

# ОСОБЕННОСТИ $\tau$ -ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ХАОТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ФЕРМИ

А. Я. Мальцев\*

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 23 марта 2024 г.,  
после переработки 19 апреля 2024 г.  
Принята к публикации 20 апреля 2024 г.

Рассматривается особое поведение магнитопроводимости металлов, возникающее при появлении хаотических электронных траекторий на поверхности Ферми. Такое поведение обусловлено рассеянием электронов на особых точках динамической системы, описывающей динамику электронов в  $\mathbf{p}$ -пространстве, и вызываемым малоугловым рассеянием электронов на фононах. В этой ситуации система описывается «нестандартным» временем релаксации, которое и играет основную роль в определенном интервале значений температуры и магнитного поля.

DOI: 10.31857/S0044451024090116

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы будем рассматривать гальваномагнитные явления в чистых металлах в пределе сильных магнитных полей. Данный предел можно определить как условие значительного изменения электронных состояний под влиянием поля на временах порядка времени свободного пробега электрона в кристалле, которое предполагается достаточно большим. Как было установлено в 1950–1960-ых гг. (в школе И. М. Лифшица), ключевую роль в описании гальваномагнитных явлений в этом пределе играет геометрия квазиклассических электронных траекторий в присутствии магнитного поля, определяемых системой

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\text{gr}}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] = \frac{e}{c} [\nabla\epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] \quad (1)$$

(см. [1–4]).

Как хорошо известно, величина  $\mathbf{p}$  в системе (1) представляет собой квазиимпульс частицы, определенный с точностью до векторов обратной решетки  $L^*$ . Система (1) может при этом рассматриваться и как система в трехмерном торе  $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/L^*$  и как система в полном  $\mathbf{p}$ -пространстве  $\mathbb{R}^3$ . В последнем

случае, однако, необходимо помнить, что значения  $\mathbf{p}$ , различающиеся на векторы обратной решетки, определяют одно и то же квантовое состояние. Дисперсионное соотношение  $\epsilon(\mathbf{p})$  может рассматриваться также либо как гладкая функция на торе  $\mathbb{T}^3$ , либо как 3-периодическая функция в  $\mathbb{R}^3$ . В то же самое время движение частицы в  $\mathbf{x}$ -пространстве задается соотношением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_{\text{gr}}(\mathbf{p}) = \nabla\epsilon(\mathbf{p}).$$

С точки зрения системы (1) условие сильных магнитных полей может определяться требованием, чтобы электрон успевал пробегать значительную дистанцию ( $\gg p_F$ ) вдоль траекторий системы между двумя последовательными актами рассеяния. Именно в этом пределе большинство эффектов будут определяться геометрией траекторий системы (1), а сам предел можно назвать геометрическим пределом.

Формально, рассматриваемый предел может быть записан как условие  $\omega_B\tau \gg 1$ , где  $\omega_B$  играет роль электронной циклотронной частоты в металле, а  $\tau$  представляет время свободного пробега электронов.

Траектории системы (1) в полном  $\mathbf{p}$ -пространстве задаются пересечениями плоскостей, ортогональных магнитному полю и периодических поверхностей  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$  (рис. 1). Как также хорошо известно (см., например, [1–6]), основную

\* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

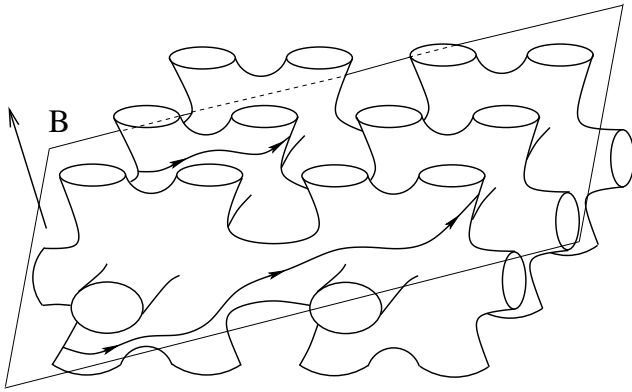


Рис. 1. Траектории системы (1) на периодической поверхности Ферми достаточно сложной формы

роль в физических эффектах играют при этом траектории, лежащие вблизи поверхности Ферми  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F$ .

При описании гальваномагнитных явлений (а также и других транспортных электронных явлений) наибольшее различие наблюдается между замкнутыми и открытыми (незамкнутыми) траекториями (1), дающими существенно различные вклады в транспортные явления в пределе  $B \rightarrow \infty$ . Например, можно видеть огромную разницу во вкладах замкнутых и открытых периодических траекторий в тензор проводимости в этом пределе ([1]):

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} & * \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$\omega_B\tau \rightarrow \infty$  (замкнутые траектории),

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$\omega_B\tau \rightarrow \infty$  (открытые периодические траектории).

В формулах (2), (3) величина  $n$  имеет порядок концентрации носителей заряда, а  $m^*$  представляет эффективную электронную массу в кристалле. В обоих случаях направление оси  $z$  совпадает с направлением магнитного поля, кроме того, во втором случае направление оси  $x$  выбрано вдоль среднего направления периодических открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Можно видеть, что главное отличие режима (3) заключается в сильной анизотропии проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , что, очевидно, отвечает специфике геометрии периодических открытых траекторий. Формулы (2), (3) определяют при этом асимптотическое поведение

компонент тензора проводимости, в частности, все приведенные компоненты содержат, вообще говоря, еще дополнительные постоянные множители порядка 1. Для величины  $\omega_B$  можно при этом использовать приближенное соотношение  $\omega_B \simeq eB/m^*c$ . В целом, приведенные выше режимы наблюдаются в достаточно чистых монокристаллах при довольно низких температурах и достаточно больших значениях  $B$ . Оба режима (2), (3) играют при этом важную роль и в более общем случае при появлении траекторий различной формы на поверхности Ферми.

Вместе с тем, как было установлено позднее, режимы (2), (3) не являются единственно возможными, и другие типы открытых траекторий системы (1) могут давать существенно отличающиеся вклады в магнитотранспортные явления в пределе  $B \rightarrow \infty$ .

Проблема классификации возможных типов траекторий системы (1) с произвольным дисперсионным соотношением была поставлена Новиковым в работе [7]. Эта проблема затем интенсивно исследовалась в его топологической школе (см. [8–15]) и на настоящий момент может считаться решенной в своей главной постановке. В частности, в результате исследований задачи Новикова были описаны все возможные классы открытых траекторий системы (1), которые можно разделить на топологически регулярные (устойчивые и неустойчивые) и хаотические (типа Царева и типа Дынникова). На основании математических результатов стало также возможным введение новых топологических величин, наблюдаемых в проводимости нормальных металлов (см. [16–19]), а также описание новых режимов поведения тензора проводимости в сильных магнитных полях, неизвестных до этого ([20, 21]).

Как можно видеть, например из формул (2), (3), вклад как замкнутых, так и периодических открытых траекторий в тензор проводимости содержит параметр  $\tau$ , играющий роль общего времени релаксации для кинетического уравнения. Данный факт имеет место и в более общих случаях, и, как мы уже сказали, геометрический предел в магнитотранспортных явлениях отвечает большим временам релаксации и быстрой динамике электронных состояний в магнитном поле. Для вычисления главных показателей в асимптотиках тензора проводимости при этом удобно использовать  $\tau$ -приближение в кинетическом уравнении, дающее правильные законы убывания компонент  $\sigma^{kl}(B)$  при  $B \rightarrow \infty$ .

