

УДК 532.529

МЕЖЧАСТИЧНЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКАХ

© 2024 г. А. Ю. Вараксин

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

E-mail: varaksin_a@mail.ru

Поступил в редакцию 19.03.2024 г.

После доработки 07.05.2024 г.

Принят к публикации 09.07.2024 г.

Рассмотрены проблемы и особенности учета столкновений твердых частиц между собой при исследовании двухфазных потоков. Кратко описаны основы теории межчастичных столкновений. Описаны и проанализированы развитие на сегодняшний день аналитические методы расчета ядер столкновений монодисперсных и бидисперсных частиц в однородной изотропной турбулентности, градиентном турбулентном потоке, а также при совместном действии турбулентности и силы тяжести. Большое внимание уделено описанию методов численного моделирования двухфазных течений, описывающих на различном иерархическом уровне межфазную границу, межфазные взаимодействия и турбулентность несущей сплошной среды.

DOI: 10.31857/S0040364424030156

ОГЛАВЛЕНИЕ

- Введение
1. Некоторые характеристики межчастичных столкновений
 2. Основы теории межчастичных столкновений
 - 2.1. Понятие о цилиндре столкновений
 - 2.2. Понятие о сфере столкновений
 - 2.3. Столкновения хаотически движущихся молекул (частиц)
 - 2.4. Столкновения частиц при гравитационном осаждении
 3. Аналитическое моделирование межчастичных столкновений
 - 3.1. Монодисперсные частицы в однородной изотропной турбулентности
 - 3.2. Монодисперсные частицы в градиентном турбулентном потоке
 - 3.3. Бидисперсные частицы в однородной изотропной турбулентности
 - 3.4. Бидисперсные частицы в однородной изотропной турбулентности при наличии осредненной относительной скорости
 4. Численное моделирование межчастичных столкновений
 - 4.1. Классификация методов численного моделирования
 - 4.2. Метод крупных вихрей (LES)
 - 4.3. Прямое численное моделирование (DNS)

Заключение

Список литературы

ВВЕДЕНИЕ

Потоки сплошной среды, несущие твердые частицы, имеют место в целом ряде природных явлений [1–5]: песчаные бури, воздушные смерчи, извержения вулканов, лесные пожары, выпадение осадков в виде града, снега и т.п. Примерами технических устройств, в которых используются двухфазные течения, являются: тракты твердотопливных реактивных двигателей, устройства термоподготовки угля в схемах энерготехнологического использования топлива, теплообменники с двухфазными рабочими телами, устройства песко- и дробеструйной обработки различных поверхностей, пневмотранспортеры сыпучих материалов, пылеуловители различных типов и многие другие.

Двухфазные турбулентные течения (о которых преимущественно и пойдет речь в настоящем обзоре) являются крайне сложным предметом для изучения. Во-первых, на сегодняшний день теория однофазных турбулентных течений далека от завершения. Во-вторых, введение в турбулентный поток твердых частиц сильно осложняет картину течения. Это связано с большим разнообразием свойств вводимых частиц (прежде

всего, инерционности и концентрации), а также разнообразием пространственно-временных масштабов несущего газа (в осредненном движении, в крупномасштабном пульсационном движении и др.). Сказанное приводит к реализации многочисленных режимов (классов) двухфазных потоков [6–8].

Изучение характеристик движения частиц в турбулентном потоке и их обратного влияния на параметры течения несущего газа являются двумя из фундаментальных проблем механики двухфазных сред. Межчастичные столкновения могут играть существенную роль в формировании статистических характеристик движения частиц, а следовательно, и оказывать влияние на характеристики несущего их потока газа. Вследствие этого изучение роли межчастичных взаимодействий в контексте решения двух основных задач изучения двухфазных потоков представляется чрезвычайно актуальным.

Столкновение двух сферических частиц происходит при сближении их на расстояние, равное сумме их радиусов. Такое сближение возможно только в том случае, когда различны их скорости и (или) направления движения. Физические механизмы, приводящие к столкновениям частиц между собой, могут быть самыми различными. Среди них: броуновское движение, различие в осредненных скоростях частиц из-за разницы в размерах, из-за градиента осредненной скорости несущего газа, различие в пульсационных скоростях из-за турбулентных пульсаций скорости газа и многое другое.

В настоящем обзоре описаны и проанализированы развитые на сегодняшний день аналитические методы расчета ядер столкновений монодисперсных и бидисперсных частиц в однородной изотропной турбулентности, градиентном турбулентном потоке, а также при совместном действии турбулентности и силы тяжести. Значительное внимание уделено описанию методов численного моделирования двухфазных течений, описывающих на различном иерархическом уровне межфазную границу, межфазные взаимодействия и турбулентность несущей сплошной среды.

1. НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕЖЧАСТИЧНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Здесь кратко описаны лишь некоторые характеристики процесса межчастичных столкновений: частота и ядро столкновений, время между столкновениями, длина свободного пробега, столкновительное число Стокса.

Частота столкновений рассматриваемой i -й частицы со всеми другими частицами f_i при большом количестве частиц в двухфазной систе-

ме пропорциональна числовой концентрации (среднему числу частиц в единице объема) N

$$f_i = \beta N,$$

где β – ядро столкновений. Эта величина получила указанное название, поскольку присутствует в качестве подынтегральной функции (ядра) в уравнении для изменения (эволюции) размера частиц вследствие коагуляции.

Число столкновений частиц, принадлежащих к разным сортам, в единице объема в единицу времени определяется как $F = f_{ij}N = f_{ji}N = \beta N_i N_j$. Здесь f_{ij}, f_{ji} – частоты столкновений соответственно частицы сорта i с частицами сорта j и частицы сорта j с частицами сорта i ; N_i, N_j – средние числовые концентрации частиц сортов i и j соответственно.

Важной характеристикой движения частиц является среднее время между соударениями τ_p , определяемое как $\tau_i = 1/f_i$. Времена между соударениями частиц, принадлежащих к разным сортам, определяются как $\tau_{ij} = 1/f_{ij}$ и $\tau_{ji} = 1/f_{ji}$, где τ_{ij}, τ_{ji} – времена между последовательными столкновениями соответственно частицы сорта i с частицами сорта j и частицы сорта j с частицами сорта i .

Одним из ключевых понятий молекулярной физики является понятие средней длины свободного пробега молекулы, т.е. среднего расстояния, которое пролетает молекула от одного столкновения до следующего. По аналогии с этим понятием в теории двухфазных потоков широко используется термин длина «свободного пробега» частиц. Если известно значение средней скорости частиц, то легко определить средние длины свободного пробега частиц сортов i и j между последовательными столкновениями как $l_{ij} = |\mathbf{v}_i| \tau_{ij}$ и $l_{ji} = |\mathbf{v}_j| \tau_{ji}$.

Процесс релаксации скоростей сталкивающихся частиц (капель) может быть охарактеризован столкновительным числом Стокса [9, 10], которое запишем в следующем виде:

$$\text{Stk}_c = \frac{\tau_p}{\tau_i},$$

где τ_p – время динамической релаксации частиц; τ_i – характерное время между последовательными соударениями. Время динамической релаксации является комплексной характеристикой инерционности дисперсной фазы и представляется как $\tau_p = \tau_{p0} / C(\text{Re}_p) = \rho_p d_p^2 / (18\mu C(\text{Re}_p))$. Здесь τ_{p0} – время релаксации стоксовой частицы, ρ_p и d_p – плотность материала частицы и ее диаметр соответственно. Корректировочная функция $C(\text{Re}_p)$ учитывает влияние сил инерции на время релаксации нестоксовой частицы. Число Рейнольдса частицы вычисляется по относитель-

ной скорости между фазами и диаметру дисперсной примеси, т.е. $Re_p = |\mathbf{w}| d_p / \nu = |\mathbf{u} - \mathbf{v}| d_p / \nu$.

Столкновительное число Стокса определяет степень влияния соударений на движение частиц [11]. Схематические распределения скорости сталкивающейся частицы от времени для различных диапазонов изменения столкновительного числа Стокса приведены на рис. 1. Имеют место два предельных случая. Если время динамической релаксации дисперсных включений пренебрежимо мало по сравнению со временем между последовательными столкновениями, т.е. $Stk_c \rightarrow 0$, то частицы быстро восстанавливают свою первоначальную скорость. В этом слу-

чае соударения практически не оказывают влияния на динамику частиц. В другом предельном случае время между столкновениями намного меньше времени динамической релаксации частиц, т.е. $Stk_c \rightarrow \infty$, и их движение в значительной степени определяется процессами межчастичных столкновений.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕЖЧАСТИЧНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Целью теоретического анализа процесса столкновений частиц является нахождение ядра их столкновений. Эта характеристика напрямую связана с частотой соударений частиц – одной из ключевых характеристик процесса межчастичных столкновений (см. разд. 1). В данном разделе будут рассмотрены два возможных подхода (формулировки) к определению ядра столкновений частиц.

2.1. Понятие о цилиндре столкновений

Рассмотрим столкновения частиц сортов i и j с радиусами r_{pi} и r_{pj} . Согласно данному подходу, вводится понятие о «цилиндре столкновений». Центр частицы радиусом r_{pi} находится на оси цилиндра с радиусом, равным сумме радиусов соударяющихся частиц, т.е. $\sigma = r_{pi} + r_{pj}$. В момент столкновения центр частицы сорта j находится на поверхности «цилиндра столкновений» (рис. 2).

В рамках цилиндрической формулировки ядро столкновений β связывается с полной относительной скоростью двух частиц $|\overline{\mathbf{w}}|$ и радиусом столкновений σ , равным для одинаковых частиц их диаметру d_p , следующим образом:

$$\beta = \pi \sigma^2 |\overline{\mathbf{w}}|. \quad (1)$$

Из (1) видно, что ядро столкновений равно объему цилиндра с площадью поперечного сечения $\pi \sigma^2$ и высотой, численно равной средней относительной скорости частиц различных сортов $|\overline{\mathbf{w}}|$.

