

УДК 537.2, 536.2

## МЕТОД ОТРАЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛОСКОСЛОИСТЫХ СРЕД, СОСТОЯЩИХ ИЗ ТРЕХ ПЛЕНОК

© 2024 г. А. Б. Петрин

*Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия*

*E-mail: petrin@ihed.ras.ru, a\_petrin@mail.ru*

Поступила в редакцию 09.11.2023 г.

После доработки 09.11.2023 г.

Принята к публикации 14.02.2024 г.

Представлен метод зеркальных отражений электростатики для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостистой средой, состоящей из трех пленок на диэлектрическом полупространстве. Метод обобщается на случай произвольной системы зарядов и применяется к решению математически аналогичных задач электростатики и стационарной теплопроводности плоскостистых сред. В качестве примера применения метода рассматривается задача нахождения распределений электростатического потенциала вокруг проводящей заряженной сферы. Обсуждаются решения аналогичных задач нахождения распределения температур равномерно нагретых тел, расположенных вблизи теплопроводящей плоскостистой структуры из трех теплопроводящих пленок на теплопроводящем полупространстве.

DOI: 10.31857/S0040364424030132

### ВВЕДЕНИЕ

Нахождение электромагнитных и тепловых полей в плоскостистых структурах является важной частью проектирования устройств микроэлектроники, электротехники, акустики и теплофизики. Для решения таких задач, как правило, используются фурье-преобразования по двум координатам в плоскости структуры и затем с учетом граничных условий приводятся различные матричные методы, которые успешно применяются к решению задач излучения и распространения электромагнитных волн [1–4], акустики [5], теплопроводности [6–9] плоскостистых сред. В работе [10] предложен оригинальный вариант строгой электромагнитной теории излучения элементарного диполя, расположенного на границе или внутри плоскостистой структуры, который является развитием работ [11, 12]. В частности, в [10] предложен метод аналитического упрощения решения. Обобщение метода для случая произвольного количества пленок в плоскостистой структуре позволило приве-

сти формулы для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задачи и ускорило численные расчеты. Так, в [13, 14] развитые математические подходы были применены к нахождению трехмерного фундаментального решения электростатики (квазиэлектростатики) в плоскостистых средах, т.е. к нахождению поля точечного заряда в плоскостистых средах, а также в соответствующих задачах стационарной теплопроводности. На основе полученных результатов была предложена формулировка обобщенного метода зеркальных отражений для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостистой структурой. Этот результат был обобщен на случай произвольного распределения зарядов вблизи плоскостистой структуры и произвольного количества пленок [15, 16]. Однако в развитом в [15, 16] обобщенном методе зеркальных отражений приходилось проводить двойное интегрирование, что ограничивало скорость вычислений с использованием этого метода. В [17] обобщенный метод зеркальных отражений был модифицирован приме-

нительно к важной частной задаче о точечном заряде, расположенном рядом с плоскостой структурой, состоящей из одной пленки, на диэлектрическом полупространстве. Модифицированная формулировка метода отражений позволила исключить интегрирование, заменив интегралы суммами. Это существенно упростило и ускорило расчеты.

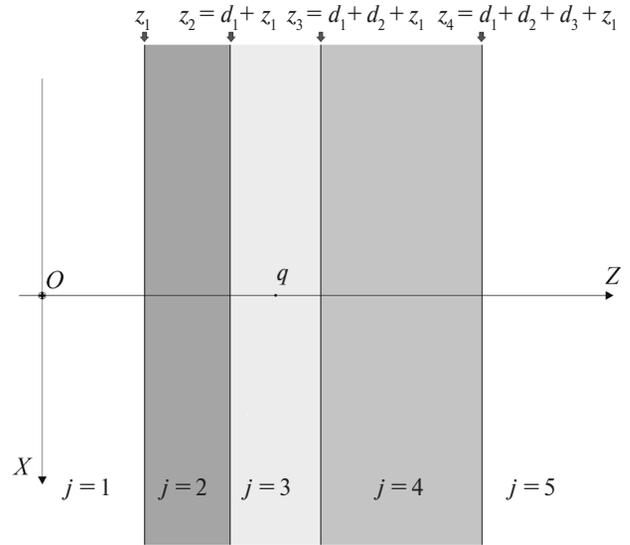
Данная работа является продолжением и обобщением работ [13–16]. Метод зеркальных отражений работы [17] для одной пленки обобщен на случай плоскостойкой структуры, состоящей из трех пленок. При этом, так же как в [17], двойное интегрирование удалось заменить суммированием по виртуальным зарядам. На основе предложенного метода, в качестве примера, решена задача нахождения распределения электростатического потенциала вблизи проводящей сферы, расположенной рядом с плоскостойкой структурой, состоящей из трех диэлектрических пленок и лежащей на диэлектрическом полупространстве. На основе аналогии электростатики и стационарной теплопроводности кратко обсуждаются аналогичные задачи нахождения распределения температурных полей.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.  
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО  
ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО  
В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ**

Рассмотрим задачу нахождения электростатического потенциала от точечного заряда  $q$ , расположенного внутри плоскостойкой структуры. В предыдущих работах был развит матричный метод решения таких задач, поэтому применим его, опуская детали, в терминах и обозначениях работ [14, 15, 17].

Пусть общее число пленок плоскостойкой структуры  $N_f$ , толщина  $m$ -й пленки  $d_m$  и полная толщина слоистой структуры  $d_{tot} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$ . Общее число пленок  $N = N_f + 1$ . Пронумеруем области пространства  $j = 1, \dots, (N + 1)$ . На рис. 1 показана для примера задача с тремя пленками,  $N_f = 3$  и  $N = 4$ . Предположим, что пленки имеют абсолютные диэлектрические проницаемости, равные  $\epsilon_j$ , а перед и за слоистой структурой находятся однородные полупространства с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_{N+1}$  соответственно. Обозначим также через  $z_j$  координаты  $N$  границ пленок по оси  $Z$  следующим образом:  $z_j = z_1 + \sum_{m=1}^{j-1} d_m$  при  $j = 2, \dots, N$ .

Электрический потенциал  $\phi_j$  в каждой области удовлетворяет уравнению Пуассона  $\Delta\phi_j = -\rho/\epsilon_j$ ,



**Рис. 1.** Геометрия плоскостойкой структуры, состоящей из трех пленок.

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $\rho$  – объемная плотность заряда,  $\epsilon_j$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость  $j$ -й области. Потенциал в  $j$ -й области представим в виде фурье-разложения:

$$\phi_j(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x + i\eta y} \tilde{\phi}_j(\xi, \eta, z) d\xi d\eta.$$

Было показано, что потенциал в  $j$ -й области задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned} \phi_j(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \hat{\phi}_j^+ e^{-\gamma(z-z_{j-1})} + \hat{\phi}_j^- e^{\gamma(z-z_j)} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где  $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , а  $\hat{\phi}_j^+$  и  $\hat{\phi}_j^-$  являются функциями только  $\xi$  и  $\eta$  и объединяются в вектор-столбец фурье-образов потенциала  $\hat{\mathcal{F}}_j = \hat{\mathcal{F}}_j(\xi, \eta) = (\hat{\phi}_j^+; \hat{\phi}_j^-)^T$ . Общее решение для электрического потенциала в области  $j = 1$  (в интервале  $(-\infty, z_1)$ ) и в области  $j = N + 1$  (в интервале  $[z_N, +\infty)$ ) запишем в виде

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \hat{\phi}_1^+ e^{-\gamma(z-z_1)} + \hat{\phi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \\ \phi_{N+1}(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \hat{\phi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} + \hat{\phi}_{N+1}^- e^{\gamma(z-z_N)} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Учет граничных условий (непрерывности на границе фурье-образов потенциала и нормальной компоненты электрической индукции, т.е. вектора  $(\hat{\varphi}_j, -\varepsilon_j \partial \hat{\varphi}_j / \partial z)^T$ ) позволяет связать вектор-столбцы  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$  в первой и последней областях задачи (т.е. в полупространствах) уравнением

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = \left( \mathbf{T}_1 \times \prod_{m=2}^N \mathbf{T}_m \times \mathbf{T}_{N+1} \right) \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1},$$

где матрицы пленок и полупространств записываются в виде

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{m-1}} \\ \varepsilon_m \gamma & -\varepsilon_m \gamma e^{-\gamma d_{m-1}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_{m-1}} & 1 \\ \varepsilon_m \gamma e^{-\gamma d_{m-1}} & -\varepsilon_m \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_{N+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix}.$$

Если точечный заряд находится внутри плоскостройной структуры, то связь между  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$  определяется уравнением

$$\mathbf{H}_R \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V} = (0, q)^T$  – вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие на плоскостройную систему точечного заряда  $q$ , а матрицы  $\mathbf{H}_R$  и  $\mathbf{H}_L$  характеризуют отклик на внешнее возбуждение слоистой структуры справа и слева от заряда и выражаются произведениями матриц слоев справа и слева от заряда:  $\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_R \dots \times \mathbf{T}_{N+1}$ ,  $\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1 \times \dots \times \mathbf{T}_L)^{-1}$ . Так как точечный заряд (источник полей) находится исключительно внутри плоскостройной структуры, то в столбцах  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$  есть только компоненты  $\hat{\varphi}_1^-$  и  $\hat{\varphi}_{N+1}^+$ , определяющие поля, убывающие при удалении от плоскостройной структуры. Чтобы найти эти компоненты, разобьем матрицы  $\mathbf{H}_R$  и  $\mathbf{H}_L$  на элементы  $H_{RA}, H_{RB}, H_{RC}, H_{RD}$  и  $H_{LA}, H_{LB}, H_{LC}, H_{LD}$ , тогда уравнение (1) примет вид

$$\begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{N+1}^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\varphi}_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Это уравнение можно представить системой из двух уравнений  $H_{RA} \hat{\varphi}_{N+1}^+ = H_{LB} \hat{\varphi}_1^-$ ,  $H_{RC} \hat{\varphi}_{N+1}^+ = H_{LD} \hat{\varphi}_1^- + q$ , которые можно снова объединить в одно матричное  $2 \times 2$  уравнение:

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & H_{RA} \\ -H_{LD} & H_{RC} \end{pmatrix} \hat{\mathcal{F}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где введен вектор-столбец  $\hat{\mathcal{F}}_{\text{out}} = (\hat{\varphi}_1^-, \hat{\varphi}_{N+1}^+)^T$ . Из (2) можно найти  $\hat{\varphi}_1^-$  и  $\hat{\varphi}_{N+1}^+$ , а значит, потенциалы в полупространствах:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \\ \varphi_{N+1}(x, y, z) &= \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Наконец, зная  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ , получаем вектор-столбцы потенциалов  $\hat{\mathcal{F}}_j$  и сами потенциалы в любой внутренней области с номером  $j$ .

### ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА НЕКОТОРОМ РАССТОЯНИИ ОТ ГРАНИЦЫ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТРЕХ ПЛЕНОК

Применим вышеизложенную теорию и рассмотрим задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда  $q$ , располо-

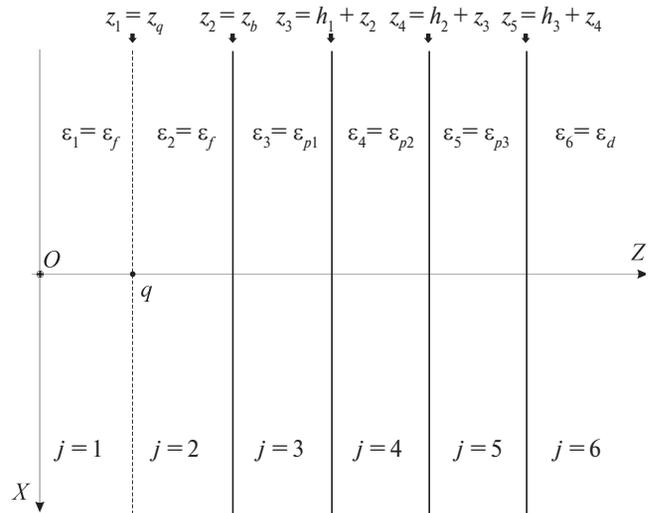


Рис. 2. Точечный заряд  $q$ , расположенный в свободном пространстве с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_f$  в точке с координатой  $z_q$  на расстоянии  $(z_b - z_q)$  от плоскостройной структуры из трех пленок с толщинами  $h_1, h_2, h_3$  и диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_{p1}, \varepsilon_{p2}, \varepsilon_{p3}$ , расположенной на границе полупространства с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_d$ .

женного в полупространстве с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_f$  (см. рис. 2). Заряд находится на некотором расстоянии от трех пленок с проницаемостями  $\epsilon_{p1}$ ,  $\epsilon_{p2}$ ,  $\epsilon_{p3}$  и толщинами  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , нанесенных на полупространство с проницаемостью  $\epsilon_d$ . В введенной системе координат заряд располагается в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}_q = (0, 0, z_q)$ , на расстоянии  $d = (z_b - z_q)$  вдоль оси  $Z$  от первой пленки. Эту задачу можно рассмотреть как задачу нахождения потенциала от точечного заряда, расположенного на поверхности вспомогательной пленки толщины  $d = (z_b - z_q)$ , причем проницаемости этой вспомогательной пленки и полупространства слева одинаковы и равны  $\epsilon_f$ .

В такой постановке имеется шесть областей. Введем их нумерацию: индекс  $j = 1$  соответствует полупространству с  $\epsilon_j$ ,  $j = 2$  – вспомогательной пленке с  $\epsilon_2 = \epsilon_f$  и толщиной  $d$ ,  $j = 3$  – реальной пленке с  $\epsilon_3 = \epsilon_{p1}$  и толщиной  $h_1$ ,  $j = 4$  – реальной пленке с  $\epsilon_4 = \epsilon_{p2}$  и толщиной  $h_2$ ,  $j = 5$  – реальной пленке с  $\epsilon_5 = \epsilon_{p3}$  и толщиной  $h_3$ , а индекс  $j = 6$  соответствует полупространству с  $\epsilon_6 = \epsilon_d$  (см. рис. 2). Тогда  $N = 5$ ,  $z_1 = z_q$ ,  $z_2 = z_b$ ,  $z_3 = h_1 + z_2$ ,  $z_4 = h_2 + z_3$ ,  $z_5 = h_3 + z_4$ ,  $\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4 \times \mathbf{T}_5 \times \mathbf{T}_6$ ,  $\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1)^{-1}$  и уравнение примет вид

$$(\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4 \times \mathbf{T}_5 \times \mathbf{T}_6) \times \hat{\mathcal{F}}_6 = (\mathbf{T}_1)^{-1} \times \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V},$$

где матрицы выражаются следующими формулами:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{L}_2 \times (\mathbf{R}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d} \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma e^{-\gamma d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma d} & 1 \\ \epsilon_f \gamma e^{-\gamma d} & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{L}_3 \times (\mathbf{R}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_1} \\ \epsilon_{p1} \gamma & -\epsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_1} & 1 \\ \epsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} & -\epsilon_{p1} \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_4 = \mathbf{L}_4 \times (\mathbf{R}_4)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_2} \\ \epsilon_{p2} \gamma & -\epsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_2} & 1 \\ \epsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} & -\epsilon_{p2} \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_5 = \mathbf{L}_5 \times (\mathbf{R}_5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_3} \\ \epsilon_{p3} \gamma & -\epsilon_{p3} \gamma e^{-\gamma h_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_3} & 1 \\ \epsilon_{p3} \gamma e^{-\gamma h_3} & -\epsilon_{p3} \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_d \gamma & -\epsilon_d \gamma \end{pmatrix},$$

а вектор-столбец точечного заряда равен  $\mathbf{V} = (0; q)^T$ . Тогда

$$\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d} \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma e^{-\gamma d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma d} & 1 \\ \epsilon_f \gamma e^{-\gamma d} & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_1} \\ \epsilon_{p1} \gamma & -\epsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_1} & 1 \\ \epsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} & -\epsilon_{p1} \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_2} \\ \epsilon_{p2} \gamma & -\epsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_2} & 1 \\ \epsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} & -\epsilon_{p2} \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_3} \\ \epsilon_{p3} \gamma & -\epsilon_{p3} \gamma e^{-\gamma h_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_3} & 1 \\ \epsilon_{p3} \gamma e^{-\gamma h_3} & -\epsilon_{p3} \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_d \gamma & -\epsilon_d \gamma \end{pmatrix}.$$

Вводя вектор-столбец  $\hat{\mathcal{F}}_{\text{out}} = (\hat{\phi}_1^-, \hat{\phi}_6^+)^T$ , преобразуем уравнение (2) для данной задачи как

$$\begin{pmatrix} -1 & H_{RA} \\ \epsilon_f \gamma & H_{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1^- \\ \hat{\phi}_6^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Решение (3) можно представить в виде

$$\hat{\phi}_1^- = q H_{RA} / (H_{RC} + \epsilon_f \gamma H_{RA}),$$

$$\hat{\phi}_6^+ = q / (H_{RC} + \epsilon_f \gamma H_{RA}).$$

Для рассматриваемой задачи в полупространстве ( $j = 1$ ) при  $z \leq z_q$  функцию  $\hat{\phi}_1^-$  после весьма громоздких аналитических преобразований запишем в виде

$$\hat{\phi}_1^- = \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} + \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-2\gamma(z_b - z_q)} \mathfrak{R}(\gamma, h), \quad (4)$$

$$\mathfrak{R}(\gamma) = \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} + \chi(\gamma),$$

$$\chi(\gamma) = \frac{4\epsilon_f \epsilon_{p1} (\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2}) e^{-2\gamma h_1}}{(\epsilon_f + \epsilon_{p1})^2 (\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})} \times \frac{(1 + a_1 e^{-2\gamma h_2} + a_2 e^{-2\gamma h_3} + a_3 e^{-2\gamma(h_2+h_3)})}{(1 - b_1 e^{-2\gamma h_1} - b_2 e^{-2\gamma h_2} - b_3 e^{-2\gamma h_3} - b_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2)} - b_5 e^{-2\gamma(h_1+h_3)} - b_6 e^{-2\gamma(h_2+h_3)} - b_7 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)})}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(\epsilon_{p3} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})}{(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p1})}, & b_4 &= \frac{(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})(\epsilon_{p1} - \epsilon_f)}{(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})(\epsilon_f + \epsilon_{p1})}, \\ a_2 &= \frac{(\epsilon_{p3} - \epsilon_d)(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})}{(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)}, & b_5 &= \frac{(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})(\epsilon_{p1} - \epsilon_f)(\epsilon_{p3} - \epsilon_d)}{(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})(\epsilon_f + \epsilon_{p1})(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)}, \\ a_3 &= \frac{(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_d - \epsilon_{p3})}{(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p1})(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)}, & b_6 &= \frac{(\epsilon_{p3} - \epsilon_d)(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p1})}{(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p1})}, \\ b_1 &= \frac{(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p1} - \epsilon_f)}{(\epsilon_f + \epsilon_{p1})(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})}, & b_7 &= \frac{(\epsilon_{p1} - \epsilon_f)(\epsilon_{p3} - \epsilon_d)}{(\epsilon_f + \epsilon_{p1})(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)}, \\ b_2 &= \frac{(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p1})(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})}{(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})}, \\ b_3 &= \frac{(\epsilon_d - \epsilon_{p3})(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})}{(\epsilon_d + \epsilon_{p3})(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})}, \end{aligned}$$

В полупространстве ( $j = 6$ ) при  $z > z_5$  функцию  $\hat{\varphi}_6^+$  представим как

$$\hat{\varphi}_6^+ = \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} \vartheta(\gamma), \tag{6}$$

$$\vartheta(\gamma) = \frac{16\epsilon_f \epsilon_{p1} \epsilon_{p2} \epsilon_{p3}}{(\epsilon_f + \epsilon_{p1})(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)} \times$$