При наиболее низких температурах время  $\tau$  определяется, главным образом, временем рассеяния электронов на примесях  $\tau_{imp}$ . Интенсивность

электрон-электронного и электрон-фононного рассеяния при этом повышается с ростом температуры, и при более высоких  $T$  эти процессы становятся основными. При вычислении проводимости процессы электрон-фононного рассеяния при этом проявляются позже всего, что вызвано малым импульсом фононов при низких  $T$  и, как следствие, большими временами импульсной релаксации в этих процессах. Как мы увидим ниже, в наиболее сложных (с эргодической точки зрения) случаях приведенная картина может существенно изменяться. Причиной этого является именно электрон-фононное рассеяние на малые углы, сильно меняющее ситуацию в присутствии траекторий со сложным эргодическим поведением. Как следствие этого, роль электрон-фононных столкновений начинает проявляться значительно раньше, а наиболее естественным в этом случае является, в действительности, введение некоторого эффективного значения  $\tau_0(B, T)$ , определяемого не только процессами рассеяния, но и особенностями эргодического поведения таких траекторий.

Нам здесь будут интересны наиболее сложные траектории системы (1), а именно хаотические траектории (Дынникова), которые могут возникать лишь на поверхностях Ферми достаточно сложной формы. Эргодическое поведение траекторий Дынникова является наиболее сложным (как в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , так и на поверхности Ферми  $S_F$ ) и, как мы поясним ниже, имеет важные отличия от поведения траекторий остальных типов. В частности, асимптотическое поведение проводимости при наличии траекторий такого типа на поверхности Ферми существенно отличается от режимов (2) и (3) (см. [20, 21]).

В следующем разделе мы дадим краткое описание общих свойств хаотических траекторий Дынникова, а также соответствующих им особенностей тензора проводимости, необходимое нам для дальнейшего рассмотрения. В разд. 3 мы рассмотрим указанные выше особенности поведения времени релаксации в сильных магнитных полях, свойственные, в действительности, лишь траекториям этого типа.

## 2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

Хаотические траектории системы (1) могут возникать лишь на достаточно сложных поверхностях Ферми (см., например, рис. 1) при специально подобранных направлениях  $\mathbf{V}$ . В частности, ранг поверх-

ности Ферми должен быть равен 3, т. е. поверхность должна простирается в трех независимых направлениях в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

Поведение траекторий системы (1) на сложных поверхностях Ферми, как правило, довольно сложно зависит от направления магнитного поля. Для их описания при этом удобно использовать угловую диаграмму, указывающую тип траекторий (1) для каждого из направлений  $\mathbf{V}$  (т. е. для каждой точки на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$ ).

Почти для каждого направления  $\mathbf{V}$  на поверхности Ферми обычно присутствуют замкнутые траектории системы (1). При этом можно отдельно выделить направления  $\mathbf{V}$ , при которых на поверхности Ферми присутствуют только замкнутые траектории (1). Соответствующие направления  $\mathbf{V}$  образуют открытые области на единичной сфере, объединение которых покрывает обычно большую часть ее площади. Каждую из таких областей при этом можно отнести к «электронному» либо «дырочному» типу, в зависимости от того, имеет ли холловская проводимость электронный или дырочный тип для соответствующих направлений  $\mathbf{V}$ .

Угловые диаграммы общего положения можно разделить на два основных типа, а именно, диаграммы, на которых описанные выше области отвечают одному и тому же типу (электронному либо дырочному) и диаграммы, на которых присутствуют области обоих типов. Диаграммы первого типа мы будем называть диаграммами типа А, а диаграммы второго типа — диаграммами типа В.

Кроме областей, отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий, угловая диаграмма содержит направления  $\mathbf{V}$ , отвечающие появлению открытых траекторий различных типов (периодических, топологически регулярных, хаотических типа Царева, хаотических типа Дынникова) на поверхности Ферми. Как можно показать, для каждого из таких направлений  $\mathbf{V}$  возникающие открытые траектории имеют один и тот же тип (см., например, [15]). Именно это обстоятельство делает особенно удобным использование угловых диаграмм при описании траекторий системы (1).

Основу структуры сложных угловых диаграмм составляют зоны устойчивости  $\Omega_\alpha \subset \mathbb{S}^2$ , отвечающие появлению топологически регулярных открытых траекторий системы (1) на поверхности Ферми. Топологически регулярные открытые траектории устойчивы ко всем малым вращениям направления  $\mathbf{V}$  (а также вариациям значения  $\epsilon_F$ ) и имеют сравнительно простой вид в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , а именно, каждая такая траектория ле-

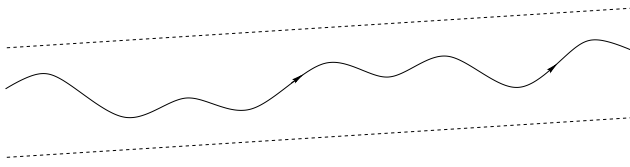


Рис. 2. Вид топологически регулярных открытых траекторий системы (1) в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{B}$

жит в некоторой прямой полосе конечной ширины, проходя ее насквозь (рис. 2).

Для вклада топологически регулярных траекторий в тензор  $\sigma^{kl}(B)$  в главном порядке можно также пользоваться формулой (3), при условии, что ось  $x$  совпадает с их средним направлением в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

Каждая зона устойчивости  $\Omega_\alpha$  представляет собой область с кусочно-гладкой границей на сфере  $S^2$  (см. [15]) и отвечает, в действительности, некоторому топологическому инварианту, наблюдаемому в проводимости в сильных магнитных полях (см. [16, 17]).

Важное отличие диаграмм типа А от диаграмм типа В состоит в том, что диаграммы типа А содержат конечное число зон устойчивости (рис. 3). Напротив, диаграммы типа В общего положения содержат бесконечное число зон  $\Omega_\alpha$  ([22, 23]). Зоны  $\Omega_\alpha$  на диаграммах типа В образуют квазиодномерные скопления на  $S^2$ , разделяющие области электронной и дырочной холловской проводимости, отвечающие наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми (рис. 3).

В скоплениях зон  $\Omega_\alpha$  при этом содержатся также бесконечные множества направлений  $\mathbf{B}$ , отвечающих появлению хаотических траекторий (1) на поверхности Ферми. Таким образом, именно диаграммы типа В отвечают поверхностям Ферми, на которых возможно появление хаотических траекторий системы (1).

Угловые диаграммы типа В отвечают общей ситуации и для дисперсионных законов  $\epsilon(\mathbf{p})$  общего положения возникают в некотором конечном интервале энергий  $\epsilon_F \in (\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$ . Вместе с тем, ширина интервала  $(\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$  может быть весьма невелика для реальных соотношений  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Как следствие этого, поиск материалов, удовлетворяющих условию  $\epsilon_F \in (\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$ , представляет, в действительности, отдельную задачу. Здесь мы отметим только, что для ряда материалов добиться появления диаграммы типа В, по-видимому, можно, прилагая внешнее воздействие на образец (см. [24]).

