

УДК 532.529:534.2

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ С МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДОЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ СЛОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. Д.А. Губайдуллин, Ю.В. Федоров\*, Р.Р. Зарипов\*\*

Институт механики и машиностроения – ОСП ФГБУН «Федеральный исследовательский центр  
«Казанский научный центр РАН», Казань, Россия

\*E-mail: kopperfildd@yandex.ru

\*\*E-mail: rinat\_zaripov.imm@mail.ru

Поступило в редакцию 11.04.2024 г.

После доработки 21.05.2024 г.

Принято к публикации 09.07.2024 г.

Рассмотрена задача об отражении и прохождении акустической волны через многослойную среду, содержащую слой вязкоупругой жидкости с покрытыми упругой оболочкой пузырьками газа. Для системы «вода–акриловая пластина–пузырьковая жидкость–акриловая пластина–вода» рассчитаны коэффициенты отражения и прохождения волны и представлено сопоставление с экспериментальными данными. Проиллюстрировано влияние упругости несущей жидкости и оболочки пузырьков на отражение и прохождение волны через многослойную среду.

DOI: 10.31857/S0040364424040172

### ВВЕДЕНИЕ

Распространение волн в сложных слоистых средах является активным предметом исследования. Особый интерес представляет слоистая среда, содержащая пузырьковую жидкость [1–9]. Связано это как с природными процессами, например, в придонных слоях, содержащих газовые пузырьки в морях, озерах, либо вблизи поверхности [1, 2], так и с технологическими процессами [8, 9]. В работе [8] приведено описание конструкции и характеристик комбинированной панели, состоящей из двух стекол или пластин поликарбонатов, пространство между которыми заполнено пузырьковой жидкостью для защиты информации одновременно по акустическому, оптическому и электромагнитному техническим каналам. В [9] приведено описание методики использования контрастных веществ (покрытые оболочкой пузырьки) для повышения качества ультразвуковых изображений внутренних органов человека. В этом случае имеет место пятислойная среда: кровь с инкапсулированными пузырьками внутри капилляра, окруженного биологической тканью. На основании этого в [10] экспериментальным путем изучено отражение акустической волны от многослойной среды «вода – акриловая пласти-

на – пузырьковая жидкость – акриловая пластина – вода». Проиллюстрировано влияние объемного содержания пузырьков на зависимость коэффициента отражения от частоты возмущений.

С основными подходами к исследованию акустики пузырьковых жидкостей можно ознакомиться в известных монографиях [11, 12], а с некоторыми публикациями – в обзорах [13–15].

В настоящей работе представлена математическая модель отражения и прохождения акустической волны через многослойную среду, содержащую вязкоупругую жидкость с покрытыми оболочкой пузырьками газа.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для анализа взаимодействия акустического сигнала с многослойным объектом используется следующая методика расчета. Согласно [16], результатом отражения и прохождения плоской монохроматической волны  $\exp[i(\omega t - Kx)]$  через многослойный объект являются плоские волны  $R\exp[i(\omega t - Kx)]$  и  $T\exp[i(\omega t - Kx)]$ , где  $R$  и  $T$  – соответственно коэффициенты отражения и прохождения волны, которые определяются через импедансы слоев  $Z_j$  и входные импедансы границ слоев  $Z_j^{\text{in}}$ . Для многослойного объекта, состоящего из  $n$  слоев, коэффициенты  $R$  и  $T$  имеют вид [16]

$$R = \frac{Z_n^{\text{in}} - Z_{n+1}}{Z_n^{\text{in}} + Z_{n+1}}, \quad (1)$$

$$T = \prod_{j=1}^n \left( \frac{Z_j^{\text{in}} + Z_j}{Z_j^{\text{in}} + Z_{j+1}} \exp(iK_j d_j) \right), \quad (2)$$

$$Z_j = \rho_j \frac{\omega}{K_j}, \quad Z_j^{\text{in}} = \frac{Z_{j-1}^{\text{in}} - iZ_j \operatorname{tg}(K_j d_j)}{Z_j - iZ_{j-1}^{\text{in}} \operatorname{tg}(K_j d_j)} Z_j,$$