Отметим, что целый ряд развитых аналитических моделей столкновений частиц (например, [12–15]) основан на широко распространенной в статистической механике цилиндрической формулировке задачи. Заметим, что в случае столкновения жидких частиц (капель), когда процесс столкновения осложняется, возможен переход частиц из одного сорта в другой (например, вследствие коагуляции капель).

2.2. Понятие о сфере столкновений

Аналогично тому, как это делалось выше, рассмотрим столкновения частиц сортов i и j с радиусами r_{pi} и r_{pj} . Согласно рассматриваемому подходу,

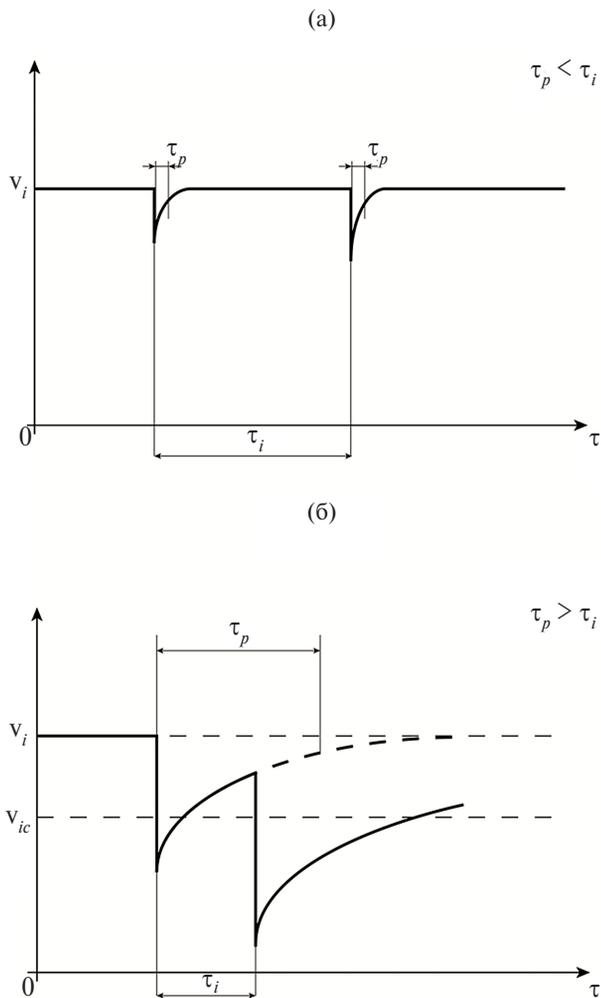


Рис. 1. Схематическое представление распределения скорости сталкивающейся частицы от времени (различные случаи): (а) – межчастичные столкновения практически не оказывают влияния на скорость частицы ($Stk_c < 1$), (б) – оказывают значительное влияние на скорость частицы ($Stk_c > 1$); v_i – исходное значение скорости частицы, v_{ic} – скорость частицы с учетом столкновений.

вводится понятие о «сфере столкновений». Центр данной сферы находится в центре частицы радиусом r_{pi} , а радиус сферы равен сумме радиусов соударяющихся частиц, $\sigma = r_{pi} + r_{pj}$. В момент столкновения центр частицы сорта j находится на поверхности «сферы столкновений» (рис. 3).

В рамках сферической формулировки задачи ядро столкновений β выражается через осредненную радиальную компоненту относительной скорости $|\overline{w}_r|$ и радиус столкновений σ , равный для одинаковых частиц их диаметру d_p , при помощи соотношения

$$\beta = 2\pi\sigma^2 |\overline{w}_r|, \quad (2)$$

где $w_r = \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}$ – радиальная компонента их относительной скорости $\mathbf{w} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$; \mathbf{r} – единичный вектор, направленный по линии удара от центра частицы i к центру частицы j .

Из (2) видно, что ядро столкновений определяется как среднее значение объема газа, входящего в «сферу столкновений» за единицу времени. Так как внутри «сферы столкновений» нет источников (стоков), то объемы входящего и выходящего из нее газа должны быть равны между собой. Вследствие этого ядро столкновений, определяемое (2) как среднее значение входящего объема газа, находится как произведение половины поверхности «сферы столкновений» $2\pi\sigma^2$ и осредненного значения радиальной компоненты относительной скорости $|\overline{w}_r|$.

Разница этих формулировок для малых частиц связана с отличием продольной и поперечной структурных функций при малых расстояниях между двумя точками [16]. Проще говоря, эта разница определяется неравенством интенсивностей пульсаций относительных скоростей сталкивающихся частиц в разных направлениях. В пионерской работе [17] делается вывод о том, что вид функции плотности вероятности (ФПВ) относительной скорости частиц, используемый при анализе, во многом определяет применимость той или иной формулировки. Однако, как показано в [18, 19], более корректной для ряда задач, например для определения частоты столкновений малоинерционных частиц в турбулентном потоке, является сферическая формулировка. Сделан вывод, что сферическое рассмотрение задачи является более общим, а цилиндрическая постановка приводит к сходным результатам только в некоторых частных случаях. Рассмотрим эти частные случаи ниже.

Проанализируем процессы столкновений частиц при их хаотическом движении и осаждении под действием силы тяжести с использованием обоих описанных выше подходов (формулировка) [20].

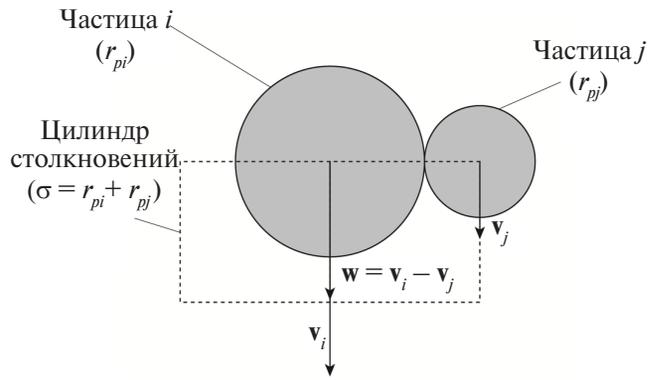


Рис. 2. Иллюстрация одного из подходов в теории столкновений частиц, основанного на понятии о цилиндре столкновений.

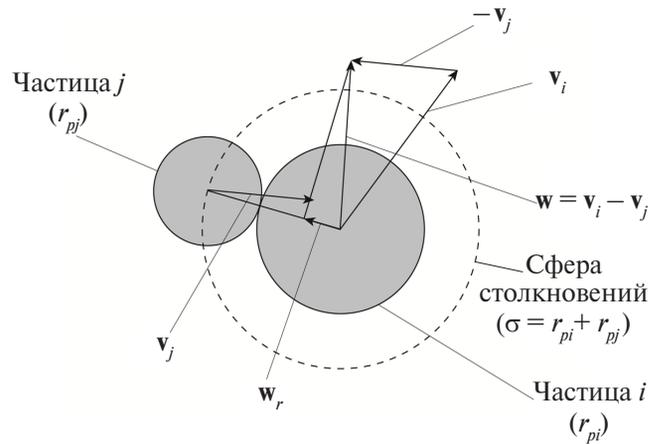


Рис. 3. Иллюстрация одного из подходов в теории столкновений частиц, основанного на понятии о сфере столкновений.

2.3. Столкновения

хаотически движущихся молекул (частиц)

В этом случае отсутствует пространственная корреляция скоростей частиц, т.е.

$$\overline{w_x^2} = \overline{w_y^2} = \overline{w_z^2} = \lambda^2.$$

Запишем выражение для ФПВ относительной скорости частиц \mathbf{w} как

$$p(\mathbf{w}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\lambda)^3} \exp\left(-\frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}{2\lambda^2}\right). \quad (3)$$

Используя (3), найдем величину осредненного значения относительной скорости частиц как

$$|\overline{\mathbf{w}}| = \int_0^\infty w p(\mathbf{w}) 4\pi w^2 dw = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda = 2 |\overline{w}_r|, \quad (4)$$

где $w = |\mathbf{w}|$. Из (4) получаем выражения для осредненных значений радиальной компоненты относительной скорости и вектора относительной скорости

$$|\overline{w}_r| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \text{ и } |\overline{\mathbf{w}}| = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2) и (1) соответственно, приходим к одному и тому же соотношению для ядра столкновений [17]

$$\beta = \sqrt{8\pi} \sigma^2 \lambda.$$

Из этого следует вывод, что обе формулировки (сферическая и цилиндрическая) равнозначны при анализе столкновений хаотически движущихся частиц.

2.4. Столкновения частиц при гравитационном осаждении

В этом случае относительная скорость частиц $\mathbf{w} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ (относительная скорость витания частиц) постоянна и равна $\mathbf{w} = (|\mathbf{w}|, 0, 0)$. Используя цилиндрическую постановку задачи, из (1) имеем

$$\beta = \pi \sigma^2 |\mathbf{w}|. \quad (6)$$

Для сферической формулировки можно получить [17]

$$\beta = \pi \sigma^2 \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \sin \varphi |\mathbf{w} \cos \varphi| d\varphi = \pi \sigma^2 |\mathbf{w}|. \quad (7)$$

Здесь ψ – азимутальный угол между вектором \mathbf{r} , соединяющим центры сталкивающихся частиц, и осью \mathbf{z} , направленной вертикально вверх; φ – полярный угол в плоскости (x, y) .

Сравнивая полученные выражения (6) и (7), приходим к выводу о равнозначности обеих формулировок для случая гравитационного осаждения частиц.

