций. Можно сказать, что когерентные вихри аккумулируют завихренность. Закон $\Omega \propto r^{-1}$ работает вплоть до вязкого ядра, где Ω насыщается.

Соотношение (28) можно объяснить, основываясь на энергетическом балансе (21). Основной вклад в среднее $\langle v_r v_\varphi \rangle$ связан с флуктуациями радиальных масштабов порядка длины накачки. Поэтому ∇^2 в уравнении (20) оценивается, как k_f^2 . Следовательно, давление p мало при условии $k_f r \gg 1$, и им можно пренебречь в уравнении (21). Членом, пропорциональным $v_r v^2$, в уравнении (21) также можно пренебречь, поскольку он имеет третий порядок по \mathbf{v} и поэтому мал в квазилинейном режиме. Вне вязкого ядра можно пренебречь вязким членом в уравнении (21). Поскольку флуктуации слабы, можно пренебречь членом с α в уравнении (21). Таким образом, мы приходим к соотношению (28).

В соответствии с уравнением (19) темп сдвига, соответствующий скорости (29), равен

$$\Sigma = -\frac{\sqrt{3\epsilon/\alpha}}{r}. \quad (30)$$

Подставляя (30) в уравнение (25), получаем

$$\beta = \frac{\alpha r^2}{3\nu}. \quad (31)$$

Условие малости такой величины β совместимо с неравенством $k_f r \gg 1$ только в том случае, если $\alpha \ll \nu k_f^2$. Неравенство не может быть достигнуто в тонких пленках жидкости (см. разд. 2), однако оно достижимо для свободно подвешенных мыльных или смектических пленок. Нет проблем с выполнением неравенства $\alpha \ll \nu k_f^2$ при численном моделировании. Неравенство было выполнено при численном моделировании, описанном в работе [22].

6. ФЛУКТУАЦИИ ВНУТРИ КОГЕРЕНТНОГО ВИХРЯ: СИЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Здесь мы рассмотрим случай, когда константа взаимодействия β (25) велика. Тогда нелинейное взаимодействие флуктуаций течения внутри когерентного вихря становится существенным. Обратим внимание на то, что в соответствии с выражением

(31) константа взаимодействия β растет по мере увеличения r . Поэтому можно столкнуться с ситуацией, когда оба режима (квазилинейный и режим сильного взаимодействия) сосуществуют внутри одного когерентного вихря.

Поскольку взаимодействие флуктуаций становится существенным для больших β , прямой и обратный каскады восстанавливаются, в отличие от квазилинейного режима. Однако корреляционные функции скорости и завихренности, характерные для этих каскадов, могут быть анизотропными в некоторой области масштабов. Это является прямым следствием растяжения флуктуаций потока в угловом направлении за счет среднего течения вихря.

Рассмотрим обратный каскад внутри вихря и распространим подход Колмогорова [31, 32] на этот случай. Как следует из уравнения (23), эффективное сдвиговое течение выпадает из рассмотрения при $r_1 = r_2 = r$. Таким образом, мы приходим к оценке для полярной скорости

$$v_\varphi(r, \varphi_1) - v_\varphi(r, \varphi_2) \sim (\epsilon r |\varphi_1 - \varphi_2|)^{1/3}, \quad (32)$$

формально совпадающей с оценкой в изотропной ситуации (13).

Сравнивая сдвиговый параметр Σ с нелинейным темпом $r^{-1} \partial_\varphi v_\varphi$, мы находим, используя выражение (32), следующую длину

$$L_{an} = \epsilon^{1/2} \Sigma^{-3/2}, \quad (33)$$

разделяющую изотропный и анизотропный режимы. Для масштабов меньше, чем L_{an} , средний сдвиговый поток не играет роли и реализуется стандартный изотропный обратный каскад, тогда как для масштабов больше, чем L_{an} , становится существенным средний сдвиговый поток. Таким образом, для масштабов, превышающих L_{an} , обратный каскад становится анизотропным. Если $k_f L_{an} < 1$, то обратный каскад анизотропен на всех масштабах, превышающих длину накачки.

Установим характер этой анизотропии. С этой целью сравним в уравнении (23) слагаемое с Σ и нелинейный член. В результате мы найдем для структурной функции второго порядка соотношение вида

$$\langle [v_\varphi(r_1, \varphi_1) - v_\varphi(r_2, \varphi_2)]^2 \rangle = [\epsilon r (\varphi_1 - \varphi_2)]^{2/3} g(\xi), \quad (34)$$

где $r = r_1/2 + r_2/2$ и g — некоторая безразмерная функция автомодельной переменной ξ :

$$\xi = \Sigma(r_1 - r_2) [\epsilon r (\varphi_1 - \varphi_2)]^{-1/3}. \quad (35)$$

Аналогичным образом могут быть выражены структурные функции высших порядков для компоненты v_φ .

Условие несжимаемости $\nabla \mathbf{v} = 0$ приводит к выводу, что $\Delta r \Delta v_\varphi \sim r \Delta \varphi \Delta v_r$, где Δr , $\Delta \varphi$, Δv_r обозначают разности, фигурирующие в (34), (35). Заметим, что для значений автомодельной переменной $\xi \sim 1$ вариации компонент скорости удовлетворяют неравенству $\Delta v_r \ll \Delta v_\varphi$, поскольку $\Delta r \gg L_{an}$. Приведенные соображения позволяют установить соотношения подобия для произвольных корреляционных функций, содержащих вариации обеих компонент, v_φ и v_r .

Обратим внимание на то, что при $\xi \sim 1$

$$\frac{\Delta r}{r \Delta \varphi} \sim \left(\frac{L_{an}}{r \Delta \varphi} \right)^{2/3}. \quad (36)$$

Величина (36) мала для области анизотропного обратного каскада, где $r \Delta \varphi \gg L_{an}$. Другими словами, характерное расстояние в угловом направлении оказывается намного большим, чем в радиальном, как и ожидалось.

Анизотропный скейлинг (34) имеет место до тех пор, пока $|\varphi_1 - \varphi_2| \ll 1$. Если эта разность становится порядка единицы, то условие $\xi \sim 1$ приводит к соотношению

$$\Delta r \sim r^{1/3} L_{an}^{2/3} \ll r. \quad (37)$$

Если Δr значительно превышает оценку (37), то слагаемое с Σ в уравнении (23) доминирует над нелинейным членом и мы приходим к квазилинейному режиму, в котором энергетический каскад отсутствует. Полученные ранее результаты, касающиеся этого режима [36, 37], см. также разд. 5, позволяют заключить, что (37) является корреляционной длиной флуктуаций в радиальном направлении. Таким образом, наибольшие значения флуктуаций скорости на расстоянии r от центра вихря могут быть оценены как

$$v_\varphi \sim (\epsilon r)^{1/3}, \quad v_r \sim \frac{L_{an}^{2/3}}{r^{2/3}} (\epsilon r)^{1/3} \quad (38)$$

в соответствии с (37) и (34).

Теперь мы возвращаемся к энергетическому балансу (21). Как следует из соотношения (20), первый вклад в давление p может быть оценен как \mathbf{v}^2 , где \mathbf{v} — наибольшее значение флуктуации скорости при данном r , определенное в (37). Второй вклад в p , описываемый последними двумя слагаемыми в правой части выражения (20), мал вследствие того, что лапласиан в этом случае оценивается как

$(\Delta r)^{-2}$, где Δr определено в (37). Большая величина лапласиана означает малость соответствующего вклада в давление p . Таким образом, в энергетическом балансе (21)

$$v_r \left(p + \frac{v^2}{2} \right) \sim \frac{L_{an}^{2/3}}{r^{2/3}} \epsilon r. \quad (39)$$

Производная ∂_r в слагаемом с давлением в (21) может быть оценена как r^{-1} , так что это слагаемое содержит малый множитель $(L_{an}/r)^{2/3}$ при ϵ и, следовательно, рассматриваемым членом можно пренебречь.

Таким образом, мы приходим к тому же соотношению (28) и, следовательно, к тому же плоскому профилю скорости (29), что и в квазилинейном приближении. Профиль реализуется при условии наличия анизотропной области обратного каскада. Обратим внимание на то, что для плоского профиля скорости

$$L_{an}^2 \sim r^3 / L_\alpha^2 \ll r. \quad (40)$$

Следовательно, выражение (29) для средней скорости является самосогласованным.

Теперь несколько слов о прямом каскаде (каскаде энстрофии). Если $k_f L_{an} \gg 1$, то прямой каскад имеет такой же характер, как и в неограниченной системе, см. разд. 3. В противоположном случае, при $k_f L_{an} \ll 1$, прямой каскад анизотропен. Неравенство эквивалентно условию $\Sigma^3 \gg \eta$. Как и для обратного каскада, корреляционные функции имеют свои характерные значения для $r\Delta\varphi \gg \Delta r$. В этой области $\varpi = -\partial_r v_\varphi$. Сравнивая затем слагаемое с Σ и нелинейный член в уравнении (23), мы находим оценки

$$\varpi \sim \Sigma, \quad v_\varphi \sim \Sigma \Delta r. \quad (41)$$

Как и в неограниченной системе, характерное значение ϖ не зависит от масштаба.

Распространяя аргументы Колмогорова и Крайчнана [6–8] на анизотропный прямой каскад, мы приходим к соотношению

$$\langle \Delta v_\varphi \varpi \varpi \rangle \sim \eta r \Delta \varphi \quad (42)$$

для $\Delta r = 0$. Подставляя (41) в (42), находим автономную переменную для прямого каскада,

$$(\Sigma^3 \Delta r) / (\eta r \Delta \varphi), \quad (43)$$

определяющую корреляционные функции в этой области масштабов.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Двумерная турбулентность в некотором смысле более богата, чем трехмерная. Существуют два каскада (энергии и энстрофии), приводящие к образованию большого диапазона масштабов турбулентных пульсаций. Как следствие энергетического каскада, в ограниченной ячейке могут возникать когерентные вихри. Мы рассмотрели различные режимы флуктуаций потока в когерентном вихре, которые могут быть квазилинейными или нелинейными. В последнем случае следует ожидать анизотропный скейлинг.

Теоретические результаты, представленные в статье, в основном подтверждаются лабораторными экспериментами с тонкими пленками жидкости и численным моделированием. Однако теоретические результаты, касающиеся анизотропного скейлинга в нелинейном режиме, ожидают своего подтверждения. В настоящее время проводится численное моделирование для проверки наших предсказаний. Мы также думаем об экспериментальной проверке.

Мы рассмотрели простейшую модель, в которой и ячейка, в которой возбуждается турбулентность, и сила накачки однородны. Мы полагаем, что эта модель демонстрирует все качественные характеристики двумерной турбулентности. Однако можно расширить модель, включив в нее неоднородность ячейки и силы накачки. Результаты такой модели можно более детально сравнивать с гидродинамическими процессами в окружающей среде.

Следует отметить такое явление, как геострофические вихри, генерируемые в относительно быстро вращающейся жидкости и играющие существенную роль в геофизике [5]. Геострофические вихри могут быть описаны в терминах эффективного двумерного потока, управляемого двумерными уравнениями гидродинамики [39]. Было бы интересно расширить наши результаты, касающиеся анизотропного скейлинга, на геострофические вихри.

Другим возможным направлением расширения нашей теоретической схемы является переход к неньютоновским жидкостям. В частности, можно подумать о растворах полимеров. Эффекты, вызванные упругой степенью свободы, связанной с полимерами, могут привести к такому замечательному явлению, как эластическая турбулентность [40]. Было бы интересно изучить особенности эластической турбулентности в тонких пленках жидкости.

Благодарности. Мы благодарим В. М. Парфеньева за многочисленные полезные дискуссии.

Финансирование. Работа выполнена в лаборатории «Современная гидродинамика», созданной в рамках гранта 075-15-2022-1099 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН и поддержанной грантом 23-72-30006 Российского научного фонда.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Boffetta and R. E. Ecke, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **44**, 427 (2012).
2. H. Kellay and W. I. Goldburg, *Two-Dimensional Turbulence: A Review of Some Recent Experiments*, *Rep. Progr. Phys.* **65**, 845 (2002).
3. S. V. Yablonskii, N. M. Kurbatov, and V. M. Parfenyev, *Phys. Rev. E* **95**, 012707 (2017).
4. J. Proudman, *On the Motion of Solids in a Liquid Possessing Vorticity*, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **92**, 408 (1916).
5. J. Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer Science and Business Media (2013).
6. R. H. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
7. C. E. Leith, *Phys. Fluids* **11**, 671 (1968).
8. G. K. Batchelor, *Phys. Fluids* **12**, 233 (1969).
9. P. Tabeling, *Two-Dimensional Turbulence: A Physicist Approach*, *Phys. Rep.* **362**, 1 (2002).
10. G. Boffetta, A. Celani, and M. Vergassola, *Inverse Energy Cascade in Two-Dimensional Turbulence: Deviations From Gaussian Behavior*, *Phys. Rev. E* **61**, R29 (2000).
11. R. H. Kraichnan and D. Montgomery, *Rep. Progr. Phys.* **43**, 547 (1980).
12. U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
13. R. H. Kraichnan, *J. Fluid Mech.* **47**, 525 (1971); **67**, 155 (1975).
14. G. Falkovich and V. Lebedev, *Phys. Rev. E* **49**, R1800 (1994); **50**, 3883 (1994).
15. J. Sommeria, *J. Fluid Mech.* **170**, 139 (1986).
16. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, *Phys. Fluids* **21**, 125101 (2009).
17. А. В. Орлов, М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, *Письма в ЖЭТФ* **107**, 166 (2018) [A. V. Orlov, M. Yu. Brazhnikov, and A. A. Levchenko, *JETP Lett.* **107**, 157 (2018)].
18. D. Molenaar, H. J. H. Clercx, G. J. F. van Heijst, *Physica D* **196**, 329 (2004).
19. P. K. Mishra, J. Herault, S. Fauve, and M. K. Verma, *Phys. Rev. E* **91**, 053005 (2015).
20. A. N. Doludenko, S. V. Fortova, I. V. Kolokolov, and V. V. Lebedev, *Coherent Vortex Versus Chaotic State in Two-Dimensional Turbulence*, *Ann. Phys.* **447**, 169072 (2022).
21. G. Boffetta, *Energy and Enstrophy Fluxes in the Double Cascade of Two-Dimensional Turbulence*, *J. Fluid Mech.* **589**, 253 (2007).
22. J. Laurie, G. Boffetta, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 254503 (2014).
23. A. Frishman, J. Laurie, and G. Falkovich, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 032602 (2017).
24. V. Parfenyev, *Profile of a Two-Dimensional Vortex Condensate Beyond the Universal Limit*, *Phys. Rev. E* **106**, 025102 (2022).
25. Lichuan Xu, A. van Kan, Chang Lin, and E. Knobloch, *Fluctuation-Induced Transition in Anisotropic Two-Dimensional Turbulence*, arXiv: 2311.07863 [physics. flu-dyn] (2023).
26. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Profile of Coherent Vortices in Two-Dimensional Turbulence*, *Письма в ЖЭТФ* **101**, 181 (2015) [*JETP Lett.* **101**, 164 (2015)].
27. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *Structure of Coherent Vortices Generated by the Inverse Cascade of Two-Dimensional Turbulence in a Finite Box*, *Phys. Rev. E* **93**, 033104 (2016).
28. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, *J. Fluid Mech.* **809**, R2 (2016).
29. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, *Крупномасштабное течение в двумерной турбулентности при статической накачке*, *Письма в ЖЭТФ* **106**, 633 (2017) [I. V. Kolokolov

- and V. V. Lebedev, *Large-Scale Flow in Two-Dimensional Turbulence at Static Pumping*, JETP Lett. **106**, 659 (2017)].
30. V. M. Parfenyev and S. S. Vergeles, *Influence of Ekman Friction on the Velocity Profile of a Coherent Vortex in a Three-Dimensional Rotating Turbulent Flow*, Phys. Fluids **33**, 115128 (2021).
 31. А. Н. Колмогоров, *Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса*, ДАН СССР **30**, 299 (1941), DOI: 10.3367/UFNr.0093.196711h.0476.
 32. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics, Fluid Mechanics*, Vol. 6, Ch. III, Pergamon Press, New York (1987).
 33. M. Chertkov, C. Connaughton, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **99**, 084501 (2007).
 34. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics, Mechanics of Turbulence*, Vol. 1, Ch. 3, Dover, New York (1971).
 35. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, М. М. Тумакова, *Корреляции завихренности внутри когерентного вихря*, ЖЭТФ **163**, 881 (2023) [I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and M. M. Tumakova, *Correlations of Vorticity Inside a Coherent Vortex*, JETP **136**, 785 (2023)].
 36. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, М. М. Тумакова, *Парная корреляционная функция завихренности внутри когерентного вихря*, Письма в ЖЭТФ **117**, 127 (2023) [I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and M. M. Tumakova, *Pair Correlation Function of Vorticity in a Coherent Vortex*, JETP Lett. **117**, 122 (2023)].
 37. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, *Корреляции флуктуаций течения, возбуждаемых случайной силой на фоне сдвигового потока*, ЖЭТФ **165**, 128 (2024).
 38. A. Frishman and C. Herbert, Phys. Rev. Lett. **120**, 204505 (2018).
 39. I. V. Kolokolov, L. L. Ogorodnikov, and S. S. Vergeles, *Structure of Coherent Columnar Vortices in Three-Dimensional Rotating Turbulent Flow*, Phys. Rev. Fluids **5**, 034604 (2020).
 40. V. Steinberg, *Elastic Turbulence: An Experimental View on Inertialess Random Flow*, Ann. Rev. Fluid Mech. **53**, 27 (2021).

МОЩНЫЕ ВСПЛЕСКИ И МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ МАГНИТАРОВ

Д. Г. Яковлев*

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 2 марта 2024 г.,
после переработки 9 марта 2024 г.
Принята к публикации 9 марта 2024 г.

Магнитары — нейтронные звезды, обладающие сверхсильными магнитными полями, которые могут заметно превышать 10^{15} Гс. В некоторых из них (так называемых источниках мягких повторяющихся гамма-всплесков, soft gamma repeaters — SGRs) время от времени происходят процессы мощного энерговыделения, вызывающие необычайно сильные всплески электромагнитного излучения. Считается, что эти всплески связаны с наличием сверхсильных магнитных полей. Несмотря на множество гипотез, их механизм остается загадкой. В послесвечении всплесков выявлены квазипериодические осцилляции (КПО). Они трактуются как собственные колебания звезды, возбуждаемые при всплесках, и используются для диагностики всплесков. Показана существенная неполнота теорий, использованных для интерпретации КПО.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S0044451024070125

1. ВВЕДЕНИЕ

Петр Леонидович Капица, которому посвящен данный выпуск ЖЭТФ, внес выдающийся вклад в изучение очень сильных магнитных полей [1]. Возможно, ему бы понравились магнитары — естественные лаборатории самых сильных магнитных полей в природе.