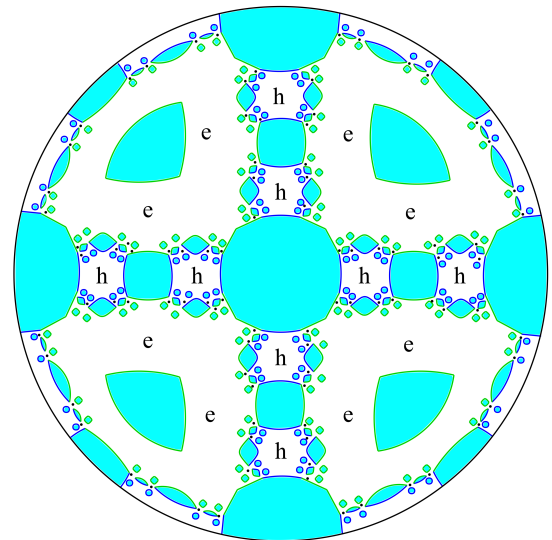
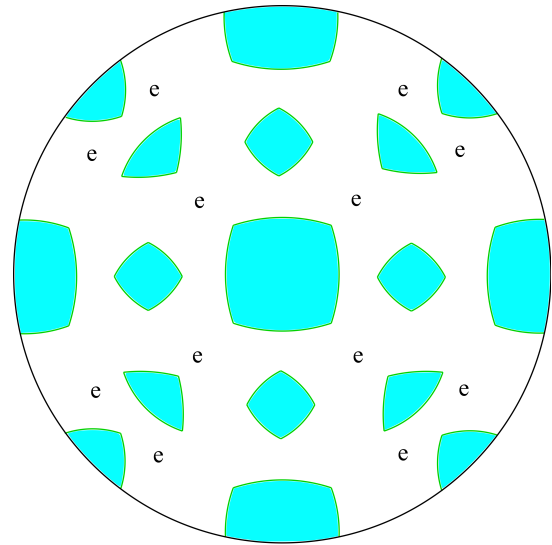


Рис. 3. Угловые диаграммы типа А (вверху) и В (внизу) (схематично). Буквами «e» и «h» отмечены множества направлений  $\mathbf{B}$ , отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми и холловской проводимости фиксированного типа (электронного и дырочного соответственно)

Как мы уже сказали, хаотические траектории системы (1) разделяются на два основных класса, а именно, траектории типа Царева и траектории типа Дынникова. Траектории типа Царева обладают более простым поведением в  $\mathbf{p}$ -пространстве и с этой точки зрения напоминают топологически регулярные открытые траектории (они имеют асимптотическое направление, однако, не могут быть заключены ни в какой прямой полосе конечной ширины в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{B}$ ). Эти траектории, од-

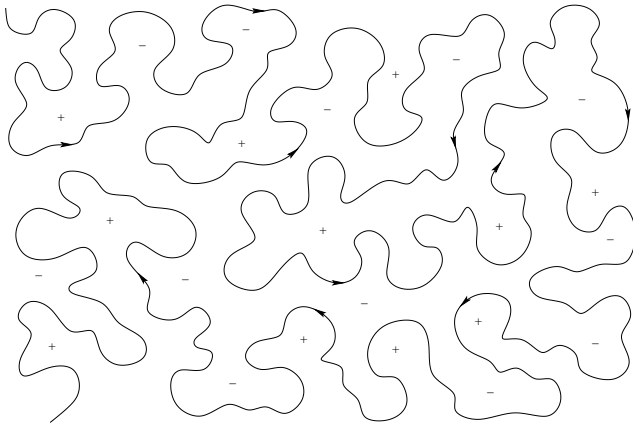


Рис. 4. Вид хаотических траекторий Дынникова в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$

нако, обладают довольно сложным поведением на компактной поверхности Ферми  $S_F \subset \mathbb{T}^3$  и по этому признаку относятся к хаотическим траекториям системы (1). Отметим здесь также, что как траектории типа Царева, так и траектории типа Дынникова являются неустойчивыми по отношению к малым вращениям направления  $\mathbf{V}$ .

Траектории типа Дынникова обладают наиболее сложным поведением, проявляя «хаотические» свойства как в полном  $\mathbf{p}$ -пространстве, так и на поверхности  $S_F \subset \mathbb{T}^3$ . В частности, таким траекториям свойственно «хаотическое» блуждание в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , с постепенным заполнением всех участков таких плоскостей (рис. 4).

При описании траекторий Дынникова на поверхности  $S_F \subset \mathbb{T}^3$  надо сразу упомянуть, что такие траектории, вообще говоря, появляются на поверхности Ферми вместе с замкнутыми траекториями системы (1). Замкнутые траектории объединены при этом в конечное число (неэквивалентных) цилиндров, ограниченных сингулярными замкнутыми траекториями (1) (рис. 5). Удаление цилиндров замкнутых траекторий дает нам новую поверхность (с краем)  $\hat{S}_F(\mathbf{V})$ , содержащую только открытые траектории системы (1).

При наличии траекторий Дынникова на поверхности  $S_F$  поверхность  $\hat{S}_F(\mathbf{V})$  остается поверхностью довольно большой сложности, в частности, ее род (определяемый после заклейки границы  $\hat{S}_F(\mathbf{V})$  плоскими дисками) всегда не менее 3. В подавляющем большинстве случаев можно считать, что  $\hat{S}_F(\mathbf{V})$  является в этой ситуации поверхностью рода 3, инвариантной относительно замены  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ , при этом каждая хаотическая траектория всюду плотно обматывает всю поверхность  $\hat{S}_F(\mathbf{V})$ . В целом, стохастические свойства траекторий Дынникова облада-

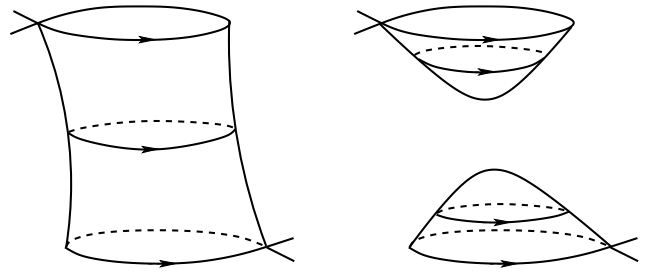


Рис. 5. Примеры цилиндров замкнутых траекторий системы (1) на поверхности Ферми

ют огромным множеством весьма интересных особенностей, которые активно изучаются и в настоящее время (см., например, [12–14, 20, 21, 25–40]).

Одним из следствий столь сложного поведения траекторий Дынникова является их нетривиальный вклад в тензор проводимости в сильных магнитных полях. В частности, этот вклад обращается в нуль в пределе  $B \rightarrow \infty$  для всех компонент  $\sigma^{kl}(B)$ , включая проводимость вдоль направления  $\mathbf{V}$  [20]. В интервале  $\omega_B \tau \gg 1$  компоненты  $\sigma^{kl}(B)$  при этом обладают «скейлинговым» поведением, отражающим скейлинговые свойства хаотических траекторий [20, 21]. Для нас здесь будет также особенно важно, что поверхности такого рода всегда содержат седловые особые точки системы (1), оказывающие важное влияние на динамику электронов в присутствии малолуглового рассеяния.

Скейлинговое поведение хаотических траекторий обладает в общем случае анизотропными свойствами и при подходящем выборе осей  $x$  и  $y$  для проводимости вдоль главных направлений можно написать

$$\Delta\sigma^{xx}(B) \simeq \frac{n\epsilon^2\tau}{m^*} (\omega_B\tau)^{2\alpha_1-2}, \quad \omega_B\tau \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$\Delta\sigma^{yy}(B) \simeq \frac{n\epsilon^2\tau}{m^*} (\omega_B\tau)^{2\alpha_2-2}, \quad \omega_B\tau \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$\Delta\sigma^{zz}(B) \simeq \frac{n\epsilon^2\tau}{m^*} (\omega_B\tau)^{2\alpha_3-2}, \quad \omega_B\tau \rightarrow \infty \quad (6)$$

( $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1$ ).

Здесь надо сразу отметить, что, в отличие от соотношений (2), (3), соотношения (4)–(6) не являются главным членом какого-либо асимптотического разложения для  $\sigma^{kl}(B)$ . Вместо этого, они задают общий «тренд» убывания компонент  $\sigma^{kl}(B)$  при  $B \rightarrow \infty$ , который может обладать также дополнительной (каскадной) структурой в интервале  $\omega_B \tau \gg 1$  (рис. 6).