Можно сделать заключение, когда имеется пространственная корреляция скоростей частиц (отсутствует преимущественное направление движения), использование сферической формулировки является более корректным.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЖЧАСТИЧНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

В этом разделе описываются развитые аналитические подходы по нахождению ядер столкновений частиц в турбулентных потоках. Необходимо отметить, что турбулентность – один из механизмов, приводящих к столкновениям частиц друг с другом. Определение частоты столкновений частиц в турбулентных потоках представляет большой интерес для анализа целого ряда промышленных и метеорологических [21–24] процессов.

Для вычисления частоты столкновений частиц и соответствующих «столкновительных членов» в уравнениях для характеристик дисперсной фазы обычно используются два основных допущения: 1) учитываются только парные

столкновения; 2) процесс столкновений является марковским, т.е. не зависящим от предыдущих столкновений.

Определение ФПВ распределения скоростей двух частиц с учетом описанных допущений может быть сделано двумя способами [16]. В первом способе делается дополнительное допущение о некоррелированности (независимости) движения сталкивающихся частиц по аналогии с процессом столкновений молекул в кинетической теории газов [25–27]. В этом случае двухчастичная ФПВ находится как произведение одночастичных ФПВ. Однако такой способ может использоваться для описания столкновений лишь относительно инерционных частиц, время релаксации которых много больше характерного времени взаимодействия с турбулентными вихрями, т.е. $\tau_p \gg T_{pL}$. Движение таких частиц не коррелировано и аналогично хаотическому движению молекул. Вторым способом является моделирование процесса столкновений двух частиц с учетом коррелированности их пульсационного движения из-за взаимодействия с турбулентными вихрями несущего потока. Коррелированность движения частиц должна учитываться в случае, если $\tau_p / T_{pL} \leq 1$.

3.1. Монодисперсные частицы в однородной изотропной турбулентности

Относительно простые аналитические решения задачи о нахождении ядра столкновений частиц в турбулентных потоках могут быть получены в рамках приближения однородной изотропной турбулентности (homogeneous isotropic turbulence, HIT).

Взаимодействие инерционных частиц с турбулентными вихрями приводит к двум основным явлениям, дающим вклад в ядро столкновений [16]: 1) появление относительной скорости между соседними частицами (турбулентный транспортный эффект); 2) возникновение неоднородного распределения частиц в пространстве (эффект кластеризации). Эффект кластеризации или аккумуляции проявляется себя как тенденция к росту концентрации частиц в областях малой завихренности вследствие действия центробежной силы [28–30]. Указанная сила возникает при движении частиц в турбулентных вихрях различных масштабов.

В пионерской работе [17] получено аналитическое решение задачи в предельном случае безинерционных частиц. Теория [17] справедлива для частиц, у которых $\tau_p < \tau_K$ (τ_K – колмогоровский временной масштаб турбулентности). Такие частицы отслеживают все турбулентные пульсации скорости несущего газа и вовлекаются в движение самих мелких вихрей.

В другой, более поздней, но также ставшей классической, работе [31] получено аналитическое решение задачи в другом предельном случае высокоинерционных частиц. Теория [31] справедлива для частиц, у которых $\tau_p \gg T_L$ (T_L – лагранжев временной макромасштаб турбулентности). Для таких частиц достаточно учитывать их взаимодействие с энергосодержащими вихрями, а вкладом взаимодействия с мелкомасштабной турбулентностью в ядро столкновений можно пренебречь.

Максимальная сложность в определении ядра столкновений возникает в случае наличия в потоке частиц средней инерционности ($\tau_k \leq \tau_p \leq T_L$), когда необходимо учитывать взаимодействие частиц со всем спектром турбулентных вихрей. Статистическая модель турбулентных столкновений, справедливая во всем диапазоне инерционности частиц, была развита в [32–34].

Кратко опишем основные положения модели [32–34]. Для определения $|\overline{w_r}|$, необходимой для нахождения ядра столкновений (4), плотность вероятности пульсационной составляющей радиальной относительной скорости $p(w_r)$ задается распределением Гаусса. Интенсивность пульсаций радиальной скорости двух частиц при соударении принималась равной $\overline{w_r'^2} = 2v'^2(1 - \zeta_{12})$. Здесь v'^2 – интенсивность пульсаций скоростей частиц, $\zeta_{12} = \xi^2 F(\sigma)$ – коэффициент корреляции скоростей двух соударяющихся частиц из-за их взаимодействия с турбулентными вихрями несущего газа (ξ – коэффициент корреляции скоростей несущего газа и частицы, $F(\sigma)$ – продольная компонента эйлеровой двухточечной корреляционной функции пульсаций скоростей).

Итоговое соотношение для определения ядра столкновений имеет вид

$$\beta = 4\pi^{1/2} \sigma^2 v' [1 - f_u F(\sigma)]^{1/2}, \quad (8)$$

где

$$f_u = \xi^2, \quad F(\sigma) = 1 - \frac{\overline{\sigma^2}}{60^{1/2} \text{Re}_\lambda},$$

$$\overline{\sigma} = \frac{\sigma}{\eta}, \quad \text{Re}_\lambda = \left(\frac{15u'^4}{\epsilon v} \right)^{1/2}.$$

Здесь f_u – коэффициент вовлечения частиц в турбулентное движение несущего газа, Re_λ – число Рейнольдса, определяемое с использованием тейлоровского масштаба турбулентности, $\eta = (v^3/\epsilon)^{1/4}$ – колмогоровский пространственный микромасштаб, v – кинематическая вязкость, ϵ – скорость диссипации энергии турбулентности, u'^2 – интенсивность пульсаций скоростей несущего газа.

Некоторые предельные случаи. Рассмотрим некоторые предельные случаи, вытекающие из (8). Для безынерционных частиц ($\tau_p = 0, f_u = 1, v' = u'$) выражение (8) преобразуется к классическому выражению [17]

$$\beta_{ST} = \left(\frac{8\pi\epsilon}{15v} \right)^{1/2} \sigma^3. \quad (9)$$

Для инерционного интервала изменения времени релаксации частиц ($\tau_k \ll \tau_p \ll T_L$) в пределе больших чисел Рейнольдса ($\text{Re}_\lambda \rightarrow \infty$) в соответствии с колмогоровской теорией локального подобия [35] в инерционном интервале структурная функция представляется известным образом, что приводит к следующим соотношениям [16] для лагранжевой корреляционной функции $\Psi_L(\tau)$ и коэффициента вовлечения частиц f_u

$$\Psi_L(\tau) = 1 - \frac{C_{0\infty} \epsilon \tau}{2u'^2}, \quad f_u = 1 - \frac{C_{0\infty} \epsilon \tau_p}{2u'^2}, \quad (10)$$

где $C_{0\infty}$ – константа, τ – время.

Подстановка (10) в (8) для ядра столкновений в инерционном интервале приводит к соотношению

$$\beta = b_1 (\epsilon \tau_p)^{1/2} \sigma^2, \quad b_1 = (8\pi C_{0\infty})^{1/2}.$$

В предельном случае высокоинерционных частиц ($\tau_p \rightarrow \infty, f_u \rightarrow 0$) формула (8) переходит к виду [31]

$$\beta_A = 4\pi^{1/2} v' \sigma^2. \quad (11)$$

3.2. Монодисперсные частицы в градиентном турбулентном потоке

Ниже описаны результаты [36], где анализируется процесс столкновений частиц, обусловленный совместным влиянием турбулентных пульсаций несущего газа и осредненной составляющей скорости одной частицы относительно другой. В этом случае для определения средней радиальной компоненты относительной скорости $|\overline{w_r}|$ необходимо выполнить осреднение по случайному распределению w_r и телесному углу, который характеризует пространственную ориентацию вектора скорости \mathbf{w} относительно вектора \mathbf{r} , соединяющего центры сталкивающихся частиц

$$|\overline{w_r}| = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty |w_r| p(w_r) \sin\varphi \, d\psi \, d\varphi \, dw_r, \quad (12)$$

где ψ – азимутальный угол между вектором \mathbf{r} и осью \mathbf{z} , направленной вертикально вверх; φ – полярный угол в плоскости (x, y) .

Далее в [36] выполнено интегрирование (12) по w_r при допущении, что плотность вероятности пульсационной составляющей радиальной

относительной скорости $p(w_r)$ задается распределением Гаусса. В результате интегрирования было получено

$$\begin{aligned} |\overline{w_r}| = & \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi & \left[\left(\frac{2w_r'^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{W_r^2}{2w_r'^2}\right) + W_r \operatorname{erf} \frac{W_r}{2w_r'^2} \right] \times \\ & \times \sin\phi d\psi d\phi, \end{aligned} \quad (13)$$

где $w_r = W_r + w_r'$ (W_r и w_r' – осредненная и пульсационная компоненты радиальной составляющей относительной скорости), а $w_r'^2$ – средний квадрат w_r' . В частном случае, когда отсутствует осредненная относительная скорость $W_r = 0$ соотношение (13) переходит в $|\overline{w_r}| = (2w_r'^2/\pi)^{1/2}$ для случая, рассмотренного в разд. 3.1.

Обычно поле осредненной скорости газа задается в виде однородного сдвига $\mathbf{U} = (sz, 0, 0)$. Примем допущение о том, что частицы полностью отслеживают осредненное движение несущей фазы, т.е. $\mathbf{V} = \mathbf{U}$. В этом случае радиальная компонента относительной скорости w_r , обусловленная сдвигом скорости и действием силы тяжести, будет иметь следующий вид:

$$W_r = s\sigma \cos\psi \sin\phi \cos\phi, \quad (14)$$

где σ – радиус сферы столкновений ($\sigma = r_{pi} + r_{pj}$). Далее из (2) и (13) с учетом (14) в [36] получено выражение для β , учитывающее влияние сдвига скорости, в виде ряда. Не будем здесь приводить конечное соотношение для β из-за его громоздкости. При $(sR)^2/w_r'^2 \rightarrow \infty$ найденный ряд сводится к классическому решению [37]

$$\beta_s = \frac{4}{3} s\sigma^3. \quad (15)$$

Также в [36] предложена следующая простая аппроксимация полученного громоздкого выражения

$$\beta = (\beta_t + \beta_s)^{1/2},$$

где β_t – турбулентная составляющая суммарного ядра столкновений, β_s – составляющая ядра столкновений за счет сдвига скорости (определяется по соотношению (15)).