Нейтронные звезды — наиболее компактные из всех звезд [2]. Они давно стали привычными астрофизическими объектами, но до сих пор привлекают экстремальностью физических условий внутри и вблизи них. Они содержат сверхплотное вещество со сверхсильными магнитными полями в присутствии огромных гравитационных сил. Многие свойства нейтронных звезд (например, уравнение состояния и состав вещества внутренних слоев) до сих пор изучены недостаточно полно.

Схематически строение нейтронной звезды показано на рис. 1. Можно выделить два основных слоя (например, [3]): внешнюю оболочку, которую

часто называют корой, и внутреннее ядро. При типичной массе звезды $M \approx 1.4 M_{\odot}$ (M_{\odot} — масса Солнца) ее радиус $R \approx 12$ км. Кора в основном состоит из ионов (атомных ядер), электронов и (при плотности $\rho \gtrsim 4 \cdot 10^{11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$) свободных нейтронов. Ее толщина ~ 1 км, масса $\sim 0.01 M_{\odot}$, плотность на дне коры примерно равна половине стандартной ядерной плотности (последняя составляет $\rho_0 \approx 2.8 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$). Атомные ядра в коре, как правило, образуют кулоновский кристалл. Под корой располагается массивное объемное ядро звезды, содержащее жидкую ядерную материю; ее состав и уравнение состояния достоверно не известны. Центральная плотность звезды достигает нескольких ρ_0 .

Данная работа посвящена магнитарам (см., например, обзор [4]) — нейтронным звездам с особо сильными магнитными полями. Некоторые из них выделяют в особый класс источников мягких повторяющихся гамма-всплесков (soft gamma repeaters — SGRs). Время от времени в них происходят процессы огромного выделения энергии (вплоть до энергий $\sim 10^{46}$ эрг), наблюдаемые как мощнейшие всплески электромагнитного излучения, которые далее затухают. Считается, что эти процессы инициируются

* E-mail: yak.astro@mail.ioffe.ru



Рис. 1. Схематическое строение нейтронной звезды. Массивное и объемное ядро из сверхплотной ядерной материи окружено внешней оболочкой (корой), содержащей упругий кристалл атомных ядер. Звезда-магнитар пронизана магнитным полем и окружена мощной магнитосферой

сверхсильным магнитным полем звезд. Несмотря на большое количество гипотез (например, [4]), природа всплесков пока неизвестна и здесь обсуждаться не будет.

Важно, что всплески сопровождаются наблюдаемыми квазипериодическими осцилляциями (КПО) излучения магнитаров с определенными частотами. Предполагается, что это частоты собственных колебаний звезд, возбуждаемых при всплесках. В принципе, корректная интерпретация наблюдаемых частот КПО может дать полезную информацию о параметрах магнитаров, величине и геометрии их магнитного поля, и о механизме их вспышечной активности. Это и вызывает особый интерес к проблеме КПО.

Теоретически существование КПО при всплесках магнитаров было предсказано Данканом [5] в 1998 г. Первые КПО были обнаружены после наблюдений гигантского всплеска SGR 1900+14 (27 августа 1998 г.) и гипervсплеска SGR 1806–20 (27 декабря 2004 г.). Это было сделано в ходе тщательной обработки наблюдательных данных в 2005–2006 гг. [6–8], что положило начало серьезному исследованию КПО. Указанные наблюдения, а также наблюдения других всплесков магнитаров неоднократно обрабатывались и переобрабатывались (например, [9–12]). Данные гипervсплеска SGR 1806–20 до

сих пор являются наиболее представительными, по-видимому, из-за исключительно высокой мощности энерговыделения.

Наблюдаемые частоты ν магнитарных КПО лежат в широком диапазоне от десятка Гц до нескольких кГц. Обычно разделяют низкочастотные КПО ($\nu \lesssim 150$ Гц) и (остальные) высокочастотные КПО. Обнаружение КПО при всплесках магнитаров породило множество разных теоретических расчетов и интерпретаций частот (например, [13–37] и приведенные там ссылки).

Данная статья является логическим продолжением работ [20] и [37]. Она приводит новые аргументы в пользу того, что в большинстве расчетов магнитоупругих КПО рассматривался существенно неполный набор решений. Предварительно кратко описаны использованный формализм (разд. 2), режимы колебаний (разд. 3) и торсионные колебания коры без магнитного поля (разд. 4). Далее кратко обсуждены магнитоупругие колебания в условиях, когда влияние магнитного поля является слабым (разд. 5). Подробнее этот случай изучен для дипольного магнитного поля в коре звезды; рассмотрение экстраполировано на случай более высоких магнитных полей (разд. 6). В разд. 7 проанализирована возможность применения результатов для интерпретации наблюдаемых КПО, а в разд. 8 сформулированы основные результаты работы и нерешенные проблемы.

2. ФОРМАЛИЗМ

Колебания магнитаров описываются стандартным формализмом магнитоупругих колебаний нейтронных звезд. Формализм хорошо известен (например, [26]); достаточно напомнить основные положения. Здесь для простоты приведены уравнения без учета релятивистских эффектов. Релятивистские эффекты будут включены в разд. 5. Магнитоупругие колебания возникают за счет сил упругости кристаллической решетки в коре звезды и сил упругости при деформациях (альфвеновских возмущениях) магнитного поля всюду, где поле присутствует.

Предполагается, что в звезде имеется стационарное магнитарное поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ($\sim 10^{14} - 10^{16}$ Гс), достаточно сильное, чтобы вызывать заметные отклонения формы звезды от сферической. Уравнения колебаний получаются линеаризацией уравнений движения замагниченного вещества в приближении вмерзлости поля в вещество. Невозможность

ная конфигурация звезды считается сферически-симметричной. В этих условиях хорошо применимо приближение колебаний несжимаемого вещества, когда элементы вещества смещаются только по сферическим поверхностям. Тогда возмущения давления и плотности отсутствуют (и излучение гравитационных волн подавлено). Возмущения возбуждают малые скорости элементов вещества $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, малые смещения этих элементов $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и малые вариации магнитного поля $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$. Все эти вариации осциллируют во времени как $\exp(i\omega t)$, где $\omega = 2\pi\nu$ — круговая частота колебаний. Общий осциллирующий фактор в уравнениях сокращается, оставляя стационарное волновое уравнение для малых (комплексных) амплитуд $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$ и собственной частоты колебаний ω :

$$\rho\omega^2\mathbf{u} = \mathbf{T}_\mu + \mathbf{T}_B. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{T}_μ и \mathbf{T}_B имеют смысл объемных плотностей сил (со знаком минус), определяемых упругостью кристалла и магнитными возмущениями. В первом случае

$$\mathbf{T}_{\mu i} = -\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \sigma_{ik} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

где σ_{ik} — тензор сдвиговых деформаций и μ — сдвиговая вязкость (в приближении изотропного кристалла). Для магнитных возмущений

$$\mathbf{T}_B = \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{B}_1 = \text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]. \quad (3)$$

Уравнения нужно дополнить граничными условиями. Поскольку кристалл существует лишь в коре звезды, радиальные составляющие вязких напряжений должны исчезать на внешней и внутренней границах коры. Условия для магнитного поля зависят от постановки задачи; альфвеновские возмущения $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ могут распространяться в ядро и магнитосферу звезды.

3. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Предварительно полезно сделать несколько замечаний. Хорошо известно, что модуль сдвига μ определяет скорость распространения упругих деформаций v_μ в кристалле. Как следует из расчетов (например, [38]), эти деформации обычно локализованы вблизи дна коры звезды, при $\rho \sim 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Тогда при типичных условиях справедлива оценка

$$v_\mu \sim \sqrt{\mu/\rho} \sim 10^8 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (4)$$

Таблица. Три режима магнитоупругих колебаний магнитаров

Режим	Условие	Ведущий механизм
I	$B \ll B_\mu$	сдвиговые волны в кристалле
II	$B \sim B_\mu$	сдвиговые и альфвеновские волны
III	$B \gg B_\mu$	альфвеновские волны

Магнитные возмущения распространяются с альфвеновской скоростью v_A . При той же плотности оценка дает

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}} \sim 3 \cdot 10^7 B_{15} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (5)$$

где B_{15} — магнитное поле в единицах 10^{15} Гс . При этом v_A заметно уменьшается внутрь звезды и увеличивается к поверхности.

Формально скорости (4) и (5) становятся близкими по величине при соотношении

$$B \sim B_\mu \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ Гс}, \quad (6)$$

которое выделяет три режима магнитоупругих колебаний (см. таблицу).

В режиме I магнитоупругие колебания в основном формируются благодаря упругим волнам в коре звезды; альфвеновские возмущения подстраиваются под сдвиговые деформации кристалла и сравнительно слабо меняют частоты колебаний. Такие колебания почти полностью локализованы в коре и определяются микрофизикой вещества и магнитным полем коры.

В режиме II роль сдвиговых и альфвеновских волн становится сопоставимой. Альфвеновские возмущения могут распространяться за пределы коры (например, [13, 14]). В альфвеновские колебания может быть вовлечена почти вся звезда. Для их расчета требуется знание всей микрофизики магнитара, которая содержит много неопределенностей, включая уравнение состояния, сверхтекучесть и сверхпроводимость ядра звезды, а также конфигурацию магнитного поля в ней.

Наконец, в режиме III колебания главным образом формируются альфвеновскими волнами, а упругость кристалла становится малозначительной или даже пренебрежимой (например, [17, 19]).

Разумеется, описанная классификация колебаний слишком схематична. В частности, она не учитывает возможные запрещенные интервалы частот альфвеновских колебаний в ядре звезды (например, [26]), при которых колебания могут оставаться локализованными в коре даже при очень сильных маг-

нитных полях. Важны также эффекты проникновения альфвеновских возмущений из коры в ядро и обратно — они могут приводить к вариациям частот, затуханию и потере когерентности колебаний коры.

Требует комментария и использованное (разд. 2) приближение несжимаемости вещества при магнитоупругих колебаниях. Типы колебаний нейтронных звезд очень разнообразны (например, [39] и приведенные там ссылки). Магнитоупругие колебания удобны тем, что их частоты достаточно низки, чтобы объяснять наблюдаемые КПО магнитаров. Сдвиговые и альфвеновские скорости v_μ и v_A в основном гораздо ниже скорости обычного звука, определяемой полным давлением плотного вещества звезды. Частоты колебаний многих типов выше, чем магнитоупругих.

4. УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ КОРЫ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Такие колебания называют торсионными. Они являются базисными для изучения магнитоупругих колебаний. Их теория начала развиваться в 1980-х гг. в классических работах Хансен и Чиоффи [40], Шумейкер и Торна [41], а также МакДермотта и др. [39] задолго до открытия магнитарных КПО. После обнаружения КПО теория торсионных колебаний получила новый импульс для развития (например, [27, 29, 36, 42–48] и приведенные там ссылки).

Каждая мода торсионных колебаний задается тремя квантовыми числами: 1) $n = 0, 1, 2, \dots$ — числом узлов волновой функции по радиусу, 2) орбитальным числом, которое в данной задаче пробегает значения $\ell = 2, 3, \dots, 3$ азимутальным квантовым числом m , принимающим целые значения от $-\ell$ до ℓ .

В сферических координатах (r, θ, ϕ) стационарная волновая функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ имеет лишь две нетривиальные компоненты: \mathbf{u}_ϕ и \mathbf{u}_θ (поскольку $\mathbf{u}_r = 0$). Их можно представить в виде (например, [37])

$$u_\phi(r, \theta, \phi) = rY(r) e^{im\phi} \frac{dP_\ell^m}{d\theta}, \quad (7)$$

$$u_\theta(r, \theta, \phi) = rY(r) e^{im\phi} \frac{imP_\ell^m}{\sin\theta}, \quad (8)$$

где $P_\ell^m(\cos\theta)$ — присоединенный полином Лежандра, $Y(r) = Y_{n\ell}(r)$ — безразмерная радиальная вол-

новая функция, удовлетворяющая уравнению

$$Y'' + \left(\frac{4}{r} + \frac{\mu'}{\mu} \right) Y' + \left[\frac{\rho}{\mu} \omega^2 - \frac{(\ell+2)(\ell-1)}{r^2} \right] Y = 0, \quad (9)$$

где штрих означает дифференцирование по r . Эти колебания локализованы в кристаллической коре $r_1 \leq r \leq r_2$, где r_1 — радиус границы между корой и ядром, r_2 — внешний радиус зоны кристаллизации, близкий к радиусу звезды. На границах радиальные упругие напряжения должны исчезать,

$$Y'(r_1) = Y'(r_2) = 0.$$

Частоты торсионных колебаний вырождены по m :

$$\omega = \omega_{\mu n \ell}$$

(индекс μ указывает, что рассматриваются сдвиговые деформации кристалла); функции $Y(r)$ не зависят от m . Величина $Y_0 = Y(r_2)$ характеризует угловую размах колебаний (в радианах) внешнего края области кристаллизации. При $m = 0$ вещество колеблется лишь по параллелям ($\mathbf{u}_\theta = 0$), а при $m \neq 0$ возникают и меридиональные движения. Величина m сильно влияет на геометрию поля смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и угловую зависимость плотности энергии упругих колебаний. Модель звезды влияет лишь на $Y(r)$, а угловые зависимости $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ стандартны.

Торсионные колебания нейтронных звезд делятся на фундаментальные ($n = 0$) и обычные ($n > 0$). Для фундаментальных колебаний очень хорошим приближением является слабая деформируемость кристалла, когда Y почти не зависит от r (например, [38]). В этом случае

$$\omega_{\mu 0 \ell} \approx \frac{1}{2} \omega_{\mu 0} \sqrt{(\ell+2)(\ell-1)},$$

где $\omega_{\mu 0}$ — частота основного тона ($\ell = 2$). Фундаментальные колебания могут иметь особенно низкие частоты.

Частоты обычных торсионных колебаний ($n > 0$) выше и сильно возрастают с ростом n . При фиксированном n имеется целое семейство близких частот, которые слабо растут с увеличением ℓ (демонстрируя тонкое расщепление по ℓ), причем волновые функции $Y_{n\ell}(r)$ зависят от ℓ достаточно слабо (например, [49]). Поскольку частоты торсионных колебаний не зависят от m , при их нахождении обычно использовались волновые функции с $m = 0$, а наличие состояний с $m \neq 0$ игнорировалось.

Торсионные колебания могут нести большую энергию. Например, можно выбрать модель нейтронной звезды с нуклонным ядром и современным уравнением состояния плотного вещества BSk21 (подробно описанным в [50]). При массе звезды $1.4 M_\odot$ ее радиус составляет $R = 12.6$ км, а радиус ядра $r_1 = 11.55$ км. Согласно результатам [49], энергия колебаний основной моды ($n = 0$, $\ell = 2$, $\nu_{\mu 0} = 23.0$ Гц) составляет $E_{vib} \approx 10^{49} Y_0^2$ эрг. При угле размаха колебаний внешней кромки кристаллической коры порядка 0.1° ($Y_0 \approx 1.7 \cdot 10^{-3}$ рад) получим $E_{vib} \approx 3 \cdot 10^{43}$ эрг. При этом напряжения в колеблющемся кристалле еще далеки от разрушающих [38].

5. КОЛЕБАНИЯ, ДОМИНИРОВАННЫЕ УПРУГОСТЬЮ КОРЫ

Что же касается магнитоупругих колебаний, наиболее простым является режим I (см. таблицу). Это режим достаточно невысоких магнитных полей ($B \ll B_\mu$), которые можно учитывать по теории возмущений, рассматривая волновые функции торсионных колебаний (разд. 4) как функции нулевого приближения, а величину \mathbf{T}_V в формуле (1) как малую поправку. Несмотря на большое число исследований магнитоупругих колебаний (например, [13–16, 18, 21–26, 28, 30, 31, 33, 35] и приведенные там ссылки), наличие состояний с $m \neq 0$ обычно игнорировалось. Тем самым изучался неполный спектр частот магнитоупругих колебаний.

Исключения составляют статья Шайсултанова и Эйхлера [20] и недавняя работа [37]. В [20] было обосновано, что присутствие магнитного поля снимает вырождение частот торсионных колебаний. В магнитном поле эти частоты расщепляются на серии частот, что можно назвать эффектом Зеемана в магнитарах. Эффект был правильно описан и оценен, но работа не привлекала внимания. Ее развитию была посвящена лишь недавняя статья [37], где был предложен простой алгоритм расчета частот колебаний в первом порядке теории возмущений для широкого класса магнитных полей \mathbf{B} в коре магнитара. Для примера было рассчитано зеемановское расщепление частот фундаментальных колебаний ($n = 0$) в дипольном магнитном поле при $2 \leq \ell \leq 5$.

Ниже дано расширенное рассмотрение магнитоупругих колебаний в том же порядке теории возмущений для фундаментальных мод ($n = 0$). Детали, подробно описанные в [37], здесь упоминаются

лишь кратко. При сделанных приближениях достаточно считать, что колебания локализованы в упругой коре звезды. Как и в [37], предполагается, что магнитное поле в коре аксиально-симметрично относительно магнитной оси: отличны от нуля лишь компоненты поля $B_r(r, \theta)$ и $B_\theta(r, \theta)$. В этом случае

$$\omega_{\ell m}^2 = \omega_{\mu \ell}^2 + \omega_{B \ell m}^2, \quad (10)$$

где $\omega_{\mu \ell}$ — частота торсионных колебаний (разд. 4), $\omega_{B \ell m}$ — малая поправка, обусловленная магнитным полем; ℓ и m нумеруют волновую функцию нулевого приближения; см. (7) и (8).

Выражения для $\omega_{\mu \ell}$ и $\omega_{B \ell m}$ приведены в [37]. Там же (в разд. 6) указано, какие изменения следует внести в теорию, чтобы учесть релятивистские эффекты. Согласно [37],

$$\omega_{\mu \ell}^2 = \frac{(1 - x_{g*}) \int_{crust} dV \mu}{\int_{crust} dV (\rho + P/c^2) r^2}, \quad (11)$$

$$\omega_{B \ell m}^2 = \frac{(1 - x_{g*}) \frac{1}{4\pi} \int_{crust} dV I_B}{\Xi(\ell, m) \int_{crust} dV (\rho + P/c^2) r^2}. \quad (12)$$

Здесь P — давление вещества, c — скорость света, $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$ — элемент объема в приближении локально плоского пространства-времени коры; интегрирование ведется по объему упругой коры. Множитель $(1 - x_{g*})$ приближенно учитывает гравитационное красное смещение квадрата частоты колебаний для удаленного наблюдателя, $x_{g*} = 2GM_*/(c^2 r_*)$, G — гравитационная постоянная, r_* — радиус любой точки в коре (от конкретного выбора результат почти не зависит [49]), M_* — гравитационная масса внутри сферы радиуса r_* . Величина

$$\Xi(\ell, m) = \frac{2\ell(\ell + 1)(\ell + m)!}{(2\ell + 1)(\ell - m)!} \quad (13)$$

— удобный множитель, I_B — комбинация B_r , B_θ , P_ℓ^m и их производных (см. формулу (18) в [37]), квадратичная по магнитному полю, благодаря чему $\omega_{B \ell m} \propto B^2$. В данном случае колебания локализованы в коре звезды и не зависят от конфигурации $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ вне коры.