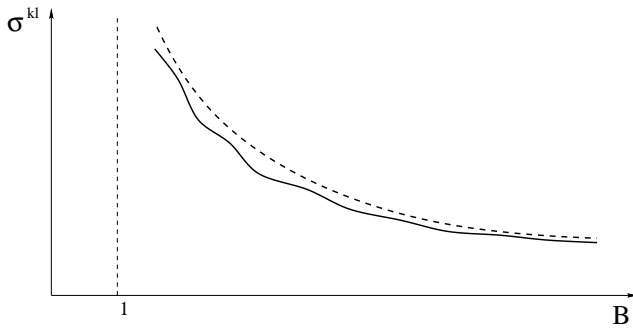


Рис. 6. Поведение компонент тензора проводимости, отвечающего вкладу хаотических траекторий системы (1) типа Дынникова

Можно также отметить, что вклад хаотических траекторий в проводимость должен в общем случае складываться со вкладом замкнутых траекторий (2), которые также, вообще говоря, могут присутствовать на поверхности Ферми. Можно видеть при этом, что вклад хаотических траекторий заметно превышает вклад замкнутых траекторий в проводимость в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , и заметно меньше их вклада в проводимость вдоль магнитного поля. С этой точки зрения, возможно, именно исследование проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , является наиболее удобным при изучении геометрии хаотических траекторий.

Как правило, при изучении геометрических свойств траекторий системы (1) исследуется зависимость  $\sigma^{kl}(B)$  от величины  $B$  при фиксированном (максимальном) значении  $\tau$ . Здесь нам будет интересна зависимость тензора проводимости от обеих величин  $B$  и  $\tau$  в интервале  $\omega_B \tau \gg 1$ .

Как можно видеть из формул (4)–(6), величины  $\sigma^{ll}(B)$  могут как убывать ( $\alpha_l < 1/2$ ), так и возрастать ( $\alpha_l > 1/2$ ) при увеличении  $\tau$ . Это обстоятельство, в действительности, вызвано ростом значений  $\sigma^{ll}$  в отсутствие магнитного поля при увеличении  $\tau$ , и отношение  $\sigma^{ll}(B, \tau)/\sigma^{ll}(0, \tau)$  является убывающей функцией  $\tau$ . Отметим также, что соотношения (4)–(6) должны использоваться в интервале  $\sigma^{ll}(B, \tau) \ll \sigma^{ll}(0, \tau)$  ( $\omega_B \tau \gg 1$ ).

В целом, обе зависимости  $\sigma^{ll}(B, \tau)$  от обоих аргументов могут использоваться для определения скейлинговых параметров хаотических траекторий. Зависимость от  $\tau$  (при фиксированном  $B$ ) при этом является наиболее сильной при  $\alpha_l$ , заметно отличающихся от  $1/2$ , и пропадает при  $\alpha_l \simeq 1/2$ .

Более подробное рассмотрение соотношений (4)–(6) представлено в работах [16, 17]. Здесь мы отметим лишь главную причину такого поведения компонент  $\sigma^{kl}(B)$ . Она, как мы уже сказали, лежит в

геометрических свойствах хаотических траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве, а также на компактной поверхности Ферми  $S_F \subset \mathbb{T}^3$ .

А именно, для поведения проводимости (и других магнитотранспортных явлений) особенно важным оказывается геометрия участков хаотических траекторий длины порядка  $v_F \tau$  в координатном пространстве (или  $l \sim p_F \omega_B \tau$  в  $\mathbf{p}$ -пространстве). Более точно, нам важно знать среднюю величину (модуля) отклонения концов таких участков вдоль каждой из координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Соответствующие средние растут степенным образом с длиной  $l$  в  $\mathbf{p}$ -пространстве

$$|\Delta p_x(l)| \simeq p_F \left(\frac{l}{p_F}\right)^{\alpha_2}, \quad |\Delta p_y(l)| \simeq p_F \left(\frac{l}{p_F}\right)^{\alpha_1}$$

и, соответственно, согласно закону

$$|\Delta x^i| \sim \frac{v_F}{\omega_B} (\omega_B \tau)^{\alpha_i} \sim \frac{c p_F}{e B} (\omega_B \tau)^{\alpha_i}$$

в координатном пространстве.

Величины  $\alpha_i$  лежат в интервале  $(0, 1)$ , при этом, мы имеем различные степени  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  для некоторых главных направлений  $p_x$  и  $p_y$  в  $\mathbf{p}$ -пространстве, переходящие в координатное пространство (отметим здесь, что проекции траекторий в  $\mathbf{x}$ -пространстве на плоскость, ортогональную  $\mathbf{B}$ , подобны траекториям в  $\mathbf{p}$ -пространстве, повернутым на  $90^\circ$ ). Отдельно, скейлинговый параметр  $\alpha_3$  возникает для отклонений вдоль оси  $z$  в координатном пространстве. Анизотропное скейлинговое поведение величин  $|\Delta x^i|$  выражается в соответствующей анизотропии дрейфа электронов во внешнем электрическом поле, что, в свою очередь, выражается в зависимостях (4)–(6).

При рассмотрении кинетического уравнения в  $\tau$ -приближении наиболее просто воспользоваться формулой

$$\Delta s^{kl}(B) = e^2 \tau \iint_{\hat{S}_F} \langle v_{\text{gr}}^k \rangle_B \langle v_{\text{gr}}^l \rangle_B \frac{dp_z ds}{(2\pi\hbar)^3}$$

для вклада хаотических траекторий в симметрическую часть тензора проводимости (с учетом спина), где  $s = teB/c$  и  $t$  — время пробегания по траекториям.

Величины  $\langle v_{\text{gr}}^k \rangle_B(p_z, t)$  задаются усреднением на соответствующей траектории

$$\langle v_{\text{gr}}^k \rangle_B(p_z, t) \equiv \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^t v_{\text{gr}}^k(p_z, t') e^{\frac{t'-t}{\tau}} dt',$$

и могут быть приближены формулой

$$\langle v_{gr}^k \rangle_B(p_z, s) \simeq \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t v_{gr}^k(p_z, t') dt'$$

при больших значениях параметра  $\tau$ .

Полагая, непосредственно из системы (1):

$$|\langle v_{gr}^x \rangle_B| = \left| \frac{c\Delta p_y}{eB\tau} \right|, \quad |\langle v_{gr}^y \rangle_B| = \left| \frac{c\Delta p_x}{eB\tau} \right|,$$

мы точно так же получаем связь скейлинговых параметров траектории в  $\mathbf{p}$ -пространстве со скейлинговыми параметрами тензора проводимости. (Аналогично, скейлинговый параметр  $\alpha_z$  возникает из оценки среднего значения  $\langle v_{gr}^z \rangle_B$  вдоль траектории).

Можно видеть, что поведение траекторий Дыникова заметно отличается от обычной диффузии, несмотря на их явное «хаотическое» блуждание в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ . До некоторой степени это объясняется отсутствием самопересечений у таких траекторий, а в целом, наличием на них корреляций скорости на сколь угодно больших масштабах, обладающих скейлинговыми свойствами.

Исключительно важным в рассматриваемой ситуации является то, что главные направления, а также скейлинговые параметры  $\alpha_i$  (индексы Зорича – Концевича – Форни) являются одними и теми же для каждого фиксированного значения  $p_z$  (т.е. во всех плоскостях, ортогональных магнитному полю). Это связано со спецификой поведения таких траекторий на поверхности  $\hat{S}_F(\mathbf{V})$ , отражающей общие особенности системы (1).

