

УДК 629.7.067.5

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОМАССОБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ЛЬДА В УСЛОВИЯХ АТМОСФЕРНОГО ОБЛАКА, СОСТОЯЩЕГО ИЗ ПЕРЕОХЛАЖДЕННЫХ КАПЕЛЬ

© 2024 г. Л. А. Бендерский*, А. В. Горячев**, П. А. Горячев,
Д. А. Горячев, Д. А. Любимов***, Е. С. Студенников

ФАУ Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия

*E-mail: leoben@ciam.ru

**E-mail: avgoryachev@ciam.ru

***E-mail: lyubimov@ciam.ru

Поступила в редакцию 18.09.2023 г.

После доработки 07.12.2023 г.

Принята к публикации 04.12.2023 г.

Предложена усовершенствованная модель обледенения, позволяющая повысить точность выполнения трехмерных расчетов процесса обледенения на различных элементах авиационной техники. Верификация предложенной модели осуществлялась на основании результатов расчетов, выполненных с использованием программных комплексов Ansys FENSAP-ICE и FlowVision. В процессе валидации модели с использованием имеющихся экспериментальных данных продемонстрирована корректность применяемых расчетных методов при моделировании тепломассообменных процессов, протекающих на поверхности ледяного нароста. На примере модельных объектов показаны преимущества предлагаемой модели для расчета сложных форм ледяных наростов, возникающих в реальных условиях обледенения, включая условия обледенения крупными переохлажденными каплями (ледяной изморозью).

DOI: 10.31857/S0040364424020137

ВВЕДЕНИЕ

Защита летательного аппарата (ЛА) от воздействия атмосферных условий обледенения является важной проблемой авиационной техники, поскольку решающим образом влияет на безопасность полетов.

Нарастание льда на элементах летательного аппарата приводит к ухудшению его аэродинамических характеристик, увеличению веса, снижению подъемной силы, увеличению силы сопротивления, срыву потока и даже “сваливанию в штопор”. Обледенение неблагоприятно влияет на работу двигателя, включая недопустимое уменьшение мощности или тяги двигателя, снижение границы устойчивой работы, возникновение газодинамической неустойчивости вплоть до помпажа и останова, возникновение повреждений элементов двигателя, недопустимое увеличение вибраций и температуры газа за турбиной.

Реализация мероприятий для обеспечения требуемого уровня противообледенительной защиты (ПОЗ) ЛА и двигателя невозможна без использования высокоэффективных методов расчета процесса обледенения. Расчетные методы необходимы для оценки характеристик противо-

обледенительных систем (ПОС), а также для вычисления массовых и геометрических характеристик ледяных наростов, влияющих на изменение аэродинамических характеристик ЛА. Использование расчетных методов также позволяет существенно снизить затраты и сократить продолжительность сертификации ЛА и двигателя за счет уменьшения количества экспериментальных исследований либо частичной заменой стендовых и летных испытаний расчетно-аналитическими исследованиями и модельными испытаниями.

В зависимости от сочетания параметров внешнего двухфазного двухкомпонентного потока могут формироваться ледяные наросты типа изморозь или глянцевый лед. Наросты типа изморозь формируются в условиях низких температур и имеют, как правило, клинообразную форму с достаточно гладкой поверхностью. Наросты типа глянцевый лед формируются в условиях относительно высоких температур. Анализ физических явлений, происходящих в процессе формирования ледяного нароста, описан в [1, 2–5]. Течение жидкой пленки воды по поверхности льда обуславливает формирование разнообразных

и сложных ледяных форм: рогообразные и пьревые выступы, впадины и др. Некоторые характерные формы наростов показаны на рис. 1.

Для моделирования процесса формирования ледяных наростов обоих указанных типов впервые была предложена модель Мессинжера [1], разработанная для двумерного моделирования на основе баланса масс и теплового баланса. Для расчета обледенения трехмерных объектов была создана модифицированная модель течения жидких водяных пленок (SWIM – shallow water icing model) [8]. SWIM представляет собой модель на основе дифференциальных уравнений в частных производных и согласуется с теорией смазки. Существующие трехмерные программные комплексы (ПК) (Ansys FENSAP-ICE, FlowVision [9, 10] и др.) и двумерные расчетные методы ([11] и др.) основаны, как правило, на применении модели SWIM с учетом ее различных модификаций.

При расчете полей течения воздуха и капель могут применяться как двумерные [11], так и трехмерные [8–10] методы. В двумерных методах расчет коэффициентов улавливания обычно выполняется путем моделирования траекторий капель с использованием метода Лагранжа. В трехмерных методах предпочтителен расчет коэффициентов улавливания с использованием метода Эйлера [12].

Моделирование процесса частичного срыва жидкости с поверхности пленки производится либо удалением части воды из пленки без учета последующего выпадения [10], либо добавлением вторичных капель к основному потоку с возможностью дальнейшего их взаимодействия с поверхностью [9]. Считается, что термодинамические свойства вторичных капель и капель несущего потока одинаковы.

В уравнениях термодинамического баланса, используемых для расчета нарастания льда, вели-

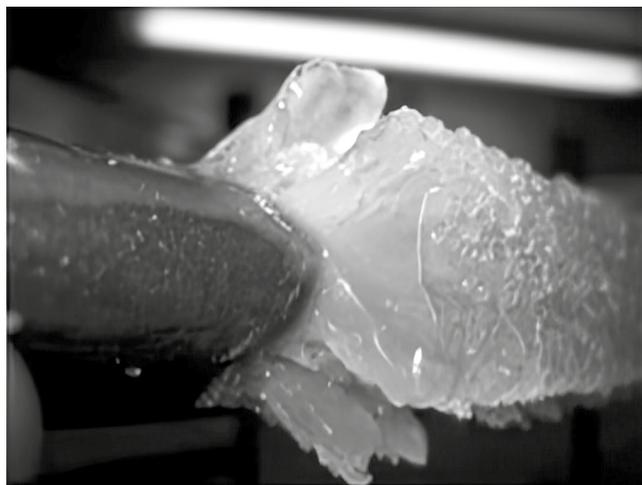
чина местного коэффициента теплоотдачи α является определяющей [13]. Вычисление α производится либо с использованием корреляционных зависимостей [10], либо исходя из результатов расчета параметров пограничного слоя с учетом шероховатости поверхности формирующегося ледяного нароста [9]. В работах [8, 14] предложен способ моделирования шероховатости, учитывающий форму течения жидкости на поверхности льда (бугорки, ручейки, пленки), что позволяет существенно повысить точность расчета α .

Заключительный этап построения модели состоит в определении обновленной формы ледяного нароста, который может выполняться по технологии VOF (volume of fluid) [15] или с использованием более универсального подхода – путем автоматического создания новой поверхностной сетки для каждой новой формы льда [9, 16].

Следует отметить, что существующие программные комплексы и расчетные программы [9–11] вобрали в себя описанные выше наиболее передовые достижения в области расчетного моделирования процесса обледенения. Однако и они обладают рядом недостатков, выражающихся в повышенных погрешностях моделирования сложных форм ледяных наростов типа “хвоста омара” [11] или рогообразных [17]. Данные погрешности могут критическим образом влиять на расчетное предсказание изменения аэродинамических характеристик ЛА и отражаться на оценке эффективности работы противообледенительной системы в условиях обледенения.