6. СЛУЧАЙ ДИПОЛЬНОГО ПОЛЯ

Как и в [37], для иллюстрации будет рассмотрено дипольное магнитное поле в коре звезды, при котором

$$B_r = B_0 \cos \theta (R/r)^3,$$

$$B_\theta = \frac{1}{2} B_0 \sin \theta (R/r)^3.$$

Здесь B_0 — магнитное поле на магнитном полюсе на поверхности звезды. Дипольное поле снимает вырождение частот $\omega_{\mu\ell}$, но лишь частично: в соответствии с (10) частота $\omega_{\mu\ell}$ расщепляется на серию из $\ell + 1$ частот $\omega_{\ell m}$, где $m = 0, 1, \dots, \ell$. Частота $\omega_{\ell 0}$ оказывается невырожденной, а частоты $\omega_{\ell m}$ с $m > 0$ остаются вырожденными двукратно (реально отвечают состояниям $\pm m$). Зеемановское расщепление определяется величиной $\omega_{B\ell m}$, которая дается формулой (12). Для дипольного поля

$$I_B = -\frac{B_0^2}{4} \left(\frac{R}{r}\right)^6 \times \left[P'^2(1 + 3 \operatorname{ctg}^2 \theta) - 3P'P'' \operatorname{ctg} \theta + P'P''' + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} (-P'^2 - 10PP' \operatorname{ctg} \theta + 8P^2 \operatorname{ctg}^2 \theta) \right]. \quad (14)$$

Здесь

$$P = P_\ell^m(\cos \theta),$$

штрих означает дифференцирование по θ . Тогда

$$\omega_{B\ell m}^2 = \frac{B_0^2 r_2^3 [(r_2/r_1)^3 - 1]}{12\pi \int_{r_1}^{r_2} dr r^4 (\rho + P/c^2)} \zeta_{\ell m}, \quad (15)$$

где

$$\zeta_{\ell m} = \frac{1}{B_0^2 \Xi(\ell, m)} \int_0^\pi \sin \theta d\theta I_B(R, \theta). \quad (16)$$

Приведенные здесь формулы (14) и (15) отвечают формулам (26) и (27) в [37]. Последние содержат опечатки, которые здесь исправлены. Все вычисления в [37] выполнены по правильным формулам.

Величины $\zeta_{\ell m}$ в [37] вычислены и аппроксимированы простой формулой

$$\zeta_{\ell m} = c_0(\ell) + c_2(\ell)m^2 \quad (17)$$

лишь при $\ell \leq 5$, а величины $c_0(\ell)$ и $c_2(\ell)$ табулированы. Теперь же величины $\zeta_{\ell m}$ вычислены вплоть до $\ell = 15$, а величины $c_0(\ell)$ и $c_2(\ell)$ аппроксимированы простыми формулами

$$c_0(\ell) = 0.721 [(\ell - 2)(\ell + 1)]^{0.954}, \quad (18)$$

$$c_2(\ell) = \frac{2}{3} - \frac{0.766(\ell - 2)^{1.09}}{1 + 0.532(\ell - 2)^{1.15}}. \quad (19)$$

Точность аппроксимации составляет несколько процентов, что вполне достаточно для приложений.

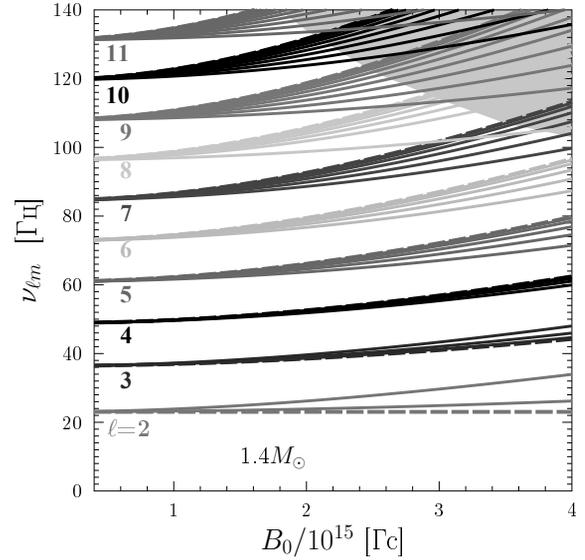


Рис. 2. Частоты магнитоупругих колебаний нейтронной звезды с массой $1.4 M_\odot$ в зависимости от величины магнитного поля B_0 на магнитном полюсе на поверхности. Каждая серия частот, отвечающая $\ell = 2, \dots, 11$, содержит $\ell + 1$ ветвь разных зеемановских компонент. Компоненты с $m = 0$ изображены штриховыми линиями. Затемнена область квазипересечений компонент (подробности в тексте)

Формулы (17)–(19) применимы лишь для дипольного магнитного поля в коре звезды; поля других конфигураций требуют отдельного рассмотрения.

Далее результаты проиллюстрированы для звезд с дипольным полем, что расширяет рассмотрение [37] на более широкий интервал частот.

Рисунок 2 показывает зависимость частот колебаний от B_0 при $n = 0$, $\ell = 2, \dots, 11$ и разных m . Как и в [37], рассмотрена звезда с массой $1.4 M_\odot$ и уравнением состояния BSk21, упомянутая в разд. 4. Расчет выполнен на основе формул (10), (11) и (15). Рисунок 2 аналогичен рис. 1 b из работы [37], но покрывает область частот $\nu \leq 140$ Гц (вместо 80 Гц в [37]).

Согласно результатам разд. 3, рис. 2 показывает два режима магнитоупругих колебаний: режим I полей, значительно меньших $B_\mu \approx 3 \cdot 10^{15}$ Гс, и режим II промежуточных полей (см. таблицу). Используемые расчетные формулы строго применимы лишь в режиме I. На рисунке они экстраполированы и в промежуточный режим II, хотя возможность такой экстраполяции требует подтверждений (см. ниже).

При $B_0 \leq 4 \cdot 10^{14}$ Гс в области $\nu < 140$ Гц рис. 2 предсказывает 10 частот фундаментальных торси-

онных колебаний (разд. 4), различающихся значениями ℓ и фактически не подверженных влиянию магнитного поля. Однако с ростом B_0 каждая из частот заметно расщепляется на зеемановские компоненты: 10 исходных частот распадаются на 75 ветвей колебаний.

При не слишком высоких B_0 отчетливо видны 10 отдельных наборов (пучков) частот, отвечающих определенным ℓ . Частоты колебаний в каждом пучке различаются значениями m . В согласии с результатами [37] ветви колебаний с $m = 0$ (штриховые линии) при $\ell = 2$ и 3 лежат ниже других ветвей пучка, а при более высоких ℓ они становятся выше других (причем такая инверсия присуща, по-видимому, именно дипольному магнитному полю). Чем выше ℓ , тем богаче расщепление и тем слабее то значение B_0 , при котором это расщепление начинает проявляться.

При $\ell > 3$ самая нижняя ветвь колебаний любого пучка соответствует наиболее высоким $m = \ell + 1$. Интересно, что с повышением ℓ такие кривые становятся более горизонтальными и слабее зависят от B_0 . Другими словами, при высоких m частоты $\nu_{\ell m}(B_0)$ приближаются к частотам торсионных колебаний $\nu_{\mu\ell}$ немагнитной звезды (разд. 4).

Начиная с полей $B_0 \gtrsim 1.5 \cdot 10^{15}$ Гс и значений $\ell \approx 11$, в верхнем правом углу рис. 2 появляется особая область частот и магнитных полей, в которой магнитоупругие колебания ведут себя сложно. При увеличении B_0 до самых высоких изображенных значений ($4 \cdot 10^{15}$ Гс) эта область спускается до частот ~ 90 Гц (а при еще более высоких B_0 будет спускаться ниже). Представляется, что именно в этой области особенно важны два эффекта, которые не учтены в расчетах.

Во-первых, в этой области с увеличением B_0 ветви колебаний из разных пучков начинают демонстрировать квазипересечения (рис. 2). Идентичность отдельных пучков теряется, и область плотно заполняется разрешенными частотами колебаний. Поведение кривых вблизи точек квазипересечений требует дальнейшего анализа. Как обычно, в окрестностях этих точек колебания сближающихся мод взаимодействуют друг с другом, а их частоты искажаются.

Во-вторых, при наличии ярко выраженных эффектов затухания и потери когерентности колебаний коры из-за уноса колебательной энергии альфвеновскими волнами в ядро звезды, ветви колебаний могут приобрести конечные сдвиги и ширины (которые в целом могут расти с увеличением B_0 и ν). Частоты колебаний коры при этом способны размы-

ваться и сдвигаться. Однако возможны запрещенные интервалы частот колебаний в ядре (например, [26] и приведенные там ссылки), которые могут препятствовать уносу энергии колебаний коры в ядро.

Ясно, что оба эффекта взаимно связаны и требуют самосогласованного рассмотрения. Невозможно количественно правильно рассчитать эффекты квазипересечений, не имея надежной теории взаимодействия колебаний коры с альфвеновскими возмущениями в ядре. Большие усилия на построение такой теории были потрачены (например, [13–15, 17, 21–26, 28, 30, 31, 33, 35]) лишь для аксиально-симметричных возмущений ($m = 0$), а при $m \neq 0$ такая теория пока отсутствует. Поэтому самосогласованное рассмотрение составляет трудную задачу на будущее. Представляется, что оба эффекта наиболее важны именно в особой области высоких частот и полей, а при более низких ν и B_0 проявляются слабее.

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Все указанные эффекты могут быть важны для интерпретации наблюдаемых частот магнитарных КПО. Ниже дано обобщение интерпретаций КПО при гипervсплеске SGR 1806–20 и гигантском всплеске SGR 1900+14, начатое в [37]. В рассмотрение включено больше наблюдаемых КПО. Нерешенные проблемы квазипересечения частот магни-

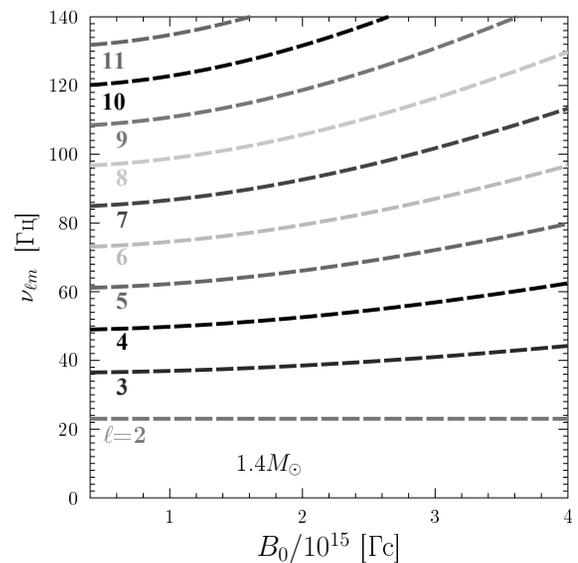


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но оставлены лишь ветви колебаний с $m = 0$, которые только и учитывались в большинстве публикаций

тоупругих колебаний и взаимодействия колебаний коры с альфвеновскими колебаниями ядра звезды здесь не учитываются. Поэтому, как и в [37], рассмотрение иллюстративно и может быть особенно неточным при достаточно высоких ν и B_0 .

Полученные наблюдательные данные о частотах КПО многократно анализировались; окончательные результаты приведены, например, в [35]. Они широко используются многими авторами и будут использованы ниже. Исключение составляет работа [12], авторы которой на основе байесовского анализа выразили сомнение в значимости измеренных низкочастотных КПО; это требует дальнейшего подтверждения.

Уже отмечалось, что в большинстве интерпретаций КПО ветви колебаний с $m \neq 0$ не учитывались совсем. Для примера на рис. 3 из всех ветвей колебаний, представленных на рис. 2, оставлены только те, которые отвечают $m = 0$. Из 75 ветвей, изображенных на рис. 2, остается только 10. Ясно, что они представляют существенно неполный набор теоретических кривых. При использовании такого набора интерпретация наблюдений может усложниться и искажаться. При выбранных параметрах описанный выше эффект квазипересечения ветвей колебаний на рис. 3 исчезает.

Причина пренебрежения решениями с $m \neq 0$ состоит в том, что векторы смещения $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ колеблющегося вещества звезды для таких решений зависят не только от r и θ , но и от угла ϕ (см., например, формулы (7) и (8)). Другими словами, для аксиально-симметричных исходных магнитных полей $\mathbf{B}(r, \theta)$, рассмотренных большинством исследователей, возмущенные величины \mathbf{u} и \mathbf{B}_1 при $m \neq 0$ оказываются аксиально-асимметричными. Однако аксиальная симметрия возмущений обычно постулировалась авторами изначально, это и приводило к потере решений с $m \neq 0$.

Нужно добавить, что, как видно на рис. 3, частота ν_{20} (нижняя штриховая линия) вовсе не зависит от B (см. также [37]). Этот результат справедлив лишь в первом порядке теории возмущений в области слабых магнитных полей (разд. 5) и только для дипольного поля. Он означает, что разложение $\nu_{20}(B_0)$ в ряд по степеням B_0^2 в этом случае не содержит слагаемого, пропорционального B_0^2 . Слагаемые, пропорциональные более высоким степеням B_0^2 , должны присутствовать, но их вычисление требует усилий. Можно возразить, что согласно известной работе [16], посвященной именно колебаниям звезды с дипольным полем, слагаемое, пропорциональное B^2 , присутствует. Однако, как отмечено

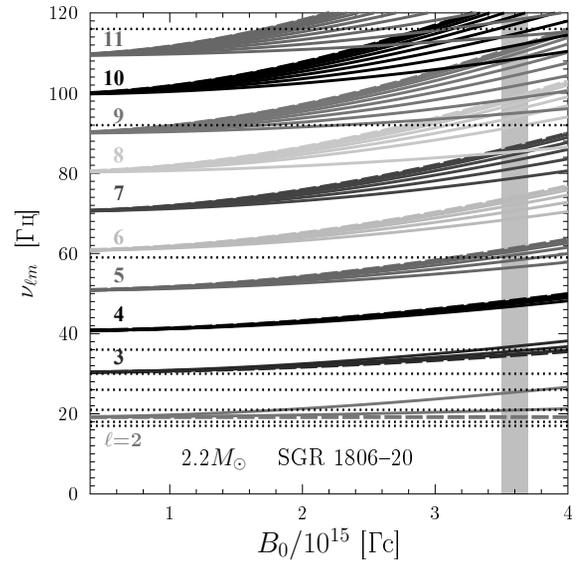


Рис. 4. То же, что на рис. 2, но для звезды с массой $2.2 M_\odot$ в сравнении с частотами КПО (точечные горизонтальные линии), наблюдаемыми при гипертвсплеске магнитара SGR 1806–20. Вертикальная затемненная полоса показывает возможные значения B_0 , одновременно согласующиеся с некоторыми наблюдаемыми КПО (подробности в тексте)

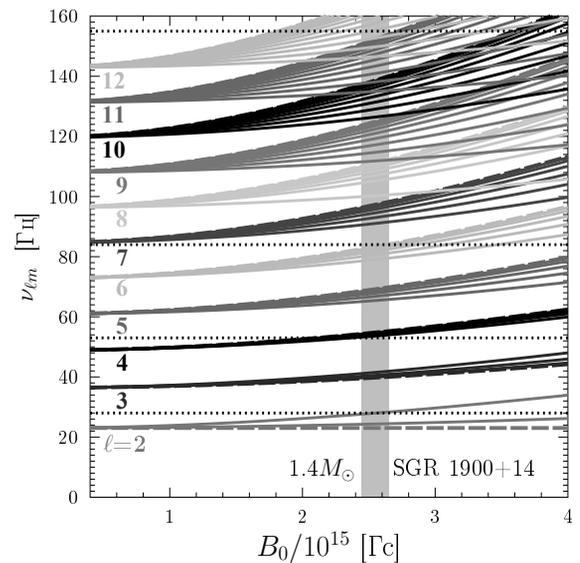


Рис. 5. То же, что на рис. 2 и 4, в сравнении с частотами КПО (точечные горизонтальные линии), наблюдаемыми при гигантском всплеске магнитара SGR 1900+14

но в [26], решение в [16] искалось путем разложения функции u_ϕ в ряд по функциям (7) с разными ℓ при $m = 0$, причем сумма по ℓ искусственно обры-

валась. В действительности же такое обрывание эквивалентно решению точной задачи с недипольным магнитным полем [26], что и снимает возражение.

Наибольшее количество КПО было обнаружено при обработке наблюдений гипервспышки SGR 1806–20. В области низких частот, которые и рассмотрены ниже, были обнаружены КПО на частотах 18, 26, 30 и 150 Гц, а также (с меньшей достоверностью) на частотах 17, 21, 36 и 59 Гц.

Можно ли интерпретировать эти КПО как фундаментальные магнитоупругие колебания одной звезды (с одинаковой массой, радиусом и внутренним строением) с одним и тем же дипольным полем? Этот вопрос был поставлен в [37], где теоретические расчеты были ограничены значениями $\ell \leq 5$ и могли претендовать на объяснения частот КПО не выше примерно 60 Гц. Оказалось, что для звезды с $M = 1.4 M_\odot$ из 7 таких частот (17, 18, 21, 26, 30, 36 и 59 Гц) можно было объяснить лишь три: 26, 30 и 59 Гц, предположив, что $B_0 \approx (3.2 - 3.4) \cdot 10^{15}$ Гц (рис. 2а в работе [37]). Самые низкочастотные КПО таким образом объяснить нельзя. Однако, оставив то же уравнение состояния вещества звезды (BSk21), но увеличив ее массу до $2.2 M_\odot$ (при предельно допустимой массе $2.27 M_\odot$), можно несколько понизить все теоретические частоты за счет более сильного гравитационного красного смещения частот колебаний более массивной (и компактной) звезды. В этом случае (рис. 2б в [37]) удалось объяснить 6 частот, кроме одной (30 Гц), считая, что $B_0 \approx (3.5 - 3.7) \cdot 10^{15}$ Гц.