$$Z_1^{\text{in}} = Z_1, \quad i^2 = -1,$$

где  $d_j, K_j$  – толщина и волновое число  $j$ -го слоя;  $\omega$  – частота возмущений. Для однородного слоя волновое число определяется как  $K_j = \omega/C_j$ , где  $C_j$  – скорость звука в  $j$ -м слое. В одном из слоев рассматривается наличие пузырьковой жидкости, т.е. неоднородная и поглощающая среда, поэтому используется зависимость комплексного волнового числа от частоты возмущений. Определяется она следующим образом. Записывается модифицированное уравнение Релея–Ламба для инкапсулированного пузырька в вязкоупругой жидкости [17]

$$\rho_d R_1 \ddot{R}_1 - 0.5 \rho_{d2} \dot{R}_1^2 + 2 \rho_{d1} \dot{R}_1^2 = p_g - p_\infty - \frac{2\sigma_1}{R_1} - \frac{2\sigma_2}{R_2} + 3 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau_{rr,s}}{r} dr + 3 \int_{R_2}^{\infty} \frac{\tau_{rr,l}}{r} dr, \quad (3)$$

$$\rho_d = \rho_s + (\rho_l - \rho_s) \frac{R_1}{R_2}, \quad \rho_{d2} = \rho_s + (\rho_l - \rho_s) \frac{R_1^4}{R_2^4}.$$

Здесь  $R_1$  – радиус пузырька газа;  $R_2$  – радиус пузырька вместе с оболочкой;  $p$  – давление;  $r$  – радиальная координата;  $\rho$  – плотность;  $\sigma_1, \sigma_2$  – коэффициенты поверхностного натяжения на границе газ–оболочка и оболочка–несущая жидкость;  $\tau_{rr}$  – нормальное напряжение; индекс  $s$  относится к оболочке пузырька,  $g$  – к газу,  $l$  – к несущей жидкости. Для учета вязкоупругости оболочки и несущей жидкости принята реологическая модель Кельвина–Фойгта. В этом случае напряжение с деформацией связано следующим соотношением:

$$\tau_{rr} = 2G\varepsilon_{rr} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{rr},$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $\mu$  – вязкость. В переменных задачи данное соотношение переписывается в виде

$$\tau_{rr,s} = -\frac{4R_1^2}{r^3} \left[ \frac{G_s R_1}{3} \left( 1 - \frac{R_{10}^3}{R_1^3} \right) + \mu_s \dot{R}_1 \right], \quad (4)$$

$$\tau_{rr,l} = -\frac{4R_2^2}{r^3} \left[ \frac{G_l R_2}{3} \left( 1 - \frac{R_{20}^3}{R_2^3} \right) + \mu_l \dot{R}_2 \right].$$

Здесь  $R_{10}$  – начальный радиус пузырька газа,  $R_{20}$  – начальный радиус инкапсулированного пузырька. Выражения (4) подставляются в уравне-

ние (3) и далее это уравнение линеаризуется с помощью  $R_1 = R_{10} + R'_1, R_2 = R_{20} + R'_2$  с учетом условия несжимаемости оболочки  $R_{10}^2 R'_1 = R_{20}^2 R'_2$ . В итоге получаем

$$\ddot{R}'_1 + \delta \dot{R}'_1 + \chi R'_1 = \frac{p'_g - p'_\infty}{\rho_{d0} R_{10}}, \quad \delta = \delta_s + \delta_p, \quad (5)$$

$$\delta_s = \frac{1}{\rho_{d0} R_{10}^2} \frac{4\mu_s (R_{20}^3 - R_{10}^3)}{R_{20}^3}, \quad \delta_l = \frac{1}{\rho_{d0} R_{10}^2} \frac{4\mu_l R_{10}^3}{R_{20}^3},$$

$$\chi = \frac{1}{\rho_{d0} R_{10}^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{4}{R_{20}^3} (G_s (R_{20}^3 - R_{10}^3) + G_l R_{10}^3) - \frac{2\sigma_2 R_{10}^3}{R_{20}^4} - \frac{2\sigma_1}{R_{10}} \right].$$