3.3. Бидисперсные частицы в однородной изотропной турбулентности

Рассмотрим столкновения в бидисперсной системе частиц, состоящей из частиц двух сортов. Все величины, относящиеся к частицам первого сорта, будем обозначать нижним индексом 1, а к частицам второго сорта – нижним индексом 2. Рассмотрение такой системы имеет большое практическое значение, так как отно-

сительно легко обобщается на общий случай полидисперсной системы частиц [11]. Ниже приводятся основные положения обобщения аналитической модели для турбулентного ядра столкновений монодисперсных частиц, рассмотренной в разд. 3.1, на бидисперсную систему [38–40].

Необходимо отметить, что описываемая модель справедлива во всем диапазоне инерционности частиц, так как учитывает взаимодействие частиц с турбулентными вихрями всех масштабов. Основные допущения модели: 1) одноточечная ФПВ скоростей газа и частицы представляется в виде нормального распределения; 2) двухточечная ФПВ скорости газа предполагается гауссовой; 3) ФПВ скоростей двух частиц определяется путем введения совместной двухточечной ФПВ скоростей жидкости и частиц в соответствии с подходом [32].

Интегрированием двухчастичной ФПВ по нормальным к вектору скорости, соединяющему центры частиц, компонентам скоростей в [16] получена ФПВ для распределения радиальных компонент скоростей частиц. Двухчастичная ФПВ приводит к следующему выражению для радиальной компоненты относительной скорости пары частиц с интенсивностью пульсаций радиальной скорости двух частиц при контакте [16]

$$\overline{w_r'^2} = v_1'^2 + v_2'^2 - 2\zeta_{12}v_1'v_2', \quad (16)$$

где $\zeta_{12} = (f_{u1}f_{u2})^{1/2}F(\sigma)$ – коэффициент корреляции радиальных компонент скоростей сталкивающихся частиц.

Из (16) видно, что коэффициент корреляции скоростей частиц при контакте (столкновении) равен произведению среднегеометрического из коэффициентов вовлечения частиц в турбулентное движение и корреляционной функции, принимающей во внимание пространственную коррелированность скорости жидкости на расстоянии радиуса столкновений σ .

С учетом $|\overline{w_r}| = (2\overline{w_r'^2}/\pi)^{1/2}$ и (16) радиальная относительная скорость сталкивающихся частиц равна [16]

$$|\overline{w_r}| = \left[\frac{2}{\pi} (f_{u1} + f_{u2} - 2f_{u1}f_{u2}F(\sigma)) \right]^{1/2} u'. \quad (17)$$

Для малоинерционных частиц ($d_p < \eta$) подстановка $F(\sigma)$ из (8) и (17) в (2) дает следующее выражение для ядра столкновений:

$$\begin{aligned} \beta = & (8\pi\overline{w_r'^2})^{1/2} = (8\pi)^{1/2} \sigma^2 u' \times \\ & \times \left[f_{u1} + f_{u2} - 2f_{u1}f_{u2} \left(1 - \frac{\overline{\sigma}^2}{60^{1/2} \operatorname{Re}_\lambda} \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

В случае монодисперсных частиц (18) переходит в (8).

Некоторые предельные случаи. Рассмотрим некоторые частные случаи, вытекающие из (18). Для безынерционных частиц сорта 2 ($\tau_{p2} = 0, f_{u2} = 1$) выражение (18) приобретает следующий вид:

$$\beta = (8\pi)^{1/2} \sigma^2 u' \left(1 - f_{u1} + \frac{f_{u1} \sigma^{-2}}{15^{1/2} \text{Re}_\lambda} \right)^{1/2}.$$

Если частицы группы 1 также безынерционны ($\tau_{p1} = 0, f_{u1} = 1$), то выражение (18) переходит в полученную в [17] классическую формулу (9).

Для инерционного интервала изменения времен динамической релаксации частиц ($\tau_k \ll \tau_{pa} \ll T_L$) при больших числах Рейнольдса ($\text{Re}_\lambda \rightarrow \infty$) с учетом соотношения (10) ядро столкновений (18) записывается как

$$\beta = 2\sigma^2 \left[\pi C_{0\infty} \varepsilon (\tau_{p1} + \tau_{p2}) \right]^{1/2}.$$

В предельном случае высокоинерционных частиц их движение оказывается полностью некоррелированным ($\zeta_{12} \rightarrow 0$) и выражение (18) приводит к ядру столкновений [31]

$$\beta_A = (8\pi)^{1/2} \sigma^2 (v_1'^2 + v_2'^2)^{1/2},$$

являющемуся аналогом (11) для случая бидисперсных частиц.

3.4. Бидисперсные частицы в однородной изотропной турбулентности при наличии осредненной относительной скорости

В [16] найдено ядро столкновений частиц в результате одновременного действия двух эффектов – турбулентности и средней относительной скорости между частицами различных групп. В качестве причины возникновения осредненной скорости рассмотрено действие силы тяжести. Для нахождения $|\overline{w_r}|$ поступим аналогичным образом (см. разд. 3.2). С этой целью необходимо выполнить осреднение по случайному распределению w_r и телесному углу, который характеризует пространственную ориентацию вектора скорости \mathbf{w} относительно вектора \mathbf{g} , соединяющего центры сталкивающихся частиц согласно (12). В результате интегрирования с учетом гауссова распределения для пульсационной составляющей радиальной компоненты относительной скорости получим выражение (13).

Обусловленная силой тяжести радиальная компонента осредненной относительной скорости двух частиц определяется как $W_r = W_g \cos\varphi$, где $W_g = |\tau_{p2} - \tau_{p1}| g$ – разность скоростей седиментации (осаждения) двух частиц, g – ускоре-

ние силы тяжести. С учетом этого интегрирование (13) и последующая подстановка в (2) приводят к следующему выражению для ядра столкновений, учитывающему суммарное влияние турбулентности и силы тяжести:

$$\beta = (8\pi \overline{w_r'^2})^{1/2} \sigma^2 \times \left[\frac{\exp(-\Omega^2)}{2} + \frac{\pi^{1/2}}{2} \left(\Omega + \frac{1}{2\Omega} \right) \text{erf } \Omega \right], \quad (19)$$

где $\Omega = W_g / (2\overline{w_r'^2})^{1/2}$ – параметр, учитывающий отношение эффектов влияния гравитации и турбулентности на ядро столкновений.

При малых значениях Ω из (19) следует соотношение для ядра столкновений, совпадающее с решением [17] при слабом влиянии гравитации

$$\beta = \beta_t (1 + \Omega^2 / 3),$$

где β_t – турбулентная составляющая ядра столкновений (18).

В другом предельном случае ($\Omega \rightarrow \infty$) выражение (19) переходит в известное соотношение [11, 16] для ядра столкновений частиц под действием силы тяжести

$$\beta_g = \pi \sigma^2 W_g.$$

В [24] отмечается, что соотношение (19) справедливо для учета эффекта осредненной относительной скорости на ядро столкновений в изотропной турбулентности не только силы тяжести, но и любой другой внешней силы, вызывающей относительное движение частиц. Выражение (19) впервые было получено в [31] и затем воспроизведено в [36, 40, 41].

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЖЧАСТИЧНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ

В последние десятилетия наблюдается колоссальный рост интереса многочисленных групп исследователей к математическому моделированию двухфазных течений различных классов (газ–твердые частицы, газ–капли, жидкость–твердые частицы, жидкость–пузыри). На сегодняшний день развиты десятки подходов математического моделирования двухфазных потоков.

На рис. 4 предпринята попытка представления лишь основных концепций моделирования двухфазных течений, в основу которых положены различные иерархические уровни описания турбулентности несущей фазы, межфазной границы и межфазных взаимодействий.

4.1. Классификация методов численного моделирования

Математические модели могут иметь различный уровень описания турбулентности несущего газа [8, 42] от осредненных по Рейнольд-

дсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds-averaged Navier–Stokes equations (RANS)), когда расчету подлежат только поля осредненных характеристик турбулентности, до метода крупных вихрей (large-eddy simulation (LES)) и прямого численного моделирования (direct numerical simulation (DNS)), когда разрешаются только крупные вихри и вихри всех масштабов (вплоть до колмогоровского) соответственно (рис. 4).

Математические модели могут иметь различный уровень разрешения межфазной границы (см. рис. 4). Лагранжевы методы (particle-point (PP-methods)) описания являются самыми старыми методами описания движения частиц. Эти методы можно использовать для расчетов движения миллионов частиц. Условием применимости лагранжевых подходов является малость размера частиц по сравнению с колмогоровским пространственным масштабом. В этом случае частицы могут рассматриваться как точечные. Методы с разрешением межфазной границы (particle-resolved (PR-methods)), при которых разрешается обтекание каждой частицы. При этом поведение каждой частицы определяется как внешними действующими силами, так и силой аэродинамического сопротивления со стороны несущего газа, определяемой в процессе расчета. Данный метод применим также к расчету более сложных двухфазных течений, несущих капли или пузыри, когда межфазная поверхность может деформироваться. Эта деформация рассчитывается с использованием аэродинамической силы, вычисляемой в процессе расчета. Хорошо известным ограничением этого метода является следующее обстоятельство. Рассчитать движение газа вокруг каждой частицы возможно в том случае, когда шаг расчетной сетки мал по сравнению с размером частицы. При-

менение этого метода осложняется, когда размер частиц превышает размер наиболее мелких турбулентных вихрей (колмогоровский микро-масштаб) и количество частиц велико.