Добавив новые расчеты данной работы (до $\ell = 11$), можно объяснить все наблюдаемые низкочастотные КПО гипервспышки SGR 1806–20, кроме одной, той же самой частоты 30 Гц, предположив такое же поле $B_0 \approx (3.5 - 3.7) \cdot 10^{15}$ Гц, что и в [37]. Это показано на рис. 4, аналогичном рис. 2б в [37], но содержащем частоты вплоть до 120 Гц. Объяснение самой высокой из выбранных частот КПО (150 Гц) не показано, чтобы не загромождать рисунок, но очевидно из густоты теоретических ветвей колебаний при $\nu > 90$ Гц. Невозможность объяснить КПО с частотой 30 Гц не смущает [37]: никаких попыток серьезно объяснить наблюдения не предпринималось. Значение $M = 2.2 M_\odot$ было выбрано для примера и не варьировалось. Требуемое магнитное поле B_0 явно соответствует режиму II (разд. 3), где теоретические значения частот могут быть верны лишь качественно. Вдобавок предположено дипольное магнитное поле, а возможные отклонения от диполя способны сильно изменить теоретические результаты. В любом

случае предлагаемый полный теоретический набор частот магнитоупругих колебаний сильно упрощает теоретическую интерпретацию низкочастотных магнитарных КПО.

Кроме того, в [37] была сделана попытка интерпретации КПО, наблюдавшихся при гигантской вспышке SGR 1900+14. Были обнаружены 4 низкочастотных КПО (28, 53, 84 и 155 Гц). Две самые низкие частоты легко объяснялись моделью звезды с $M = 1.4 M_\odot$ (рис. 3 в [37]). Взяв ту же модель звезды и увеличив теперь значения теоретических частот до 160 Гц, удается объяснить (рис. 5) все 4 частоты КПО при $B_0 \approx (2.42 - 2.62) \cdot 10^{15}$ Гц. Как и для рис. 4, более серьезная интерпретация представляется преждевременной.

Следует подчеркнуть, что поле $B \sim B_\mu$ нередко считалось истинным полем магнитаров из различных соображений (например, [35]).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Продолжено развитие теории магнитоупругих колебаний магнитаров. Как обычно, считалось, что такие колебания возбуждаются при вспышках магнитаров и наблюдаются как КПО во время вспышек (см. разд. 1 и приведенные там ссылки). Корректная интерпретация наблюдений может дать полезную информацию о параметрах магнитаров, их магнитных полях и о природе их вспышек.

Следуя работам [20, 37], рассмотрена полнота теоретических моделей КПО, особенно в связи с тем, что в большинстве работ не учитывалось зеemannовское расщепление частот колебаний магнитаров. На простой модели низкочастотных магнитоупругих колебаний без узлов волновой функции по радиусу, локализованных в коре магнитара с дипольным магнитным полем, в данной работе показано, что большинством авторов изучался существенно неполный набор колебаний, где при аксиально-симметричном исходном магнитном поле $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ допускались лишь аксиально-симметричные колебательные смещения элементов вещества $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и магнитного поля $\mathbf{V}_1(\mathbf{r})$. Тем самым был потерян широкий набор ветвей колебаний, в которых смещения $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{V}_1(\mathbf{r})$ аксиально-асимметричны. Продемонстрировано, что полный набор колебаний дает качественно иную картину ветвей колебаний и может заметно изменить теоретическую интерпретацию наблюдаемых КПО.

Тем самым построение полного набора магнитоупругих колебаний лишь начато, а для завершения

нужны серьезные усилия. Перечислим лишь некоторые проблемы.

Даже в достаточно надежно рассмотренном режиме I сравнительно низких магнитных полей изучены лишь низкочастотные колебания без узлов волновой функции по радиусу. Обобщение на случай колебаний с узлами ($n > 0$) можно проделать без труда. Вместо дипольного поля нетрудно рассмотреть полоидальные магнитные поля других типов. Легко рассмотреть и случай, в котором дополнительно присутствует тороидальное магнитное поле. Кроме того, представленные результаты получены в приближении локально-плоской коры звезды (например, [37, 49]). Было бы полезно провести рассмотрение с полным учетом эффектов общей теории относительности. Это особенно важно для случаев, когда альфвеновские возмущения распространяются за пределы коры.

Рассмотренный режим колебаний I недостаточен для интерпретации наблюдений. Представляется, что для этой цели особенно важен промежуточный режим II ($B \sim B_\mu$). Такие колебания могут заметно проникать в ядро звезды, и приведенное рассмотрение не является количественно точным (хотя, возможно, применимо качественно, особенно для самых низких частот). Последовательное рассмотрение колебаний в этом режиме усложняется, поскольку в расчет следует включать микрофизику ядра, которая допускает много возможностей (сверхтекучесть и сверхпроводимость в ядре, разные конфигурации магнитного поля там и пр.). Возникает и важная проблема взаимодействия альфвеновских колебаний ядра с колебаниями коры. Энергия колебаний коры способна перетекать в ядро звезды, что может приводить к затуханию и потере когерентности колебаний коры. Все эти эффекты активно исследовались для колебаний с аксиально-симметричными возмущениями. Важный случай аксиально-асимметричных возмущений рассмотрен не был.

Еще одно направление исследований — улучшение микрофизики вещества нейтронных звезд, влияющей на колебания магнитаров. В частности, это улучшенные расчеты модуля сдвига в коре, учет деликатных эффектов сверхтекучести и сверхпроводимости вещества, эффектов ядерных взаимодействий, ядерной пасты у дна коры и пр. (см., например, [27, 29, 36, 37, 43–49, 51] и приведенные там ссылки).

Наконец, уместно перечислить основные оригинальные результаты данной работы. Исследования низкочастотных магнитоупругих колебаний в [37]

распространены на более высокие частоты (разд. 6, рис. 2). Получены простые аппроксимации коэффициентов $c_0(\ell)$ и $c_2(\ell)$ формулами (18) и (19), позволяющие рассчитывать спектр колебаний на частотах $\lesssim 150$ Гц. Предсказаны квазипересечения ветвей колебаний с разными индексами ℓ (в затемненной области на рис. 2, в которой допустимые частоты формально располагаются плотно, а фактически могут быстро затухать с учетом взаимодействия колебаний коры и альфвеновских колебаний ядра). Подтверждена возможность [37] интерпретировать низкочастотные КПО, наблюдавшиеся при гипервсплеске SGR 1806–20 (рис. 4) и гигантском всплеске SGR 1900+14 (рис. 5), магнитоупругими колебаниями. Указано на необходимость совместного учета квазипересечений мод и взаимодействий колебаний коры с альфвеновскими возмущениями в ядре звезды. Констатируется, что, несмотря на значительные усилия многих авторов, построение теории магнитоупругих колебаний далеко до завершения.

Благодарности. Автор благодарен М. Е. Гусакону, Е. М. Кантору и А. И. Чугунову за комментарии и критические замечания к предыдущей работе [37], которые были полезны для написания данной статьи.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ФТИ им. А. Ф. Иоффе № FFUGFFUG-2024-0002.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Капица, *Экспериментальные исследования в сильных магнитных полях*, УФН **163** (4), 77 (1993).
2. S. L. Shapiro and A. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*, Wiley-Interscience, New York (1983).
3. P. Haensel, A. Y. Potekhin, and D. G. Yakovlev, *Neutron Stars. 1. Equation of State and Structure*, Springer, New York (2007).
4. V. M. Kaspi and A. M. Beloborodov, *Magnetars*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **55**, 261 (2017).
5. R. C. Duncan, *Global Seismic Oscillations in Soft Gamma Repeaters*, Astrophys. J. Lett. **498**, L45 (1998).
6. G. L. Israel, T. Belloni, L. Stella, Y. Rephaeli, D. E. Gruber, P. Casella, S. Dall’Osso, N. Rea, M. Persic, and R. E. Rothschild, *The Discovery of*

- Rapid X-Ray Oscillations in the Tail of the SGR 1806-20 Hyperflare*, *Astrophys. J. Lett.* **628**, L53 (2005).
7. A. L. Watts and T. E. Strohmayer, *Discovery of Fast X-Ray Oscillations During the 1998 Giant Flare from SGR 1900+14*, *Astrophys. J. Lett.* **632**, L111 (2005).
 8. A. L. Watts and T. Strohmayer, *Detection with RHESSI of High-Frequency X-Ray Oscillations in the Tail of the 2004 Hyperflare from SGR 1806-20*, *Astrophys. J. Lett.* **637**, L117 (2006).
 9. V. Hambaryan, R. Neuhäuser, and K. D. Kokkotas, *Bayesian Timing Analysis of Giant Flare of SGR 1806-20 by RXTE PCA*, *Astron. Astrophys.* **528**, A45 (2011).
 10. D. Huppenkothen, L. M. Heil, A. L. Watts, and E. Göğüş, *Quasi-Periodic Oscillations in Short Recurring Bursts of Magnetars SGR 1806-20 and SGR 1900+14 Observed with RXTE*, *Astrophys. J.* **795**, 114 (2014).
 11. D. Huppenkothen, C. D'Angelo, A. L. Watts, L. Heil, M. van der Klis, A. J. van der Horst, C. Kouveliotou, M. G. Baring, E. Göğüş, J. Granot, Y. Kaneko, L. Lin, A. von Kienlin, and G. Younes, *Quasi-Periodic Oscillations in Short Recurring Bursts of the Soft Gamma Repeater J1550-5418*, *Astrophys. J.* **787**, 128 (2014).
 12. D. Pumpe, M. Gabler, T. Steininger, and T. A. Enßlin, *Search for Quasi-Periodic Signals in Magnetar Giant Flares. Bayesian Inspection of SGR 1806-20 and SGR 1900+14*, *Astron. Astrophys.* **610**, A61 (2018).
 13. Y. Levin, *QPOs During Magnetar Flares Are Not Driven by Mechanical Normal Modes of the Crust*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **368**, L35 (2006).
 14. K. Glampedakis, L. Samuelsson, and N. Andersson, *Elastic or Magnetic? A Toy Model for Global Magnetar Oscillations with Implications for Quasi-Periodic Oscillations During Flares*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **371**, L74 (2006).
 15. Y. Levin, *On the Theory of Magnetar QPOs*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **377**, 159 (2007).
 16. H. Sotani, K. D. Kokkotas, and N. Stergioulas, *Torsional Oscillations of Relativistic Stars with Dipole Magnetic Fields*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **375**, 261 (2007).
 17. H. Sotani, K. D. Kokkotas, and N. Stergioulas, *Alfvén Quasi-Periodic Oscillations in Magnetars*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **385**, L5 (2008).
 18. U. Lee, *Axisymmetric Toroidal Modes of Magnetized Neutron Stars*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **385**, 2069 (2008).
 19. P. Cerdá-Durán, N. Stergioulas, and J. A. Font, *Alfvén QPOs in Magnetars in the Anelastic Approximation*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **397**, 1607 (2009).
 20. R. Shaisultanov and D. Eichler, *What Magnetar Seismology Can Teach Us About Magnetic Fields*, *Astrophys. J. Lett.* **702**, L23 (2009).
 21. A. Colaiuda, H. Beyer, and K. D. Kokkotas, *On the Quasi-Periodic Oscillations in Magnetars*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **396**, 1441 (2009).
 22. A. Colaiuda and K. D. Kokkotas, *Magnetar Oscillations in the Presence of a Crust*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **414**, 3014 (2011).
 23. M. van Hoven and Y. Levin, *Magnetar Oscillations – I. Strongly Coupled Dynamics of the Crust and the Core*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **410**, 1036 (2011).
 24. M. Gabler, P. Cerdá-Durán, J. A. Font, E. Müller, and N. Stergioulas, *Magneto-Elastic Oscillations and the Damping of Crustal Shear Modes in Magnetars*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **410**, L37 (2011).
 25. A. Colaiuda and K. D. Kokkotas, *Coupled Polar-Axial Magnetar Oscillations*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **423**, 811 (2012).
 26. M. van Hoven and Y. Levin, *Magnetar Oscillations – II. Spectral Method*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **420**, 3035 (2012).
 27. H. Sotani, K. Nakazato, K. Iida, and K. Oyamatsu, *Probing the Equation of State of Nuclear Matter via Neutron Star Asteroseismology*, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 201101 (2012).
 28. M. Gabler, P. Cerdá-Durán, N. Stergioulas, J. A. Font, and E. Müller, *Magnetoelastic Oscillations of Neutron Stars with Dipolar Magnetic Fields*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **421**, 2054 (2012).
 29. H. Sotani, K. Nakazato, K. Iida, and K. Oyamatsu, *Possible Constraints on the Density Dependence of the Nuclear Symmetry Energy from Quasi-Periodic Oscillations in Soft Gamma Repeaters*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **434**, 2060 (2013).
 30. M. Gabler, P. Cerdá-Durán, J. A. Font, E. Müller, and N. Stergioulas, *Magneto-Elastic Oscillations of Neutron Stars: Exploring Different Magnetic Field Configurations*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **430**, 1811 (2013).

31. M. Gabler, P. Cerdá-Durán, N. Stergioulas, J. A. Font, and E. Müller, *Imprints of Superfluidity on Magnetoelastic Quasiperiodic Oscillations of Soft Gamma-Ray Repeaters*, Phys. Rev. Lett. **111**, 211102 (2013).
32. A. Passamonti and S. K. Lander, *Quasi-Periodic Oscillations in Superfluid Magnetars*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **438**, 156 (2014).
33. M. Gabler, P. Cerdá-Durán, N. Stergioulas, J. A. Font, and E. Müller, *Coherent Magneto-Elastic Oscillations in Superfluid Magnetars*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **460**, 4242 (2016).
34. B. Link and C. A. van Eysden, *Torsional Oscillations of a Magnetar with a Tangled Magnetic Field*, Astrophys. J. Lett. **823**, L1 (2016).
35. M. Gabler, P. Cerdá-Durán, N. Stergioulas, J. A. Font, and E. Müller, *Constraining Properties of High-Density Matter in Neutron Stars with Magneto-Elastic Oscillations*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **476**, 4199 (2018).
36. H. Sotani, K. Iida, and K. Oyamatsu, *Constraints on the Nuclear Equation of State and the Neutron Star Structure from Crustal Torsional Oscillations*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **479**, 4735 (2018).
37. D. G. Yakovlev, *Zeeman Splitting of Torsional Oscillation Frequencies of Magnetars*, Universe **9**(12), 504 (2023).
38. A. A. Kozhberov and D. G. Yakovlev, *Deformed Crystals and Torsional Oscillations of Neutron Star Crust*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **498**, 5149 (2020).
39. P. N. McDermott, H. M. van Horn, and C. J. Hansen, *Nonradial Oscillations of Neutron Stars*, Astrophys. J. **325**, 725 (1988).
40. C. J. Hansen and D. F. Cioffi, *Torsional Oscillations in Neutron Star Crusts*, Astrophys. J. **238**, 740 (1980).
41. B. L. Schumaker and K. S. Thorne, *Torsional Oscillations of Neutron Stars*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **203**, 457 (1983).
42. L. Samuelsson and N. Andersson, *Neutron Star Asteroseismology. Axial Crust Oscillations in the Cowling Approximation*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **374**, 256 (2007).
43. N. Andersson, K. Glampedakis, and L. Samuelsson, *Superfluid Signatures in Magnetar Seismology*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **396**, 894 (2009).
44. H. Sotani, K. Nakazato, K. Iida, and K. Oyamatsu, *Effect of Superfluidity on Neutron Star Oscillations*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **428**, L21 (2013).
45. H. Sotani, *Empirical Formula of Crustal Torsional Oscillations*, Phys. Rev. D **93**, 044059 (2016).
46. H. Sotani, K. Iida, and K. Oyamatsu, *Probing Nuclear Bubble Structure via Neutron Star Asteroseismology*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **464**, 3101 (2017).
47. H. Sotani, K. Iida, and K. Oyamatsu, *Probing Crustal Structures from Neutron Star Compactness*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **470**, 4397 (2017).
48. H. Sotani, K. Iida, and K. Oyamatsu, *Astrophysical Implications of Double-Layer Torsional Oscillations in a Neutron Star Crust as a Lasagna Sandwich*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **489**, 3022 (2019).
49. D. G. Yakovlev, *Self-Similarity Relations for Torsional Oscillations of Neutron Stars*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **518**, 1148 (2023).
50. A. Y. Potekhin, A. F. Fantina, N. Chamel, J. M. Pearson, and S. Goriely, *Analytical Representations of Unified Equations of State for Neutron-Star Matter*, Astron. Astrophys. **560**, A48 (2013).
51. N. A. Zemlyakov and A. I. Chugunov, *The Elasticity of the Neutron Star Mantle: The Improved Compressible Liquid Drop Model for Cylindrical Phases*, Universe **9**(5), 220 (2023).

МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В ОКОЛОЛУННОЙ ПЛАЗМЕ: СВОЙСТВА, ПРОЯВЛЕНИЯ, ЭФФЕКТЫ

*Л. М. Зеленый**, *С. И. Попель***, *А. П. Голубь*

*Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 27 февраля 2024 г.,
после переработки 15 марта 2024 г.
Принята к публикации 15 марта 2024 г.

Рассматриваются возможные проявления магнитных полей в окололунной плазме. Отмечается, что благодаря действию магнитных полей в хвосте магнитосферы Земли возможен перенос частиц заряженной пыли над лунной поверхностью на большие расстояния. Соответственно, пылевая плазма над освещенной Солнцем поверхностью Луны может существовать для всего диапазона лунных широт. Из-за существенной локализации областей магнитных аномалий их влияние на перенос заряженных пылевых частиц над Луной несущественно. Тем не менее показано, что в зонах магнитных аномалий пылевая плазма «подавлена» по сравнению с ситуацией вне этих зон. Важным объектом исследования являются мини-магнитосферы, связанные с зонами лунных магнитных аномалий и ответственные за ряд оптических и спутниковых наблюдений, таких как «лунные завитки», нижегибридная турбулентность и т. д.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 130-летию П. Л. Капицы

DOI: 10.31857/S0044451024070137

1. ВВЕДЕНИЕ

В жизни Петра Леонидовича Капицы был относительно небольшой период, начавшийся в 1946 году, когда из-за конфликта с Л.П. Берия он попал в серьезную опалу и был снят с должности директора Института физических проблем АН СССР, который он основал в 1934 году. П.Н. Капица пробыл в опале девять лет. В это время он в основном жил на даче в Николиной Горе. Но он не перестал заниматься физикой: он заинтересовался новым направлением — электроникой больших мощностей и физикой плазмы. На даче он снова основал ИФП, только это был не Институт физических проблем, а «Имба физических проблем» — так называл Капица свою домашнюю лабораторию, где создал свои первые высокочастотные генераторы большой мощности.

Можно, таким образом, сказать, что физика плазмы тоже присутствует в широчайшем спектре научных интересов и достижений П.Л. Капицы.