Перечисленные погрешности в определении форм льда связаны с отсутствием точной математической модели формирования ледяного нароста, описывающей поведение трехфазной, двухкомпонентной среды с фазовыми переходами. Существующие модели по объективным

(a)



(б)



Рис. 1. Ледяные наросты типа “глянцевый лед”: (а) рогообразный [6], (б) “хвост омара” [7].

причинам лишь частично отражают реальный физический процесс обледенения и поэтому обладают рядом недостатков. Гидравлические модели не в полной мере описывают реально существующие режимы течения воды на поверхности льда, расходные и скоростные параметры потока, срывы капель с поверхности и их вторичное выпадение. Это не позволяет с достаточной точностью рассчитать массообменные процессы на поверхности, определить ее шероховатость и рассчитать величины составляющих теплового баланса и, прежде всего, конвективной теплоотдачи. Не учитывается отличие термодинамических свойств вторичных капель от свойств переохлажденных капель несущего потока.

В настоящей статье предложена расчетная модель, позволяющая повысить точность расчета форм и размеров ледяных наростов, формирующихся в широком диапазоне атмосферных климатических условий, включая условия обледенения крупными переохлажденными каплями — замерзающая морось. Для верификации разработанной модели полученные результаты сравнивались с результатами расчетов, выполненных с использованием ПК Ansys FENSAP-ICE и ПК FlowVision. Валидация выполнялась путем сравнения с доступными экспериментальными данными.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБЛЕДЕНЕНИЯ

Корректность описания процесса обледенения в предлагаемой расчетной модели обеспечивается учетом следующих физических процессов, сопровождающих формирование льда:

- моделирование внешнего двухфазного, двухкомпонентного потока с учетом выпадения частиц на поверхность [1, 8–11];
- моделирование трехфазной, двухкомпонентной среды с фазовыми переходами на поверхности тело–лед (течение, замерзание, испарение воды, сублимация/десублимация льда [1, 8–11]);
- моделирование геометрических макро- и микроформ, образующихся на поверхности льда в процессе его формирования (образование на поверхности капель, ручейков, волнистых пленок и т.д. оказывает влияние на процесс льдообразования за счет изменения коэффициента теплоотдачи [1, 8, 9], возможен процесс роста “перьев” на части ледяных отложений в условиях “смешанного льда”, промежуточных между “изморозью” и “глянцевым” льдом [1, 8–10]);
- корректное моделирование местного коэффициента теплоотдачи с учетом макро- и микроструктуры поверхности тело–лед, учет шерохова-

тости (в [1, 8, 9] показано, что более интенсивное замерзание происходит при высоких значениях конвективной теплоотдачи);

- частичный срыв капель с поверхности, унос во внешний поток и частичное вторичное выпадение на тело или лед, учет иного физического состояния срывающихся/выпадающих капель (возможное образование брызг в области соударения и аэродинамического срыва жидкой воды с поверхности важно при моделировании роста льда [1, 8]);

- перестроение сеток в соответствии с ростом/плавлением льда [18, 19].

При моделировании обледенения непрерывный нестационарный процесс формирования льда разбивается на последовательные временные шаги (слои), и задача решается в квазистационарной постановке. Данный подход применен практически во всех современных вычислительных комплексах [1, 8–11].

Входной информацией при выполнении расчетов является геометрическая модель рассматриваемого объекта, параметры аэродинамического потока (скорость, давление, температура) и климатические условия обледенения (водность потока *LWC* (liquid water content) и распределение капель по размерам). На каждом шаге по времени выполняется аэродинамический расчет обтекания рассматриваемого объекта с выросшим на нем льдом и расчет поля течения дисперсно-капельной фазы. По результатам аэродинамического расчета определяются местные коэффициенты теплоотдачи на поверхности тела. Расчет дисперсно-капельной фазы позволяет определить местные коэффициенты улавливания частиц поверхностью. Перечисленные расчеты выполнялись с помощью программного модуля (ПМ) Лазурит [20].

Величина местного коэффициента теплоотдачи α оказывает сильное влияние на процесс льдообразования [13], поэтому в предлагаемой расчетной модели уделено большое внимание доработке ПМ Лазурит, позволяющего с высокой точностью оценить α для типичных форм ледяных наростов при различных уровнях шероховатости поверхности.

Известно, что форма течения жидкости по поверхности ледяного нароста оказывает существенное влияние на величину шероховатости [8, 14], поэтому используемая модель SWIM была доработана путем моделирования течения воды в форме бугорков, ручейков и жидких пленок. При этом использовалась модель шероховатости, аналогичная описанной в [14]. Вычисленная таким образом величина шероховатости использовалась в ПМ Лазурит для уточнения величины местного коэффициента теплоотдачи.

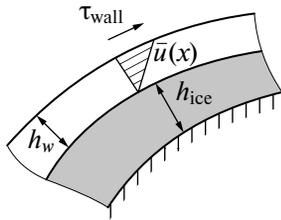


Рис. 2. Схема модели SWIM, используемая при моделировании течения жидкой пленки воды по поверхности ледяного нароста.

Поскольку в процессе формирования льда возможно образование брызг и срыва капель с поверхности пленки [1, 8], в предлагаемой модели учтена возможность потери устойчивости пленки при достижении критического сочетания толщины пленки и скорости внешнего потока. При моделировании массовой скорости уноса капель с поверхности жидкой пленки используются корреляционные зависимости, полученные в [21, 22], а размеры уносимых капель воды рассчитываются в соответствии с величиной критического числа Вебера для капли в воздушном потоке [23, 24]. Сорвавшиеся капли формируют поток вторичных капель, отдельный от основного несущего потока. Для расчета полей скоростей, концентраций и коэффициентов улавливания вторичных капель используется ПМ Лазурит.

При решении уравнений термодинамического баланса учитывается отличие термодинамических свойств капель вторичного потока и переохлажденных капель в несущем потоке. Капли вторичного потока являются недоохлажденными с температурой 0°C .

Поля величин параметров, полученных в результате аэродинамического расчета как первичного, так и вторичного потоков, затем используются для расчета процесса нарастания льда.

В основу термодинамической модели обледенения положена модифицированная модель те-

чения жидких водяных пленок SWIM [8], основанная на термодинамической модели [1].

Модель SWIM предполагает, что скорость пленки воды u является функцией от τ_{wall} и y (направление, нормальное к стенке) (рис. 2). Чтобы упростить модель, принимается линейный вид профиля скорости по направлению y с условием прилипания на стенке ($y = 0$). Профиль скорости течения пленки рассчитывается на основании величины касательного напряжения на поверхности рассматриваемого объекта:

$$u(x, y) = \frac{y}{\mu_w} \tau_{\text{wall}}(x),$$

где $x = (x_1, x_2)$ – криволинейные координаты на поверхности; μ_w – вязкость жидкости, Па с. В расчетах по предлагаемой модели скорость пленки \bar{u} осредняется по координате y , давая следующее выражение:

$$\bar{u}(x) = \frac{h_w}{2\mu_w} \tau_{\text{wall}}(x).$$

Термодинамическая модель нарастания льда включает в себя изложенную выше модель течения пленки и представляет собой систему дифференциальных уравнений переноса с источниковыми членами. Схемы массового и энергетического балансов для контрольного объема на поверхности тела показаны на рис. 3.