Указанные выше свойства имеют место во всех плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , несмотря на множественные перестройки хаотических траекторий при изменении значений  $p_z$ . Последние происходят благодаря наличию седловых особых точек системы (1) внутри поверхности  $\hat{S}_F(\mathbf{V})$ , вызывающих такие перестройки при их пересечении плоскостями, ортогональными  $\mathbf{V}$  (рис. 7). Такие точки, повторяясь периодически в  $\mathbf{p}$ -пространстве, вызывают перестройки геометрии хаотических траекторий на всех масштабах (рис. 8). Вместе с тем, как мы уже сказали, это не меняет главных направлений и скейлинговых параметров траекторий. Последнее свойство объясняется тем, что перестройки в различных точках при изменении  $p_z$  не являются независимыми, а, в действительности, согласованы друг с другом особым (сложным) образом.

Параметр  $\tau$ , как легко видеть, играет роль времени разрушения корреляций в движении частицы в

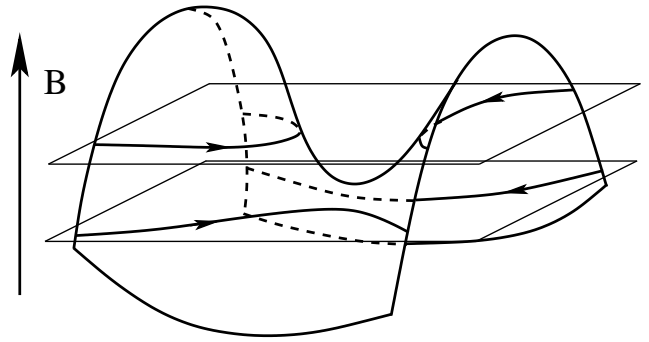


Рис. 7. Перестройка хаотической траектории в  $\mathbf{p}$ -пространстве при пересечении седловой особой точки плоскостью, ортогональной  $\mathbf{V}$

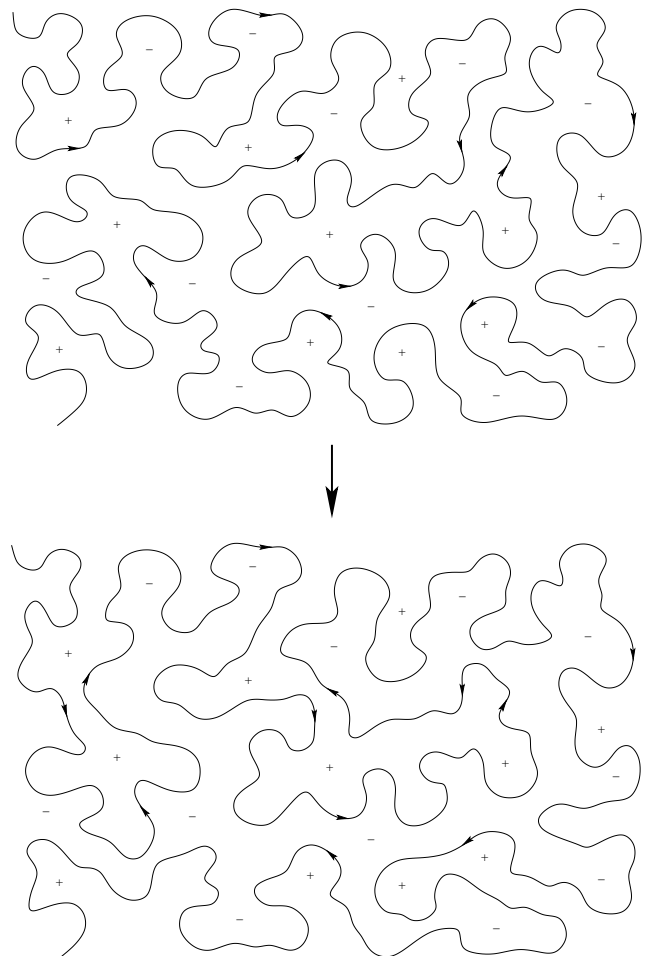


Рис. 8. Множественные перестройки хаотической траектории в  $\mathbf{p}$ -пространстве при изменении значения  $p_z$  (схематично)

$\mathbf{x}$ - и  $\mathbf{p}$ -пространстве. Параметр  $\omega_{BT}$  определяет при этом масштаб геометрической длины (в  $\mathbf{p}$ -пространстве), на которой корреляции еще сохраняются. Забегая вперед, отметим, что нас здесь будут интере-

совать процессы разрушения корреляций в движении электрона, вызванные «дрожанием» значения  $p_z$  из-за малоуглового рассеяния на фононах, приводящим к случайным перестройкам хаотических траекторий при прохождении вблизи особых точек системы (1). Этот процесс, как мы увидим, приводит к появлению нового эффективного значения  $\tau$ , отличающегося в общем случае от времен релаксации за счет других процессов рассеяния.

### 3. СРЕДНЕЕ ВРЕМЯ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА НА ХАОТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЯХ

Мы рассмотрим теперь поведение времени свободного пробега электронов на хаотических траекториях в режиме низких температур, где оно становится достаточно большим. Как хорошо известно (см., например, [4–6]), время свободного пробега электронов в монокристалле определяется, главным образом, тремя процессами, а именно, электрон-электронным рассеянием, электрон-фононным рассеянием и рассеянием на примесях. Первым двум процессам при этом свойственна сильная зависимость от температуры, в то время как последний почти не зависит от  $T$ .

Для достижения наибольшего времени свободного пробега обычно используются очень чистые образцы при весьма низких температурах, где электрон-электронное и электрон-фононное рассеяние становятся несущественными, а время  $\tau$  полностью определяется остаточным рассеянием на примесях. В нашем случае, однако, мы будем рассматривать несколько более высокие температуры, где проявляются все три указанных процесса.

Приведем здесь самые приблизительные оценки температурных интервалов, отвечающих интересующим нас интенсивностям указанных процессов, пользуясь самым общими предположениями.

Отметим прежде всего, что в наиболее чистых образцах время электронного рассеяния на примесях  $\tau_{imp}$  может достигать  $10^{-8}$  с, что соответствует длине свободного пробега  $l \sim 1$  см. Эту величину можно, по-видимому, использовать в качестве верхней оценки для  $\tau_{imp}$ , хотя, в действительности, для рассматриваемых нами эффектов часто достаточно и заметно меньших значений  $\tau$  (отметим, что при  $\tau \sim 10^{-9}$  с значение  $\omega_{BT}$  в интервале  $0.1 \text{ Тл} \leq B \leq 10 \text{ Тл}$  может быть оценено как  $10 \leq \omega_{BT} \leq 1000$ , что, конечно, достаточно для проявления геометрии сложных траекторий, рассматриваемых нами здесь).

Время электрон-электронного рассеяния может быть оценено (см., например, [6]) по формуле

$$\tau_{ee} \simeq \frac{\hbar}{kT} \frac{\epsilon_F}{kT} \quad (7)$$

(где  $\hbar \simeq 6.582 \cdot 10^{-16}$  эВ · с,  $\epsilon_F \simeq 5$  эВ), что дает значение  $\simeq 10^{-8}$  с при  $T = 5$  К.

Таким образом, (грубо) можно полагать, что в рассматриваемой нами ситуации процессы электрон-электронного рассеяния становятся несущественными в сравнении с процессами рассеяния на примесях уже при температурах порядка нескольких кельвинов.