Кроме того, Петр Леонидович был свидетелем захватывающего соревнования за первенство в освоении Луны между СССР и США в 1960–1970-е годы, и плазменная физика экзосферы Луны, важность которой только начала осознаваться в те годы, наверняка бы его заинтересовала. С учетом также большого интереса П.Л. Капицы к физике магнитных полей в данной работе представлен материал, посвященный влиянию магнитных полей на плазму экзосферы Луны.

Одной из ключевых проблем физики окололунного пространства в настоящее время является исследование взаимодействий окололунной плазмы с магнитными полями. Хотя магнитные поля у Луны и являются довольно малыми, они могут приводить к интересным и весьма ощутимым следствиям. Окололунная плазма подвержена действию двух типов магнитных полей. Прежде всего, это поле хвоста магнитосферы Земли, типичные значения которого составляют величины порядка 10^{-5} – 10^{-4} Гс [1,2]. Луна находится в хвосте магнитосферы Земли около четверти своей орбиты. Кроме того, на Луне имеются так называемые области магнитных аномалий, связанные с магнитным веществом в лунной коре. Измерения приповерхностных магнитных полей

* E-mail: lzelenyi@cosmos.ru

** E-mail: popel@iki.rssi.ru

на видимой стороне Луны, выполненные в рамках миссий Аполлон 12, 14, 15 и 16, составили соответственно $3.8 \cdot 10^{-4}$, $1.03 \cdot 10^{-3}$, $3 \cdot 10^{-5}$ и $3.27 \cdot 10^{-3}$ Гс [3]. Из спутниковых измерений известно [4], что наибольшие (для Луны) магнитные поля присутствуют на невидимой стороне Луны. Считается, что эти поля определяют лимбовые возмущения солнечного ветра.

До сих пор открыт вопрос о происхождении магнитных полей в зонах магнитных аномалий. Соответственно теоретические исследования магнитных полей у Луны посвящены в основном выявлению причин возникновения магнитных полей у Луны (см., например, [5–7]). Одна из гипотез о происхождении магнитных полей утверждает, что Луна когда-то обладала магнитным динамо, приводимым в движение за счет тепловых процессов. Однако ввиду, в частности, небольшого размера лунного ядра данная теория оказывается проблематичной [8]. Другая гипотеза состоит в том, что ударные события могли либо создать, либо усилить ранее существовавшие магнитные поля, особенно вблизи антиподов крупнейших кратеров [9]. Однако и данная гипотеза имеет противоречия с результатами наблюдений, а также с тем фактом, что мощные ударные события, необходимые для генерации магнитных полей в рамках данной гипотезы, могли бы либо вывести Луну из синхронного вращения, либо вызвать либрации большой амплитуды, которые длились бы несколько десятков тысяч лет [10]. Имеется гипотеза, предполагающая альтернативный механизм создания лунного динамо, в котором энергия для действия динамо исходит от вращения Луны, а не от тепловых эффектов [5].

При описании взаимодействия окололунной плазмы с магнитными полями прежде всего следует учесть тот факт, что очень часто плазму в окрестности Луны следует рассматривать как пылевую [11, 12]. В качестве пылевой компоненты над поверхностью Луны рассматривают частицы лунного реголита [13], поднятые либо в результате электростатических процессов (см., например, [14–20]), либо вследствие ударов метеороидов [21–23]. И те и другие пылевые частицы вносят вклад в «запыленную» экзосферу Луны. Наиболее «мощная» плазменно-пылевая экзосфера сосредоточена над обращенной к Солнцу стороной Луны, которая находится под действием солнечного ветра и излучения. В ней важную роль приобретает фотоэффект, за счет которого освещенная солнечным светом поверхность Луны приобретает положительный заряд [24]. В результате пылевая

плазма над освещенной стороной Луны содержит электроны и ионы солнечного ветра, левитирующие пылевые частицы, фотоэлектроны, поступающие в экзосферу в результате фотоэмиссии с лунной поверхности и с поверхностями левитирующих пылевых частиц. В 2013 году в Соединенных Штатах Америки была осуществлена миссия NASA LADEE («Lunar Atmosphere and Dust Environment Explorer» — «Исследователь лунной атмосферы и пылевой среды») [25], в рамках которой окололунная пылевая плазма изучалась посредством наблюдений с орбиты. У поверхности Луны пыль изучалась в рамках миссии Китайской Народной Республики Chang E-3 [26]. В России готовятся лунные миссии «Луна-26» и «Луна-27» (см., например, [12, 27, 28]), в задачи которых входят исследования свойств пыли и пылевой плазмы на орбите вокруг Луны и у лунной поверхности. Проект Международной лунной исследовательской станции (International Lunar Research Station), в котором участвуют, в частности, китайские и российские ученые, также предполагает исследования лунной пыли.

Солнечный ветер, взаимодействующий с магнитными аномалиями на поверхности Луны, приводит к формированию так называемых мини-магнитосфер [29–33]. Анализ мини-магнитосфер представляет большой интерес для фундаментальной физики плазмы. Их появление в лунной экзосфере означает, что возможны внешние (спутниковые) измерения, в том числе функций распределения частиц. Тот факт, что они расположены на ближайшем к нам планетарном теле, также обеспечивает высокий уровень разнообразия наблюдательных возможностей. Особый интерес представляет также связь между мини-магнитосферами и «лунными завитками» («lunar swirls») [34]. Завитки представляют собой обнаженные силикатные материалы, альbedo которых избирательно сохранялись с течением времени из-за воздействия космического выветривания за счет отклонения ионной бомбардировки солнечного ветра [35].

В настоящей работе рассматриваются возможные проявления магнитных полей в окололунной плазме. Статья носит частично обзорный характер. В ней описываются некоторые ранее исследованные эффекты, но при этом приводится ряд новых результатов, касающихся в основном влияния магнитных полей в областях магнитных аномалий на процессы формирования пылевой плазмы над Луной. Описание влияния магнитных полей хвоста магнитосферы Земли приводится в разд. 2. В разд. 3 обсуждается влияние магнитных полей в областях

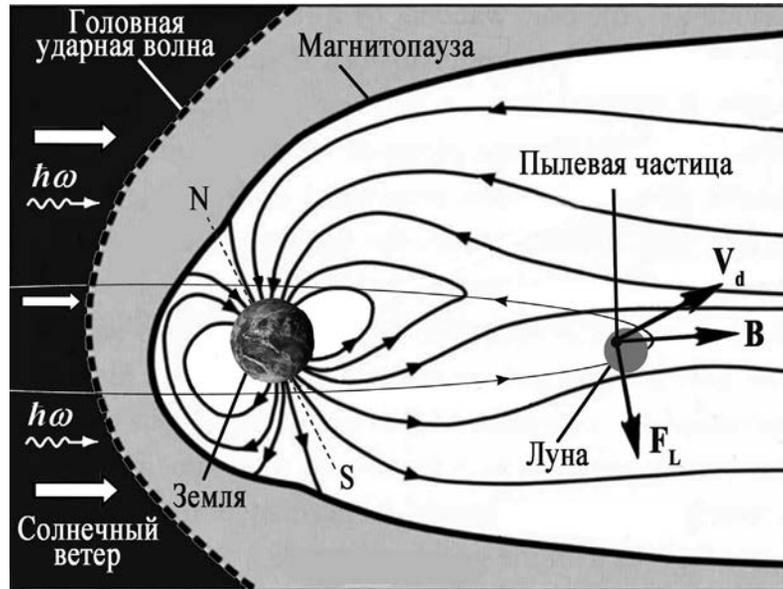


Рис. 1. Схематическое изображение движения Луны в хвосте магнитосферы Земли. Лунная орбита изображена тонкой линией, стрелки на лунной орбите показывают направление движения Луны. Также изображены солнечный ветер и фотоны солнечного излучения ($\hbar\omega$)

лунных магнитных аномалий. В разд. 4 результаты кратко суммируются.

2. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ХВОСТА МАГНИТОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

Луна движется по орбите со скоростью около 1 км/с [18]. Таким образом, с учетом того, что пылевая плазма у Луны «привязана» к ее поверхности, возникает относительная скорость движения заряженных пылевых частиц по отношению к магнитным силовым линиям поля магнитосферы Земли, имеющая порядок 1 км/с. Следовательно, несмотря даже на небольшие значения индукции магнитного поля у Луны, возможно появление довольно ощутимой (из-за больших значений относительной скорости) магнитной части силы Лоренца, действующей на пылевую частицу. Схематически движение Луны в хвосте земной магнитосферы, вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} , скорость пылевой частицы \mathbf{v}_d , а также магнитная часть силы Лоренца \mathbf{F}_L показаны на рис. 1.

Ниже рассматриваются проявления [36], обусловленные действием магнитной части силы Лоренца в хвосте магнитосферы Земли на движение заряженных пылевых частиц в «запыленной» экзосфере Луны, а также возможность генерации нижнегибридных волн в окололунной пылевой плазме [20].

2.1. Уравнения для описания динамики пыли

Динамика заряженной пылевой частицы над поверхностью Луны определяется уравнением, описывающим второй закон Ньютона, в котором учтены электростатическая и магнитная части силы Лоренца, а также сила тяжести:

$$m_d \frac{d^2 \mathbf{r}_d}{dt^2} = q_d \mathbf{E} + \frac{q_d}{c} \mathbf{v}_d \times \mathbf{B} + m_d \mathbf{g}_0. \quad (1)$$

Здесь m_d — масса пылевой частицы, \mathbf{r}_d — ее радиус-вектор, \mathbf{E} — электрическое поле, q_d — заряд пылевой частицы, c — скорость света, \mathbf{g}_0 — ускорение свободного падения вблизи лунной поверхности. При этом плазма, окружающая пылевую частицу, влияет на параметры, содержащиеся в правой части уравнения (1), и прежде всего на заряд пылевой частицы. Уравнение, описывающее ее зарядку, имеет вид

$$\frac{dq_d}{dt} = I_e(q_d) + I_i(q_d) - I_{ph}(q_d) + I_{e,ph}(q_d), \quad (2)$$

где $I_e(q_d)$ и $I_i(q_d)$ — микроскопические токи электронов и ионов солнечного ветра на пылевую частицу, $I_{ph}(q_d)$ — фототок электронов с пылевой частицы, обусловленный взаимодействием ее поверхности с солнечным излучением, $I_{e,ph}(q_d)$ — ток фотоэлектронов, окружающих пылевую частицу, на нее. Выражения для указанных токов имеют вид

$$I_e \approx -\pi a^2 n_{eS} \sqrt{\frac{8T_{eS}}{\pi m_e}} \left(1 + \frac{Z_d e^2}{a T_{eS}} \right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
I_i \approx & \pi a^2 e n_{iS} \sqrt{\frac{T_{iS}}{2\pi m_i}} \frac{u_{Ti}}{u_i} \times \\
& \times \left\{ \frac{u_i + u_0}{u_{Ti}} \exp\left(-\frac{(u_i - u_0)^2}{2u_{Ti}^2}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{u_i - u_0}{u_{Ti}} \exp\left(-\frac{(u_i + u_0)^2}{2u_{Ti}^2}\right) \right\} + \\
& + \pi a^2 e n_{iS} \sqrt{\frac{T_{iS}}{4m_i}} \frac{u_{Ti}}{u_i} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{u_i + u_0}{\sqrt{2}u_{Ti}}\right) + \right. \\
& \left. + \operatorname{erf}\left(\frac{u_i - u_0}{\sqrt{2}u_{Ti}}\right) \right\} \left(1 + \frac{2Z_d e^2}{aT_{iS}} + \frac{u_i^2}{u_{Ti}^2} \right), \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{ph} \approx & -\pi a^2 e N_0 \sqrt{\frac{T_{e,ph}}{2\pi m_e}} \times \\
& \times \left(1 + \frac{Z_d e^2}{aT_{e,ph}} \right) \exp\left(-\frac{Z_d e^2}{aT_{e,ph}}\right), \quad (5)
\end{aligned}$$

$$I_{e,ph} \approx -\pi a^2 e n_{e,ph} \sqrt{\frac{8T_{e,ph}}{\pi m_e}} \left(1 + \frac{Z_d e^2}{aT_{e,ph}} \right). \quad (6)$$

Здесь a — размер пылевой частицы, Z_d — ее зарядовое число ($q_d = Z_d e$), e — элементарный заряд, $n_{e(i)S}$ — концентрация электронов (ионов) солнечного ветра, $T_{e(i)S}$ — температура электронов (ионов) солнечного ветра, $m_{e(i)}$ — масса электрона (иона), $u_0 = \sqrt{2Z_d e^2 / a m_i}$, $u_{Ti} = \sqrt{T_{iS} / m_i}$ — тепловая скорость ионов солнечного ветра, u_i — скорость солнечного ветра, $T_{e,ph}$ — температура фотоэлектронов, N_0 — концентрация фотоэлектронов у поверхности Луны на экваторе, $n_{e,ph}$ — концентрация фотоэлектронов в зависимости от высоты над лунной поверхностью для данной лунной широты. Выражения (3)–(6) справедливы для случая положительных зарядов пылевых частиц. Выражение (5) для тока I_{ph} не содержит множителя, содержащего характеристики спектров излучения, что оказывается возможным в ситуации, когда поверхности пылевых частиц и поверхность Луны имеют одинаковую работу выхода фотоэлектронов W . В этой ситуации указанный множитель удастся выразить через значение N_0 . Приведенная выше система уравнений справедлива в ситуации разреженной приповерхностной пылевой плазмы у Луны, когда влиянием соседних пылевых частиц друг на друга можно пренебречь, что соответствует имеющимся на Луне условиям [12, 14].

При решении уравнений (1), (2) необходимо учитывать следующее выражение для вертикальной компоненты электрического поля E , формируемого

заряженной поверхностью Луны, в зависимости от высоты h над ее поверхностью:

$$E(h, \theta) = \frac{2T_{e,ph}}{e} \frac{\sqrt{\cos \theta / 2}}{\lambda_D + h \sqrt{\cos \theta / 2}}, \quad (7)$$

где λ_D — дебаевский радиус фотоэлектронов у поверхности Луны, θ — угол между местной нормалью и направлением на Солнце. Отметим, что угол θ для гладкой лунной поверхности (без холмов и впадин) примерно равен лунной широте. Это вызвано тем, что угол, образованный осью Луны и плоскостью эклиптики, составляет всего 1.5424° .

Выражение (7) получено в результате совместного решения кинетического уравнения для фотоэлектронов и уравнения Пуассона. Зависимость электрического поля от угла θ в выражении (7) обусловлена изменением числа фотонов, которые поглощаются единицей поверхности Луны, в зависимости от угла θ . Распределение электрического поля, аналогичное (7), получено в работах [37–39].

Для параметров плазмы у поверхности Луны слагаемое $q_d \mathbf{E}$ в правой части уравнения (1) по крайней мере на пять порядков величины превосходит второе слагаемое $(q_d/c) \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$. На первый взгляд, данный факт указывает на оправданность подходов, в которых плазменно-пылевая система над Лунной изучается без учета магнитных полей. Однако подобное рассмотрение в предположении гладкой (плоской в определенной изучаемой окрестности) поверхности Луны, а также с учетом только электростатической и гравитационной сил, действующих на пылевую частицу, позволяет объяснить подъем пылевых частиц только в весьма ограниченной области углов θ ($|\theta| > \theta_0$), при этом θ_0 определяется из соотношения [39]

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos \theta_0} |\ln(4 \cos \theta_0)| = \\
= \frac{8\sqrt{2}\pi^2 a^2 \rho^2 G R_M \lambda_D}{9} \left(\frac{e}{T_{e,ph}} \right)^2, \quad (8)
\end{aligned}$$

где ρ — плотность лунного реголита, G — универсальная гравитационная постоянная, R_M — радиус Луны. Если ограничиться рассмотрением пылевых частиц с размерами не более 1 мкм (т.е. частиц, характерных для приповерхностного слоя над освещенной Солнцем поверхностью Луны [12, 14]), то получаем, что θ_0 не превосходит 76.14° . Причина указанного выше ограничения заключается в следующем. Движение пылевых частиц определяется конкуренцией противоположно направленных электростатической и гравитационной сил. Подъем пылевой

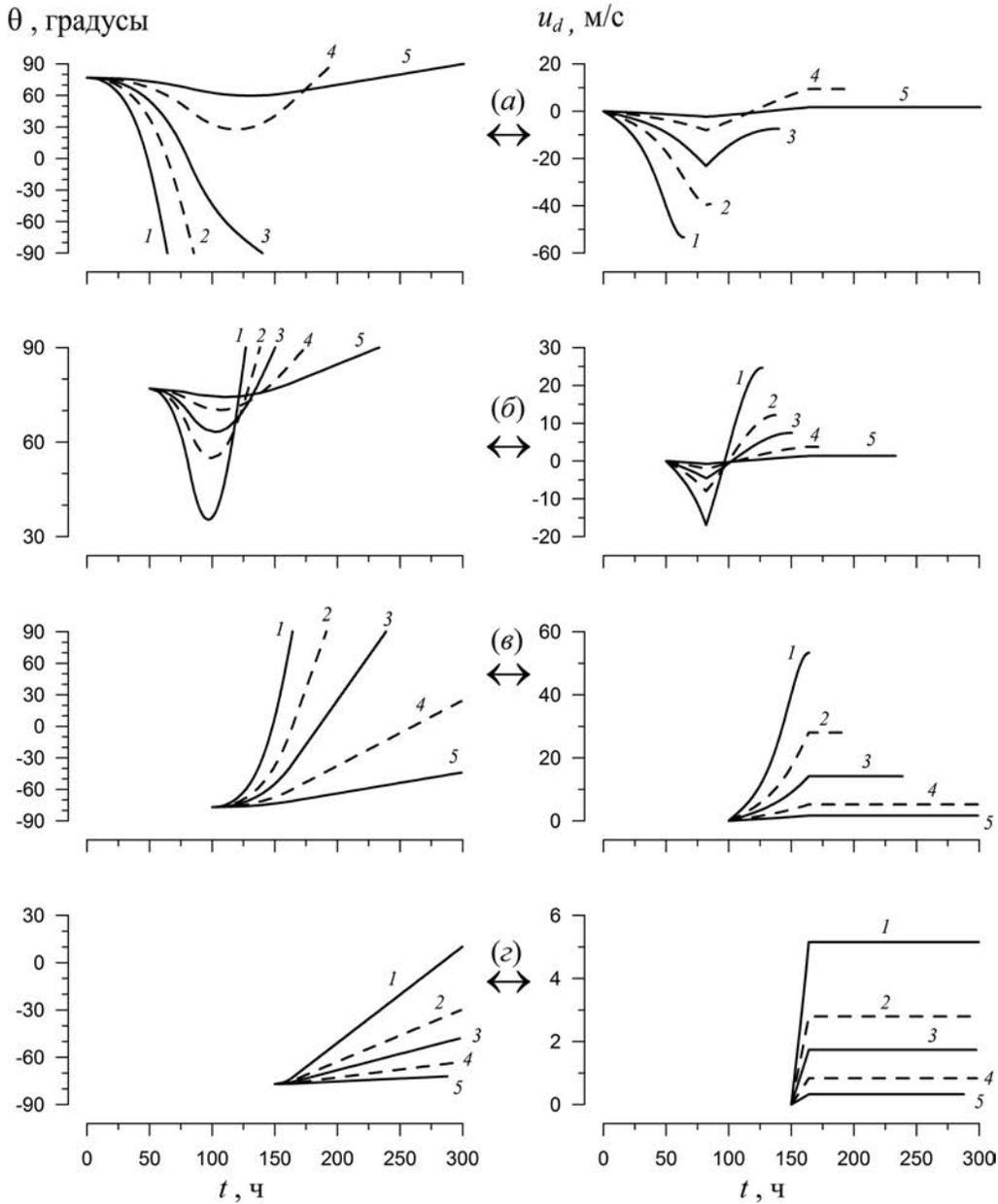


Рис. 2. Зависимости от времени t угловой координаты θ и компоненты скорости u_d пылевой частицы вдоль лунной поверхности. Момент времени $t = 0$ соответствует входу Луны в хвост магнитосферы Земли. Кривые 1–5 характеризуют пылевые частицы, радиусы которых соответственно равны 0.03 (1), 0.04 (2), 0.05 (3), 0.07 (4), 0.1 (5) мкм. Приведены результаты для различных моментов отрыва пылевых частиц от лунной поверхности: 0 (а), 50 (б), 100 (в), 150 (г) ч

частицы возможен только тогда, когда электростатическая сила больше силы тяжести у поверхности Луны. Электростатическая сила определяется зарядом пылевой частицы q_d , на который существенное влияние оказывает концентрация фотоэлектронов. В свою очередь, концентрация фотоэлектронов уменьшается с увеличением $|\theta|$. При значениях $|\theta|$, меньших критического, высокая концентра-

ция фотоэлектронов, окружающих пылевую частицу, не позволяет этой частице приобрести большой положительный заряд, достаточный для преобладания электростатической силы над гравитационной. В результате пылевая частица не может подняться над поверхностью Луны. Таким образом, в рамках модели, учитывающей только электростатическую и гравитационную силы, действующие на пылевую

частицу, а также рассматривающей гладкую поверхность Луны (т.е. не учитывающей реальный профиль поверхности), возникновение пылевой плазмы возможно только в области углов $|\theta| > \theta_0$.