Величина объемной концентрации частиц Φ (безразмерная величина) предопределяет необходимый уровень описания межфазного взаимодействия [6, 7] (рис. 4): 1) режим движения одиночных частиц ($\Phi \leq 10^{-6}$), когда их присутствие не оказывает обратного влияния на характеристики несущего газа («one-way coupling», OWC); 2) режим слабозапыленного течения (dilute two-phase flows) ($10^{-6} \leq \Phi \leq 10^{-3}$) с обратным влиянием частиц («two-way coupling», TWC); 3) режим сильнозапыленного течения (dense two-phase flows) ($\Phi > 10^{-3}$), когда существенную роль играют столкновения частиц между собой («four-way coupling», FWC).

Предметом настоящего обзора являются двухфазные течения, несущие дисперсную примесь в виде твердых частиц, при наличии межчастичных столкновений FWC. Исторически сложилось так, что первые работы, связанные с моделированием двухфазных газовых потоков с твердыми частицами, были посвящены OWC. Это понятно, так как такие расчеты являются наиболее простыми. Цель этих расчетов – получить характеристики движения частиц в известном (или предварительно рассчитанном) поле скоростей (температур) несущего газа. С ростом концентрации частиц они начинают оказывать обратное влияние на характеристики течения несущего газа, т.е. необходимо проведение TWC.

Отметим, что в большинстве ранних работ характеристики газа рассчитывались на основе подхода, основанного на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье–Стокса (RANS) (например, [43, 44]).

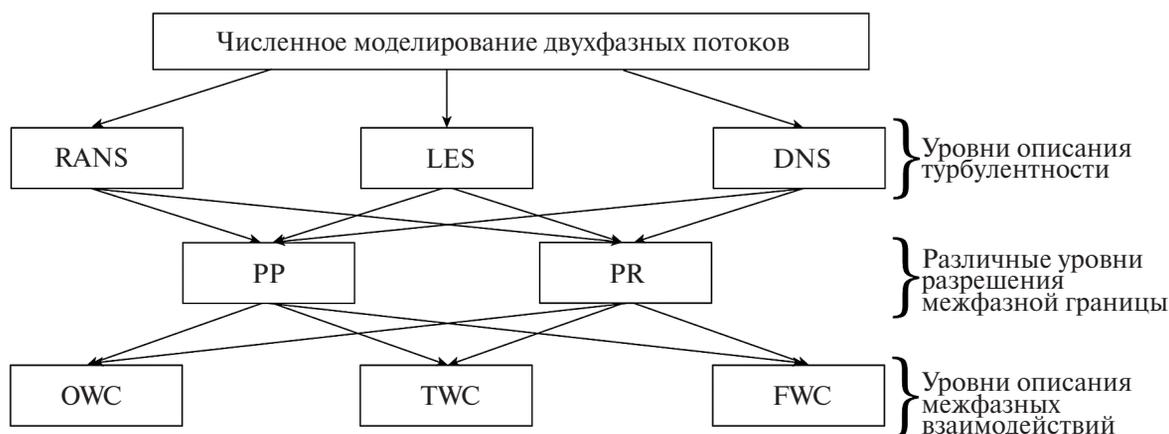


Рис. 4. Классификация методов численного моделирования двухфазных потоков, основанная на различных иерархических уровнях описания турбулентности несущей фазы, межфазной границы и межфазных взаимодействий.

4.2. Метод крупных вихрей (LES)

С развитием быстродействующих компьютеров пришло время метода крупных вихрей (LES) и прямого численного моделирования (DNS) для описания турбулентного течения несущего газа.

Метод LES похож на метод DNS, но используемая расчетная сетка намного крупнее. Мелкие вихри аппроксимируют подсеточными моделями турбулентности, среди которых динамическая модель вихревой вязкости Смагоринского [45] и многие другие [46–48]. Развитие моделей LES тоже происходило от простого (OWC) к сложному (TWC). Так, примерами расчетов PP–OWC–LES являются работы [49–51], в которых изучалась дисперсия частиц в турбулентных потоках. Обратное влияние частиц на характеристики течения газа с использованием подхода PP–TWC–LES изучено в работе [52] для случая вынужденной однородной изотропной турбулентности (FHIT).

Приведем описание и краткий анализ работ, в которых учитывались межчастичные столкновения.

Метод PP–FWC–LES использован для учета столкновений частиц в [10] при исследовании двухфазного потока в вертикальном канале при $Re_\tau = 644$ и значении объемной концентрации вплоть до $\Phi = 1.4 \times 10^{-4}$. Учитывалось влияние силы сопротивления, силы тяжести, а также подъемных сил (вследствие наличия сдвига скорости газа и вращения частиц) на поведение частиц. Для учета столкновений частиц использовалась детерминистская модель. Сделан вывод о существенном влиянии межчастичных столкновений на статистические характеристики движения частиц, включая величину концентрации.

В [53] методом PP–FWC–LES выполнены расчеты двухфазного потока в канале при очень высокой объемной концентрации частиц $\Phi = 1.3 \times 10^{-2}$. Среди всего многообразия сил во внимание принимались только сила сопротивления и сила тяжести. Расчеты показали, что частицы оказывают колоссальный эффект на турбулентность, приводя к утончению пограничного слоя, увеличению пульсаций скорости газа в продольном направлении и, наоборот, к снижению пульсаций газа в двух других направлениях.

В [54] рассчитаны параметры двухфазного потока в канале при объемной концентрации частиц $\Phi = 4.8 \times 10^{-4}$ и расходном числе Рейнольдса $Re = 42000$, построенном по высоте канала. Авторы рассмотрели отдельно эффекты обратного влияния частиц на газ и межчастичные столкновения (PP–TWC–LES и PP–FWC–LES). Также был сделан акцент на использовании различных моделей столкновений частиц (модель твердых

и мягких сфер), различного состояния стенки (гладкая и шероховатая) и различных моделей подсеточной вязкости (модель Смагоринского и динамическая модель). Результаты расчетов показали, что различия при использовании разных столкновительных и подсеточных моделей незначительны. В то же время учет столкновений частиц и шероховатости стенки приводит к лучшему совпадению с имеющимися экспериментальными данными.

В [55] выполнено PP–FWC–LES для двухфазного потока с частицами при объемной концентрации последних $\Phi = 7.3 \times 10^{-5}$ и расходном числе Рейнольдса $Re = 11900$, построенном по полувысоте канала. Авторами была использована подсеточная модель, развитая ранее в [56], в уравнении движения для частиц, а также детерминистская модель для расчета межчастичных столкновений. Показано, что при такой незначительной объемной концентрации частиц их влияние на турбулентность газа пренебрежимо мало. В то же время обнаружено, что влияние столкновений частиц играет значительную роль. Найдено хорошее соответствие результатов с данными DNS, описанными в [57], а также с экспериментальными данными.

Авторы [56] позже выполнили PP–FWC–LES–расчеты двухфазного потока [58] в горизонтальной трубе при числе Рейнольдса $Re = 120000$, построенном по диаметру трубы. Особенностью этого исследования был учет полидисперсности частиц и их вращения, а также учета помимо силы сопротивления подъемной силы Сэфмена и силы Магнуса. Шероховатость стенки моделировалась посредством введения коэффициентов восстановления нормальной и тангенциальной скоростей, отличных от единицы, а также путем учета так называемого теневого эффекта при малых углах соударения со стенкой.

В [59] выполнено PP–FWC–LES двухфазного потока в канале при наличии эффектов агломерации частиц. Основным приемом, позволяющим учитывать появление в потоке агломератов частиц после их соударения, заключается во введении силы Ван-дер-Ваальса, отвечающей за явление когезии.

4.3. Прямое численное моделирование (DNS)

К настоящему времени имеется значительное количество работ, в которых исследователи изучали различные проблемы физики двухфазных потоков с использованием метода DNS и описанием на различных уровнях межфазных взаимодействий и межфазной границы.

Работа [60] – одно из первых исследований поведения точечных частиц (PP–OWC–DNS) в затухающей однородной изотропной турбулент-

ности (ДНІТ). Изучалось движение относительно небольшого числа частиц (432 частицы) при очень небольшом числе Рейнольдса ($Re_\lambda < 35$). В уравнениях движения частиц учитывалось лишь линейное аэродинамическое сопротивление. В более поздних исследованиях [61, 62], посвященных изучению движения частиц, как в вынужденной однородной изотропной турбулентности (ФНІТ), так и в затухающей однородной изотропной турбулентности (ДНІТ) акцент делался на изучение возможностей различных методов интерполяции (линейная интерполяция, интерполяция Лагранжа высокого порядка, эрмитова интерполяция) скорости газа в месте расположения частицы.

Более сложный случай турбулентного двухфазного потока – турбулентное течение в канале – рассмотрен в работах [63, 64], где помимо силы аэродинамического сопротивления учитывалась также сила Сэфмена [63], а для интерполяции скорости газа в месте нахождения частицы использован более совершенный псевдоспектральный метод интерполяции Фурье–Чебышева [64]. К настоящему времени имеются многочисленные исследования двухфазных потоков методом PP–OWC–DNS в каналах и трубах [65–68], ФНІТ [28, 69] и ДНІТ [70].

С ростом концентрации частиц они начинают оказывать обратное влияние на характеристики течения несущего газа (см. разд. 4.1), т.е. необходимо проведение TWC–DNS. Это привносит дополнительные сложности при математическом моделировании. Во-первых, в уравнении движения частицы должна присутствовать не начальная (присущая однофазному потоку) скорость газа, а «новая» скорость возмущенного присутствием частиц потока. В работе [71] высказано предположение, что различие между этими скоростями мало, если диаметр частиц меньше размера вычислительной сетки, т.е. $d_p < L$. Это условие в случае PP–DNS практически всегда удовлетворяется. Во-вторых, необходимо вводить источниковый член в уравнениях движения газа [72]. Если частица меньше колмогоровского масштаба ($d_p < \eta_K$), то особых проблем не возникает. В противном случае ($d_p > \eta_K$) встает вопрос о применимости допущения точечных частиц. В работах [73, 74] проведены расчеты двухфазного потока, содержащего большое количество очень мелких частиц при $\Phi = O(10^{-4})$, которое было соизмеримо с количеством ячеек расчетной сетки.