Уравнение сохранения массы

$$\rho_w \left[\frac{\partial h_w}{\partial t} + \text{div}(\bar{u}h_w) \right] = \dot{m}_{\text{imp}} - \dot{m}_{\text{ice}} - \dot{m}_{\text{es}} - \dot{m}_{\text{filmshed}} \quad (1)$$

представляет собой баланс массовых скоростей потоков воды в контрольном объеме на поверхности льда

$$\dot{m}_{\text{in}} - \dot{m}_{\text{out}} = \rho_w \text{div}(\bar{u}h_w),$$

втекающих и вытекающих из контрольного объема;

$\dot{m}_{\text{st}} = \rho_w \frac{\partial h_w}{\partial t}$ – накапливающихся в контрольном объеме;

$\dot{m}_{\text{imp}} = \beta U_\infty LWC$ – выпадающих на

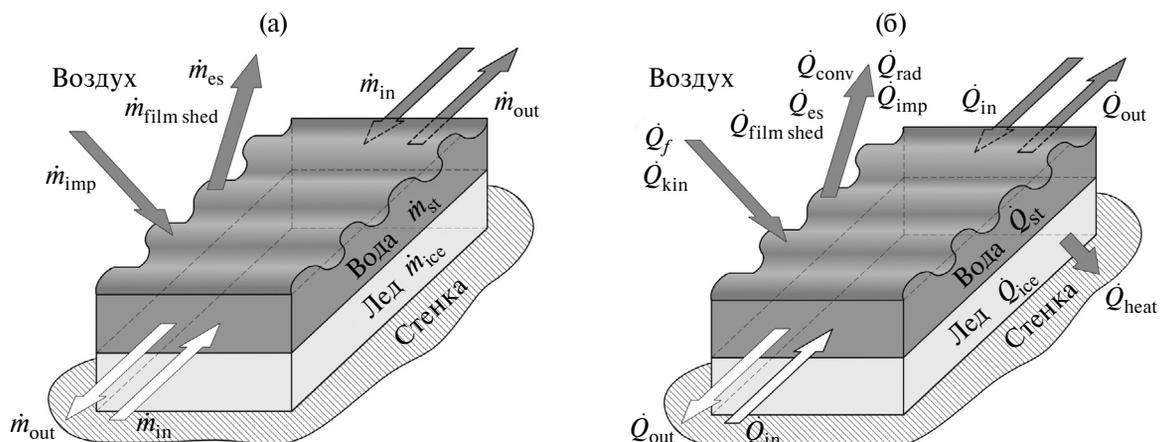


Рис. 3. Схемы массового (а) и энергетического (б) балансов для ячейки.

поверхность (β – коэффициент улавливания капель); \dot{m}_{ice} – замерзающей воды;

$$\dot{m}_{es} = \frac{0.7}{C_{p\ air}} \alpha \left(\frac{p_{v\ surf} - R h p_{v\ e}}{p_e} \right)$$

– покидающих контрольный объем в результате испарения или сублимации [25]; $\dot{m}_{film\ shed}$ – срывающихся с поверхности пленки [23, 24]. Это проиллюстрировано на рис. 3а. Здесь ρ – плотность, C_p – теплоемкость; индексы w , air относятся к стенке и воздуху соответственно.

Аналогично уравнение сохранения энергии записывается в виде

$$\begin{aligned} \rho_w(\bar{T}) \frac{\partial h_w C_{p,w}(\bar{T}) \bar{T}}{\partial t} + \rho_w(\bar{T}) \operatorname{div}(\bar{u} h_w C_{p,w}(\bar{T}) \bar{T}) = \\ = \dot{Q}_{kin} + \dot{Q}_{ice} - \dot{Q}_{imp} - \dot{Q}_{es} - \\ - \dot{Q}_{rad} - \dot{Q}_{conv} - \dot{Q}_{film\ shed} + \dot{Q}_{heat}. \end{aligned} \quad (2)$$

Первый член в левой части уравнения (2) представляет собой изменение энтальпии воды, находящейся в контрольном объеме. Второй член левой части выражает разность энтальпий втекающей и вытекающей воды. Перечисленные тепловые потоки (рис. 3б) уравновешиваются в правой части уравнения суммой следующих потоков:

$$\dot{Q}_{ice} = \begin{cases} \dot{m}_{ice} L_{fus} & \text{при } h_w > 0, \\ (\dot{m}_{ice} + \dot{m}_{es})(L_{fus} - C_{p,ice} \bar{T}) & \text{при } h_w = 0 \end{cases}$$

– тепловой поток фазового перехода (замерзание воды/плавление льда) и охлаждения льда (L_{fus} – теплота фазового перехода);

• $\dot{Q}_{kin} = \dot{m}_{imp} \frac{U_d^2}{2}$ – кинетической энергии выпадающих капель воды;

• $\dot{Q}_{imp} = \dot{m}_{imp} C_{p,w} (T_{ref} - T_d)$ – охлаждения выпадающих капель воды;

• $\dot{Q}_{es} = \begin{cases} \dot{m}_{es} L_{ev} & \text{при } h_w > 0, \\ \dot{m}_{es} L_{ev} & \text{при } h_w = 0 \end{cases}$ – испаряющейся/сублимирующейся воды;

• $\dot{Q}_{rad} = \sigma_r \varepsilon (T_{surf}^4 - T_\infty^4)$ – излучения;

• $\dot{Q}_{conv} = \alpha (T_{surf} - T_e)$ – конвекции;

• $\dot{Q}_{film\ shed} = \dot{m}_{film\ shed} C_{p,w} (T_{surf} - T_{ref})$ – охлаждения за счет срывающихся с поверхности пленки капель воды;

• \dot{Q}_{heat} – поток тепла на дне контрольного объема (за счет нагрева поверхности от внутренних источников).

В уравнении (2) $\bar{T} = T_{surf} - T_{ref}$, T_{surf} – температура поверхности льда, $T_{ref} = 273.15^\circ\text{C}$.

Приведенная математическая модель содержит два уравнения и три неизвестных \dot{m}_{ice} , T_{surf} , h_w . Для каждой элементарной ячейки уравнения (1), (2) записываются в зависимости от состояния льда и воды на поверхности тела. Если в расчетной ячейке температура поверхности отрицательна $T_{surf} < 0^\circ\text{C}$, то пленка воды отсутствует – $h_w = 0$. При положительной температуре поверхности $T_{surf} > 0^\circ\text{C}$ отсутствует лед – $\dot{m}_{ice} = 0$. При нулевой температуре $T_{surf} = 0^\circ\text{C}$ на поверхности присутствуют лед и вода. Процедура определения физического состояния льда и воды в ячейке выполняется с использованием условий совместности

$$\begin{aligned} h_w \geq 0, \quad \dot{m}_{ice} \geq 0, \\ h_w \bar{T} \geq 0, \quad \dot{m}_{ice} \bar{T} \leq 0. \end{aligned}$$

Это позволяет замкнуть систему, уменьшив количество неизвестных до двух, поскольку одна из трех переменных задается в зависимости от состояния льда и воды на поверхности. Используя метод контрольных объемов для каждой элементарной ячейки, выражения (1), (2) можно записать в виде системы алгебраических уравнений. Для вычисления конвективных потоков массы и тепла между соседними ячейками используется противопотоковая схема Роу первого порядка [26].

На основании результатов расчета \dot{m}_{ice} определяется поле толщин наростшего льда h_{ice} , образовавшегося на поверхности за временной шаг. С использованием подходов [16] выполняется расчет обновленной сетки на поверхности тела, соответствующей новой форме ледяного нароста.

При переходе на следующий временной шаг расчет аэродинамического и дисперсного потоков выполняется с учетом изменения формы объекта, связанной с нарастанием льда, полученной на предыдущем временном шаге.