2.2. Результаты расчетов с учетом магнитного поля хвоста магнитосферы

Учет магнитного поля хвоста магнитосферы Земли в корне меняет ситуацию. Как уже отмечалось, примерно четверть лунной орбиты проходит через хвост магнитосферы Земли. Если не учитывать наклон оси и наклонение орбиты к плоскости эклиптики как для Земли, так и для Луны, то примерно на одной восьмой лунной орбиты магнитная часть силы Лоренца, действующая на положительно заряженную пылевую частицу, имеет составляющую, направленную вдоль поверхности Луны в сторону ее Южного полюса (ситуация, показанная на рис. 1 и рассмотренная ниже). После этого магнитное поле и магнитная часть силы Лоренца меняют свое направление на противоположное. Движение положительно заряженной пылевой частицы происходит над освещенной Солнцем частью Луны, и возможен ее выход из области $\theta > \theta_0$. Если положительно заряженная пылевая частица после попадания в хвост магнитосферы Земли достигает Южного полюса Луны (за время, за которое Луна проходит одну восьмую часть своей орбиты) и, соответственно, перемещается на неосвещенную сторону Луны, она упадет. Если нет, то после того, как Луна пройдет одну восьмую часть своей орбиты, магнитная часть силы Лоренца будет действовать в противоположном (северном) направлении, и пылевая частица (после ее движения по инерции в течение некоторого времени) также изменит направление своего движения.

В расчетах предполагаем, что существует баланс между электростатической и гравитационной силами в уравнении (1), т.е. частица левитирует на определенной высоте. Основанием для данного предположения является адекватный учет аномальной диссипации, связанной в пылевой плазме с эффектом зарядки пылевых частиц (см. [40]). Аномальная диссипация подавляет отклонения пылевых частиц при их движении от равновесных траекторий, на которых равенство абсолютных значений электростатической и гравитационной сил приблизительно выполняется. Далее, в вычислениях пренебрегаем наклоном оси и наклонением орбиты к плоскости эклиптики как для Земли, так и для Луны. Тогда,

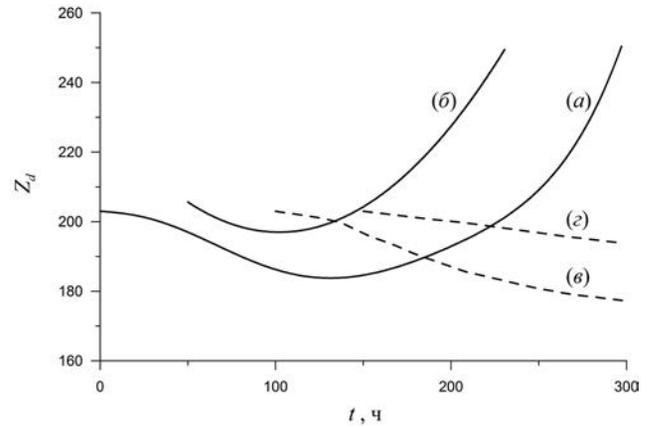


Рис. 3. Зависимости зарядового числа Z_d пылевых частиц радиусом 0.1 мкм от времени в ситуациях, соответствующих различным моментам отрыва пылевых частиц от лунной поверхности: 0 (а), 50 (б), 100 (в), 150 (г) ч. Момент времени $t = 0$ соответствует входу Луны в хвост магнитосферы Земли

определяя $t = 0$ как момент времени, соответствующий входу Луны в хвост магнитосферы Земли, рассматриваем вектор индукции магнитного поля в окрестности Луны в направлении с севера на юг при $0 < t < 82$ ч и в направлении с юга на север при $82 < t < 164$ ч. На рис. 2 представлены величины, характеризующие движение пылевых частиц различных размеров, левитирующих над лунной поверхностью, под действием магнитного поля Земли, для различных моментов отрыва пылевых частиц от лунной поверхности (и, соответственно, начала левитации), $n_{eS} = n_{iS} = 8.7 \text{ см}^{-3}$, $T_{eS} = 12 \text{ эВ}$, $T_{iS} = 6 \text{ эВ}$, $u_i = 468 \text{ км/с}$, $|\mathbf{B}| = 10^{-4} \text{ Гс}$, $W = 6 \text{ эВ}$, $T_{e,ph} = 1.9 \text{ эВ}$, $N_0 = 2.9 \cdot 10^2 \text{ см}^{-3}$. Данные значения $T_{e,ph}$ и N_0 (см. [12]) соответствуют солнечному максимуму и квантовому выходу лунного реголита, приведенному в [41].

На рис. 2 видно, что благодаря действию магнитных полей в хвосте магнитосферы Земли возможен перенос частиц заряженной пыли над лунной поверхностью на большие расстояния и, соответственно, пылевая плазма над освещенной Солнцем поверхностью Луны может существовать для всего диапазона лунных широт (от -90° до 90°). Перенос пылевых частиц из области лунных широт, прилегающих к лунным полюсам ($|\theta| > 76^\circ$), к экватору Луны за счет нескомпенсированной магнитной части силы Лоренца является новым качественным эффектом, не существующим в отсутствие магнитного поля. Отметим, что перенос пылевых частиц сопровождается изменениями их зарядов. Данный

факт нашел отражение на рис. 3, на котором изображены временные зависимости зарядового числа Z_d пылевых частиц радиуса 0.1 мкм в ситуациях, соответствующих различным моментам отрыва пылевых частиц от лунной поверхности. Изменение заряда пылевых частиц связано, в частности, с тем, что количество фотоэлектронов, окружающих пылевую частицу и влияющих на ее заряд, зависит от угла θ . Кроме того, на заряд частицы влияет высота, на которой пылевая частица находится. В процессе переноса высота меняется.

Таким образом, учет влияния магнитных полей хвоста магнитосферы Земли на перенос пыли над поверхностью Луны показывает возможность существования положительно заряженных пылевых частиц над освещенной частью Луны не только для значений угла θ , превышающих 76.14° , но и для всего диапазона лунных широт (от -90° до 90°). Отметим, что рассмотрение, представленное здесь, не учитывает влияния профиля поверхности Луны, которое может дать дополнительные аргументы в пользу возможности существования пылевой плазмы над всей поверхностью Луны.

2.3. Нижнегибридная турбулентность

Движение Луны, а вместе с ней и окололунной плазмы, относительно плазмы хвоста магнитосферы происходит со скоростью порядка 1 км/с. Более того, во время геомагнитных бурь и суббурь частицы с энергиями порядка 10 кэВ, захваченные в радиационных поясах, могут проникать в хвост магнитосферы [13, 42] и тем самым формировать потоки заряженных частиц в хвосте магнитосферы. Все это указывает на возможность развития плазменных неустойчивостей в областях взаимодействия лунной поверхности с плазмой хвоста магнитосферы и, таким образом, говорит о важности волновых процессов в этих областях. Оказывается, что весьма важной при этом является нижнегибридная турбулентность, которая может возбуждаться во всей области взаимодействия окололунной пылевой плазмы и плазмы хвоста магнитосферы [20].

Простейшая неустойчивость, приводящая к генерации нижнегибридных волн, — это гидродинамическая неустойчивость типа неустойчивости Бунемана [43], описываемая следующим линейным дисперсионным уравнением (в системе отсчета, связанной с плазмой магнитосферы):

$$1 + \frac{\omega_{peM}^2 + \omega_{pe(ph)}^2}{\omega_{Be}^2} \sin^2 \Theta - \frac{\omega_{piM}^2 + \omega_{peM}^2 \cos^2 \Theta}{\omega^2} - \frac{\omega_{pd}^2}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u})^2} - \frac{\omega_{pe(ph)}^2 \cos^2 \Theta}{(\omega - k_{\parallel} u_{\parallel})^2} = 0. \quad (9)$$

Здесь \mathbf{k} — волновой вектор, ω — частота, ω_{peM} — плазменная частота электронов магнитосферы, $\omega_{pe(ph)}$ — плазменная частота фотоэлектронов, ω_{pd} — плазменная частота пылевых частиц, ω_{piM} — плазменная частота ионов магнитосферы, ω_{Be} — электронная гирочастота, \mathbf{u} — относительная скорость движения окололунной пылевой плазмы и плазмы магнитосферы, индекс \parallel соответствует компоненте волнового вектора, параллельной внешнему магнитному полю, $\cos \Theta = k_{\parallel}/|\mathbf{k}|$.

В ситуации, соответствующей нижнегибридным волнам [44], при $\cos \Theta \ll 1$ и $|k_{\parallel} u_{\parallel}| \ll |\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}|$ дисперсионное уравнение (9) имеет следующее неустойчивое решение [20]:

$$\omega \approx \frac{\sqrt{\omega_{piM}^2 + \omega_{pe(ph)}^2 \cos^2 \Theta}}{\sqrt{1 + \omega_{pe(ph)}^2/\omega_{Be}^2}} + i\gamma^{Hydro} \equiv \equiv \omega_{LH}(\cos \Theta) + i\gamma^{Hydro}, \quad (10)$$

где γ^{Hydro} — инкремент неустойчивости. Максимальные значения инкремента имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_{max}^{Hydro} &= \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_{LH}(\cos \Theta) \times \\ &\times \left(\frac{\omega_{pd}^2}{\omega_{piM}^2 + \omega_{pe(ph)}^2 \cos^2 \Theta} \right)^{1/3} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \frac{\omega_{pd}}{\sqrt{1 + \omega_{pe(ph)}^2/\omega_{Be}^2}} \times \\ &\times \left(\frac{\omega_{piM}^2 + \omega_{pe(ph)}^2 \cos^2 \Theta}{\omega_{pd}^2} \right)^{1/6}. \quad (11) \end{aligned}$$

Характерное время развития неустойчивости

$$\tau = (\gamma_{max}^{Hydro})^{-1}$$

для параметров фотоэлектронов ($n_{e(ph)} \sim 10^2 \text{ см}^{-3}$) из [45], соответствующих квантовому выходу лунного реголита, приведенному в [41], $|\mathbf{B}| \sim 10^{-4} \text{ Гс}$, $\cos \Theta \sim \omega_{piM}/\omega_{pe(ph)}$, $a \sim 100 \text{ нм}$, $|Z_d| \sim 10$, $n_d \sim 10 \text{ см}^{-3}$, $n_{iM} \sim 10 \text{ см}^{-3}$, $m_d \sim 10^{-14} \text{ г}$ составляет $\tau \approx 30 \text{ с}$. Время (несколько суток — см. рис. 4), в течение которого окололунная пылевая

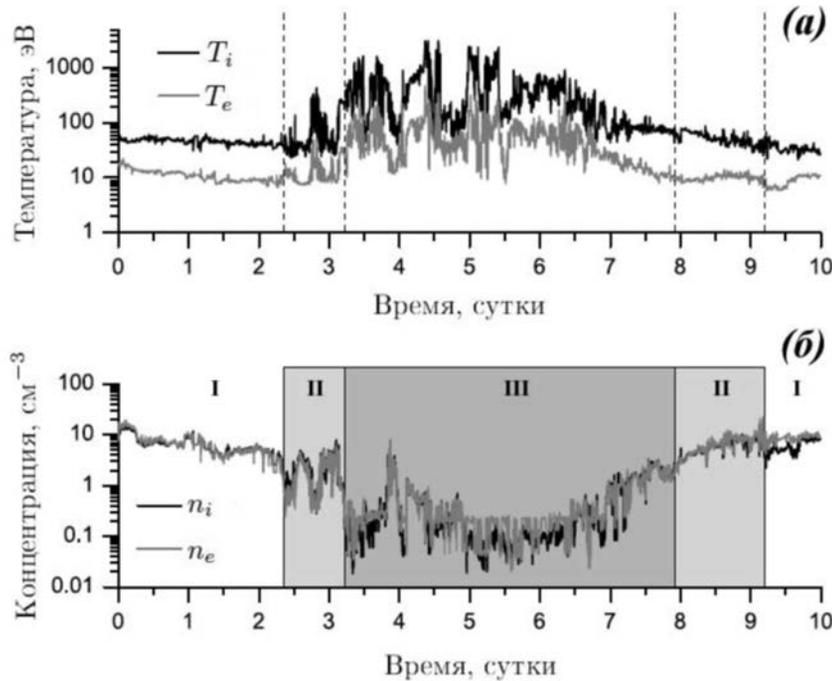


Рис. 4. Температуры (а) и концентрации (б) электронов и ионов солнечного ветра и магнитосферы на орбите Луны, полученные на основе измерений космического аппарата ARTEMIS P2 при прохождении хвоста магнитосферы с 22 по 31 января 2013 г. [46]. Римские цифры характеризуют области солнечного ветра (I), магнитного переходного и/или пограничного слоев магнитосферы (II), внутренней части хвоста магнитосферы (III), включающей плазменный слой. Границы между указанными областями обозначены на панелях (а) и (б) вертикальными линиями

плазма взаимодействует с магнитосферой Земли, значительно превышает τ . Таким образом, можно ожидать развития эффективных нелинейных процессов, связанных с нижнегибридной турбулентностью.

Рассматривается [20] следующая схема развития плазменной турбулентности. Ионы плазмы магнитосферы раскачивают нижнегибридные волны в результате развития гидродинамической неустойчивости. Вследствие этого (аналогично задаче об аномальном сопротивлении плазмы [47]) имеет место аномальная потеря импульса ионов, который передается волнам. В стационарном состоянии насыщения, достигаемого, когда рост неустойчивости ограничивается нелинейными процессами, имеет место турбулентный нагрев плазмы, природу которого определяет нижнегибридная турбулентность. Турбулентный нагрев неодинаков для ионной и пылевой компонент.

Для нахождения эффективной частоты столкновений ν_{eff} , характеризующей аномальную потерю импульса ионов, рассматривается квазилинейное взаимодействие в системе «ионы магнитосферы + нижнегибридные волны» с учетом того факта, что

ионы немагнитны, а также используется закон сохранения количества движения и учитывается сила трения, действующая на ионы за счет их взаимодействия с волнами. В итоге имеем

$$\nu_{eff} \approx \frac{1}{m_i n_{iM} u} \left| \int \gamma_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} d\mathbf{k} \right| \sim \frac{\omega_{pd}^{2/3} \omega_{LH}^{1/3} (\cos \Theta)}{\left(1 + \omega_{pe(ph)}^2 / \omega_{Be}^2\right)^{1/3}} \frac{v_{TiM}^2}{u^2}, \quad (12)$$

где $\gamma_{\mathbf{k}}$ ($\omega_{\mathbf{k}}$) — мнимая (действительная) часть частоты, $W_{\mathbf{k}}$ характеризует спектр волн в \mathbf{k} -пространстве,

$$W = \int W_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$$

— плотность энергии нижнегибридных волн, v_{TiM} — тепловая скорость ионов магнитосферы. При выводе окончательного выражения для ν_{eff} следовало определить $W_{\mathbf{k}}$, для чего рассматривались нелинейные процессы. Поскольку исследуется случай, когда в результате развития гидродинамической неустойчивости происходит возбуждение нижнегибридных волн, рассмотрение проводилось с позиций сильной

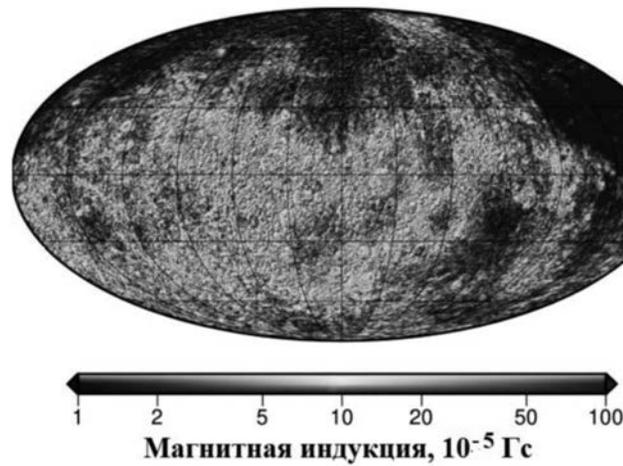


Рис. 5. Индукция магнитного поля на Луне, построенная с использованием логарифмической цветовой шкалы. Карта представлена по данным [52] в равновеликой проекции Моллвейде, отцентрированной по полусфере невидимой стороны Луны на 180° восточной долготы, с линиями сетки, нанесенными через каждые 30° как по широте, так и по долготе

турбулентности, когда оказывается возможным получение лишь оценок по порядку величины [48].