Примерами исследований, в которых выполнено моделирование PP–TWC–DNS, являются работы [75–77]. В [75] изучено турбулентное течение в канале. Объемная концентрация частиц равнялась $\Phi \approx 10^{-4}$. Предполагалось, что части-

цы являются стоксовыми (линейный закон сопротивления). Найдено, что в случае мелких частиц ($d_p < \eta_K$) их присутствие подавляло турбулентность, а присутствие относительно крупных частиц ($d_p > \eta_K$), наоборот, вызывало интенсификацию турбулентности. В [76, 77] выполнено моделирование двухфазного потока в канале при $Re_\tau = 180$, построенного по полувысоте канала. Выявлено, что присутствие частиц снижает сопротивление и приводит к росту продольных пульсаций скорости газа. В то же время наличие частиц вызывало снижение пульсаций скорости газа в двух других направлениях и существенно снижало напряжения Рейнольдса. В [78] проведено моделирование двухфазного турбулентного потока в канале при таком же числе Рейнольдса ($Re_\tau = 180$) при учете нелинейности в законе сопротивления частиц (нестоксовы частицы). Найдено, что частицы, имеющие малые значения числа Стокса, увеличивали интенсивность турбулентности, напряжения Рейнольдса и вязкую диссипацию. В то же время частицы, имеющие большие значения числа Стокса, приводили к снижению интенсивности турбулентности.

В [79] путем PP–TWC–DNS изучено влияние монодисперсных субколмогоровских ($d_p < \eta_K$) стоксовых ($Re_p \ll 1$) частиц на затухание однородной изотропной турбулентности (НІТ). В статье делался акцент на влияние числовой концентрации частиц. При проведении расчетов варьировались независимо число Стокса ($Stk_K = 0.3–4.8$), массовая концентрация частиц ($M = 0.001–0.3$) и число частиц в колмогоровском вихре ($N_\eta = 0.07–17$). Числовая концентрация частиц N_0 и число частиц в колмогоровском вихре N_η связаны как $N_\eta = N_0 \eta^3$. Выполненные расчеты позволили четко выделить два режима. При $Stk_K < 1$ присутствие частиц ведет к снижению затухания турбулентной энергии (первый режим). При $Stk_K > 1$ частицы ускоряют затухание турбулентности (второй режим).

К настоящему времени разработаны различные численные методы и алгоритмы для реализации PR–DNS. В одном из них используется сферическая расчетная сетка, располагаемая вокруг частиц и вложенная в декартову сетку для всей расчетной области. В [80] этот метод был использован для расчета силы, действующей на одиночную неподвижную частицу в затухающей однородной изотропной турбулентности (ДНІТ). Эффективными методами реализации PR–DNS являются метод погруженных границ [81], в котором во всей расчетной области используется декартова сетка, и метод решеточных уравнений Больцмана [82], где также используется невыравненная по форме частицы декартова сетка. Еще одним методом является Physalis [83], в котором

используется локальное аналитическое решение для течения вокруг каждой частицы.

В работе [84] приводятся результаты PR–TWC–DNS прямого турбулентного двухфазного восходящего потока в вертикальном канале. Изучено влияние числа Рейнольдса частицы ($Re_p < 227$), размера частиц, объемного числа Рейнольдса, отношения плотностей фаз ($\rho_p/\rho = 2–100$), отношения радиуса частиц к полуширине канала ($2r_p/H = 0.05–0.15$), объемной концентрации частиц ($\Phi = 3 \times 10^{-3}–2.36 \times 10^{-2}$) на интенсивность пульсационной скорости несущей фазы. Результаты расчетов показали, что при малых значениях Re_p интенсивность турбулентности снижается по всему сечению канала. При средних Re_p интенсивность турбулентности увеличивается в центральной области канала и снижается в пристенной области. При высоких значениях Re_p интенсивность турбулентности возрастает по всему поперечному сечению канала. Критическое значение Re_p увеличивается с ростом объемного числа Рейнольдса, размера частиц и отношения плотностей фаз, а также увеличивается с уменьшением объемной концентрации частиц.

Дальнейший рост концентрации частиц приводит к необходимости учета межчастичных столкновений (см. разд. 4.1), т.е. необходимо проведение FWC–DNS. Интенсивные столкновения частиц между собой оказывают влияние на статистику движения частиц и, следовательно, на величину их обратного влияния на течение газа. Сказанное сильно осложняет математическое моделирование. На сегодняшний день развито несколько стохастических подходов для того, чтобы уйти от простого детерминистского расчета парных столкновений частиц, требующего колоссальных затрат компьютерного времени.

Примерами исследований, в которых проведено моделирование PP–FWC–DNS, являются работы [85, 86]. В [85] выполнено математическое моделирование турбулентного двухфазного течения в вертикальной трубе в присутствии маленьких тяжелых частиц в широком диапазоне изменения массовой концентрации ($M = 0.1–30$) последних. При проведении расчетов использовались различные приемы моделирования реальной шероховатости стенки с целью лучшего совпадения результатов с имеющимися экспериментальными данными. Найдено, что результаты расчетов сильнее зависят от используемой модели шероховатости, чем от варьирования параметров, характеризующих процесс межчастичных столкновений. Также расчеты выявили снижение интенсивности турбулентности с ростом массовой концентрации частиц. В [86] выполнено моделирование тур-

булентного двухфазного нисходящего течения в канале при $Re_\tau = 642$ и массовой концентрации частиц $M = 0.8$. Расчеты проводились для гладкой и шероховатых стенок, где шероховатость моделировалась расположением на стенке фиксированных крошечных частиц. Обнаружено, что шероховатые стенки усиливают подавление турбулентности, вызываемой присутствием в потоке частиц.

В [87] прямым численным моделированием (DNS) исследуется взаимодействие между стационарным однородным изотропным турбулентным (ИТ) потоком и инерционными частицами с учетом межчастичных столкновений (PP–FWC–DNS). Вычисления выполнялись для 128^3 ячеек периодической кубической области и двух значений тейлоровского числа Рейнольдса $Re_\lambda = 35.4$ и 58 при варьировании объемной концентрации частиц от $\Phi = 1.37 \times 10^{-5}$ до 8.22×10^{-5} и числах Стокса $Stk_K = 0.19–12.7$. В качестве дисперсной фазы выступали упругие сферические частицы диаметром $d_p = 67.6$ мкм, что соответствует $d_p/\eta_K = 0.1$. Изменение числа Стокса производилось варьированием плотности частиц в очень широком диапазоне: $\rho_p = 150–18000$ кг/м³. Результаты [87] показали, что диссипация уменьшается до 32% с увеличением числа Стокса и объемной концентрации частиц. Показано, что указанное значение максимального снижения диссипации является завышенным на 7% в случае учета межчастичных столкновений. Спектральный анализ выявил перенос энергии частицами от больших масштабов к малым, что и объясняет разницу в диссипации.

В работе [88] на основе эйлерово-лагранжевого подхода изучены особенности магнитно-архимедовой сепарации сферических частиц, имеющих почти нейтральную плавучесть и движущихся в потоке парамагнитной жидкости. Этот метод обычно используется для разделения различных типов пластмасс при магнитно-плотностном разделении. В работе выполнено PP–FWC–DNS-моделирование с целью учета всех возможных взаимодействий между внешним магнитным полем, магнитной жидкостью и частицами. Взаимодействие частиц между собой моделировалось с использованием модели твердых сфер. Показано, что учет межчастичных столкновений существенно влияет на динамику левитации частиц и отрицательно влияет на эффективность разделения.

В работе [89] выполнено PP–FWC–DNS-моделирование процесса столкновений частиц в однородной изотропной турбулентности. Отметим, что была реализована упрощенная геометрическая модель столкновений, при кото-

рой частицы могут перекрываться, но при этом не происходит их явного контакта. Произведен анализ учета обратного влияния частиц (TWC) на такие характеристики процесса столкновений частиц, как радиальные относительные скорости, функции радиального распределения, ядра столкновений и скорости осаждения частиц.

В заключение сформулируем перспективные направления для дальнейшего прогресса в области математического моделирования двухфазных потоков с твердыми частицами при наличии столкновений:

1) развитие методов математического моделирования двухфазных потоков, содержащих частицы разных размеров (полидисперсные частицы). Именно такие потоки интересуют инженеров-практиков. Частицы разных размеров будут иметь разные скорости и различным образом влиять на течение газа, а также будут иметь тенденцию к столкновениям между собой при более низких значениях концентрации;

2) развитие методов математического моделирования двухфазных потоков с крупными частицами, за которыми формируются турбулентные следы. С ростом концентрации частиц эти турбулентные следы будут интерферировать между собой, а частицы претерпевать столкновения;

3) развитие методов математического моделирования двухфазных потоков с частицами, осложненных наличием фазовых переходов (плавление и дальнейшее испарение) и протеканием химических реакций (прежде всего, реакции горения).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описаны проблемы, возникающие при учете столкновений частиц между собой при исследовании двухфазных потоков. Приведены аналитические методы расчета ядер столкновений монодисперсных и бидисперсных частиц в однородной изотропной турбулентности, градиентном турбулентном потоке, а также при совместном действии турбулентности и силы тяжести. Значительное внимание уделено описанию работ, в которых используются методы численного моделирования двухфазных течений, описывающих на различном иерархическом уровне межфазную границу, межфазные взаимодействия и турбулентность несущей сплошной среды.