где

$$\frac{e^{-\gamma(h_1+h_2+h_3)}}{(1 - b_1 e^{-2\gamma h_1} - b_2 e^{-2\gamma h_2} - b_3 e^{-2\gamma h_3} - b_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2)} - b_5 e^{-2\gamma(h_1+h_3)} - b_6 e^{-2\gamma(h_2+h_3)} - b_7 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)})}.$$

Вводя обозначение  $z_{\text{ref}} = 2z_b - z_q$ , из (4) получаем выражение для потенциала в первой области

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{\gamma(z-z_q)} + \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{\gamma(z-z_{\text{ref}})} \right) \mathfrak{R}(\gamma, h) \times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \tag{7}$$

Далее воспользуемся математическим тождеством [18]

$$\frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} |z - z_q|}}{2\epsilon_f \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} e^{i(\xi(x-x_q) + \eta(y-y_q))} d\xi d\eta =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 + (z-z_q)^2}}. \tag{8}$$

Тогда (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z_q)^2}} + \\ &+ \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z_{\text{ref}})^2}} + \\ &+ \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\gamma) e^{\gamma(z-z_{\text{ref}})}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая (6), потенциал  $\varphi_6$  в полупространстве ( $j = 6$ ) при  $z \geq h_1 + h_2 + h_3 + z_b$  примет вид

$$\varphi_6(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \quad (10)$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z-(z_q+h_1+h_2+h_3))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Далее найдем потенциал  $\varphi_5$  в слое  $j = 5$  при  $h_1 + h_2 + z_b \leq z \leq h_1 + h_2 + h_3 + z_b$  (в третьей пленке). Для этого запишем граничные условия [14, 15, 17] на плоскости  $z = z_5 = h_1 + h_2 + h_3 + z_b$ :

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma h_3} & 1 \\ \epsilon_{p3}\gamma e^{-\gamma h_3} & -\epsilon_{p3}\gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_5^+ \\ \hat{\varphi}_5^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_d\gamma & -\epsilon_d\gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_6^+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая это уравнение с учетом (6), получаем

$$\hat{\varphi}_5^+ = \frac{\epsilon_{p3} + \epsilon_d}{2\epsilon_{p3}} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_3)} \vartheta(\gamma),$$

$$\hat{\varphi}_5^- = \frac{\epsilon_{p3} - \epsilon_d}{2\epsilon_{p3}} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} \vartheta(\gamma).$$

Полный потенциал поля внутри слоя  $j = 5$  выражается формулой

$$\begin{aligned} \varphi_5(x, y, z) = & \\ = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} & \left( \hat{\varphi}_5^+ e^{-\gamma(z-(z_b+h_1+h_2))} + \hat{\varphi}_5^- e^{\gamma(z-(z_b+h_1+h_2+h_3))} \right) \times \\ & \times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для  $\hat{\varphi}_5^+$  и  $\hat{\varphi}_5^-$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi_5(x, y, z) = & \frac{\epsilon_{p3} + \epsilon_d}{2\epsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z-(z_q+h_1+h_2+h_3))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{\epsilon_{p3} - \epsilon_d}{2\epsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{\gamma(z-(2z_b-z_q+h_1+h_2+h_3))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдем теперь потенциал в слое  $j = 4$  при  $z_b + h_1 \leq z \leq z_b + h_1 + h_2$  (во второй пленке). Граничные условия на плоскости  $z = z_4 = z_b + h_1 + h_2$  можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma h_2} & 1 \\ \epsilon_{p2}\gamma e^{-\gamma h_2} & -\epsilon_{p2}\gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_4^+ \\ \hat{\varphi}_4^- \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_3} \\ \epsilon_{p3}\gamma & -\epsilon_{p3}\gamma e^{-\gamma h_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_5^+ \\ \hat{\varphi}_5^- \end{pmatrix}.$$

Решая это уравнение, находим  $\hat{\varphi}_4^+$  и  $\hat{\varphi}_4^-$ :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_4^+ = & \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_2 - h_3)} \vartheta(\gamma) + \\ & + \frac{(\epsilon_d - \epsilon_{p3})(\epsilon_{p3} - \epsilon_{p2})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_2 + h_3)} \vartheta(\gamma), \\ \hat{\varphi}_4^- = & \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_3)} \vartheta(\gamma) + \\ & + \frac{(\epsilon_{p3} - \epsilon_d)(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q + h_3)} \vartheta(\gamma). \end{aligned}$$

Полный потенциал поля внутри слоя  $j = 4$  выражается формулой

$$\begin{aligned} \varphi_4(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \hat{\varphi}_4^+ e^{-\gamma(z-(z_b+h_1))} + \hat{\varphi}_4^- e^{\gamma(z-(z_b+h_1+h_2))} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi_4(x, y, z) = & \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z-z_q-(h_1+h_2+h_3))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\epsilon_d - \epsilon_{p3})(\epsilon_{p3} - \epsilon_{p2})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z-z_q-(h_1+h_2-h_3))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{\gamma(z-(2z_b-z_q+h_1+h_2-h_3))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\epsilon_{p3} - \epsilon_d)(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{\gamma(z-(2z_b-z_q+h_1+h_2+h_3))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

Найдем теперь потенциал в первой пленке (в слое  $j = 3$ ) при  $z_b \leq z \leq z_b + h_1$ . Граничные условия на плоскости  $z = z_3 = z_b + h_1$  можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma h_1} & 1 \\ \varepsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} & -\varepsilon_{p1} \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_3^+ \\ \hat{\varphi}_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_2} \\ \varepsilon_{p2} \gamma & -\varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_4^+ \\ \hat{\varphi}_4^- \end{pmatrix}.$$

После несложных вычислений получаем

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_3^+ &= \frac{(\varepsilon_{p3} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_d - \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \times \\ &\times \frac{\vartheta(\gamma)}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_1 - h_2 + h_3)} + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p1})(\varepsilon_d - \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \times \\ &\times \frac{\vartheta(\gamma)}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_1 + h_2 + h_3)} + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_d + \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \times \\ &\times \frac{\vartheta(\gamma)}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_1 - h_2 - h_3)} + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p3} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p1})(\varepsilon_d + \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \times \\ &\times \frac{\vartheta(\gamma)}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_1 + h_2 - h_3)}, \\ \hat{\varphi}_3^- &= \frac{(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3})(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_d)}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \times \\ &\times \frac{\vartheta(\gamma)}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q + h_2 - h_3)} + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p1})(\varepsilon_d - \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \times \\ &\times \frac{\vartheta(\gamma)}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_2 + h_3)} + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_d + \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{\vartheta(\gamma)}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_2 - h_3)} + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p3} - \varepsilon_d)}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \times \\ &\times \frac{\vartheta(\gamma)}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q + h_2 + h_3)}. \end{aligned}$$

Тогда полный потенциал в слое  $j = 3$  выражается формулой

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \hat{\varphi}_3^+ e^{-\gamma(z - z_b)} + \hat{\varphi}_3^- e^{\gamma(z - (z_b + h_1))} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \\ &= \frac{(\varepsilon_{p3} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_d - \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z - z_q - h_1 - h_2 + h_3)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p1})(\varepsilon_d - \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z - z_q - h_1 + h_2 + h_3)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_d + \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z - z_q - h_1 - h_2 - h_3)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p3} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p1})(\varepsilon_d + \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z - z_q - h_1 + h_2 - h_3)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3})(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_d)}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z - z_q - h_2 - h_3)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p1})(\varepsilon_d - \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(2z_b - z_q - z + h_1 + h_2 - h_3)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_d + \varepsilon_{p3})}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(2z_b - z_q - z + h_1 - h_2 + h_3)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})(\epsilon_d + \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(2z_b - z_q - z + h_1 - h_2 - h_3)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p1})(\epsilon_{p3} - \epsilon_d)}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \frac{1}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(2z_b - z_q - z + h_1 + h_2 + h_3)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Отметим, что выражения для  $\hat{\phi}_2^+$  и  $\hat{\phi}_2^-$  можно также получить из  $\hat{\phi}_1^-$  и граничного условия на плоскости  $z = z_1 = z_b$  при учете наличия на границе заряда:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_b - z_q)} \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b - z_q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_2^+ \\ \hat{\phi}_2^- \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\phi}_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_2^+ &= \frac{q}{2\gamma\epsilon_f}, \\ \hat{\phi}_2^- &= \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} \mathfrak{R}(\gamma) = \\ &= \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} + \chi(\gamma) \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)}. \end{aligned}$$

Полный потенциал поля внутри слоя  $j = 2$  выражается формулой

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \hat{\phi}_2^+ e^{-\gamma(z - z_q)} + \hat{\phi}_2^- e^{\gamma(z - z_b)} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $\hat{\phi}_2^+$  и  $\hat{\phi}_2^-$ , с учетом  $z_{\text{ref}} = 2z_b - z_q$  находим

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qe^{-\gamma(z - z_q)}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qe^{\gamma(z - z_{\text{ref}})}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma) \frac{qe^{\gamma(z - z_{\text{ref}})}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Или, используя тождество (8), получим

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= q \left( 4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2} \right)^{-1} + \\ & + \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} q \left( 4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{\text{ref}})^2} \right)^{-1} + \\ & + \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma) \frac{e^{\gamma(z - z_{\text{ref}})}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что правая часть (14) полностью совпадает с (9), поэтому  $\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z)$ .

### ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ НА СЛУЧАЙ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТРЕХ ПЛЕНОК

Впервые метод зеркальных отражений на случай точечного заряда, расположенного вблизи плоскостной среды, применительно к частному случаю одной пленки был предложен в [18]. Дальнейшее обобщение метода для плоскостной структуры, состоящей из одной пленки, дано в [17]. Ниже рассмотрено дальнейшее развитие метода [17] на случай плоскостной структуры, состоящей из трех пленок.