ВЕРИФИКАЦИЯ И ВАЛИДАЦИЯ МОДЕЛИ ОБЛЕДЕНЕНИЯ

Корректность представленной выше математической модели проверена путем сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными. Для верификации и валидации предлагаемой модели выбирались такие внешние условия, при которых один из рассматриваемых эффектов оказывает наиболее сильное влияние на процесс формирования ледяного нароста, и это влияние может быть наиболее отчетливо зафиксировано измерительными приборами.

Моделирование течения пленки жидкой воды. Верификация и валидация модели SWIM выполнялась путем сравнения расчетной толщины пленки воды с данными эксперимента [27]

в условиях положительных температур окружающего воздуха, т.е. в отсутствие льдообразования. В эксперименте проводилось наблюдение за процессом формирования водяных капель на поверхности передней части полуцилиндрического профиля. Результаты сравнения показаны на рис. 4а. Размеры указаны в физических величинах, поскольку на данном этапе отсутствуют надежные модели безразмерного описания процесса обледенения в режиме глянцевого льда. Число Рейнольдса, вычисленное относительно скорости набегающего потока и размера капли, составляет $Re_{drop} = 99.1$. Число Рейнольдса, вычисленное относительно скорости набегающего потока и диаметра полуцилиндрического профиля, составляет $Re_{drop} = 251\,167$. На рис. 4 L – длина по образующей от передней критической точки полуцилиндрического профиля.

Расчет толщины пленки воды выполнялся с учетом срыва капель с поверхности [23, 24]. Массовая скорость потока воды, уносимой с поверхности пленки $\dot{m}_{film\ shed}$ (рис. 4г), вычислялась на основании числа $Re_{w\ film} = (\rho_w \bar{u} 2h_w) / \mu_w$ плен-

ки (рис. 4б) и разности числа Вебера $We_{w\ film} = (\tau_{wall} h_w) / \sigma$ пленки и критического $We_{w\ film}^*$. Срыв капель наблюдается при $We_{w\ film} - We_{w\ film}^* > 0$ на поверхности модели при $|L| \geq 1$ мм.

Расчеты выполнялись на блочно-структурированной сетке с количеством ячеек 26 400, величина Y^+ первой пристеночной ячейки менее 1, минимальный размер ячейки – 0.001 мм.

График значений толщины пленки воды, рассчитанной с использованием предлагаемой модели, имеет ярко выраженный максимум в районе передней критической точки. Толщина пленки воды в данной точке на 45 мкм (13%) ниже значений, полученных в эксперименте, в то время как результаты расчета с использованием программного комплекса Ansys FENSAP-ICE лежат на два порядка ниже экспериментальных данных, что нельзя объяснить погрешностью эксперимента. При удалении на 5–7 мм от передней критической точки высота пленки, рассчитанная в данной модели, постепенно уменьшается, оставаясь ниже экспериментальных значений, но значительно выше значений, рассчитанных с использованием

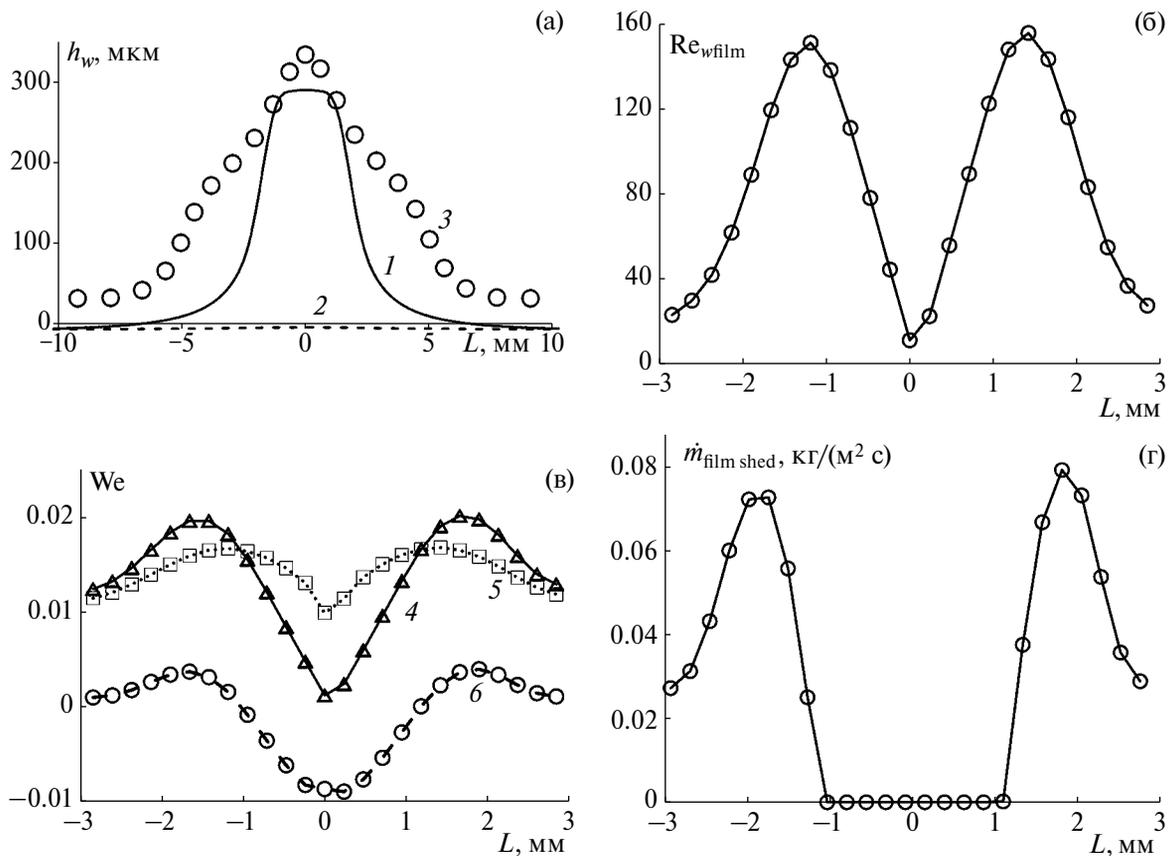


Рис. 4. Параметры пленки воды вблизи лобовой точки модели в режиме № 1 (табл. 1) [27]; (а) – толщина пленки воды; (б) – число $Re_{w\ film}$ пленки; (в) – число Вебера; (г) – массовая скорость потока воды, уносимой с поверхности пленки $\dot{m}_{film\ shed}$; 1 – предлагаемая методика, 2 – ПК Ansys Fensap-Ice, 3 – эксперимент [27], 4 – число Вебера пленки, рассчитанное по величине касательного напряжения на поверхности; 5 – критическое число $We_{w\ film}^*$ пленки [23, 24]; 6 – $We_{w\ film} - We_{w\ film}^*$.

Ansys FENSAP-ICE. В эксперименте [27] вода на поверхности существует не в виде пленки, а в виде отдельных капель различного размера. При сопоставлении расчетных данных с экспериментальными следует принимать во внимание тот факт, что расчетная модель пересчета капель в пленку воды вносит существенную погрешность в полученные экспериментально величины толщины пленки. В целом результаты расчета толщины пленки воды, выполненные с использованием предлагаемой расчетной модели, хорошо совпадают с экспериментальными данными (рис. 4).