В работе [18] решена задача теплообмена между газом, упругой оболочкой пузырька и несущей жидкостью. Показано, что можно не учитывать теплоотдачу между жидкостью и оболочкой, а учитывать напрямую между жидкостью и газом, как для обычных пузырьковых жидкостей. Таким образом, линеаризованное уравнение энергии можно записать в виде [5, 18]

$$\frac{dp'_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_{g0}}{R_{10}} \frac{dR'_1}{dt} - 3i\omega p'_g (\gamma - 1) \frac{y_g \operatorname{cth} y_g - 1}{y_g^2}, \quad (6)$$

$$y_g = \sqrt{\frac{i\omega R_{10}^2}{\kappa_g}},$$

$$p_{g0} = p_\infty + \frac{2\sigma_1}{R_{10}} + \frac{2\sigma_2}{R_{20}}.$$

Здесь  $\kappa$  – коэффициент температуропроводности,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Решения уравнений (5), (6) ищутся в виде бегущих волн  $R'_1 = \Delta R \exp(i\omega t), p'_g = \Delta p_g \exp(i\omega t)$ , где  $\Delta R$  и  $\Delta p_g$  – амплитуды волн. Данные амплитуды подставляются в волновое уравнение для пузырьковой жидкости [19]

$$\frac{1}{C_l^2} \frac{\partial^2 p_\infty}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_\infty}{\partial x^2} = 4\pi \rho_l \int_0^\infty R_{10}^2 \ddot{R}_1 N dR_{10},$$

где  $C_l$  – скорость звука в несущей жидкости,  $N$  – функция распределения пузырьков по размерам. После несложных преобразований определяется зависимость комплексного волнового числа от частоты возмущений в простейшем монодисперсном случае

$$\frac{K_*^2}{\omega^2} = \frac{1}{C_l^2} + \frac{4\pi \rho_l R_{10} n}{\rho_{d0} (\omega_0^2 + i\omega\delta - \omega^2)}, \quad (7)$$

$$n = \frac{3\alpha}{4\pi R_{10}^3}, \quad \delta = \delta_s + \delta_l + \delta_a + \delta_r, \quad \delta_a = \frac{\omega^2 R_{20}}{C_l},$$

$$\delta_r = \frac{p_{g0}}{\rho_{d0} R_{10}^2} \frac{\text{Im} \Phi}{\omega}, \quad \Phi = \frac{3\gamma}{1+\Psi}, \quad \Psi = 3(\gamma-1) \frac{y_g \text{cth} y_g - 1}{y_g^2},$$

$$R_{20} = R_{10} + r_s, \quad \omega_0^2 = X + \frac{p_{g0} \text{Re} \Phi}{\rho_{d0} R_{10}^2}. \quad (8)$$

Здесь  $\alpha$  – объемное содержание включений,  $r_s$  – толщина оболочки,  $\omega_0$  – резонансная частота инкапсулированных пузырьков.

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

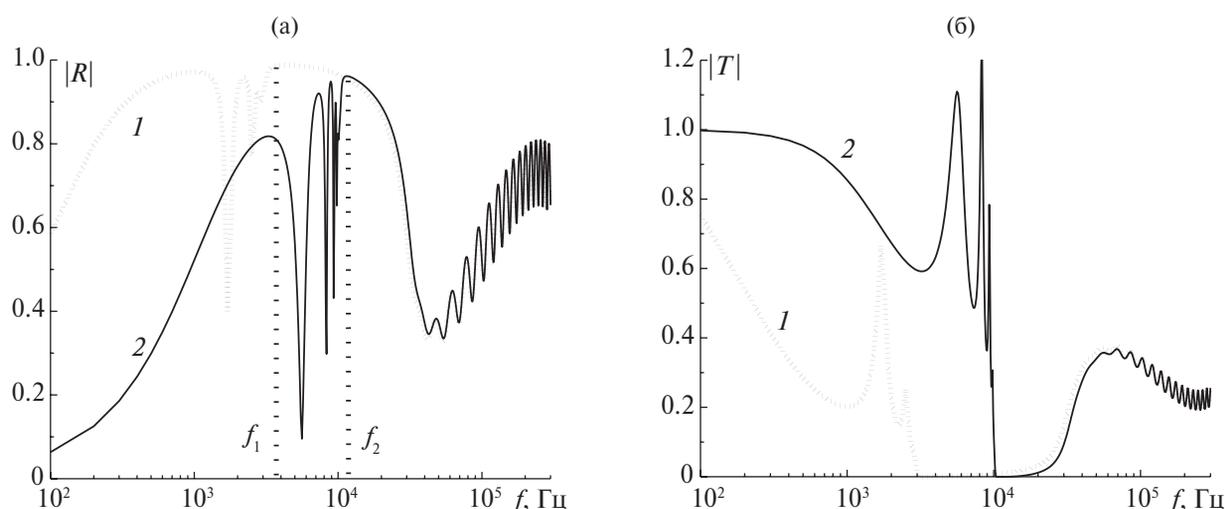
В соответствии с экспериментальной работой [10] рассмотрим отражение и прохождение акустической волны через пузырьковую жидкость, находящуюся между двумя акриловыми пластинами. Акриловые пластины находятся в воде. Толщина пузырькового слоя равна 4 см, толщина акриловых пластин – 3 мм, радиус пузырьков воздуха – 1 мм. Давление смеси – 0.1 МПа, температура – 288 К, плотность акриловых пластин – 1300 кг/м<sup>3</sup>, скорость звука – 3000 м/с. Расчеты проведены по формулам (1), (2) и (7). На рис. 1 представлено влияние оболочки пузырьков и упругости несущей жидкости на зависимости коэффициентов отражения и прохождения от частоты возмущений. Во-первых, видно, что в области резонансной частоты пузырьков наблюдаются максимум коэффициента отражения и минимум коэффициента прохождения. При данной частоте пузырьковый слой практически полностью отражает падающую акустическую волну. Во-вторых, наличие упругости несущей жидкости и оболочки пузырьков приводит к уменьшению коэффициента отражения и увеличению коэффициента прохождения при частотах  $f < f_2$ , где  $f_2$  – резонансная частота инкапсулиро-