Введем функцию

$$U(x, y, z) = q / 4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

определяющую потенциал точечного заряда  $q$ , расположенного в начале координат в пространстве с проницаемостью  $\epsilon_f$ . Тогда потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  от точечного заряда  $q$ , расположенного в произвольной точке полупространства  $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \varphi_2(x, y, z) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}} + \\ &+ \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_{\text{ref}})^2}} + \\ &+ \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\gamma) e^{\gamma(z - z_{\text{ref}})}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi(x - x_q) + \eta(y - y_q))} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $z_{\text{ref}} = 2z_b - z_q$ , а  $\chi(\gamma)$  выражается формулой (5).

Представим выражение (5) для  $\chi(\gamma)$  сходящимся рядом по степеням экспонент. Сначала запишем  $\chi(\gamma)$  в виде

$$\chi(\gamma) = \left\{ \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} (\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2}) e^{-2\gamma h_1}}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2 (\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})} + \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} (\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3})}{(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p3}) (\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2} e^{-2\gamma(h_1+h_2)} + \right. \\ \left. + \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} (\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2}) (\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3}) (\varepsilon_{p3} - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2 (\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2}) (\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p3}) (\varepsilon_{p3} + \varepsilon_d)} e^{-2\gamma(h_1+h_3)} + \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} (\varepsilon_{p3} - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2 (\varepsilon_{p3} + \varepsilon_d)} e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)} \right\} \times \quad (16) \\ \times \wp(b_1 e^{-2\gamma h_1}, b_2 e^{-2\gamma h_2}, b_3 e^{-2\gamma h_3}, b_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2)}, b_5 e^{-2\gamma(h_1+h_3)}, b_6 e^{-2\gamma(h_2+h_3)}, b_7 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)}),$$

где  $\wp(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) =$  Разложим функцию семи переменных  $\wp(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$  по степеням этих переменных:  
 $= [1 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)]^{-1}$ .

$$\wp(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} ((x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7))^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} ((x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^n C_n^{k_1} x_1^{n-k_1} (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)^{k_1} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^n C_n^{k_1} x_1^{n-k_1} \sum_{k_2=0}^{k_1} C_{k_1}^{k_2} x_2^{k_1-k_2} (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)^{k_2} = \dots \\ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \sum_{k_5=0}^{k_4} \sum_{k_6=0}^{k_5} C_n^{k_1} C_{k_1}^{k_2} C_{k_2}^{k_3} C_{k_3}^{k_4} C_{k_4}^{k_5} C_{k_5}^{k_6} x_1^{n-k_1} x_2^{k_1-k_2} x_3^{k_2-k_3} x_4^{k_3-k_4} x_5^{k_4-k_5} x_6^{k_5-k_6} x_7^{k_6},$$

где  $C_n^k = n! / k!(n-k)!$  – число сочетаний из  $n$  по  $k$ . Введем для краткости условное обозначение  $\mathbf{n}$  для вышеуказанных семи сумм по семи индексам  $\mathbf{n} = (n, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$ . Тогда

$$\wp(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \sum_{\mathbf{n}} C_n^{k_1} C_{k_1}^{k_2} C_{k_2}^{k_3} C_{k_3}^{k_4} C_{k_4}^{k_5} C_{k_5}^{k_6} x_1^{n-k_1} x_2^{k_1-k_2} x_3^{k_2-k_3} x_4^{k_3-k_4} x_5^{k_4-k_5} x_6^{k_5-k_6} x_7^{k_6}. \quad (17)$$

Подставляя разложение (17) в (16), находим

$$\chi(\gamma) = w_1 e^{-2\gamma h_1} \wp(b_1 e^{-2\gamma h_1}, b_2 e^{-2\gamma h_2}, b_3 e^{-2\gamma h_3}, b_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2)}, b_5 e^{-2\gamma(h_1+h_3)}, b_6 e^{-2\gamma(h_2+h_3)}, b_7 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)}) + \\ + w_2 e^{-2\gamma(h_1+h_2)} \wp(b_1 e^{-2\gamma h_1}, b_2 e^{-2\gamma h_2}, b_3 e^{-2\gamma h_3}, b_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2)}, b_5 e^{-2\gamma(h_1+h_3)}, b_6 e^{-2\gamma(h_2+h_3)}, b_7 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)}) + \\ + w_3 e^{-2\gamma(h_1+h_3)} \wp(b_1 e^{-2\gamma h_1}, b_2 e^{-2\gamma h_2}, b_3 e^{-2\gamma h_3}, b_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2)}, b_5 e^{-2\gamma(h_1+h_3)}, b_6 e^{-2\gamma(h_2+h_3)}, b_7 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)}) + \\ + w_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)} \wp(b_1 e^{-2\gamma h_1}, b_2 e^{-2\gamma h_2}, b_3 e^{-2\gamma h_3}, b_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2)}, b_5 e^{-2\gamma(h_1+h_3)}, b_6 e^{-2\gamma(h_2+h_3)}, b_7 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)}).$$

Подставляя сюда выражение

$$\wp(b_1 e^{-2\gamma h_1}, b_2 e^{-2\gamma h_2}, b_3 e^{-2\gamma h_3}, b_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2)}, b_5 e^{-2\gamma(h_1+h_3)}, b_6 e^{-2\gamma(h_2+h_3)}, b_7 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)}) = \\ = \sum_{\mathbf{n}} S(\mathbf{n}) e^{-2\gamma[(n-k_1)h_1 + (k_1-k_2)h_2 + (k_2-k_3)h_3 + (k_3-k_4)(h_1+h_2) + (k_4-k_5)(h_1+h_3) + (k_5-k_6)(h_2+h_3) + k_6(h_1+h_2+h_3)]}, \quad (18)$$

где  $S(\mathbf{n}) = C_n^{k_1} C_{k_1}^{k_2} C_{k_2}^{k_3} C_{k_3}^{k_4} C_{k_4}^{k_5} C_{k_5}^{k_6} b_1^{n-k_1} b_2^{k_1-k_2} b_3^{k_2-k_3} b_4^{k_3-k_4} b_5^{k_4-k_5} b_6^{k_5-k_6} b_7^{k_6}$ ,  $\mathbf{n} = (n, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6)$ ,

получим

$$\begin{aligned} \chi(\gamma) = & \sum_{\mathbf{n}} \mathfrak{A}_1(\mathbf{n}) e^{-2\gamma[(n-k_1+k_3-k_5+k_6+1)h_1+(k_1-k_2+k_3-k_4+k_5)h_2+(k_2-k_3+k_4)h_3]} + \\ & + \sum_{\mathbf{n}} \mathfrak{A}_2(\mathbf{n}) e^{-2\gamma[(n-k_1+k_3-k_5+k_6+1)h_1+(k_1-k_2+k_3-k_4+k_5+1)h_2+(k_2-k_3+k_4)h_3]} + \\ & + \sum_{\mathbf{n}} \mathfrak{A}_3(\mathbf{n}) e^{-2\gamma[(n-k_1+k_3-k_5+k_6+1)h_1+(k_1-k_2+k_3-k_4+k_5)h_2+(k_2-k_3+k_4+1)h_3]} + \\ & + \sum_{\mathbf{n}} \mathfrak{A}_4(\mathbf{n}) e^{-2\gamma[(n-k_1+k_3-k_5+k_6+1)h_1+(k_1-k_2+k_3-k_4+k_5+1)h_2+(k_2-k_3+k_4+1)h_3]}. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathfrak{A}_i(\mathbf{n}) = w_i S(\mathbf{n})$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,

$$w_1 = \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} (\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2 (\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})},$$

$$w_2 = \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} (\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3})}{(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p3}) (\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2},$$

$$w_3 = \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} (\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2}) (\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3}) (\varepsilon_{p3} - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2 (\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2}) (\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p3}) (\varepsilon_{p3} + \varepsilon_d)},$$

$$w_4 = \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} (\varepsilon_{p3} - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2 (\varepsilon_{p3} + \varepsilon_d)}.$$

Тогда выражение (15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) = \Phi_2(x, y, z) = & U(x - x_q, y - y_q, z - z_q) + \\ & + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f + \varepsilon_{p1}} U(x - x_q, y - y_q, z - z_{\text{ref}}) + \\ & + \sum_{\mathbf{n}} \frac{q \mathfrak{A}_1(\mathbf{n})}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z+z_q-Z_{1,1})} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))}}{2\varepsilon_f \gamma} d\xi d\eta + \\ & + \sum_{\mathbf{n}} \frac{q \mathfrak{A}_2(\mathbf{n})}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z+z_q-Z_{1,2})} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))}}{2\varepsilon_f \gamma} d\xi d\eta + \\ & + \sum_{\mathbf{n}} \frac{q \mathfrak{A}_3(\mathbf{n})}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z+z_q-Z_{1,3})} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))}}{2\varepsilon_f \gamma} d\xi d\eta + \\ & + \sum_{\mathbf{n}} \frac{q \mathfrak{A}_4(\mathbf{n})}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z+z_q-Z_{1,4})} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))}}{2\varepsilon_f \gamma} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z_{1,1} = & 2z_b + 2[(n-k_1+k_3-k_5+k_6+1)h_1 + \\ & + (k_1-k_2+k_3-k_4+k_5)h_2 + (k_2-k_3+k_4)h_3], \end{aligned}$$

$$Z_{1,2} = 2z_b + 2[(n-k_1+k_3-k_5+k_6+1)h_1 +$$

$$+ (k_1-k_2+k_3-k_4+k_5+1)h_2 + (k_2-k_3+k_4)h_3],$$

$$Z_{1,3} = 2z_b + 2[(n-k_1+k_3-k_5+k_6+1)h_1 +$$

$$+ (k_1-k_2+k_3-k_4+k_5)h_2 + (k_2-k_3+k_4+1)h_3],$$

$$Z_{1,4} = 2z_b + 2[(n-k_1+k_3-k_5+k_6+1)h_1 +$$

$$+ (k_1-k_2+k_3-k_4+k_5+1)h_2 + (k_2-k_3+k_4+1)h_3].$$

Учитывая математическое тождество (8) и теорему о свертке, получим

$$\Phi_1(x, y, z) = \Phi_2(x, y, z) =$$

$$= U(x - x_q, y - y_q, z - z_q) +$$

$$+ \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f + \varepsilon_{p1}} U(x - x_q, y - y_q, z - z_{\text{ref}}) +$$

$$+ \sum_{\mathbf{n}} \mathfrak{A}_1(\mathbf{n}) U(x - x_q, y - y_q, z + z_q - Z_{1,1}) + \quad (19)$$

$$+ \sum_{\mathbf{n}} \mathfrak{A}_2(\mathbf{n}) U(x - x_q, y - y_q, z + z_q - Z_{1,2}) +$$

$$+ \sum_{\mathbf{n}} \mathfrak{A}_3(\mathbf{n}) U(x - x_q, y - y_q, z + z_q - Z_{1,3}) +$$

$$+ \sum_{\mathbf{n}} \mathfrak{A}_4(\mathbf{n}) U(x - x_q, y - y_q, z + z_q - Z_{1,4}).$$