Величина ν_{eff} позволяет, используя соотношение $eE \sim \nu_{eff} m_i u$, определить характерные электрические поля, возникающие при распространении нижнегибридных волн:

$$E \sim \frac{\omega_{pd}^{2/3} \omega_{LH}^{1/3} (\cos \Theta)}{(1 + \omega_{pe(ph)}^2 / \omega_{Be}^2)^{1/3}} \frac{T_{iM}}{eu}, \quad (13)$$

где T_{iM} — температура ионов магнитосферы.

Расчеты, выполненные на основе выражения (13), для условий, соответствующих магнитосфере Земли ($|\mathbf{B}| \sim 10^{-4}$ Гс, $\cos \Theta \sim \omega_{piM} / \omega_{pe(ph)}$, $a \sim 100$ нм, $u \sim 1$ км/с, $|Z_d| \sim 10$, $n_d \sim 10 \text{ см}^{-3}$, $n_{iM} \sim 10 \text{ см}^{-3}$, $m_d \sim 10^{-14}$ г, $T_{iM} \sim 100$ эВ, $n_{e(ph)} \sim 10^2 \text{ см}^{-3}$), показывают, что в плазменно-пылевой системе вблизи Луны в результате развития нижнегибридной турбулентности могут индуцироваться электрические поля с амплитудами $E \sim 0.1$ В/м. Эта величина несколько ниже, чем значение электрического поля $E \sim 1$ В/м, возбуждаемого вблизи поверхности Луны вследствие ее зарядки при взаимодействии с солнечным излучением [14]. Тем не менее электрические поля, возбуждаемые за счет развития нижнегибридной турбулентности, могут влиять на картину электрического поля над лунной поверхностью, поскольку электрическое поле, возникающее вследствие взаимодействия солнечного излучения с лунной поверхностью, с увеличением высоты довольно резко уменьшается.

3. ВЛИЯНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТЯХ МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

В настоящее время Луна не имеет глобального магнитного поля, связанного с вихревыми токами в ее ядре. Однако измерения магнитного поля, выполненные с орбиты, а также в рамках миссий Аполлон 12, 14, 15 и 16, показывают, что некоторые участки лунной коры сильно намагничены [3, 49, 50]. Кроме того, намагниченными являются некоторые лунные образцы, собранные на поверхности Луны [51, 52]. Все это указывает на существование сильных магнитных аномалий на Луне. На рис. 5 представлена карта, характеризующая индукцию магнитного поля в зонах лунных магнитных аномалий.

Как отмечалось во Введении, магнитные поля в областях магнитных аномалий на один-два порядка могут превосходить существующие на орбите Луны магнитные поля магнитосферы Земли. Более того, на основе анализа возможных механизмов происхождения лунных магнитных аномалий можно оценить максимально возможные магнитные поля у лунной поверхности. На рис. 6 приведена расчетная зависимость от времени индукции магнитного поля у лунной поверхности, формируемого в рамках механизма, связанного с ударом космического тела о поверхность Луны [5]. При этом возникают крупномасштабные потоки жидкости в лунном ядре, возбуждаемые приливным искажением границы ядра и магнии, что приводит в действие механизм лунного динамо. Предсказанная в рамках данного механизма напряженность поверхностного магнитного поля

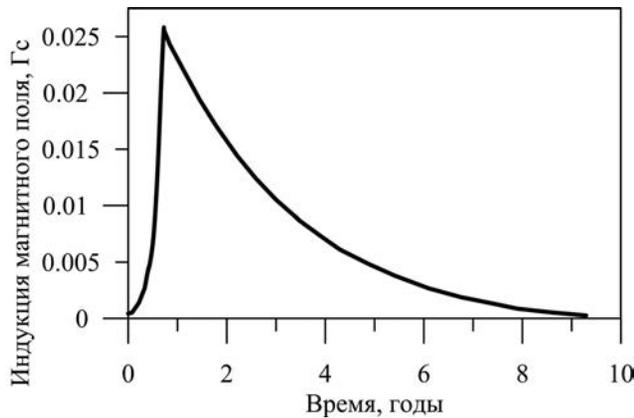


Рис. 6. Расчетная зависимость от времени индукции магнитного поля у поверхности Луны [5], формируемого в результате запуска лунного динамо вследствие удара о поверхность Луны космического тела

составляет порядка 10^{-2} Гс, что согласуется с палеомагнитными измерениями [51], а длительность этих полей достаточна для объяснения центральных магнитных аномалий, связанных с несколькими большими ударными бассейнами на Луне.

Ниже рассматривается влияние магнитных полей в областях магнитных аномалий на свойства плазменно-пылевой системы у Луны, а также обсуждаются свойства и проявления мини-магнитосфер.

3.1. Влияние лунных магнитных аномалий на плазменно-пылевую систему

Для анализа влияния магнитных полей в областях магнитных аномалий на эволюцию плазменно-пылевой системы важным является тот факт, что как магнитное поле, так и пылевая плазма в рассматриваемой ситуации «привязаны» к поверхности Луны. Скорость, входящая в магнитную часть силы Лоренца в этом случае, имеет порядок величины u_d , представленной на рис. 2, т.е. ~ 10 м/с в отличие от ситуации магнитного поля магнитосферы Земли, где скорость движения пылевой частицы относительно магнитного поля больше или порядка 1 км/с. Таким образом, магнитная часть силы Лоренца, действующей на пылевую частицу, для полей магнитных аномалий либо меньше, либо сопоставима с аналогичной силой, вычисленной для магнитных полей хвоста магнитосферы Земли на орбите Луны. При этом магнитные поля в областях магнитных аномалий могут приводить к изменениям траекторий пылевых частиц, отклоняя их от приведенных на рис. 2. Поскольку характерные размеры

областей магнитных аномалий составляют порядка 10 – 100 км (см., например, [5]), общая тенденция движения пылевых частиц, показанная на рис. 2, сохраняется. То есть из-за того, что области магнитных аномалий существенным образом локализованы, их влияние на перенос заряженных пылевых частиц над Луной не приводит к новым качественным эффектам.

Однако возможно существенное влияние лунных магнитных аномалий на параметры пылевой плазмы над теми или иными участками территории спутника Земли. Действительно, удастся выделить следующие области значений магнитного поля у поверхности Луны.

1. $|\mathbf{B}| \ll 10^{-5}$ Гс. В этом случае электроны и протоны солнечного ветра достигают поверхности Луны, и присутствие магнитного поля фактически не сказывается на свойствах плазменно-пылевой системы.

2. 10^{-5} Гс $\ll |\mathbf{B}| \ll 5 \cdot 10^{-3}$ Гс. В этом случае электроны солнечного ветра не достигают поверхности Луны, тогда как большинство протонов солнечного ветра ее достигают. Именно эта область магнитных полей соответствует большинству зон лунных магнитных аномалий.

3. $|\mathbf{B}| \gg 5 \cdot 10^{-3}$ Гс. В этом случае как электроны, так и ионы солнечного ветра не могут достигнуть поверхности Луны.

Соответственно, можно рассчитать параметры плазменно-пылевой системы над лунной поверхностью для каждой из этих областей значений магнитного поля.

Как уже отмечалось выше, для Луны можно предполагать, что для пылевой частицы существует баланс между электростатической и гравитационной силами, т.е. частица левитирует на определенной высоте. Тогда для описания поведения левитирующих пылевых частиц в случае $|\mathbf{B}| \ll 10^{-5}$ Гс и определения их распределений по высотам вместо системы дифференциальных уравнений (1) и (2) следует решить систему следующих алгебраических уравнений:

$$q_d \mathbf{E} + m_d \mathbf{g}_0 = 0, \quad (14)$$

$$I_e(q_d) + I_i(q_d) - I_{ph}(q_d) + I_{e,ph}(q_d) = 0. \quad (15)$$

На рис. 7 представлены зависимости размера a , зарядового числа Z_d пылевых частиц и их концентраций N_d в равновесном вертикальном положении, характеризуемом высотой h , от этой высоты для различных значений угла θ . Размеры пылевых частиц (от 0.068 до 0.105 мкм), приведенные на рис. 7, соответствуют ситуации, когда пылевые частицы

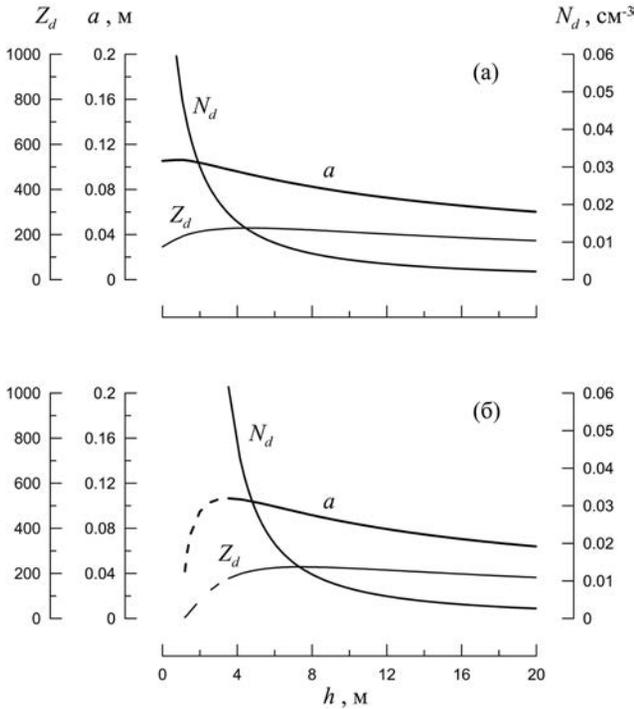


Рис. 7. Зависимости радиуса a , зарядового числа Z_d пылевых частиц и их концентраций N_d от высоты h в равновесном вертикальном положении над поверхностью Луны для значений $\theta = 87^\circ$ (а), 0° (б) в случае $|\mathbf{B}| \ll 10^{-5}$ Гс. Сплошные линии соответствуют устойчивому равновесию, штриховые — неустойчивому

можно считать левитирующими. На рис. 7 выделены ситуации неустойчивого и устойчивого равновесий. Любое малое смещение (в вертикальном направлении) пылевой частицы из состояния неустойчивого равновесия приводит к падению частицы, что обусловлено доминированием силы гравитационного притяжения над электростатической силой после того, как частицу вывели из состояния неустойчивого равновесия. Если же пылевую частицу сместить из положения устойчивого равновесия, то она будет стремиться вернуться в это положение.

Для описания случая 10^{-5} Гс $\ll |\mathbf{B}| \ll 5 \cdot 10^{-3}$ Гс справедлива следующая система алгебраических уравнений:

$$q_d \mathbf{E} + m_d \mathbf{g}_0 = 0, \quad (16)$$

$$I_i(q_d) - I_{ph}(q_d) + I_{e,ph}(q_d) = 0. \quad (17)$$

Решая ее, находим зависимости размера и зарядового числа пылевых частиц, а также их концентраций в равновесном вертикальном положении от высоты для различных значений угла θ . Соответствующие зависимости приведены на рис. 8.

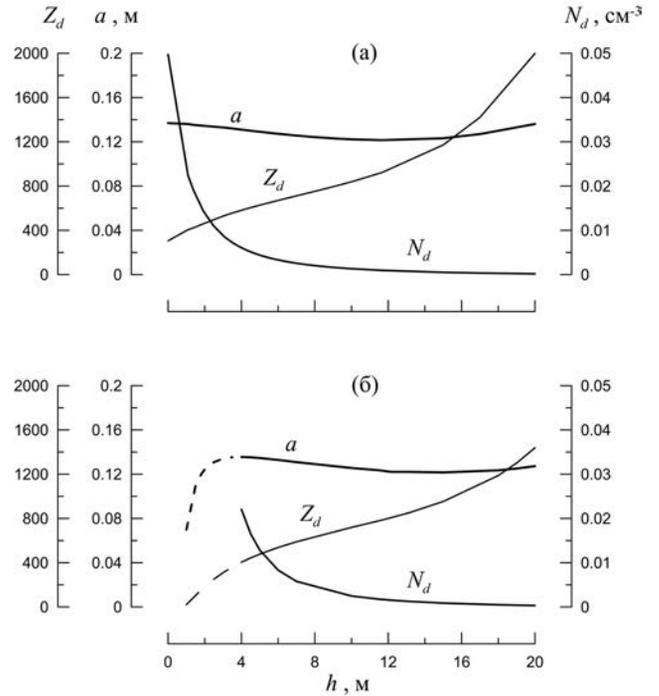


Рис. 8. Зависимости радиуса a , зарядового числа Z_d пылевых частиц и их концентраций N_d от высоты h в равновесном вертикальном положении над поверхностью Луны для значений $\theta = 87^\circ$ (а), 0° (б) в случае 10^{-5} Гс $\ll |\mathbf{B}| \ll 5 \cdot 10^{-3}$ Гс. Сплошные линии соответствуют устойчивому равновесию, штриховые — неустойчивому

Случай $|\mathbf{B}| \gg 5 \cdot 10^{-3}$ Гс описывается с помощью следующей системы алгебраических уравнений:

$$q_d \mathbf{E} + m_d \mathbf{g}_0 = 0, \quad (18)$$

$$-I_{ph}(q_d) + I_{e,ph}(q_d) = 0. \quad (19)$$

Ее решения приведены на рис. 9.

Сравнение результатов, представленных на рис. 7–9, показывает, что в случае 10^{-5} Гс $\ll |\mathbf{B}| \ll 5 \cdot 10^{-3}$ Гс концентрации пылевых частиц минимальны (по сравнению с другими случаями), хотя и поднимаются над лунной поверхностью более крупные частицы. Как уже отмечалось, данный случай соответствует большинству зон лунных магнитных аномалий. Таким образом, в зонах магнитных аномалий пылевая плазма «подавлена» по сравнению с ситуацией вне этих зон.

3.2. Мини-магнитосферы

«Лунные завитки» («lunar swirls») — это оптически различные достаточно светлые (часто трактуемые как белые) элементы поверхности Луны, отличающиеся деталями своей структуры от кратеров

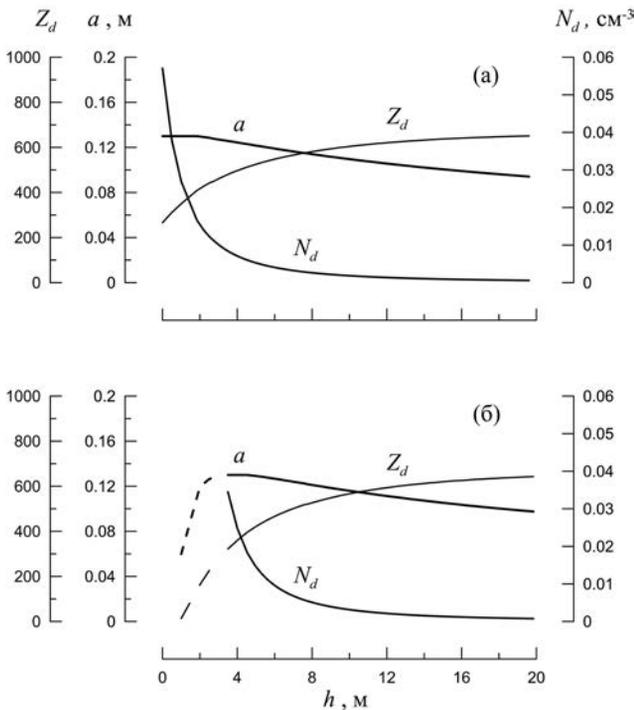


Рис. 9. Зависимости радиуса a , зарядового числа Z_d пылевых частиц и их концентраций N_d от высоты h в равновесном вертикальном положении над поверхностью Луны для значений $\theta = 87^\circ$ (а), 0° (б) в случае $|\mathbf{B}| \gg 5 \cdot 10^{-3}$ Гс. Сплошные линии соответствуют устойчивому равновесию, штриховые — неустойчивому

и ударных выбросов (см. рис. 10). Они встречаются в нескольких местах на поверхности Луны [53]. Установлено, что их форма не связана с топографическими особенностями и, по-видимому, накладывается как на гористую местность, так и на плато [54–56]. Хотя не все зоны магнитных аномалий имеют идентифицируемые «лунные завитки», не было обнаружено никаких «лунных завитков», которые не совпадали бы с зонами лунных магнитных аномалий аналогичного размера [56, 57].

Бомбардировка протонами солнечного ветра со временем приводит к покраснению (потемнению) лунного реголита [59]. Уменьшение потока протонов в течение длительного времени приводит к «более светлому» цвету поверхности Луны, тогда как дополнительное усиление потока протонов приводит к еще более «темному» виду. Взаимодействие между этими двумя факторами приводит к образованию «белых полос», перемежающихся узкими «темными полосами» [56, 57] в «лунных завитках» и их окрестностях.

Данные спектроскопические особенности позволили трактовать «лунные завитки» как диаг-

ностическое наблюдение, непосредственно связанное с взаимодействием солнечного ветра и мини-магнитосфер над зонами лунных магнитных аномалий [33]. Такое взаимодействие приводит к отклонению протонов солнечного ветра от зоны «лунного завитка» [57]. В итоге протоны оказываются на лунной поверхности вне зоны «лунного завитка». Дополнительная концентрация протонов на узких «темных полосах» [56] значительно усиливает эффекты спектрального затемнения, обусловленного космическим выветриванием, по сравнению с обычной лунной поверхностью.

Мини-магнитосферы в областях лунных магнитных аномалий обладают особенностями, характерными для обычных планетных магнитосфер, а именно бесстолкновительной головной ударной волной. Оказывается, что электрические поля, связанные с бесстолкновительной ударной волной, ограничивающей мини-магнитосферы, приводят к отклонению протонов набегающего солнечного ветра от их первоначального направления распространения [34]. Эти ионы, ударяясь о лунную поверхность, приводят к изменению внешнего вида альbedo лунного грунта [57]. Таким образом, форма вихревых узоров в «лунных завитках» и их окрестностях определяется формой бесстолкновительной ударной волны.

Такого рода бесстолкновительные ударные волны имеют характерную структуру, при которой ионы отражаются (или отклоняются) от довольно узкого слоя, порядка толщины электронного скин-слоя c/ω_{pe} , электростатическим полем, возникающим вследствие взаимодействия замагниченных электронов и незамагниченных ионов, что соответствует диапазону 10^{-5} Гс $\ll |\mathbf{B}| \ll 5 \cdot 10^{-3}$ Гс. Отметим, что поскольку не все зоны магнитных аномалий имеют идентифицируемые «лунные завитки», эффект отражения или отклонения ионов от бесстолкновительной головной ударной волны имеет место не для всех зон магнитных аномалий. В этом случае справедливо описание, приведенное в разд. 3.1. Иначе следует учитывать эффект отражения или отклонения ионов.