Выполненная верификация и валидация модели SWIM, заложенной в предлагаемую модель, демонстрирует лучшее совпадение с экспериментальными данными. Некоторое расхождение с экспериментальными данными объясняется несовершенством модели SWIM, которая предполагает течение гладкой пленки по поверхности, что не всегда соответствует физике процесса.

Моделирование тепломассообменных процессов при переходных режимах обледенения “глянцевый лед” – “изморозь”. Рассмотрена адекватность описания теплогидравлических процессов, происходящих в сложных условиях обледенения, характеризующихся одновременным присутствием режимов “глянцевый лед” и “изморозь” на одном ледяном наросте. Выполнен расчет распределения температуры поверхности объекта при переходе от зоны течения жидкой пленки к зоне полного замерзания воды. Для валидации модели использовались экспериментальные данные термометрирования поверхности модельного цилиндра [28] на начальной стадии формирования льда (режим № 2 в табл. 1). В эксперименте моделировался переходный режим от течения жидкости к полному замерзанию выпадающей воды.

В расчетах использовалась расчетная сетка с параметрами, аналогичными описанным для расчета на рис. 4.

Полученные результаты расчета хорошо совпадают с экспериментальными данными (рис. 5а) в области углов $\pm 50^\circ$. За пределами данной области наблюдается некоторое занижение расчетных

данных по сравнению с экспериментом. Очень важно, что предлагаемая расчетная модель хорошо предсказывает наличие жидкой пленки воды вблизи передней критической точки цилиндра, где реализуется режим обледенения “глянцевый лед”, и температура поверхности равна 0°C , а также наличие зоны обледенения в режиме “изморозь” с температурой ниже 0°C в областях на удалении от передней критической точки.

Из результатов расчета ПК Ansys FENSAP-ICE следует существование жидкой пленки воды с температурой 0°C в обширной области поверхности цилиндра с угловым расстоянием $\pm 50^\circ$. Это не соответствует экспериментальным данным [28] и свидетельствует о недостатках термодинамической модели, заложенной в ПК Ansys FENSAP-ICE.

Результаты валидации термодинамической модели, заложенной в предлагаемую расчетную модель, показали, что она позволяет физически обоснованно описывать область перехода от режима течения жидкой пленки “глянцевый лед” до режима полного замерзания выпадающей воды “изморозь”.

Моделирование тепломассообменных процессов при режиме обледенения “изморозь”. Проверка точности расчета распределения температуры по поверхности объекта проводилась в условиях полного замерзания выпадающих капель воды на охлажденную поверхность. При этом температура всей поверхности объекта остается ниже 0°C . Для валидации модели использовались экспериментальные данные термометрирования поверхности модельного цилиндра [28] (табл. 2) на начальной стадии формирования льда в режиме “изморозь” – режим № 3 в табл. 1.

Расчетные данные температуры (рис. 5б) свидетельствуют о том, что вся поверхность цилиндра охлаждена до температур значительно ниже 0°C и жидкая пленка воды на поверхности отсутствует. Наблюдается хорошее совпадение расчетных и экспериментальных величин местных температур поверхности. Полученный результат свидетельствует о том, что заложенная

Таблица 1. Режимы испытаний объектов

№	Объект, размер, мм	Высота, м	Скорость, м/с	Температура, $^\circ\text{C}$	Водность, г/м ³	<i>MVD</i> *, мкм	Продолжительность обледенения, с
1	передняя часть полуцилиндрического профиля $\varnothing 380$, [27]	0	88.9	+5	0.25	15	–
2	цилиндр $\varnothing 150$	735	80	–17	0.52	20	2.5
3	цилиндр $\varnothing 150$	735	80	–17	0.52	20	1

* *MVD* – медианный диаметр капель (диаметр капли, при котором половина объема воды находится в более крупных каплях и половина – в более мелких каплях).

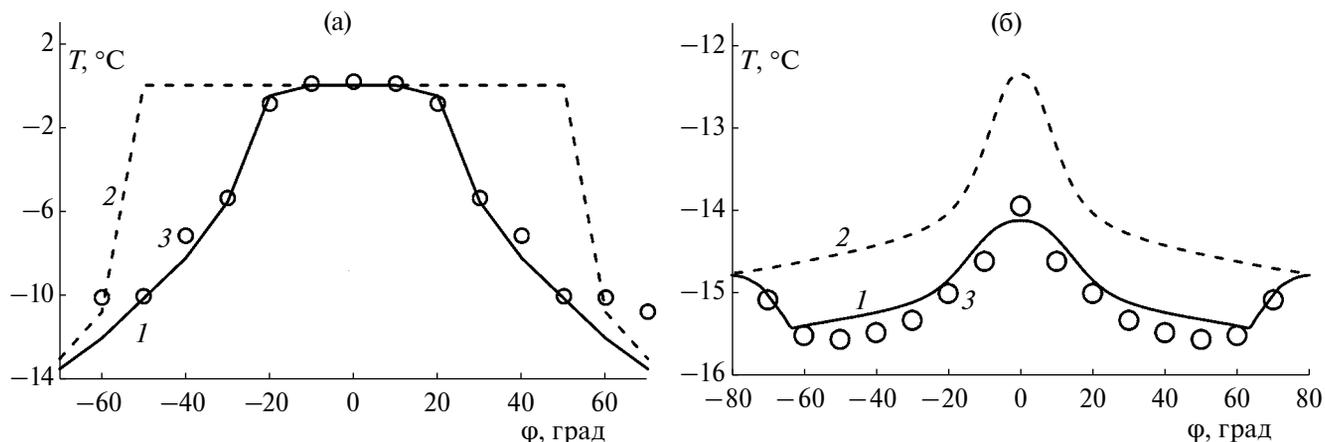


Рис. 5. Температура поверхности цилиндра в зависимости от угла: (а) – условия “глянцевый лед” и “изморозь”, режим № 2 (табл. 1); (б) – условия “изморозь”, режим № 3 (табл. 1); 1 – результаты предлагаемой расчетной модели, 2 – ПК Ansys FENSAP-ICE, 3 – эксперимент [28].

термодинамическая модель физически обоснованно воспроизводит режим формирования льда “изморозь”.

Значения температур, полученные с использованием ПК Ansys FENSAP-ICE, лежат выше экспериментальных значений (рис. 5б), что свидетельствует о недостаточном учете тепловых потерь (предположительно, связанных с сублимацией льда). Повышенная температура поверхности, полученная с использованием при расчетах ПК Ansys FENSAP-ICE, может привести к ошибочному предсказанию частичного растекания воды по поверхности льда. При этом вместо режима “изморозь”, наблюдавшегося в эксперименте, может быть ошибочно получен режим “глянцевый лед” или переходный режим “изморозь” – “глянцевый лед”.

Моделирование местного коэффициента теплоотдачи. При расчете формы ледяного нароста решающее значение имеет корректное моделирование теплообменных процессов, происходящих на поверхности льда. В [13] показано, что в типичных условиях формирования льда наибольший вклад в тепловой баланс вносят члены, связанные с тепловыделением фазового перехода выпадающих капель и с конвективным тепловым потоком, испарением и сублимацией. Тепло, приносимое падающими каплями, может быть вычислено достаточно точно, поскольку определяется условиями внешнего потока и ве-

личной коэффициентом улавливания капель β . Составляющие теплового баланса, обусловленные конвекцией, испарением и сублимацией, играют существенную роль в процессе формирования ледяного нароста, и определяются величиной α на поверхности объекта, поэтому погрешности в определении α могут негативно влиять на точность расчета формы ледяного нароста.