Таким образом, можно сформулировать обобщенный метод отражений следующим образом. Если точечный заряд  $q$  расположен в полупространстве рядом с плоскостройной структурой из трех пленок с толщинами  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$ , расположенной на границе другого полупространства, то потенциал в полупространстве, в котором расположен заряд, есть сумма потенциалов зарядов, которые можно разбить на шесть групп:

1) потенциал исходного точечного заряда  $q$  (источника поля), расположенного в точке  $z_q$ ;

2) потенциал виртуального точечного заряда величины  $q(\varepsilon_f - \varepsilon_{p1})/(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})$ , расположенного в точке  $z_{\text{ref}} = 2z_b - z_q$ , зеркально относительно ближайшей границы первой пленки  $z = z_b$ ;

3) потенциал бесконечной суммы  $\sum_n$  по семи индексам потенциалов виртуальных точечных зарядов величины  $q\mathcal{A}_1(\mathbf{n}) = qw_1 b_1^{n-k_1} b_2^{k_1-k_2} b_3^{k_2-k_3} b_4^{k_3-k_4} b_5^{k_4-k_5} b_6^{k_5-k_6} b_7^{k_6} S(\mathbf{n})$ , расположенных в точках  $z = z_{\text{ref}} + 2[(n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)h_1 + (k_1 - k_3 + k_3 - k_4 + k_5)h_2 + (k_2 - k_3 + k_4)h_3]$ ;

4) потенциал бесконечной суммы  $\sum_n$  по семи индексам потенциалов виртуальных точечных зарядов величины  $q\mathcal{A}_2(\mathbf{n}) = qw_2 b_1^{n-k_1} b_2^{k_1-k_2} b_3^{k_2-k_3} b_4^{k_3-k_4} b_5^{k_4-k_5} b_6^{k_5-k_6} b_7^{k_6} S(\mathbf{n})$ , расположенных в точках  $z = z_{\text{ref}} + 2[(n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)h_1 + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 + 1)h_2 + (k_2 - k_3 + k_4)h_3]$ ;

5) потенциал бесконечной суммы  $\sum_n$  по семи индексам потенциалов виртуальных точечных зарядов величины  $q\mathcal{A}_3(\mathbf{n}) = qw_3 b_1^{n-k_1} b_2^{k_1-k_2} b_3^{k_2-k_3} b_4^{k_3-k_4} b_5^{k_4-k_5} b_6^{k_5-k_6} b_7^{k_6} S(\mathbf{n})$ , расположенных в точках  $z = z_{\text{ref}} + 2[(n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)h_1 + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5)h_2 + (k_2 - k_3 + k_4 + 1)h_3]$ ;

6) потенциал бесконечной суммы  $\sum_n$  по семи индексам потенциалов виртуальных точечных зарядов величины  $q\mathcal{A}_4(\mathbf{n}) = qw_4 b_1^{n-k_1} b_2^{k_1-k_2} b_3^{k_2-k_3} b_4^{k_3-k_4} b_5^{k_4-k_5} b_6^{k_5-k_6} b_7^{k_6} S(\mathbf{n})$ , расположенных в точках  $z = z_{\text{ref}} + 2[(n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)h_1 + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 + 1)h_2 + (k_2 - k_3 + k_4 + 1)h_3]$ .

Таким образом, в выражениях для потенциала  $\varphi_1 = (x, y, z)$  можно избавиться от двойного интегрирования обратного преобразования Фурье и заменить его суммированием достаточно быстро сходящегося ряда по виртуальным точечным зарядам.

Аналогично представим  $\vartheta(\gamma)$  в виде

$$\vartheta(\gamma) = g e^{-\gamma(h_1+h_2+h_3)} \wp \left( b_1 e^{-2\gamma h_1}, b_2 e^{-2\gamma h_2}, b_3 e^{-2\gamma h_3}, b_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2)}, b_5 e^{-2\gamma(h_1+h_3)}, b_6 e^{-2\gamma(h_2+h_3)}, b_7 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)} \right),$$

$$\text{где } g = \frac{16 \epsilon_f \epsilon_{p1} \epsilon_{p2} \epsilon_{p3}}{\left[ (\epsilon_f + \epsilon_{p1})(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})(\epsilon_{p3} + \epsilon_d) \right]}.$$

Используя выражение (18), можно представить функцию  $\vartheta(\gamma)$  в виде ряда

$$\vartheta(\gamma) = \sum_n v(\mathbf{n}) e^{-\gamma[(2n-2k_1+2k_3-2k_5+2k_6+1)h_1 + (2k_1-2k_2+2k_3-2k_4+2k_5+1)h_2 + (2k_2-2k_3+2k_4+1)h_3]}, \tag{20}$$

где введена функция  $v(\mathbf{n}) = gS(\mathbf{n})$ . Тогда по аналогии можно найти потенциалы в пленках и в свободном полупространстве. Подставляя (20) в выражение (13) для потенциала  $\varphi_3$  в первой пленке, для заряда  $q$  в произвольной точке  $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$  первого полупространства, учитывая математическое тождество (8) и теорему о свертке, после несложных преобразований получим (для компактности записи обозначено  $\bar{x} = x - x_q$ ,  $\bar{y} = y - y_q$ )

$$\varphi_3(x, y, z) = \frac{(\epsilon_{p3} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_d - \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times$$

$$\times \sum_n v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, z - z_q + Z_{3,1}) +$$

$$+ \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p1})(\epsilon_d - \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times$$

$$\times \sum_n v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, z - z_q + Z_{3,2}) +$$

$$+ \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p1})(\epsilon_d + \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times$$

$$\times \sum_n v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, z - z_q + Z_{3,3}) +$$

$$+ \frac{(\epsilon_{p3} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p1})(\epsilon_d + \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times$$

$$\times \sum_n v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, z - z_q + Z_{3,4}) +$$

$$+ \frac{(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times$$

$$\times \sum_n v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, Z_{3,5} - z_q - z) +$$

$$+ \frac{(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p1})(\epsilon_d - \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times$$

$$\times \sum_n v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, Z_{3,6} - z_q - z) +$$

$$+ \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})(\epsilon_d + \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times$$

$$\times \sum_n v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, Z_{3,7} - z_q - z) +$$

$$\tag{21}$$

$$+ \frac{(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p3} - \varepsilon_d)}{8\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \times \\ \times \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, Z_{3,8} - z_q - z),$$

где

$$Z_{3,1} = (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5)2h_2 + (k_2 - k_3 + k_4 + 1)2h_3, \\ Z_{3,2} = (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 + 1)2h_2 + (k_2 - k_3 + k_4 + 1)2h_3, \\ Z_{3,3} = (2n - 2k_1 + 2k_3 - 2k_5 + 2k_6)h_1 + \\ + (2k_1 - 2k_2 + 2k_3 - 2k_4 + 2k_5)h_2 + (2k_2 - 2k_3 + 2k_4)h_3, \\ Z_{3,4} = (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 + 1)2h_2 + (k_2 - k_3 + k_4)2h_3, \\ Z_{3,5} = 2z_b + (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 + 1)2h_2 + (k_2 - k_3 + k_4)2h_3, \\ Z_{3,6} = 2z_b + (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5)2h_2 + (k_2 - k_3 + k_4 + 1)2h_3, \\ Z_{3,7} = 2z_b + (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5)2h_2 + (k_2 - k_3 + k_4)2h_3, \\ Z_{3,8} = 2z_b + (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 + 1)2h_2 + (k_2 - k_3 + k_4 + 1)2h_3.$$

Аналогично из (12) для потенциала  $\varphi_4$  во второй пленке, подставляя (20) и учитывая (8) и теорему о свертке, получим

$$\varphi_4(x, y, z) = \\ = \frac{(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_d)(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_{p2})}{4\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, z - z_q + Z_{4,1}) + \\ + \frac{(\varepsilon_d - \varepsilon_{p3})(\varepsilon_{p3} - \varepsilon_{p2})}{4\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, z - z_q + Z_{4,2}) + \\ + \frac{(\varepsilon_{p3} + \varepsilon_d)(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_{p3})}{4\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, Z_{4,3} - z_q - z) + \\ + \frac{(\varepsilon_{p3} - \varepsilon_d)(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p3})}{4\varepsilon_{p2}\varepsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) U(\bar{x}, \bar{y}, Z_{4,4} - z_q - z), \quad (22)$$

где

$$Z_{4,1} = (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5)2h_2 +$$

$$+ (k_2 - k_3 + k_4)2h_3, \\ Z_{4,2} = (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5)2h_2 + \\ + (k_2 - k_3 + k_4 + 1)2h_3,$$

$$Z_{4,3} = 2z_b + (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 + 1)2h_2 + \\ + (k_2 - k_3 + k_4)2h_3,$$

$$Z_{4,4} = 2z_b + (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 + 1)2h_2 + \\ + (k_2 - k_3 + k_4 + 1)2h_3.$$

В третьей пленке, подставляя (20) в (11), получаем потенциал  $\varphi_5$  и, учитывая (8) и теорему о свертке, находим

$$\varphi_5(x, y, z) = \\ = \frac{\varepsilon_{p3} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) U(x - x_q, y - y_q, z - z_q + Z_{5,1}) + \\ + \frac{\varepsilon_{p3} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) U(x - x_q, y - y_q, Z_{5,2} - z_q - z), \quad (23)$$

где

$$Z_{5,1} = (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5)2h_2 + \\ + (k_2 - k_3 + k_4)2h_3,$$

$$Z_{5,2} = 2z_b + (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6 + 1)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 + 1)2h_2 + \\ + (k_2 - k_3 + k_4 + 1)2h_3.$$

Наконец, из (10) для потенциала  $\varphi_6$  в полу-пространстве  $j = 6$  получим

$$\varphi_6(x, y, z) = \\ = \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) U(x - x_q, y - y_q, z - z_q + Z_{6,1}), \quad (24)$$

где

$$Z_{6,1} = (n - k_1 + k_3 - k_5 + k_6)2h_1 + \\ + (k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5)2h_2 + \\ + (k_2 - k_3 + k_4)2h_3.$$

Аналитические выражения (19)–(24) были проверены численно. Их точность подтверждалась также сравнением с другими численными решениями данной задачи [15].