ванных пузырьков в упругой жидкости, рассчитываемая по формуле (8). Это связано с тем, что оболочка пузырьков замедляет их радиальные колебания, и тем самым происходит меньшее рассеяние акустической волны. В-третьих, заметен сдвиг максимума коэффициента отражения и минимума коэффициента прохождения вправо, что связано с увеличением резонансной частоты покрытых пузырьков, см. формулу (8). В-четвертых, при частотах  $f < f_1$  для кривой 1 и  $f < f_2$  для кривой 2 появляются несколько локальных экстремумов, что связано с соотношением между длиной акустической волны и толщиной пузырькового слоя. В [20] установлено, что минимальные значения коэффициента отражения достигаются, когда

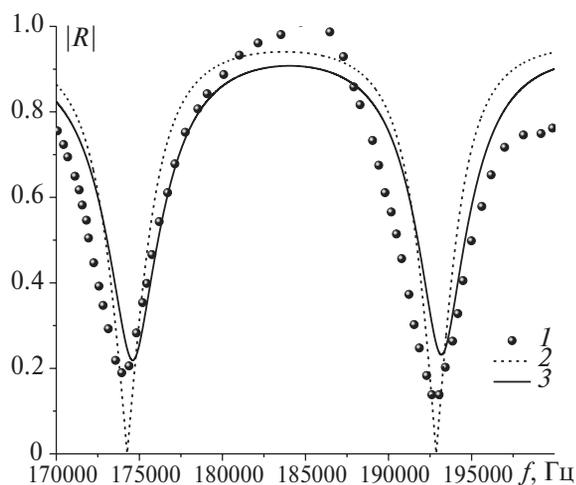
$$d = \frac{\lambda n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

а максимальные значения – при  $d = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{2} + n \right)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , где  $d$  – толщина слоя,  $\lambda$  – длина волны.

К примеру, первый минимум кривой 1 на рис. 1а наблюдается при частоте  $f = 1700$  Гц, а второй – при  $f = 2500$  Гц. Согласно соотношению (9), длины волн для этих двух частот составляют 0.08 и 0.04 м соответственно. Таким образом, можно определить значения скорости звука, как произведение длины волны на частоту возмущений:  $C = 136$  м/с при  $f = 1700$  Гц и  $C = 100$  м/с при  $f = 2500$  Гц. Эти же значения можно получить по соотношению (7) и формуле  $C = 2\pi f / (\text{Re} K_*)$ . Аналогичным образом определяются и максимумы коэффициента отражения. Экстремумы кривых, которые наблюдаются при частотах  $f > f_2$ , связаны с наличием двух акриловых пластин в жидкости. В этом случае



**Рис. 1.** Зависимости коэффициентов отражения (а) и прохождения (б) от частоты возмущений: 1 – слой воды с пузырьками воздуха, 2 – слой упругой жидкости с покрытыми латексной оболочкой пузырьками воздуха;  $r_s = 10^{-4}$  м,  $R_1 = 10^{-3}$  м,  $G_s = G_l = 10^6$  Па,  $\alpha = 0.005$ .