На поверхности льда в процессе ее формирования могут образовываться элементы сложных форм в виде неровностей, шероховатостей, “рогов”, впадин и др. Традиционно отмечают [29, 30] трудности расчета величины α на таких поверхностях. Применяемые методы расчета обледенения [8–11] страдают недостатками в оценках сложных форм ледяных наростов, например, рогообразных. Преодолеть данные трудности в предлагаемой модели обледенения удалось с помощью расчета местного коэффициента теплоотдачи ПМ Лазурит [20]. Основные элементы численного метода, лежащие в его основе, описаны в [31, 32].

Коэффициент теплоотдачи на стенке α вычисляется на основании разности температуры восстановления T_e и температуры стенки T_w по формуле

$$\alpha = \frac{q_w}{T_w - T_e},$$

где q_w – тепловой поток на стенке.

Таблица 2. Режимы обледенения модельных цилиндров

№	Объект, размер, мм	Высота, м	Скорость, м/с	Температура, °С	Водность, г/м ³	MVD, мкм	Продолжительность обледенения, с
1	цилиндр Ø58	1215	184	-18	0.527	21.53	377
2	цилиндр Ø58	3980	209.8	-29.9	0.178	12.6	886
3	цилиндр Ø150	0	100	-5.5	0.4	27.5	450

С помощью описанного алгоритма выполнен расчет распределения α по поверхностям моделей характерных форм ледяных наростов [29, 30], которые могут образовываться на поверхностях летательных аппаратов в полетных условиях (рис. 6, 7). В процессе расчетов моделировалось обтекание воздушным потоком в наземных условиях при скорости 92 м/с и температуре +3°C. Сравнение результатов расчетов, выполненных с использованием представленной расчетной модели для различных форм ледяных наростов, с экспериментальными данными [29, 30] и с результатами расчетов, выполненных с помощью программного комплекса Ansys FENSAP-ICE, представлено на рис. 6, 7.

Для клиновидных и рогообразных форм ледяных наростов в литературных источниках имеются весьма достоверные эксперименталь-

ные данные [29, 30], содержащие информацию о распределении чисел Нуссельта Nu по поверхности моделей ледяных наростов и пригодные для валидации разрабатываемого метода расчета; погрешность измерения Nu в испытаниях составляла 6–10%. В работе [29] приведены данные по распределению местного коэффициента теплоотдачи α на поверхностях указанных выше моделей в ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса от 5×10^4 до 1.8×10^5 . В [30] верхний предел скоростей был существенно расширен до чисел Рейнольдса 5.3×10^5 с целью охвата реального диапазона скоростей полета авиационной техники.

Сравнивая результаты расчетов для клиновидного нароста на рис. 6а, 6б, можно говорить о хорошем согласовании результатов ПМ Лазурит как с экспериментальными данными, так

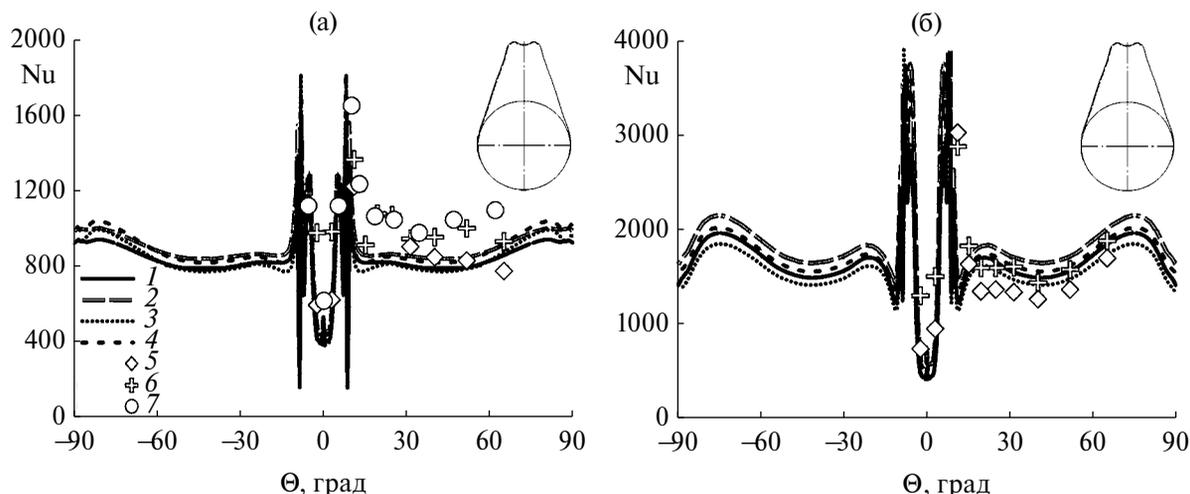


Рис. 6. Распределение чисел Nu по поверхности клиновидного ледяного нароста при скорости 92 м/с, температуре +3°C; (а) – гладкая, (б) – шероховатая поверхность; 1 – результаты настоящей расчетной модели, $I_t = 0.5\%$; 2 – 3.5%; 3 – ПК Ansys FENSAP-ICE [9], $I_t = 0.5\%$; 4 – 3.5%; 5 – эксперименты [29], $I_t = 0.5\%$; 6 – 3.5%; 7 – эксперименты [30].

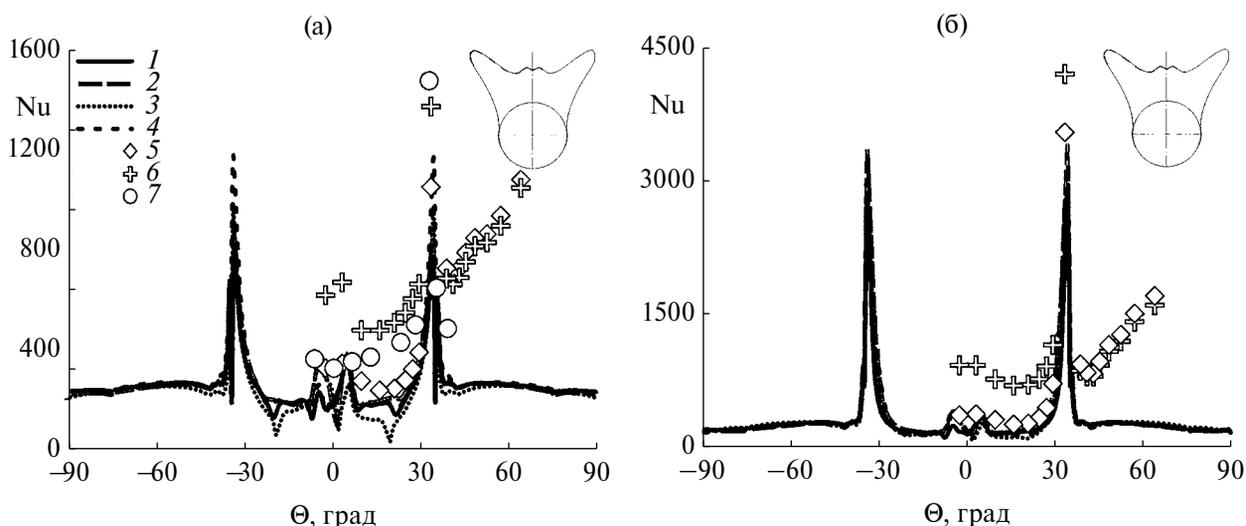


Рис. 7. Распределение чисел Nu по поверхности рогообразного ледяного нароста при скорости 92 м/с, температуре +3°C; (а) – гладкая, (б) – шероховатая поверхность; 1 – результаты настоящей расчетной модели, $I_t = 0.5\%$; 2 – 3.5%; 3 – ПК Ansys FENSAP-ICE [9], $I_t = 0.5\%$; 4 – 3.5%; 5 – эксперименты [29], $I_t = 0.5\%$; 6 – 3.5%; 7 – эксперимент [30].