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА  
ЗЕРКАЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ  
НА СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ

Обобщим теперь полученный метод зеркальных отражений на потенциал полного поля  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  в области  $z < z_b$  перед плоскостной структурой, состоящей из трех пленок (рис. 3), произвольной компактной системы  $N_q$  зарядов-источников  $q_k$ , расположенных в точках с радиус-векторами  $\mathbf{r}_{q,k} = (x_{q,k}; y_{q,k}; z_{q,k})$ , где  $k = 1, 2, \dots, N_q$ .

Если бы не было плоскостной структуры, то потенциал этой системы зарядов-источников представлялся бы формулой

$$\Phi_s(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N_q} \frac{q_k}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-z_{q,k})^2}}$$

Заметим, что для произвольной константы  $\Omega$  имеют место следующие очевидные тождества:

$$\sum_{k=1}^{N_q} \frac{q_k}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-z_{q,k} + \Omega)^2}} = \sum_{k=1}^{N_q} \frac{q_k}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + ((z+\Omega)-z_{q,k})^2}} = \Phi_s(x, y, z + \Omega), \tag{25}$$

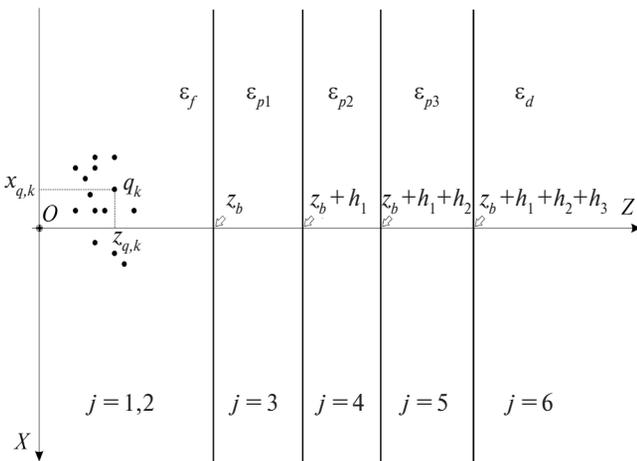


Рис. 3. Система точечных зарядов  $q_k$  рядом с плоскостной структурой из трех пленок, расположенной на границе полупространства.

$$\sum_{k=1}^{N_q} \frac{q_k}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-(\Omega-z_{q,k}))^2}} = \sum_{k=1}^{N_q} \frac{q_k}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + ((\Omega-z)-z_{q,k})^2}} = \Phi_s(x, y, \Omega-z). \tag{26}$$

Суммируя выражения (19) по всем зарядам  $q_k$ , получим обобщение метода зеркальных отражений для произвольных распределений зарядов в полупространстве перед плоскостной структурой, состоящей из трех пленок, в виде

$$\Phi_{tot}(x, y, z) = \Phi_s(x, y, z) + \frac{(\epsilon_f - \epsilon_{p1})}{(\epsilon_{p1} + \epsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) + \sum_n \mathfrak{A}_1(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{1,1} - z) + \sum_n \mathfrak{A}_2(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{1,2} - z) + \sum_n \mathfrak{A}_3(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{1,3} - z) + \sum_n \mathfrak{A}_4(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{1,4} - z). \tag{27}$$

Потенциал индуцированных зарядов  $\Phi_{ind}$ , который порождается потенциалом  $\Phi_s$ , представляется формулой  $\Phi_{ind}(x, y, z) = \Phi_{tot}(x, y, z) - \Phi_s(x, y, z)$ .

Аналогично получим из (21) с учетом (25) и (26) выражение для потенциала  $\Phi_3$  системы зарядов в первой пленке при  $z_b \leq z \leq (z_b + h_1)$

$$\Phi_3(x, y, z) = \frac{(\epsilon_{p3} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_d - \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times \sum_n v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, z + Z_{3,1}) + \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p1})(\epsilon_d - \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times \sum_n v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, z + Z_{3,2}) + \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p1})(\epsilon_d + \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, z + Z_{3,3}) + \\
 & + \frac{(\epsilon_{p3} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p1})(\epsilon_d + \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times \\
 & \times \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, z + Z_{3,4}) + \\
 & + \frac{(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times \\
 & \times \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{3,5} - z) + \\
 & + \frac{(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p1})(\epsilon_d - \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times \\
 & \times \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{3,6} - z) + \\
 & + \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})(\epsilon_d + \epsilon_{p3})}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times \\
 & \times \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{3,7} - z) + \\
 & + \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p1})(\epsilon_{p3} - \epsilon_d)}{8\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \times \\
 & \times \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{3,8} - z).
 \end{aligned}$$

(28)

$$\begin{aligned}
 \Phi_4(x, y, z) = & \\
 = & \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)(\epsilon_{p3} + \epsilon_{p2})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, z + Z_{4,1}) + \\
 & + \frac{(\epsilon_d - \epsilon_{p3})(\epsilon_{p3} - \epsilon_{p2})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, z + Z_{4,2}) + \\
 & + \frac{(\epsilon_{p3} + \epsilon_d)(\epsilon_{p2} - \epsilon_{p3})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{4,3} - z) + \\
 & + \frac{(\epsilon_{p3} - \epsilon_d)(\epsilon_{p2} + \epsilon_{p3})}{4\epsilon_{p2}\epsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{4,4} - z).
 \end{aligned}$$

(29)

Из (23), (25) и (27) потенциал  $\Phi_5$  в третьей пленке при  $(z_b + h_1 + h_2) \leq z \leq (z_b + h_1 + h_2 + h_3)$  ( $j = 5$ ) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Phi_5(x, y, z) = & \\
 = & \frac{\epsilon_{p3} + \epsilon_d}{2\epsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, z + Z_{5,1}) + \\
 & + \frac{\epsilon_{p3} - \epsilon_d}{2\epsilon_{p3}} \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, Z_{5,2} - z).
 \end{aligned}$$

(30)

Наконец, учитывая (24), в полупространстве при  $z \geq (z_b + h_1 + h_2 + h_3)$  ( $j = 6$ ) потенциал  $\Phi_6$  можно записать как

$$\Phi_6(x, y, z) = \sum_{\mathbf{n}} v(\mathbf{n}) \Phi_s(x, y, z + Z_{6,1}). \quad (31)$$

С учетом (22), (25) и (26) потенциал  $\Phi_4$  системы зарядов во второй пленке ( $j = 4$ ) при  $z_b + h_1 \leq z \leq z_b + h_1 + h_2$  представляется в виде

### ПОТЕНЦИАЛ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ТЕЛА, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТРЕХ ПЛЕНОК

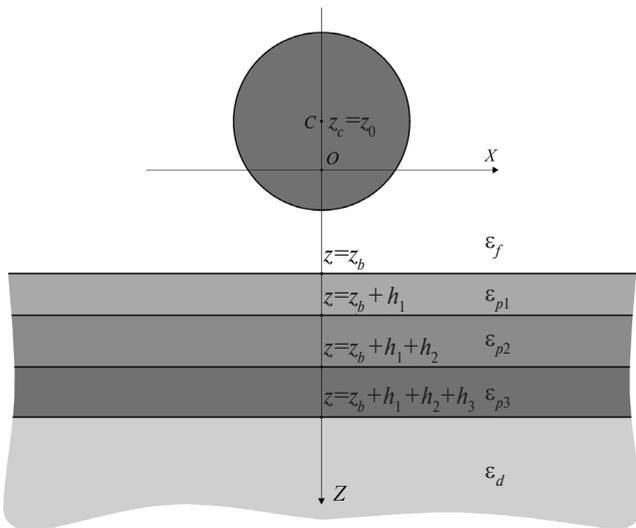


Рис. 4. Металлическая сфера около плоскостой структуры из трех пленок, расположенной на границе полупространства; геометрия задачи.

Рассмотрим металлическое тело, для определенности пусть это будет сфера с радиусом  $R$ . Поверхность сферы представим формулой  $x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ , где  $R$  – радиус сферы, а координаты центра  $x_c = 0, y_c = 0$  и  $z_c = z_0$  (см. рис. 4). Пусть вблизи сферы находится три пленки с толщинами  $h_1, h_2$  и  $h_3$ , причем их границы определяются уравнениями  $z = z_1 = z_b, z = z_2 = z_b + h_1, z = z_3 = z_b + h_1 + h_2$  и  $z = z_4 = z_b + h_1 + h_2 + h_3$ . Диэлектрические проницаемости внешней однородной среды, первой, второй и третьей пленок и полубесконечной среды за пленкой обозначим  $\epsilon_f, \epsilon_{p1}, \epsilon_{p2}, \epsilon_{p3}$  и  $\epsilon_d$  соответственно.