Рассмотренные в настоящем обзоре аналитические методы и подходы численного моделирования могут быть напрямую или с некоторыми модификациями использованы для изучения движения пузырьков в пузырьковых слоях и кластерах [90, 91], процессов формирования фа-

келов распыла [92], коагуляции аэрозолей при формировании вихревых течений [93], интенсификации осаждения газовзвесей и аэрозолей в акустических полях [94, 95], формирования льда в условиях атмосферного облака из переохлажденных капель [96].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Y. (Eds.) *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1998. 471 p.
2. Varaksin A.Y. *Turbulent Particle-laden Gas Flows*. N.Y.: Springer, 2007. 210 p.
3. Michaelides E.E., Crowe C.T., Schwarzkopf J.D. (Eds.) *Multiphase Flow Handbook*, 2nd ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2017. 1396 p.
4. Вараксин А.Ю. Воздушные торнадоподобные вихри: математическое моделирование // ТВТ. 2017. Т. 55. № 2. С. 291.
5. Varaksin A.Y., Ryzhkov S.V. *Mathematical Modeling of Structure and Dynamics of Concentrated Tornado-like Vortices: A Review* // Mathematics. 2023. V. 11. 3293.
6. Elghobashi S. *Particle-laden Turbulent Flows: Direct Simulation and Closure Models* // Appl. Sci. Res. 1991. V. 48. P. 301.
7. Elghobashi S. *On Predicting Particle-laden Turbulent Flows* // Appl. Sci. Res. 1994. V. 52. P. 309.
8. Varaksin A.Y., Ryzhkov S.V. *Mathematical Modeling of Gas-Solid Two-phase Flows: Problems, Achievements and Perspectives (A Review)* // Mathematics. 2023. V. 11. 3290.
9. Tanaka T., Tsuji Y. *Numerical Simulation of Gas-Solid Two-phase Flow in a Vertical Pipe: on the Effect of Inter-particle Collision* // Proc. 4th Int. Symp. Gas-Solid Flows. ASME FED. 1991. V. 121. P. 123.
10. Yamamoto Y., Potthoff M., Tanaka T., Kajishima T., Tsuji Y. *Large-eddy Simulation of Turbulent Gas-Particle Flow in a Vertical Channel: Effect of Considering Inter-particle Collisions* // J. Fluid Mech. 2001. V. 442. P. 303.
11. Varaksin A. Yu. *Collisions in Particle-laden Gas Flows*. N.Y.: Begell House, 2013. 370 p.
12. Williams J.J.E., Crane R.I. *Particle Collision Rate in Turbulent Flow* // Int. J. Multiphase Flow. 1983. V. 9. P. 421.
13. Yuu S. *Collision Rate of Small Particles in a Homogeneous and Isotropic Turbulence* // AIChE J. 1984. V. 30. P. 802.
14. Kruis F.E., Kusters K.A. *The Collision Rate of Particles in Turbulent Media* // J. Aerosol Sci. 1996. V. 27. Suppl. 1. P. S263.
15. Derevich I.V. *Particle Collisions in a Turbulent Flow* // Fluid Dyn. 1996. V. 31. P. 249.
16. Зайчук Л.И., Алипченков В.М. *Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости*. М.: Физматлит, 2007. 312 с.

17. *Saffman P.G., Turner J.S.* On the Collision of Drops in Turbulent Cloud // *J. Fluid Mech.* 1956. V. 1. P. 16.
18. *Wang L.-P., Wexler A.S., Zhou Y.* On the Collision Rate of Small Particles in Isotropic Turbulence. I. Zero-inertia Case // *Phys. Fluids.* 1998. V. 10. P. 266.
19. *Wang L.-P., Wexler A.S., Zhou Y.* Statistical Mechanical Description and Modelling of Turbulent Collision of Inertial Particles // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 415. P. 117.
20. *Вараксин А.Ю.* Столкновения частиц и капель в турбулентных двухфазных потоках // *ТВТ.* 2019. Т. 57. С. 588.
21. *Varaksin A.Y., Romash M.E., Kopeitsev V.N.* Tornado-like Gas-Solid Flow // *The 6th Int. Symp. on Multiphase Flow, Heat Mass Transfer and Energy Conversion.* AIP Conf. Proc. 2010. V. 1207. P. 342.
22. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н.* К вопросу управления поведением воздушных смерчей // *ТВТ.* 2009. Т. 47. № 6. С. 870.
23. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н.* О возможности воздействия на вихревые атмосферные образования // *ТВТ.* 2010. Т. 48. № 3. С. 433.
24. *Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А.* Моделирование свободных тепловых вихрей: генерация, устойчивость, управление // *ТВТ.* 2010. Т. 48. № 6. С. 965.
25. *Chapman S., Cowling T.G.* *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases.* Cambridge University Press, 1970. 423 p.
26. *Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurnyi N.* Kinetic Theories for Granular Flow: Inelastic Particles in Couette Flow a Slightly Inelastic Particles in a General Flow Field // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 140. P. 223.
27. *Ding J., Gidaspow D.* A Bubbling Fluidization Model Using Kinetic Theory of Granular Flow // *AIChE J.* 1990. V. 36. P. 523.
28. *Squires K.D., Eaton J.K.* Preferential Concentration of Particles by Turbulence // *Phys. Fluids A.* 1991. V. 3. № 5. P. 1169.
29. *Вараксин А.Ю.* Кластеризация частиц в турбулентных и вихревых двухфазных потоках // *ТВТ.* 2014. Т. 52. № 5. С. 777.
30. *Varaksin A.Y., Ryzhkov S.V.* Vortex Flows with Particles and Droplets (A Review) // *Symmetry.* 2022. V. 11. 2016.
31. *Abrahamson J.* Collision Rate of Small Particles in a Vigorously Turbulent Fluid // *Chem. Eng. Sci.* 1975. V. 30. P. 1371.
32. *Lavieville J., Deutsch E., Simonin O.* Large Eddy Simulation of Interactions between Colliding Particles and a Homogeneous Isotropic Turbulence Field // *Proc. 6th Int. Symp. on Gas-Particle Flows.* ASME FED. 1995. V. 228. P. 347.
33. *Lavieville J., Simonin O., Berlemont A., Chang Z.* Validation of Inter-particle Collision Models Based on Large Eddy Simulation in Gas-solid Turbulent Homogeneous Shear Flow // *Proc. 7th Int. Symp. on Gas-particle Flows,* ASME Fluids Eng. Division Summer Meeting. 1997. FEDSM97-3623.
34. *Zaichik L.I., Simonin O., Alipchenkov V.M.* Two Statistical Models for Predicting Collision Rates of Inertial Particles in Homogeneous Isotropic Turbulence // *Phys. Fluids.* 2003. V. 15. № 10. P. 2995.
35. *Монин А.С., Яглом А.М.* *Статистическая гидромеханика.* Ч. 2. М.: Наука, 1967. 720 с.
36. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Частота столкновений частиц в турбулентном потоке // *Изв. РАН. МЖГ.* 2001. № 4. С. 93.
37. *Smoluchowski M.V.* Versuch Einer Matematischen Theorie der Koagulationskinetik Kolloider Losungen // *Zeit. Phys. Chem.* 1917. V. 92. P. 129.
38. *Fede P., Simonin O.* Modelling of Kinetic Energy Transfer by Collision of a Non-Settling Binary Mixture of Particles Suspended in a Turbulent Homogeneous Isotropic Flow // *Proc. 4th ASME-JSME Joint Fluids Eng. Conf.* 2003. FEDSM2003-45735.
39. *Зайчик Л.И., Симонин О., Алипченков В.М.* Столкновения бидисперсных частиц в условиях изотропной турбулентности // *ТВТ.* 2005. Т. 43 № 3. С. 408.
40. *Gourdel C., Simonin O., Brunier E.* Two-maxwellian Equilibrium Distribution Function for the Modeling of a Binary Mixture of Particles // *Proc. 6th Int. Conf. on Circulating Fluidized Beds.* 1999. P. 205.
41. *Dodin Z., Elperin T.* On the Collision Rate in Turbulent Flow with Gravity // *Phys. Fluids.* 2002. V. 14. № 8. P. 2921.
42. *Вараксин А.Ю.* Гидрогазодинамика и теплофизика двухфазных потоков с твердыми частицами, каплями и пузырями // *ТВТ.* 2023. Т. 61. № 6. С. 926.
43. *Pakhomov M.A., Protasov M.V., Terekhov V.I., Varaksin A.Yu.* Experimental and Numerical Investigation of Downward Gas-dispersed Turbulent Pipe Flow // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2007. V. 50. P. 2107.
44. *Pakhomov M.A., Terekhov V.I.* RANS Modeling of Flow Structure and Turbulent Heat Transfer in Pulsed Gas-Droplet Mist Jet Impingement // *Int. J. Thermal Sci.* 2016. V. 100. P. 284.
45. *Smagorinsky J.* General Circulation Experiments with the Primitive Equations // *Mon. Weather Rev.* 1963. V. 91. P. 99.
46. *Bardina J., Ferziger J.H., Reynolds W.C.* Improved Turbulence Models Based on LES of Homogeneous Incompressible Turbulent Flows // *Tech. Rep. Report No. TF-19.* Stanford, Depart. Mech. Eng. 1984.
47. *Clark R.A., Ferziger J.H., Reynolds W.C.* Evaluation of Subgrid-scale Models Using an Accurately Simulated Turbulent Flow // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 91. P. 1.
48. *Stolz S., Adams N.A., Kleiser L.* An Approximate Deconvolution Model for Large-eddy Simulation with Application to Incompressible Wall-bounded Flows // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13. P. 997.
49. *Deardorff J.W., Peskin R.L.* Lagrangian Statistics from Numerically Integrated Turbulent Shear Flow // *Phys. Fluids.* 1970. V. 13. P. 584.