и с результатами расчетов с помощью ПК Ansys FENSAP-ICE. В окрестности точки торможения расчетные значения лежат несколько ниже экспериментальных, что может быть связано с конечной шириной изотермических пластин на поверхности модели в эксперименте. Поэтому экспериментальные значения будут “осреднены” по размеру этой пластины, а полученные в расчетах коэффициенты теплоотдачи определены для каждой точки геометрии.

Наблюдается некоторое несоответствие экспериментальных данных и расчетных распределений чисел Nu , полученных с использованием обоих программных комплексов для рогообразного нароста (рис. 7). Это может быть связано с формированием в области точки торможения двух низкоскоростных вихревых структур, которые приводят к предсказанию меньших, чем в эксперименте значений коэффициента теплоотдачи в этих зонах. Наибольшие отклонения от эксперимента характерны для больших отрывных зон за выступающими элементами ледяных наростов, поскольку стационарные методы расчета (RANS) не позволяют корректно описывать турбулентные течения в областях отрыва. Стоит заметить, что для вышеуказанных форм наростов усиление турбулизации внешнего потока практически не приводит к росту коэффициента теплоотдачи, а переход от гладкой поверхности к шероховатой интенсифицирует теплообмен преимущественно в области “рогов”.

Результаты расчетов, выполненных с помощью ПМ Лазурит для гладких и шероховатых поверхностей, в целом хорошо согласуются с экспериментальными данными, а характер распределения значений коэффициента теплоотдачи по поверхности ледяного нароста соответствует характеру кривых, полученных с помощью ПК Ansys FENSAP-ICE.

Таким образом, в предлагаемой модели обледенения при расчете величины местного коэффициента теплоотдачи учитывается как изменяющаяся во времени форма ледяного нароста, так и величина шероховатости на поверхности формирующегося льда. Это обеспечивает повышение точности расчетов прежде всего для сложных форм льдообразований на поверхностях летательных аппаратов в полетных условиях.

Моделирование форм ледяных наростов. Эффективность предложенной модели расчета демонстрируется путем сопоставления результатов расчета сложных форм ледяных наростов (клиновидных, рогообразных) на поверхности цилиндров с экспериментальными данными, полученными в различных условиях обледенения: “глянцевый лед”, “изморозь”. На рис. 8а представлены результаты расчетов в сравнении с дан-

ными экспериментов [33] и расчетов с использованием ПК Ansys FENSAP-ICE и ПК FlowVision.

При расчете форм льда использовалась блочно-структурированная сетка с параметрами, аналогичными указанным для расчета на рис. 4.

Результаты расчета формы льда с использованием предлагаемой модели позволяют достаточно точно определить положение “рога”, протяженность зоны сплошного отложения льда и толщину льда в области за “рогом” (рис. 8а).

Недостатком в определении формы ледяного нароста является заниженная толщина льда в области передней критической точки (рис. 8а), что, предположительно, связано с заниженной величиной коэффициента теплоотдачи в данной области. Следует отметить, что этот недостаток наблюдается также и у рассмотренных ПК Ansys FENSAP-ICE и ПК FlowVision.

В области передней критической точки наблюдается повышенная величина коэффициента улавливания капель, поэтому малая толщина льда не может быть связана с недостатком жидкой воды, поступающей в указанную область. Вода перетекает в сопряженные области ледяного нароста без замерзания, что может быть связано с пониженной величиной α в данной области. Можно предположить, что погрешность в определении толщины ледяного нароста вблизи передней критической точки может быть обусловлена недостатками модели шероховатости, заложенной в рассмотренные программные комплексы [14].

На рис. 8б, 8в представлены результаты расчетов форм льда, образующегося при режимах обледенения “глянцевый лед” и “изморозь”, в сравнении с данными [33] и с результатами расчетов с использованием ПК Ansys FENSAP-ICE. При этом тестируется возможность использования предлагаемой модели для расчета форм льда в режимах, характеризующихся существенно различными механизмами протекания процессов обледенения.

В режиме “изморозь” (рис. 8б) переохлажденные капли, падающие на поверхность, практически мгновенно замерзают, не образуя жидкой пленки. В результате расчета получен ледяной нарост характерного клиновидного типа, что соответствует экспериментальным данным. Более пологая форма ледяного нароста в области передней критической точки, полученная при расчете с помощью ПК Ansys FENSAP-ICE, объясняется завышением температуры поверхности льда, как показано на рис. 5б. Повышенная температура, рассчитанная с помощью ПК Ansys FENSAP-ICE в режиме “изморозь”, может привести к ошибочному предсказанию частичного растекания воды по

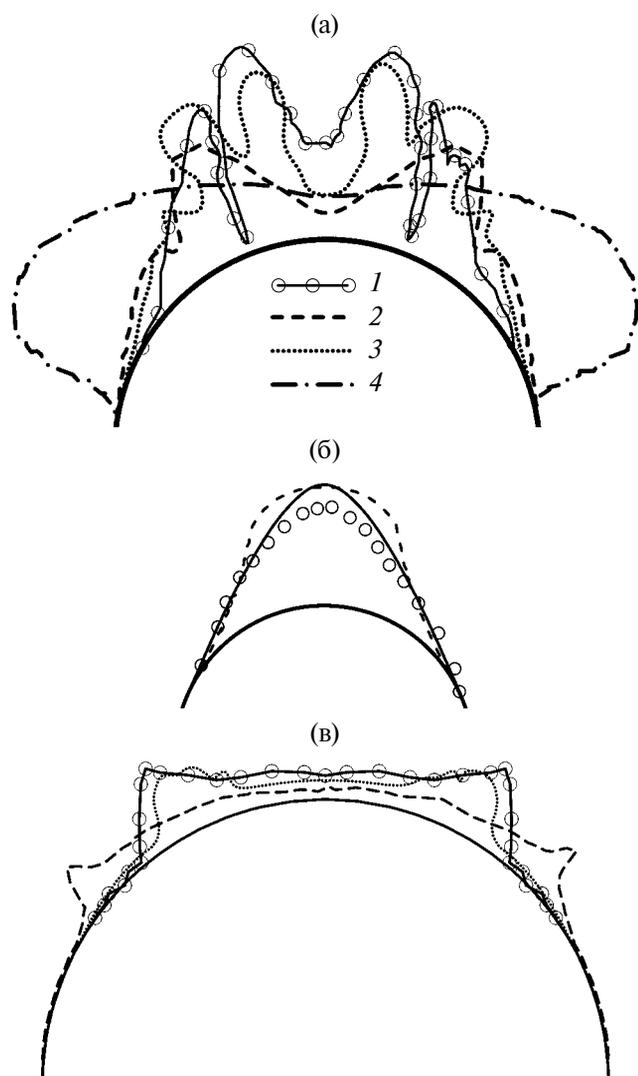


Рис. 8. Формы ледяных наростов при режимах №№ 1–3 (табл. 2): (а) – № 1, (б) – № 2, (в) – № 3; 1 – эксперимент [33], 2 – результаты ПК Ansys FENSAP-ICE [9], 3 – настоящей расчетной модели, 4 – ПК FlowVision [10].