Рассмотрим распределение электрического потенциала, которое установится в пространстве вокруг металлического тела. Как известно, потенциал электростатического поля  $\Phi$  удовлетворяет в однородном веществе, без сторон-

них зарядов, уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = 0$ . На границе металлического тела (в рассматриваемом случае – сферы) потенциал будет постоянный (обозначим его  $U_s$ ). Кроме того, на плоских границах пленок непрерывны тангенциальные составляющие электрического поля и нормальные составляющие электрической индукции. Тогда граничные условия можно записать следующим образом:

- на поверхности тела:  $\Phi = U$ ;
- на границе пленки  $z = z_b$ :  
 $\varepsilon_{p1}E_{3,n} = \varepsilon_f E_{f,n}$  и  $E_{3,\tau} = E_{f,\tau}$ ;
- на границе пленки  $z = z_b + h_1$ :  
 $\varepsilon_{p2}E_{4,n} = \varepsilon_{p1}E_{3,n}$  и  $E_{4,\tau} = E_{3,\tau}$ ;
- на границе пленки  $z = z_b + h_1 + h_2$ :  
 $\varepsilon_{p3}E_{5,n} = \varepsilon_{p2}E_{4,n}$  и  $E_{5,\tau} = E_{4,\tau}$ ;
- на границе пленки  $z = z_b + h_1 + h_2 + h_3$ :  
 $\varepsilon_d E_{6,n} = \varepsilon_{p3}E_{5,n}$  и  $E_{6,\tau} = E_{5,\tau}$ .

Данная задача имеет осевую симметрию относительно оси  $Z$ . Поэтому и решение уравнения Лапласа будет иметь такую же симметрию. Пусть потенциал зарядов, находящихся на эквипотенциальном металлическом теле в пространстве с проницаемостью  $\varepsilon_f$  описывается функцией  $\Phi_s(x, y, z)$ .

Тогда полный потенциал  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  в области, заполненной диэлектриком с  $\varepsilon_f$ , можно выразить через  $\Phi_s(x, y, z)$  по формуле (27), а полный потенциал в пленках и в диэлектрическом пространстве за ней – по формулам (28)–(31). При этом приведенные условия на границах пленок, а также условие стремления решения к нулю на бесконечности будут выполнены автоматически.

Таким образом, задача определения потенциала во всем пространстве состоит в нахождении такого потенциала  $\Phi_s(x, y, z)$ , чтобы полный потенциал  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  удовлетворял на поверхности тела граничному условию  $\Phi_{tot} = U_s$ . Это можно сделать, разложив потенциал  $\Phi_s(x, y, z)$  по подходящим гармоническим функциям, а коэффициенты разложения определив из условия  $\Phi_{tot} = U_s$  на границе металла.

Имея в виду общность дальнейшего изложения, рассматривая сферическое тело, перейдем к безразмерным координатам:  $\tilde{x} = x/R$ ,  $\tilde{y} = y/R$ ,  $\tilde{z} = z/R$ , где  $R$  – радиус сферы. Уравнение Лапласа в безразмерных координатах не изменится. Кроме того, нормируем потенциал на его значение  $U_s$  на поверхности сферы, т.е. перейдем к безразмерному потенциалу  $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \Phi/U_s$  в безразмерных координатах. Тогда граничное условие на сфере запишется в виде  $\tilde{\Phi}_{tot} = 1$ .

В рассматриваемом осесимметричном случае для выполнения граничного условия на поверхности сферы достаточно удовлетворить его на линии пересечения поверхности сферы с любой плоскостью симметрии, проходящей через ось  $Z$ . В качестве такой плоскости выберем плоскость  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  при  $\tilde{y} = 0$ . Более конкретно, достаточно удовлетворить условию  $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) = 1$  только на границе пересечения полуплоскости  $\tilde{y} = 0$  при  $\tilde{x} \geq 0$  и поверхности сферы. В безразмерных координатах это будет кривая  $\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2 = 1$ , при  $\tilde{y} = 0$  и  $\tilde{x} \geq 0$ .

Будем искать решение, предполагая, что потенциал снаружи сферы  $\Phi_s$  представляется в виде следующего разложения по гармоническим функциям:

$$\tilde{\Phi}_s = \sum_{j=1}^N A_j P_{j-1}(\cos\theta) / \tilde{r}^j, \tag{32}$$

где  $A_j$  – постоянные коэффициенты разложения,  $P_j(\cos\theta)$  – полиномы Лежандра степени  $j$ , угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $Z$  из центра сферы,  $\tilde{r}$  – безразмерный радиус-вектор точки наблюдения, проведенный из центра сферы. В координатах  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  выражение (32) можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

где

$$\tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{P_{j-1}\left(\frac{(\tilde{z} - \tilde{z}_0)}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2}}\right)}{\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2}\right)^j}.$$

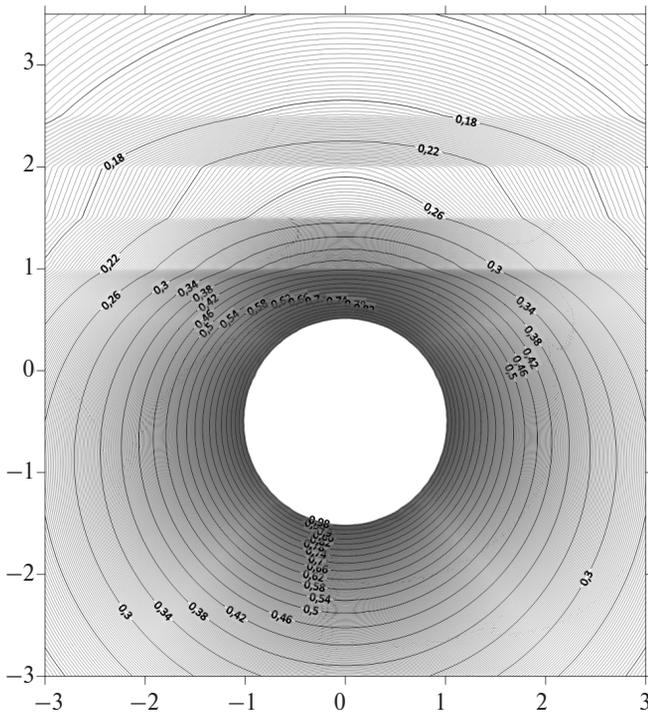
Отметим, что выбор функциональных зависимостей (32) из общего решения уравнения Лапласа обусловлен тем, что снаружи сферы потенциал поля должен стремиться к нулю при удалении от ее поверхности, а на поверхности сферы полиномы Лежандра образуют полную систему функций.

Тогда полный потенциал  $\tilde{\Phi}_{tot}$  в среде с  $\varepsilon_f$  (в пространстве между сферой и первой пленкой) можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \left\{ \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_{p1})}{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_f)} \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) + \dots \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_n \mathfrak{A}_1(\mathbf{n}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{Z}_{1,1} - \tilde{z}) + \\
 & + \sum_n \mathfrak{A}_2(\mathbf{n}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{Z}_{1,2} - \tilde{z}) + \\
 & + \sum_n \mathfrak{A}_3(\mathbf{n}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{Z}_{1,3} - \tilde{z}) + \\
 & + \sum_n \mathfrak{A}_4(\mathbf{n}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{Z}_{1,4} - \tilde{z}) \Big\}.
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Граничное условие на сфере  $\tilde{\Phi}_{\text{tot}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 1$  в данной работе удовлетворялось приближенно, методом коллокаций [19]. Указанные уравнения записывались в равномерно распределенных  $N$  точках полукруга  $\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2 = 1$  при  $\tilde{y} = 0$  и  $\tilde{x} > 0$  на поверхности сферы. С учетом полученных  $N$  линейных алгебраических уравнений с  $N$  неизвестными находились  $A_j$  и по формулам (33) распределения полного потенциала в области между сферой и передней поверхностью первой пленки.



**Рис. 5.** Распределение в нормированных координатах  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  нормированного потенциала вокруг металлической заряженной сферы; диэлектрические проницаемости:  $\epsilon_j = 1, \epsilon_{p1} = 2, \epsilon_{p2} = 6, \epsilon_{p3} = 1.5, \epsilon_d = 3$ ; толщина пленок  $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 = \tilde{h}_3 = 0.5$ ; их границы  $\tilde{z} = 1, \tilde{z} = 1.5, \tilde{z} = 2$  и  $\tilde{z} = 2.5$ ; расстояние между сферой и первой пленкой  $\tilde{\Delta z} = 0.5$ .

По известным значениям  $A_j$  распределения потенциала в пленках и в полупространстве за ними с учетом (28)–(31) определяются аналогичными формулами. Выпишем, ради экономии места, выражения только для потенциалов в третьей пленке  $\tilde{\Phi}_5$  и в полупространстве за ней  $\tilde{\Phi}_6$

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\Phi}_5(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \\
 & = \sum_{j=1}^N A_j \left( \frac{\epsilon_{p3} + \epsilon_d}{2\epsilon_{p3}} \sum_n v(\mathbf{n}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + \tilde{Z}_{5,1}) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\epsilon_{p3} - \epsilon_d}{2\epsilon_{p3}} \sum_n v(\mathbf{n}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{Z}_{5,2} - \tilde{z}) \right), \\
 & \tilde{\Phi}_6(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \left( \sum_n v(\mathbf{n}) \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + \tilde{Z}_{6,1}) \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, задача нахождения нормированного потенциала в нормированных координатах во всем пространстве снаружи сферы является полностью решенной.

Важное свойство полученных решений – они зависят только от отношений диэлектрических проницаемостей, т.е. если увеличить все диэлектрические проницаемости в  $k$  раз, то распределение нормированного потенциала не изменится.

### ПОТЕНЦИАЛ ЗАРЯЖЕННОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СФЕРЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ РЯДОМ С ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СТРУКТУРОЙ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ТРЕХ ПЛЕНОК

В качестве примера применения изложенной теории были проведены численные расчеты распределения нормированного потенциала металлической заряженной сферы, находящейся вблизи плоскостойкой структуры, состоящей из трех пленок. Сфера с центром в точке  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (0, 0, -0.5)$  находилась в вакууме с  $\epsilon_f = 1$ , рядом с пленками толщиной  $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 = \tilde{h}_3 = 0.5$  (в нормированных на радиус кривизны сферы единицах). Диэлектрические проницаемости пленок были выбраны  $\epsilon_{p1} = 2, \epsilon_{p2} = 6$  и  $\epsilon_{p3} = 1.5$ . Полупространство за пленкой имело диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_d = 3$ . Границы пленки определялись уравнениями  $\tilde{z} = \tilde{z}_b = 1, \tilde{z} = \tilde{z}_b + \tilde{h}_1 = 1.5, \tilde{z} = \tilde{z}_b + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 = 2$  и  $\tilde{z} = \tilde{z}_b + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 = 2.5$ . Кратчайшее расстояние от сферы до первой пленки было равно  $\tilde{\Delta z} = 0.5$ .