Среднее время между рассеяниями электрона на фононах может быть (см. [6]) оценено как

$$\tau_{ph}^e \simeq \frac{\hbar}{kT} \left( \frac{T_D}{T} \right)^2. \quad (8)$$

Как хорошо известно, однако, это время является временем энергетической релаксации электронов за счет рассеяния на фононах. Время импульсной релаксации  $\tau_{ph}^p$  при этом значительно больше, поскольку фононы имеют при этом весьма малый импульс

$$p_{ph} \simeq \frac{T}{T_D} p_F \ll p_F,$$

передаваемый электрону в процессе рассеяния. В результате, электрон совершает «диффузионное» движение по поверхности Ферми, многократно рассеиваясь на фононах, а время его импульсной релаксации может быть оценено как

$$\tau_{ph}^p \simeq \tau_{ph}^e \left( \frac{T_D}{T} \right)^2 \simeq \frac{\hbar}{kT} \left( \frac{T_D}{T} \right)^4.$$

Полагая  $T_D \simeq 300$  К, для значения  $T = 5$  К мы получаем значения  $\tau_{ph}^e \simeq 5 \cdot 10^{-9}$  с и  $\tau_{ph}^p \simeq 2 \cdot 10^{-5}$  с. Можно видеть, таким образом, что при заданных параметрах область температур, где существенны все три процесса релаксации, лежит вблизи значений  $T \simeq 5$  К. Конечно, все приведенные оценки верны лишь по порядку величины, кроме того, сами значения  $\epsilon_F$  и  $T_D$  могут заметно различаться (на порядок) для различных веществ. В целом, можно считать, что интересующий нас интервал лежит вблизи значений  $T$  порядка десяти (или десятков) кельвинов и сильно зависит от индивидуальных параметров проводника.

Как также можно видеть, в приведенном выше примере электрон-фононное рассеяние не играет большой роли при вычислении проводимости в стандартной ситуации в силу большого значения  $\tau_{ph}^p$  по



сравнению с другими временами. (Вместе с тем, оно играет основную роль при вычислении теплопроводности в силу маленького значения  $\tau_{ph}^\epsilon$ .)

Как мы уже сказали выше, мы собираемся рассматривать здесь «нестандартную» ситуацию, а именно, ситуацию появления хаотических траекторий на поверхности Ферми. Как мы также уже говорили, основную роль в этом случае у нас будет играть наличие седловых особых точек внутри носителя хаотических траекторий. Источником особого поведения  $\tau$  при этом является «дрожание» значения  $p_z$  из-за малоуглового рассеяния на фононах, приводящее к неоднозначности движения вдоль траектории при прохождении вблизи особых точек (рис. 7). В этой ситуации малоугловое рассеяние начинает играть весьма существенную роль и, таким образом, время  $\tau_{ph}^\epsilon$  становится существенным при вычислении  $\sigma^{kl}(B)$  в сильных магнитных полях.

Нам будет наиболее интересна ситуация, когда данный эффект является основным, что предполагает соотношения

$$\tau_{ph}^\epsilon < \tau_{ee}, \tau_{imp}.$$

Как мы видели выше, для «стандартных» значений  $\epsilon_F$  (5 эВ) и  $T_D$  (300 К) в сверхчистых металлах, это соотношение выполняется при  $T \geq 5$  К. Это пороговое значение может быть ниже для материалов со специальными параметрами (условно говоря, высокими значениями  $\epsilon_F$  и низкими значениями  $T_D$ , а также более слабым электрон-электронным взаимодействием и сильным электрон-фононным взаимодействием).

Подходящий нам интервал температур при этом ограничен сверху условием  $\omega_B \tau_{ph}^\epsilon \gg 1$ . Полагая, например  $\omega_B \tau_{ph}^\epsilon \geq 10$ , для «стандартного» значения  $T_D \simeq 300$  К мы получаем оценки

$$T \leq 40 \text{ К} \quad \text{при} \quad B \simeq 10 \text{ Тл},$$

$$T \leq 20 \text{ К} \quad \text{при} \quad B \simeq 1 \text{ Тл}.$$

(Верхнее пороговое значение  $T$  при этом может быть выше для материалов с большим значением  $T_D$ , а также больших значениях  $B$ .)

Как мы уже сказали, в рассматриваемой нами ситуации, в действительности, появляется еще одно время свободного пробега  $\tau_0(B, T)$ , обусловленное «рассеянием» электронов на седлах системы (1).

Для оценки времени  $\tau_0(B, T)$  мы должны рассмотреть изменения значения  $p_z$  при движении вдоль хаотических траекторий системы (1). Поскольку такие изменения вызываются малоугловым

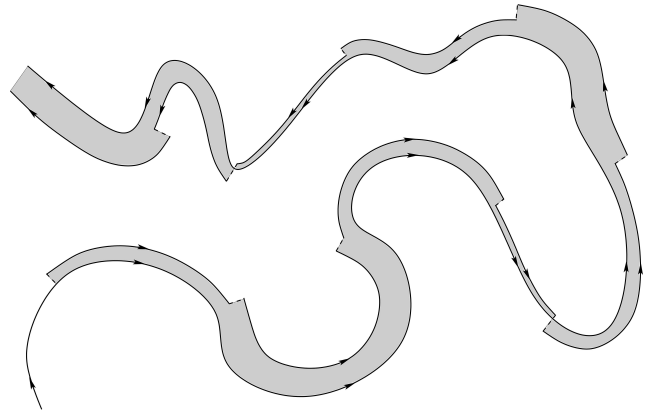


Рис. 9. Узкая полоса, ограниченная исходной и истинной траекториями электрона на сложной поверхности Ферми (схематично)

рассеянием на фононах, мы, во всяком случае, имеем неравенство

$$\tau_0(B, T) \geq \tau_{ph}^\epsilon.$$

Изменение импульса электрона при каждом рассеянии имеет порядок

$$\delta p_0 \simeq \frac{T}{T_D} p_F \ll p_F. \tag{9}$$

Изменение энергии электрона при этом имеет порядок  $\delta \epsilon \simeq kT \ll \epsilon_F$ . Заметим, что в силу соотношения

$$kT/\epsilon_F \ll T/T_D,$$

можно считать, что электрон фактически все время при этом остается на поверхности Ферми, «дрейфуя» по траекториям системы (1) при многократном рассеянии на фононах.

Траектория движения электрона (в  $\mathbf{p}$ -пространстве) почти не меняется при малоугловом рассеянии вдали от седловых особых точек системы (1). Как можно видеть, вместе с исходной траекторией она ограничивает узкую полосу на поверхности Ферми, ширина которой меняется в каждом акте рассеяния (рис. 9). Если при этом в какой-то момент внутрь этой полосы попадает седловая особая точка системы (1), исходная и истинная траектории электрона быстро расходятся в  $\mathbf{p}$ -пространстве (рис. 10). В последнем случае можно сказать, что произошло рассеяние электрона на седловой особой точке системы (1), вызванное его малоугловым рассеянием на фононах. Рассеяния на особых точках являются при этом независимыми и разрушают корреляции скорости электрона на временах, превышающих  $\tau_0(B, T)$ .