50. *Uijtewaal W.S.J., Oliemans R.V.A.* Particle Dispersion and Deposition in Direct Numerical and Large Eddy Simulation of Vertical Pipe Flows // *Phys. Fluids*. 1996. V. 8. P. 2590.
51. *Wang Q., Squires K.D.* Large Eddy Simulation of Particle Deposition in a Vertical Turbulent Channel Flow // *Int. J. Multiphase Flow*. 1996. V. 22. P. 667.
52. *Boivin M., Simonin O., Squires K.D.* On the Prediction of Gas–Solid Flows with Two-way Coupling Using Large Eddy Simulation // *Phys. Fluids*. 2000. V. 12. P. 2080.
53. *Vreman A.W., Geurts B.J., Deen N.G., Kuipers J.A.M., Kuerten J.G.M.* Two- and Four-way Coupled Euler–Lagrangian Large-eddy Simulation of Turbulent Particle-laden Channel Flow // *Flow Turbul. Combust.* 2009. V. 82. P. 47.
54. *Mallouppas G., van Wachem B.* Large Eddy Simulations of Turbulent Particle-laden Channel Flow // *Int. J. Multiphase Flow*. 2013. V. 54. P. 65.
55. *Breuer M., Alletto M.* Efficient Simulation of Particle-laden Turbulent Flows with High Mass Loadings Using LES // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2012. V. 35. P. 2.
56. *Pozorski J., Apte S.V.* Filtered Particle Tracking in Isotropic Turbulence and Stochastic Modeling of Subgrid-scale Dispersion // *Int. J. Multiphase Flow*. 2009. V. 35. P. 118.
57. *Kuerten J.G.M., Vreman A.W.* Effect of Droplet Interaction on Droplet-laden Turbulent Channel Flow // *Phys. Fluids*. 2015. V. 27. 053304.
58. *Alletto M., Breuer M.* Prediction of Turbulent Particle-laden Flow in Horizontal Smooth and Rough Pipes Inducing Secondary Flow // *Int. J. Multiphase Flow*. 2013. V. 55. P. 80.
59. *Breuer M., Almohammed N.* Modeling and Simulation of Particle Agglomeration in Turbulent Flows Using a Hard-sphere Model with Deterministic Collision Detection and Enhanced Structure Models // *Int. J. Multiphase Flow*. 2015. V. 73. P. 171.
60. *Riley J.J., Patterson Jr. G.S.* Diffusion Experiments with Numerically Integrated Isotropic Turbulence // *Phys. Fluids*. 1974. V. 17. P. 292.
61. *Yeung P.K., Pope S.B.* An Algorithm for Tracking Fluid Particles in Numerical Simulation of Homogeneous Turbulence // *J. Comput. Phys.* 1988. V. 79. P. 373.
62. *Balachandar S., Maxey M.R.* Methods for Evaluating Fluid Velocities in Spectral Simulations of Turbulence // *J. Comput. Phys.* 1989. V. 83. P. 96.
63. *McLaughlin J.B.* Aerosol Particle Deposition in Numerically Simulated Channel Flow // *Phys. Fluids A*. 1989. V. 1. P. 1211.
64. *Kontomaris K., Hanratty T.J., McLaughlin J.B.* An Algorithm for Tracking Fluid Particles in a Spectral Simulation of Turbulent Channel Flow // *J. Comput. Phys.* 1992. V. 103. P. 231.
65. *Marchioli C., Soldati A., Kuerten J.G.M., Arcen B., Taniere A., Goldensohn G., Squires K.D., Cargnelutti M.F., Portela L.M.* Statistics of Particle Dispersion in Direct Numerical Simulations of Wallbounded Turbulence: Results of an International Collaborative Benchmark Test // *Int. J. Multiphase Flow*. 2008. V. 34. P. 879.
66. *Marchioli C., Giusti A., Salvetti M.V., Soldati A.* Direct Numerical Simulation of Particle Wall Transfer and Deposition in Upward Turbulent Pipe Flow // *Int. J. Multiphase Flow*. 2003. V. 29. P. 1017.
67. *Van Esch B.P.M., Kuerten J.G.M.* Direct Numerical Simulation of the Motion of Particles in Rotating Pipe Flow // *J. Turbulence*. 2008. V. 9. P. 1.
68. *Picano F., Sardina G., Casciola C.M.* Spatial Development of Particle-laden Turbulent Pipe Flow // *Phys. Fluids*. 2009. V. 21. 093305.
69. *Squires K.D., Eaton J.K.* Particle Response and Turbulence Modification in Isotropic Turbulence // *Phys. Fluids A*. 1990. V. 2. P. 1191.
70. *Elghobashi S., Truesdell G.C.* Direct Simulation of Particle Dispersion in a Decaying Isotropic Turbulence // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 242. P. 655.
71. *Boivin M., Simonin O., Squires K.D.* Direct Numerical Simulation of Turbulence Modulation by Particles in Homogeneous Turbulence // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 375. P. 235.
72. *Eaton J.K.* Two-way Coupled Turbulence Simulations of Gas–Particle Flows Using Point–Particle Tracking // *Int. J. Multiphase Flow*. 2009. V. 35. P. 792.
73. *Kuerten J.G.M., Vreman A.W.* Effect of Droplet Interaction on Droplet-laden Turbulent Channel Flow // *Phys. Fluids*. 2015. V. 27. 053304.
74. *Russo E., Kuerten J.G.M., van der Geld C.W.M., Geurts B.J.* Water Droplet Condensation and Evaporation in Turbulent Channel Flow // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 749. P. 666.
75. *Pan Y., Banerjee S.* Numerical Simulation of Particle Interactions with Wall Turbulence // *Phys. Fluids*. 1996. V. 8. P. 2733.
76. *Zhao L.H., Andersson H.I., Gillissen J.J.J.* Turbulence Modulation and Drag Reduction by Spherical Particles // *Phys. Fluids*. 2010. V. 22. 081702.
77. *Zhao L.H., Andersson H.I., Gillissen J.J.J.* Interphasial Energy Transfer and Particle Dissipation in Particle-laden Wall Turbulence // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 715. P. 32.
78. *Lee J., Lee C.* Modification of Particle-laden Near-wall Turbulence; Effect of Stokes Number // *Phys. Fluids*. 2015. V. 27. 023303.
79. *Letournel R., Laurent F., Massot M., Vie A.* Modulation of Homogeneous and Isotropic Turbulence by Sub-Kolmogorov Particles: Impact of Particle Field Heterogeneity // *Int. J. Multiphase Flow*. 2020. V. 125. 103233.
80. *Burton T.M., Eaton J.* Fully Resolved Simulations of Particle–Turbulence Interaction // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 545. P. 67.
81. *Picano F., Breugem W.P., Brandt L.* Turbulent Channel Flow of Dense Suspensions of Neutrally-buoyant Spheres // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 764. P. 463.
82. *Ten Cate A., Derksen J.J., Portela L.M., van den Akker H.E.A.* Fully Resolved Simulations of Collid-

- ing Monodisperse Spheres in Forced Isotropic Turbulence // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 539. P. 233.
83. *Takagi S., Oguz H.N., Zhang Z., Prosperetti A.* Physalis: A New Method for Particle Simulation. Part II: Two-dimensional Navier-Stokes Flow Around Cylinders // *J. Comput. Phys.* 2003. V. 187. P. 371.
84. *Yu Z., Xia Y., Lin J.* Modulation of Turbulence Intensity by Heavy Finite-size Particles in Upward Channel Flow // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 913. A3.
85. *Vreman A.W.* Turbulence Characteristics of Particle-laden Pipe Flow // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 584. P. 235.
86. *Vreman A.W.* Turbulence Attenuation in Particle-laden Flow in Smooth and Rough Channels // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 773. P. 103.
87. *Mallouppas G., George W.K., van Wachem B.G.M.* Dissipation and Inter-scale Transfer in Fully Coupled Particle and Fluid Motions in Homogeneous Isotropic Forced Turbulence // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2017. V. 67. P. 74.
88. *Tajfirooz S., Meijer J.G., Dellaert R.A., Meulenbroek A.M., Zeegers J.C.H., Kuerten J.G.M.* Direct Numerical Simulation of Magneto-Archimedes Separation of Spherical Particles // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 910. A52.
89. *Rosa B., Copec S., Ababaei A., Pozorski J.* Collision Statistics and Settling Velocity of Inertial Particles in Homogeneous Turbulence from High-resolution DNS under Two-way Momentum Coupling // *Int. J. Multiphase Flow.* 2022. V. 48. 103906.
90. *Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Аганин И.А., Давлетшин А.И.* Динамика пузырьков в сферическом кластере при повышении давления жидкости // *ТВТ.* 2023. Т. 61. № 5. С. 744.
91. *Шагапов В.Ш., Булатова З.А., Шаяхметов Г.Ф.* Особенности отражения импульсных сигналов от слоя с парогазовыми пузырьками перед жесткой стенкой в воде // *ТВТ.* 2023. Т. 61. № 5. С. 760.
92. *Комов А.Т., Захаренков А.В., Толмачев В.В., Штелинг В.С.* Процессы в факеле распыла теплоносителя // *ТВТ.* 2023. Т. 61. № 3. С. 410.
93. *Хмелев В.Н., Шалунов А.В., Нестеров В.А.* Экспериментальное исследование коагуляции аэрозолей при формировании вихревых течений в неоднородном ультразвуковом поле // *ТВТ.* 2024. Т. 62. № 2. С. 279.
94. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р., Фадеев С.А.* Осаждение полидисперсного аэрозоля в узкой закрытой трубе при резонансном режиме колебаний // *ТВТ.* 2023. Т. 61. № 6. С. 953.
95. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Р.* Акустические волны в смеси воздуха с полидисперсными частицами алюминия // *ТВТ.* 2024. Т. 62. № 1. С. 147.
96. *Бендерский Л.А., Горячев А.В., Горячев П.А., Горячев Д.А., Любимов Д.А., Студенников Е.С.* Особенности моделирования тепломассообменных процессов при формировании льда в условиях атмосферного облака, состоящего из переохлажденных капель // *ТВТ.* 2024. Т. 62. № 2. С. 250.