На рис. 5 показано распределение нормированного потенциала в плоскости  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  при указанных параметрах. Видна естественная экранировка электрического поля в диэлектриче-

ских пленках и полупространстве за ними. Чем больше диэлектрическая проницаемость, тем сильнее экранировка. Важное свойство полученного распределения потенциала – оно одинаково для всех подобных геометрий и одинаковых соотношений диэлектрических проницаемостей.

Аналогичные задачи можно решить и для металлических заряженных тел более сложной формы. Отлично зарекомендовал себя метод представления  $\tilde{\Phi}_s$  для тел сложной формы, который подробно изложен в работе [15].

Наконец, несколько замечаний о сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \sum_{k_5=0}^{k_4} \sum_{k_6=0}^{k_5} C_n^{k_1} C_{k_1}^{k_2} C_{k_2}^{k_3} C_{k_3}^{k_4} C_{k_4}^{k_5} C_{k_5}^{k_6} x_1^{n-k_1} x_2^{k_1-k_2} x_3^{k_2-k_3} x_4^{k_3-k_4} x_5^{k_4-k_5} x_6^{k_5-k_6} x_7^{k_6}$$

к функции

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \left(1 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)\right)^{-1}.$$

Ряд заведомо сходится, когда

$$|x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7| < 1.$$

В рассматриваемой задаче из него получается неравенство

$$\left| b_1 e^{-2\gamma h_1} + b_2 e^{-2\gamma h_2} + b_3 e^{-2\gamma h_3} + b_4 e^{-2\gamma(h_1+h_2)} + b_5 e^{-2\gamma(h_1+h_3)} + b_6 e^{-2\gamma(h_2+h_3)} + b_7 e^{-2\gamma(h_1+h_2+h_3)} \right| < 1, \quad (34)$$

где  $b_i$  определяются по диэлектрическим проницаемостям задачи формулами (5).

Численное исследование этого неравенства показывает, что, по крайней мере, если диэлектрические проницаемости находятся в интервалах  $1 \leq \epsilon_f \leq 30$ ,  $1 \leq \epsilon_{p1} \leq 30$ ,  $1 \leq \epsilon_{p2} \leq 30$ ,  $1 \leq \epsilon_{p3} \leq 30$  и  $1 \leq \epsilon_d \leq 30$ , неравенство (34) выполняется и ряд сходится при всех  $\gamma$ . При решении предложенным методом задач с диэлектрическими проницаемостями вне этих интервалов следует для каждого набора параметров проверять выполнение неравенства (34). Если окажется (например, это может быть в квазистатике), что существует интегрируемая особенность  $\chi(\gamma)$ , то для решения задачи следует применить метод с двойным интегрированием [15]. А если особенность будет неинтегрируемая, то возможно, что квазистатика не подходит для описания таких резонансов и требуется электродинамическое рассмотрение задачи (возможно, что при условии возбуждения поверхностной волны в плоскостойкой структуре представление индуцированных зарядов рядом точечных зарядов не является адекватным). Этот вопрос требует дополнительного исследования.

### ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ К ЗАДАЧАМ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛОСКОСЛОИСТЫХ СРЕД

Как известно, существует аналогия между задачами электростатики и стационарными задачами теплопроводности [20] (гл. 12). Аналогичны не только соответствующие уравнения, но и граничные условия [14, 21, 22]. Если в задачах, рассмотренных в предыдущих разделах, заменить одновременно: 1) потенциал  $\varphi$  – на температуру  $T - T_0$ , где  $T_0$  – температура на бесконечности; 2) диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  – на коэффициент теплопроводности  $K$ ; 3) вектор электрической индукции  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \nabla \varphi$  – на плотность потока тепла  $\mathbf{h} = -K \nabla T$ ; 4) точечный заряд  $q$  – на мощность тепловыделения точечного источника  $Q_h$ , то можно решить аналогичные задачи тем же методом.

Например, чтобы решить задачу нахождения распределения температуры вокруг тела, нагретого до постоянной температуры  $T_m$ , можно сначала решить соответствующую электростатическую задачу распределения потенциала в окрестности тела с постоянным потенциалом поверхности. Нормированное решение электростатической задачи будет также решением аналогичной нормированной задачи теплопроводности в нормированных координатах (при указанной замене величин и обозначений). Распределение температуры (точнее превышения температуры над внешней температурой  $T_0$ , выраженное в единицах  $T_m - T_0$ ) в задаче о нагретой сфере будет идентично распределению рис. 5.

Нормированные температурные распределения так же, как и в случае распределений нормированных электростатических потенциалов, обладают следующим свойством. Распределения зависят от отношений коэффициен-

тов теплопроводности областей, т.е. если увеличить все коэффициенты в  $k$  раз, то нормированное распределение температуры не изменится в нормированных координатах. Таким образом, на рис. 5 показаны нормированные температурные распределения при значениях коэффициентов теплопроводности  $K_f = k$ ,  $K_{p1} = 2k$ ,  $K_{p2} = 6k$ ,  $K_{p3} = 1.5k$  и  $K_d = 3k$ , где  $k$  – произвольное число.

Особо отметим, что аналогия между электростатической и теплопроводной задачами не означает, что распределение электрического потенциала в вакууме аналогично распределению температуры в вакууме. В рассмотренном случае аналог вакуума – среда с некоторым конечным коэффициентом теплопроводности  $K_f$ , а коэффициенты  $K_{p1}$ ,  $K_{p2}$ ,  $K_{p3}$  и  $K_d$  соотносятся с  $K_f$  так же, как диэлектрические проницаемости аналогичной электростатической задачи.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим значение проделанной аналитической работы для практического применения разработанного метода отражений. В первую очередь было важно найти аналитические выражения для функций  $\chi(\gamma)$  и  $\vartheta(\gamma)$ , что дало значительное ускорение численных расчетов. Кроме того, зная эти аналитические функции, разлагая их в ряд, удалось открыть и строго обосновать метод отражения для плоскослоистой структуры, состоящей из трех пленок. Это позволило заменить двойное интегрирование обратного преобразования Фурье – суммированием, что привело к значительному ускорению численных расчетов и в конечном итоге дало возможность решать более сложные задачи.

Наконец, анализ структуры решения позволяет предсказать метод отражений для плоскослоистой структуры из четырех пленок. В этом случае в знаменателе соответствующих выражений для  $\chi(\gamma)$  и  $\vartheta(\gamma)$  ожидается 15 коэффициентов  $b_p$ , а в их разложении – 15 последовательных сумм.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (госзадание № 075-00270-24-00).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. *Sommerfeld A.* Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie // *Ann. Phys. (Leipzig)*. 1926. Bd. 81. S. 1135.
3. *Wait J.R.* The Ancient and Modern History of EM Ground-wave Propagation // *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. 1998. V. 40. № 5. P. 7.
4. *Chew W.C.* Waves and Fields in Inhomogeneous Media. N.Y.: IEEE Press, 1995.
5. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. 2-е изд., доп. и испр. М.: Наука, 1973.
6. *Pollack H.N.* Steady State Heat Conduction in Layered Media: The Half-space and Sphere // *J. Geophys. Res.* 1965. V. 70. № 22. P. 5645.
7. *Negi J.G., Singh R.N.* A Matrix Method for Heat Conduction in Multi-Layered Media // *Pure Appl. Geophys.* 1969. V. 73. № 1. P. 143.
8. *Negi J.G., Singh R.N.* Heat Transfer in Multi-Layered Media with Temperature Dependent Sources // *Pure Appl. Geophys.* 1968. V. 69. № 1. P. 110.
9. *Matysiak S.J., Perkowski D.M.* Temperature Distributions in a Periodically Stratified Layer with Slant Lamination // *Heat Mass Transfer*. 2014. V. 50. № 1. P. 75.
10. *Петрин А.Б.* Элементарный излучатель на границе плоскослоистой структуры // *ЖЭТФ*. 2021. Т. 159. № 1. С. 35.
11. *Кинг Р., Смит Г.* Антенны в материальных средах. В 2-х кн. Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
12. *King R.W.P.* The Propagation of Signals Along a Three-layered Region // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 1988. V. 36. № 6. P. 1080.
13. *Петрин А.Б.* Фокусировка поверхностной плазменной волны на нановершине сканирующего металлического микроострия у плоскослоистой структуры // *Опт. и спектр*. 2022. Т. 130. № 9. С. 1436.
14. *Петрин А.Б.* О фундаментальном решении задач электростатики и теплопроводности для плоскослоистых сред // *ТВТ*. 2022. Т. 60. № 5. С. 740.
15. *Петрин А.Б.* Развитие методов решения задач электростатики и теплопроводности плоскослоистых сред // *Успехи прикладной физики*. 2023. Т. 11. № 1. С. 3.
16. *Петрин А.Б.* Развитие методов решения задач нестационарной теплопроводности плоскослоистых сред // *Успехи прикладной физики*. 2023. Т. 11. № 2. С. 93.
17. *Петрин А.Б.* Развитие и обобщение метода отражений в задачах электростатики и теплопроводности плоскослоистых сред // *ЖТФ*. 2023. Т. 93. № 3. С. 318.
18. *Петрин А.Б.* О нанофокусировке света на вершине металлического микроострия, расположенного над плоскослоистой структурой // *Успехи прикладной физики*. 2016. Т. 4. № 4. С. 326.
19. Численные методы теории дифракции (Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 29). Сб. ст. Пер. с англ. М.: Мир, 1982.
20. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1965.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
22. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001.