Отметим здесь особо, что указанное свойство имеет место именно для особых точек, лежащих

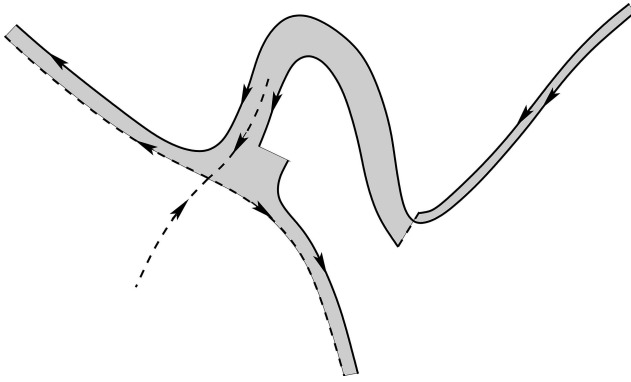


Рис. 10. Рассеяние электрона на седловой особой точке системы (1), вызванное малоугловым рассеянием на фоновых

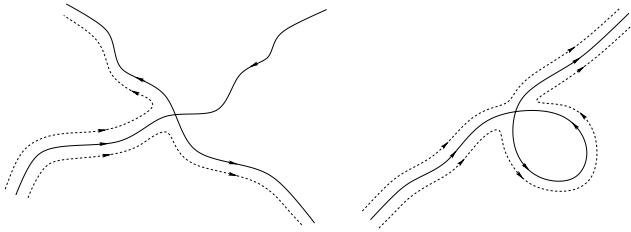


Рис. 11. Траектории, примыкающие к седловым особым точкам системы (1) внутри поверхности  $\hat{S}_F(\mathbf{B})$  и на ее границе

внутри носителя открытых траекторий, и не относятся к особым точкам, лежащим на границе  $\hat{S}_F(\mathbf{B})$ . Данное обстоятельство обусловлено различной геометрией траекторий, примыкающих к таким точкам в первом и во втором случаях (рис. 11). Как можно видеть, перестройка открытых траекторий вблизи точек второго типа не меняет существенно их геометрии на больших масштабах. Отметим также, что наличие особых точек системы (1) внутри носителя открытых траекторий является одной из главных отличительных особенностей хаотических траекторий типа Дынникова и не свойственно траекториям других типов (см. [8, 11, 13–15]).

Как мы уже сказали, электрон испытывает сильное рассеяние в  $\mathbf{p}$ -пространстве, если в узкую полосу между исходной (теоретической) и фактической (учитывающей малоугловое рассеяния) его траекториями попадает седловая особая точка системы (1) (рис. 9, 10). Вероятность такого попадания определяется отношением площади соответствующего участка этой полосы к общей площади носителя хаотических траекторий.

Для оценки средней длины  $l_0$ , на которой происходит рассеяние на особой точке, можно приравнять площадь  $\Sigma(l_0)$  соответствующей ей полосы на рис. 9

к площади носителя хаотических траекторий (поделенной на количество особых точек внутри него).

Площадь  $\hat{S}_F(\mathbf{B})$  равна по порядку величины  $p_F^2$  с некоторым геометрическим коэффициентом, который при этом может быть заметно больше 1. На поверхности  $\hat{S}_F(\mathbf{B})$  рода 3, однако, присутствуют 4 различные седловые особые точки системы (1), поэтому для соответствующей площади  $\Sigma(l_0)$  мы можем написать приближенно

$$\Sigma(l_0) \simeq p_F^2. \tag{10}$$

Для того чтобы площадь  $\Sigma(l_0)$  была ненулевой, конечно, необходимо, чтобы на длине  $l_0$  произошло хотя бы одно рассеяние на фоновом. Длина  $l_0$ , на которой происходит такое рассеяние, равна по порядку величины  $\omega_B \tau_{ph}^\epsilon p_F$ , при этом типичное отклонение импульса электрона определяется формулой (9).

Можно видеть, таким образом, что время  $\tau_0(B, T)$  не может быть меньше времени  $\tau_{ph}^\epsilon(T)$ , даже если величина  $\delta p_0 \cdot \omega_B \tau_{ph}^\epsilon p_F$  превышает площадь носителя хаотических траекторий. В общем случае, между двумя рассеяниями на седлах системы (1) происходит одно либо несколько рассеяний на фоновых.

В частности, условие  $\tau_0(B, T) = \tau_{ph}^\epsilon(T)$  (по порядку величины) определяется неравенством

$$\delta p_0 \cdot \omega_B \tau_{ph}^\epsilon p_F \geq p_F^2,$$

т. е.

$$\omega_B \geq \frac{kT}{\hbar} \frac{T}{T_D}$$

(полагая, что на длине  $l_0 \simeq \omega_B \tau_{ph}^\epsilon p_F$  происходит лишь одно рассеяние на фоновом).

Вид кривой

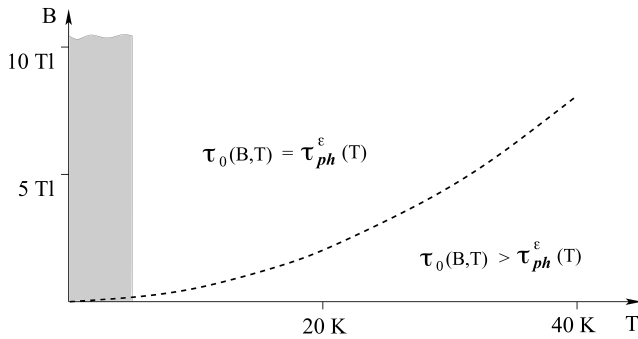
$$\omega_B = \frac{kT}{\hbar} \frac{T}{T_D}, \tag{11}$$

разделяющей режимы  $\tau_0(B, T) = \tau_{ph}^\epsilon(T)$  и  $\tau_0(B, T) > \tau_{ph}^\epsilon(T)$ , для «стандартных» параметров металла приведен на рис. 12. Надо сказать, конечно, что эта кривая является в большой степени условной, и скорее можно говорить о некоторой области вблизи нее, разделяющей два указанных режима. Ее положение также, в действительности, сильно зависит от параметров проводника.

Величина  $\omega_B \tau_0(B, T)$  на кривой (11) равна

$$\omega_B \tau_0 \simeq \frac{kT}{\hbar} \frac{T}{T_D} \frac{\hbar}{kT} \left( \frac{T_D}{T} \right)^2 = \frac{T_D}{T}$$

и удовлетворяет условию  $\omega_B \tau_0 \gg 1$  в интересующем нас интервале. Это условие также хорошо выполняется (в интересующем нас интервале температур) в области  $\tau_0(B, T) = \tau_{ph}^\epsilon(T)$  (над кривой).



**Рис. 12.** Условная кривая, разделяющая области с  $\tau_0(B, T) = \tau_{ph}^\epsilon(T)$  и  $\tau_0(B, T) > \tau_{ph}^\epsilon(T)$  для стандартных значений  $\epsilon_F$  (5 эВ) и  $T_D$  (300 К). Закрашенная область отвечает значениям  $T$ , при которых основную роль начинают играть времена  $\tau_{ee}$  и  $\tau_{imp}$  (приближенно)

Выполнение условия  $\omega_B \tau_0 \gg 1$  в области под кривой (11) требует отдельного исследования (прежде всего, из-за уменьшения значения  $\omega_B$  в этой области). В общем случае зависимость времени  $\tau_0$  от величин  $B$  и  $T$  здесь может быть довольно сложной.

В пределе  $\tau_0(B, T) \gg \tau_{ph}^\epsilon(T)$  (множественное рассеяние на фонах между двумя рассеяниями на особых точках) для определения среднего (по модулю) отклонения  $\Delta p$  вдоль соответствующего участка траектории можно положить

$$\Delta p \simeq \delta p_0 \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{ph}^\epsilon}}.$$

Для соответствующей площади полосы на рис. 9, полагая  $l_0 \simeq \omega_B \tau_0 p_F$ , можно при этом воспользоваться оценкой

$$\Sigma(\tau_0) \simeq \delta p_0 \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{ph}^\epsilon}} \omega_B \tau_0 p_F \simeq \frac{T}{T_D} \frac{\tau_0^{3/2}}{\sqrt{\tau_{ph}^\epsilon}} \omega_B p_F^2.$$

Пользуясь соотношением (10), для времени  $\tau_0(B, T)$  получим

$$\begin{aligned} \tau_0(B, T) &\simeq \left( \frac{T_D}{T} \frac{\sqrt{\tau_{ph}^\epsilon}}{\omega_B} \right)^{2/3} \simeq \\ &\simeq \left( \frac{T_D}{T} \right)^{4/3} \left( \frac{\hbar \omega_B}{kT} \right)^{1/3} \frac{1}{\omega_B}, \end{aligned} \quad (12)$$

и, таким образом

$$\omega_B \tau_0(B, T) \simeq \left( \frac{T_D}{T} \right)^{4/3} \left( \frac{\hbar \omega_B}{kT} \right)^{1/3}.$$

Надо сказать, однако, что указанный предел, по видимому, может наблюдаться крайне редко, и зависимость  $\tau_0(B, T)$  имеет скорее некоторый промежуточный вид между (12) и  $\tau_0 = \tau_{ph}^\epsilon$ .