**Рис. 2.** Сравнение коэффициента отражения с экспериментальными данными [10] (1): 2 – нет пузырьков, 3 – при наличии пузырьков в слое;  $\alpha = 0.0005$ ,  $R_1 = 10^{-3}$  м,  $r_s = G_s = G_l = 0$ .

явное определение выражений экстремумов затруднено в связи со сложностью задачи.

На рис. 2 приведено сравнение зависимости коэффициента отражения от частоты возмущений с экспериментальными данными [10]. Можно заключить, что минимумы коэффициента отражения связаны с наличием двух акриловых пластин. При этом при наличии пузырьков в слое минимальные значения увеличиваются, что также подтверждается экспериментальными данными. В целом наблюдается удовлетворительное соответствие теории и эксперимента.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных результатов расчетов показано, что наличие упругости несущей жидкости и оболочки пузырьков приводит:

- к уменьшению коэффициента отражения и увеличению коэффициента прохождения при частотах, меньших резонансной частоты инкапсулированных пузырьков;

- к сдвигу максимума коэффициента отражения и минимума коэффициента прохождения в сторону большей частоты возмущений.

В частном случае найдено удовлетворительное соответствие результатов теоретических расчетов с известными экспериментальными данными.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев В.А., Руденко О.В. Нелинейный звук в слое газонасыщенных осадков // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 169.
2. Григорьев В.А., Луньков А.А., Петников В.Г. Затухание звука в мелководных акваториях с газонасыщенным дном // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 90.
3. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Влияние фазовых переходов на отражение акустических волн от гра-

ницы парогазожидкостной смеси // ТВТ. 2018. Т. 56. № 2. С. 317.

4. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Особенности отражения акустических волн от границы или слоя двухфазной среды // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 162.
5. Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкостей при прямом их падении // ТВТ. 2019. Т. 57. № 2. С. 284.
6. Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Вдовенко И.И. Особенности отражения и прохождения акустических волн на границе «чистой» и пузырьковой жидкостей при «косом» их падении // ТВТ. 2019. Т. 57. № 3. С. 464.
7. Шагапов В.Ш., Булатова З.А., Шаяхметов Г.Ф. Особенности отражения импульсных сигналов от слоя с парогазовыми пузырьками перед жесткой стенкой в воде // ТВТ. 2023. Т. 61. № 5. С. 760.
8. Зельманский О.Б., Петров С.Н. Комбинированная панель для защиты информации от утечки по техническим каналам // Вопросы защиты информации. 2015. № 1. С. 56.
9. Sheeran P.S., Dayton P.A. Phase-change Contrast Agents for Imaging and Therapy // Curr. Pharm. Des. 2012. V. 18. P. 2152.
10. Wang Y., Chen D., Cao X., He X. Theoretical and Experimental Studies of Acoustic Reflection of Bubbly Liquid in Multilayer Media // Appl. Sci. 2022. V. 12. P. 12264.
11. Нигматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
12. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
13. Вараксин А.Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков: проблемы и достижения // ТВТ. 2013. Т. 51. № 3. С. 421.
14. Prosperetti A. Vapor bubbles // Annu. Rev. Fluid Mech. 2017. V. 49. P. 221.
15. Вараксин А.Ю. Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков с твердыми частицами, каплями и пузырями // ТВТ. 2023. Т. 61. № 6. С. 926.
16. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
17. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Акустика вязкоупругой жидкости с пузырьками газа, покрытыми вязкоупругой оболочкой // ИФЖ. 2022. Т. 95. № 3. С. 802.
18. Gubaidullin D.A., Gubaidullina D.D., Fedorov Yu.V. The Influence of Heat Transfer on the Acoustics of a Liquid with Encapsulated Bubbles // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 7. P. 1202.
19. Commander K.W., Prosperetti A. Linear Pressure Waves in Bubbly Liquids: Comparison between Theory and Experiments // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. V. 85. № 2. P. 732.
20. Губайдуллин Д.А., Федоров Ю.В. Падение акустической волны на многослойную среду, содержащую слой пузырьковой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 1. С. 109.