Поскольку аналитическое исследование мини-магнитосфер, по крайней мере, из-за их сложной геометрии затруднено, для исследования мини-магнитосфер и учета эффектов отражения или отклонения ионов от головной ударной волны проводят лабораторные эксперименты с использованием, например, плазменной аэродинамической трубы [33, 34]. При этом оказывается, что мини-магнитосферы, полученные в лабораторных условиях, имеют характеристики, аналогичные



Рис. 10. В левой части изображения пример «лунных завитков» в области лунной магнитной аномалии Рейнер Гамма (7.4 северной широты, 300.9 восточной долготы). Область Рейнер Гамма названа в честь ударного кратера «Рейнер», показанного для сравнения справа. Информация взята с портала «Научная Россия» [58]

лунным мини-магнитосферам. Удастся также выявить количественное согласие наблюдений как в космосе, так и в лаборатории.

Проводятся также численные исследования мини-магнитосфер, использующие метод частиц в ячейках OSIRIS [33]. Данный код содержит мало физических приближений и подходит для изучения сложных систем со многими степенями свободы, таких как лунные мини-магнитосферы. Не удастся использовать МГД-коды, поскольку размер структуры мини-магнитосферы намного меньше, чем позволяет МГД-код. В рамках вычислений с помощью кода OSIRIS удастся, в частности, выделить плазменные волны различных видов, наблюдаемые в областях зон магнитных аномалий, такие как вистлеры и нижнегибридные волны [60–62]. Трехмерные вычисления [33] показали, в частности, каким образом в головной ударной волне формируются электростатические поля различной ориентации, в результате чего образуется защитный «купол», который рассеивает входящие протоны, тем самым уменьшая поток протонов, достигающих лунной поверхности. Данные вычисления проиллюстрировали также возможность формирования направлений распространения рассеянных протонов, в которых их концентрация увеличивается, и, соответственно, при взаимодействии с лунной поверхностью этих протонов создаются «темные полосы» в областях «лунных завитков». Таким образом, данные численного моделирования

подтверждают гипотезу о том, что наблюдаемые спектральные эффекты, характеризующие «лунные завитки», обусловлены дифференциацией направлений распространения протонов солнечного ветра при их взаимодействии с мини-магнитосферами. Следствием данного рассмотрения является, например, тот факт, что для различных «лунных завитков» ширина «темных полос» должна быть примерно одинакова.

Электростатический потенциал φ , ответственный за замедление и отклонение протонов от первоначального направления распространения, равен [34]

$$\varphi = -\frac{B^2}{8\pi n e}. \quad (20)$$

При концентрации частиц в солнечном ветре $n \approx 5 \text{ см}^{-3}$ и магнитном поле в зоне лунной магнитной аномалии $B \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ Гс}$, соответствующих данным измерений Lunar Prospector [63], теоретическое значение φ составляет $\sim 450 \text{ В}$ [34], что находится в соответствии с данными наблюдений $\sim 400 \text{ В}$ [64].

Потоки протонов, формирующиеся в результате отражения (или отклонения) от бесстолкновительной головной ударной волны, приводят к развитию модифицированной двухпоточковой неустойчивости и генерации нижнегибридных волн [65] на частотах, близких к частоте $\sqrt{\omega_{Be}\omega_{Bi}}$, где ω_{Bi} — гирочастота ионов. Сравнение этой частоты и частот 1–10 Гц, на которых наблюдались интенсивные

электростатические колебания космическим аппаратом Nozomi [62], указывает на хорошее соответствие между теорией и экспериментом [33]. Кроме того [33], нижнегибридные волны, генерируемые модифицированной двухпотоковой неустойчивостью, ответственны за ускорение электронов, которое также наблюдалось в спутниковых измерениях. Следует отметить большую эффективность нижнегибридных волн как механизма ускорения электронов. Именно с учетом этого механизма ускорения удается получить значение толщины слоя бесстолкновительной ударной волны, от которого отражаются (или отклоняются) ионы [34]. Оказывается, что толщина этого слоя имеет порядок глубины электронного скин-слоя, составляющей от 1 до 2 км, а не сотен километров, соответствующих толщине ионного скин-слоя [66].

Таким образом, имеются существенные основания считать мини-магнитосферы важным фактором, связанным с зонами лунных магнитных аномалий и ответственным за ряд оптических наблюдений Луны, таких как «лунные завитки», а также спутниковых измерений плазменных эффектов, например, нижнегибридной турбулентности. Повидимому, мини-магнитосферы не всегда влияют существенно образом на распространение ионов солнечного ветра. Иначе такой эффект, как «лунные завитки», наблюдался бы в окрестностях всех зон лунных магнитных аномалий.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, благодаря действию магнитных полей в хвосте магнитосферы Земли возможен перенос частиц заряженной пыли над лунной поверхностью на большие расстояния. Соответственно, пылевая плазма над освещенной Солнцем поверхностью Луны может существовать для всего диапазона лунных широт. Магнитная часть силы Лоренца, действующей на пылевую частицу, для полей магнитных аномалий либо меньше, либо сопоставима с аналогичной силой, вычисленной для магнитных полей хвоста магнитосферы Земли на орбите Луны. Однако из-за существенной локализации областей магнитных аномалий их влияние на перенос заряженных пылевых частиц над Луной несущественно. Тем не менее в зонах магнитных аномалий пылевая плазма «подавлена» по сравнению с ситуацией вне этих зон. Важным объектом исследования являются мини-магнитосферы, связанные с зонами лунных магнитных аномалий и ответственные за ряд оптических и спутниковых наблюдений, таких как «лунные завитки», нижнегибридная турбулентность и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. W. Hones, Jr., *Aust. J. Phys.* **38**, 981 (1985).
2. Y. Harada, *Interactions of Earth's Magnetotail Plasma with the Surface, Plasma, and Magnetic Anomalies of the Moon*, Springer, Japan (2015).
3. P. Dyal, C. W. Parkin, and W. D. Daily, *Rev. Geophys.* **12**, 568 (1974).
4. P. J. Coleman, Jr., G. Schubert, C. T. Russell, and L. R. Sharp, *Moon* **4**, 419 (1972).
5. M. Le Bars, M. A. Wicczorek, Ö. Karatekin, D. Cébron, and M. Laneville, *Nature* **479**, 215 (2011).
6. M. A. Wicczorek, B. P. Weiss, and S. T. Stewart, *Science* **335**, 1212 (2012).
7. M. A. Wicczorek, *J. Geophys. Res.: Planets* **123**, 291 (2018).
8. E. F. Lyon, H. S. Bridge, and J. H. Binsack, *J. Geophys. Res.* **72**, 6113 (1967).
9. L. Hood and N. Artemieva, *Icarus* **193**, 485 (2008).
10. M. A. Wicczorek and M. Lefevre, *Icarus* **200**, 358 (2009).
11. T. J. Stubbs, R. R. Vondrak, and W. M. Farrell, *Adv. Space Res.* **37**, 59 (2006).
12. S. I. Popel, L. M. Zelenyi, A. P. Golub', and A. Yu. Dubinskii, *Planet. Space Sci.* **156**, 71 (2018).
13. J. E. Colwell, S. Batiste, M. Horányi, S. Robertson, and S. Sture, *Rev. Geophys.* **45**, RG2006 (2007).
14. С. И. Попель, С. И. Копнин, А. П. Голубь, Г. Г. Дольников, А. В. Захаров, Л. М. Зеленый, Ю. Н. Извекова, *Астрон. вестн.* **47**, 455 (2013).
15. S. I. Popel, G. E. Morfill, P. K. Shukla, and H. Thomas, *J. Plasma Phys.* **79**, 1071 (2013).
16. S. I. Popel, L. M. Zelenyi, and B. Atamaniuk, *Phys. Plasmas* **22**, 123701 (2015).
17. Т. И. Морозова, С. И. Копнин, С. И. Попель, *Физика плазмы* **41**, 867 (2015).
18. С. И. Попель, Т. И. Морозова, *Физика плазмы* **43**, 474 (2017).
19. Yu. N. Izvekova, T. I. Morozova, and S. I. Popel, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **46**, 731 (2018).
20. S. I. Popel, A. I. Kassem, Yu. N. Izvekova, and L. M. Zelenyi, *Phys. Lett. A* **384**, 126627 (2020).

21. С. И. Попель, А. П. Голубь, Е. А. Лисин, Ю. Н. Извекова, Б. Атаманюк, Г. Г. Дольников, А. В. Захаров, Л. М. Зеленый, Письма в ЖЭТФ **103**, 641 (2016).
22. С. И. Попель, А. П. Голубь, Л. М. Зеленый, М. Хораньи, Письма в ЖЭТФ **105**, 594 (2017).
23. А. П. Голубь, С. И. Попель, Астрон. вестн. **55**, 393 (2021).
24. E. Walbridge, J. Geophys. Res. **78**, 3668 (1973).
25. M. Horányi, Z. Sternovsky, M. Lankton, C. Dumont, S. Gagnard, D. Gathright, E. Grün, D. Hansen, D. James, S. Kempf, B. Lamprecht, R. Srama, J. R. Szalay, and G. Wright, Space Sci. Rev. **185**, 93 (2014).
26. D. Li, Y. Wang, H. Zhang, X. Wang, Y. Wang, Z. Sun, J. Zhuang, C. Li, L. Chen, H. Zhang, X. Zou, C. Zong, H. Lin, J. Ma, X. Li, X. Cui, R. Yao, X. Wang, X. Gao, Sh. Yang, X. Wang, and B. Zhang, Geophys. Res. Lett. **47**, e2020GL089433 (2020).
27. Л. М. Зеленый, С. И. Попель, А. В. Захаров, Физика плазмы **46**, 441 (2020).
28. А. В. Захаров, Л. М. Зеленый, С. И. Попель, Астрон. вестн. **54**, 483 (2020).
29. R. Bamford, K. J. Gibson, A. J. Thornton, J. Bradford, R. Bingham, L. Gargate, L. O. Silva, R. A. Fonseca, M. Hargood, C. Norberg, T. Todd, and R. Stamper, Plasma Phys. Control. Fusion **50**, 124025 (2008).
30. L. Gargaté, R. Bingham, R. A. Fonseca, R. Bamford, A. Thornton, K. Gibson, J. Bradford, and L. O. Silva, Plasma Phys. Control. Fusion **50**, 074017 (2008).
31. A. R. Poppe, J. S. Halekas, G. T. Delory, and W. M. Farrell, J. Geophys. Res. **117**, A09105 (2012).
32. J. Deca, A. Divin, G. Lapenta, B. Lembège, S. Markidis, and M. Horányi, Phys. Rev. Lett. **112**, 151102 (2014).
33. R. A. Bamford, E. P. Alves, F. Cruz, B. J. Kellett, R. A. Fonseca, L. O. Silva, R. M. G. M. Trines, J. S. Halekas, G. Kramer, E. Harnett, R. A. Cairns, and R. Bingham, Astrophys. J. **830**, 146 (2016).
34. R. A. Bamford, B. Kellett, W. J. Bradford, C. Norberg, A. Thornton, K. J. Gibson, I. A. Crawford, L. Silva, L. Gargaté, and R. Bingham, Phys. Rev. Lett. **109**, 081101 (2012).
35. L. L. Hood and G. Schubert, Science **208**, 49 (1980).
36. S. I. Popel, A. P. Golub', A. I. Kassem, and L. M. Zelenyi, Phys. Plasmas **29**, 013701 (2022).
37. R. J. L. Grard and J. K. E. Tunaley, J. Geophys. Res. **76**, 2498 (1971).
38. Е. К. Колесников, А. С. Мануйлов, Астрон. ж. **59**, 996 (1982).
39. Е. К. Колесников, А. Б. Яковлев, Астрон. вестн. **31**, 70 (1997).
40. С. И. Попель, А. П. Голубь, Письма в ЖЭТФ **115**, 629 (2022).
41. R. F. Willis, M. Anderegg, B. Feuerbacher, and B. Fitton, in *Photon and Particle Interactions with Surfaces in Space*, ed. by R. J. L. Grard and D. Reidel, Dordrecht (1973), p. 389.
42. Y. Asano, I. Shinohara, A. Retinò, P. W. Daly, E. A. Kronberg, T. Takada, R. Nakamura, Y. V. Khotyaintsev, A. Vaivads, T. Nagai, W. Baumjohann, A. N. Fazakerley, C. J. Owen, Y. Miyashita, E. A. Lucek, and H. Rème, J. Geophys. Res. **115**, 05215 (2010).
43. O. Buneman, Phys. Rev. **115**, 603 (1959).
44. S. I. Popel, S. V. Vladimirov, and V. N. Tsytovich, Phys. Rep. **259**, 327 (1995).
45. С. И. Попель, А. П. Голубь, Ю. Н. Извекова, В. В. Афонин, Г. Г. Дольников, А. В. Захаров, Л. М. Зеленый, Е. А. Лисин, О. Ф. Петров, Письма в ЖЭТФ **99**, 131 (2014).
46. J. Vaverka, I. Richterová, J. Pavlů, J. Šafránková, and Z. Němeček, Astrophys. J. **825**, 133 (2016).
47. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, *Вопросы теории плазмы*, вып. 7, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1973), с. 3.
48. S. V. Vladimirov, V. N. Tsytovich, S. I. Popel, and F. Kh. Khakimov, *Modulational Interactions in Plasmas*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London (1995).
49. L. L. Hood, A. Zakharian, J. Halekas, D. L. Mitchell, R. P. Lin, M. H. Acuna, and A. B. Binder, J. Geophys. Res. **106**, 27825 (2001).
50. H. Tsunakawa, H. Shibuya, F. Takahashi, H. Shimizu, M. Matsushima, A. Matsuoka, S. Nakazawa, H. Otake, and Y. Iijima, Space Sci. Rev. **154**, 219 (2010).
51. I. Garrick-Bethell, B. P. Weiss, D. L. Shuster, and J. Buz, Science **323**, 356 (2009).
52. S. Gong and M. A. Wicczorek, J. Geophys. Res.: Planets **125**, e2019JE006274 (2020).

53. F. El-Baz, Apollo 16: Preliminary Science Report, NASA Spec. Publ. SP **315**, 29 (1972).
54. J. F. Bell and B. R. Hawke, Publ. Astron. Soc. Pacific **99**, 862 (1987).
55. P. C. Pinet, V. V. Shevchenko, S. D. Chevrel, Y. Daydou, and C. Rosemberg, J. Geophys. Res.: Planets **105**, 9457 (2000).
56. D. Blewett, B. Hawke, N. Richmond, and C. Hughes, Geophys. Res. Lett. **34**, L24206 (2007).
57. G. Y. Kramer, S. Besse, D. Dhingra, J. Nettles, R. Klima, I. Garrick-Bethell, R. N. Clark, J.-P. Combe, J. W. Head III, L. A. Taylor, C. M. Pieters, B. Boardman, and T. B. McCord, J. Geophys. Res. **116**, E00G18 (2011).
58. <https://scientificrussia.ru/articles/obnaruzheny-lunnye-kamni-s-unikalnoj-pylu>
59. C. Pieters, E. Fischer, O. Rode, and A. Basu, J. Geophys. Res.: Planets **98**, 20817 (1993).
60. J. Halekas, D. Brain, D. Mitchell, and R. Lin, Geophys. Res. Lett. **33**, 22 (2006).
61. T. Nakagawa, F. Takahashi, H. Tsunakawa, H. Shibuya, H. Shimizu, and M. Matsushima, Earth, Planets and Space **63**, 37 (2011).
62. Y. Futaana, S. Machida, Y. Saito, A. Matsuoka, and H. Hayakawa, J. Geophys. Res. **108**, 1025 (2003).
63. R. P. Lin, D. L. Mitchell, D. W. Curtis, K. A. Anderson, C. W. Carlson, J. McFadden, M. H. Acuna, L. L. Hood, and A. Binder, Science **281**, 1480 (1998).
64. Y. Futaana, S. Barabash, M. Wieser, M. Holmström, A. Bhardwaj, M. B. Dhanya, R. Sridharan, P. Wurz, A. Schaufelberger, and K. Asamura, J. Geophys. Res.: Space Phys. **115**, A10248 (2010).
65. R. Bingham, R. Bamford, B. J. Kellett, and V. D. Shapiro, J. Plasma Phys. **76**, 915 (2010).
66. A. D. R. Phelps, Planet. Space Sci. **21**, 1497 (1973).

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В ЖЭТФ публикуются статьи, содержащие изложение оригинальных научных результатов, не опубликованных и не предназначенных к публикации в другом месте. В отдельных случаях по заказу редколлегии публикуются актуальные статьи обзорного характера.

Редакция ЖЭТФ принимает статьи на русском и на английском языках.

Редакция рекомендует направлять статьи в электронном виде по электронной почте или загружать их в режиме «on-line» через сайт журнала <http://jetp.ras.ru/>

Издательство требует от авторов при публикации статьи заключения договора о передаче авторских прав. Заполненные и подписанные договоры (форма договоров отправляется авторам **ВМЕСТЕ С КОРРЕКТУРОЙ**) могут быть представлены лично или по электронной почте в отсканированном виде (PDF файлы).

По всем вопросам можно обращаться в редакцию.

Адрес: 117334, Москва, ул. Косыгина, д. 2, Редакция ЖЭТФ

E-mail: jetp@kapitza.ras.ru Телефон: +7 (499) 137 56 22

Главный редактор *А. И. СМЕРНОВ*

Редколлегия:

д-р физ.-мат. наук С. О. АЛЕКСЕЕВ, канд. физ.-мат. наук Ю. С. БАРАШ,
д-р физ.-мат. наук И. Г. ЗУБАРЕВ,
д-р физ.-мат. наук Е. И. КАЦ (зам. гл. редактора, представительство ЖЭТФ во Франции),
д-р физ.-мат. наук В. П. КРАЙНОВ, д-р физ.-мат. наук А. С. МЕЛЬНИКОВ
д-р физ.-мат. наук М. С. ПШИРКОВ акад. М. В. САДОВСКИЙ,
канд. физ.-мат. наук С. С. СОСИН, член-корр. РАН С. В. ТРОИЦКИЙ (зам. гл. редактора),
д-р физ.-мат. наук А. В. ФИЛИППОВ, член-корр. РАН И. А. ФОМИН (зам. гл. редактора),

Редакционный совет:

член-корр. РАН В. В. ЛЕБЕДЕВ, д-р физ.-мат. наук В. С. ПОПОВ

Зав. редакцией Н. Г. Церевитинова
Редакторы: Л. Б. Кульчицкая, Т. Г. Орехова, Т. Н. Смирнова