Суммируя сказанное выше, можно видеть, что при появлении хаотических траекторий (Дынникова) на поверхности Ферми поведение тензора проводимости в сильных магнитных полях существенно зависит от значения  $\tau_{ph}^\epsilon$  (или  $\tau_0(B, T)$ ). Для ультратонких материалов, более того, можно указать интервалы температур и магнитных полей, где эта зависимость является определяющей для поведения  $\sigma^{kl}(B, T)$ . В более общей ситуации время релаксации определяется также процессами электрон-электронного рассеяния и рассеяния на примесях, и задается соотношением

$$\tau^{-1} \simeq \tau_0^{-1}(B, T) + \tau_{ee}^{-1}(T) + \tau_{imp}^{-1}.$$

Отметим здесь, что указанное выше свойство связано именно со вкладом хаотических траекторий в тензор  $\sigma^{kl}(B, T)$ , в частности, в сопутствующем ему вкладе (2) замкнутых траекторий системы (1) время  $\tau$  определяется соотношением

$$\tau^{-1} \simeq \tau_{ee}^{-1}(T) + \tau_{imp}^{-1}$$

(считая время  $\tau_{ph}^p$  заметно большим в рассматриваемом интервале температур).

В пределе очень низких температур ( $T < 1$  К), где имеют место соотношения

$$\tau_{ph}^\epsilon, \tau_{ee} \gg \tau_{imp},$$

время  $\tau_{imp}$  при этом играет роль универсального времени релаксации при вычислении тензора проводимости.

Как мы уже отмечали, в силу специфики вклада хаотических траекторий в  $\sigma^{kl}(B, T)$ , его зависимость от  $\tau$  проявляется сильнее всего при заметном отличии скейлинговых параметров  $\alpha_l$  от 1/2. Эта ситуация, как правило, отвечает также наибольшей анизотропии хаотических траекторий в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{B}$  (например,  $\alpha_1 < 1/2$ ,  $\alpha_2 > 1/2$ ). При определении зависимости  $\tau_0(B, T)$  в рассмотренном нами интервале при этом можно пользоваться значениями  $\alpha_l$ , измеренными по зависимости  $\sigma^{kl}(B)$  в пределе очень низких температур ( $\tau = \tau_{imp}$ ), где они могут быть определены с наибольшей точностью.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается поведение магнитопроводимости металла в особой ситуации, а именно, при возникновении хаотических электронных траекторий на поверхности Ферми. Показано, что в определенном интервале температур и магнитных

полей поведение проводимости в этом случае определяется временем энергетической электрон-фононной релаксации  $\tau_{ph}^\epsilon$  (либо связанным с ним временем  $\tau_0(B, T)$ ), обычно не играющем роли при вычислении проводимости. Причиной этого является рассеяние электронов на особых точках динамической системы, описывающей динамику электрона на поверхности Ферми в присутствии внешнего магнитного поля. Такое рассеяние вызывается, в действительности, малоугловым рассеянием электронов на фононах с малым импульсом, обеспечивая быструю импульсную релаксацию электронов. Общая зависимость тензора проводимости от значений  $T$  и  $B$  определяется при этом как функцией  $\tau_0(B, T)$ , так и геометрическими особенностями хаотических траекторий.

### ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ **31**, 63 (1956).
2. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **35**, 1251 (1958).
3. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **38**, 188 (1960).
4. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
5. Ч. Киттель, *Квантовая теория твердых тел*, Наука, Москва (1967).
6. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).
7. С. П. Новиков, УМН **37**, 3 (1982).
8. А. В. Зорич, УМН **39**, 235 (1984).
9. И. А. Дынников, УМН **47**, 161 (1992).
10. С. П. Царев, Частное сообщение (1992-1993).
11. И. А. Дынников, Математические заметки **53**, 57 (1993).
12. A. V. Zorich, in: *Proc. Geometric Study of Foliations*, Tokyo, November 1993, ed. by T. Mizutani et al., World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
13. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-Torus: Geometry of Plane Sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).
14. I. A. Dynnikov, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
15. И. А. Дынников, УМН **54**, 21 (1999).
16. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
17. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**, 249 (1998).
18. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, Solid State Phys., Bulletin of Braz. Math. Society, New Series **34**, 171 (2003).
19. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Stat. Phys. **115**, 31 (2004).
20. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **112**, 1710 (1997).
21. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, Труды МИАН **302**, 296 (2018).
22. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **154**, 1183 (2018)
23. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **156**, 140 (2019)
24. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **164**, 817 (2023)
25. A. V. Zorich, Annales de l'Institut Fourier **46**, 325 (1996)
26. A. Zorich, *On Hyperplane Sections of Periodic Surfaces., Solitons, Geometry, and Topology: on the Crossroad*, ed. by V. M. Buchstaber and S. P. Novikov, Translations of the AMS, Ser. 2, **179**, AMS, Providence, RI (1997), p. 173, DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/trans2/179>.
27. A. Zorich, *How Do the Leaves of Closed 1-Form Wind Around a Surface, Pseudoperiodic Topology*, ed. by V. I. Arnold, M. Kontsevich, A. Zorich, Translations of the AMS, Ser. 2, **197**, AMS, Providence, RI (1999), p. 135, DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/trans2/197>.
28. Р. Де Лео, УМН **55**, 181 (2000)
29. Р. Де Лео, УМН **58**, 197 (2003)
30. A. Zorich, *Flat Surfaces, in Collect. Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry. Vol. 1: On Random Matrices, Zeta Functions and Dynamical Systems*, Ecole de Physique des Houches, France, March 9-21 (2003) ed. by P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, and P. Vanhove, Springer-Verlag, Berlin (2006), p. 439.
31. Р. Де Лео, И. А. Дынников, УМН **62**, 151 (2007)

32. R. De Leo and I. A. Dynnikov, *Geom. Dedicata* **138**, 51 (2009).
33. И. А. Дынников, *Труды МИАН* **263**, 72 (2008)
34. A. Skripchenko, *Discrete Contin. Dyn. Sys.* **32**, 643 (2012).
35. A. Skripchenko, *Ann. Glob. Anal. Geom.* **43**, 253 (2013).
36. I. Dynnikov, A. Skripchenko., *On Typical Leaves of a Measured Foliated 2-Complex of Thin Type; Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics: Novikov's Seminar 2012–2014*, *Adv. Math. Sci.*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **234**, ed. by V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, *Translations of the AMS*, Providence, RI (2014), p. 173, arXiv: 1309.4884.
37. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Symmetric Band Complexes of Thin Type and Chaotic Sections Which Are Not Actually Chaotic*, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **76** (2015), p. 287.
38. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Inventiones Mathematicae* **206**, 109 (2016).
39. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, *Bulletin De La Societe Mathematique De France* **144**, 539 (2016).
40. I. Dynnikov, P. Hubert, and A. Skripchenko, *International Mathematics Research Notices IMRN* (2022) (Published online), arXiv 2011.15043.