поверхности льда с образованием клинообразного ледяного нароста с более пологой передней частью по сравнению с экспериментальными данными (рис. 8б).

На рис. 8в представлен режим “глянцевый лед”, при котором на поверхности ледяного нароста существует пленка жидкой воды, растекающаяся в обе стороны от передней критической точки и постепенно замерзающая с образованием характерных ледяных наростов в виде “рогов”. При расчетах с помощью предлагаемой модели получен характерный рогообразный нарост, который по форме, толщине льда и локализации “рогов” аналогичен наросту, полученному в эксперименте. По сравнению с экспериментальными данными ледяной нарост, рассчитанный с использованием ПК Ansys FENSAP-ICE,

характеризуется меньшей толщиной льда как в области передней критической точки, так и в области “рогов”, а также более удаленным положением “рогов” относительно передней критической точки. Указанные отличия расчетной формы льда от полученной в эксперименте свидетельствуют о том, что термодинамическая модель, заложенная в ПК Ansys FENSAP-ICE, предсказывает пониженную теплоотдачу от поверхности льда, приводящую к уменьшению скорости формирования льда, и более протяженное растекание пленки воды по поверхности с образованием “рогов” большей ширины по сравнению с данными испытаний.

Практический интерес представляет возможность использования предлагаемой модели для расчета процесса обледенения в условиях крупных переохлажденных капель, характеризующихся средним медианным размером MVD порядка сотен микрометров. В указанных условиях локализация ледяных наростов может происходить за пределами зоны действия ПОС, что может привести к критическому ухудшению аэродинамических характеристик ЛА.

При верификации результаты, полученные с использованием предлагаемой расчетной модели, сравнивались с расчетами ПК Ansys FENSAP-ICE, который предназначен для выполнения расчета обледенения в крупнокапельном облаке. Для валидации результаты расчета сравнивались с экспериментальными данными [34], полученными в условиях “замерзающая морось” с нормированным спектром распределения капель (максимальный диаметр – 500 мкм), режимы №№ 1–4 табл. 3.

В режимах №№ 1–3 (табл. 3) оценивалось влияние размера капель и температуры воздуха на результирующую форму ледяного нароста. В режимах №№ 1 и 2, соответствующих условиям “изморозь” (температура -25°C), получены гладкие формы наростов, которые по форме и размерам хорошо соответствуют как экспериментальным данным, так и результатам расчетов с использованием ПК Ansys FENSAP-ICE (рис. 9). Не выявлено существенных преимуществ в определении толщины льда при использовании ПК Ansys FENSAP-ICE, учитывающего отскок и разбрызгивание крупных капель.

Режим № 3 отличается от режимов №№ 1 и 2 повышенной температурой воздушного потока. В испытаниях наблюдалось формирование неровностей и ледяных “перьев”, которые образуются в результате течения жидких пленок, частичного уноса капель и вторичного выпадения на поверхность. Эти явления характерны для режима “глянцевый лед”. В отличие от результатов испытаний, в расчетах с использованием

обеих расчетных моделей получены гладкие формы льда (рис. 10). Расхождение результатов расчетов с экспериментом наблюдается и для ПК Ansys FENSAP-ICE, что свидетельствует о том, что моделирования отскока и разбрызгивания крупных капель недостаточно для точного расчета сложных форм льда в режиме “глянцевый лед”.

В режиме № 4 общий характер полученных форм ледяных наростов соответствует результатам расчетов ПК Ansys FENSAP-ICE, однако отличие от экспериментальных весьма существенное. Режим № 4 (рис. 10) отличается от режима № 3 повышенными скоростью воздушного потока и температурой торможения на поверхности. Оба данных параметра способствуют более интенсивному течению воды и ее частичному уносу с поверхности. Вероятно, как и в случае режима № 3, недостаточно точное моделирование явления уноса капель приводит к несоответствию расчетов экспериментальным данным.

Следует отметить, что даже в наиболее сложном режиме № 4 предлагаемая расчетная модель дает результат не хуже, чем ПК Ansys FENSAP-ICE, который специально предназначен для выполнения расчетов в крупнокапельном облаке. Расчет с помощью предлагаемой модели дает лучшие результаты для определения толщины и локализации “рогов” ледяного нароста, а также толщины льда вблизи передней критической точки. Это имеет большое практическое значение, поскольку ошибочное предсказание толщин “рогов” существенно влияет на точность вычисления аэродинамических характеристик объекта с учетом наростшего льда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена расчетная модель процесса обледенения (нарастания льда) на объектах различной формы при разных параметрах набегающего потока, соответствующих практическим потребно-

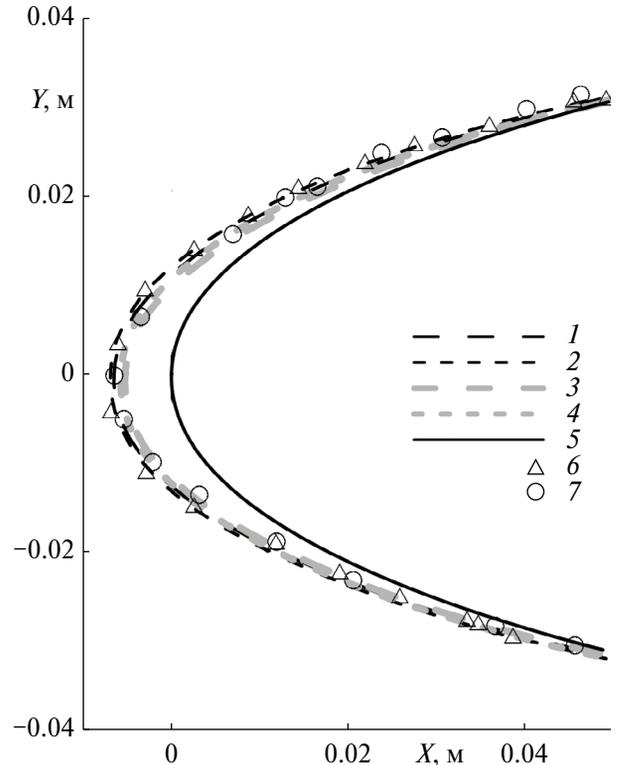


Рис. 9. Формы льда на профиле NACA0012 при режимах №№ 1, 2: 1 – результаты ПК Ansys FENSAP-ICE, режим № 1; 2 – № 2; 3 – предлагаемой расчетной модели, режим № 1; 4 – № 2; 5 – NACA0012; 6 – [34], режим № 1; 7 – № 2.

стям. В процессе расчета моделируется скорость и высота полета, температура окружающего воздуха, водность потока LWC и спектр размеров переохлажденных капель воды как монодисперсный, так и полидисперсный.

Верификация и валидация предложенной расчетной модели на модельных объектах показали хорошее соответствие экспериментальным данным и результатам расчетов с помощью других ПК как при моделировании гидродинамики течения пленки воды на поверхности ледяного нароста (по толщине пленки), так и при

Таблица 3. Режимы обледенения моделей

№	Объект, размер, мм	Высота, м	Скорость, м/с	Температура, °С	Водность, г/м ³	MVD , мкм	Продолжительность обледенения, с
1	профиль NACA0012 хорда 0.8 м, угол атаки 2°	0	63	-25	0.3	40	450
2	профиль NACA0012 хорда 0.8 м, угол атаки 2°	0	63	-25	0.3	180	450
3	профиль NACA0012 хорда 0.8 м, угол атаки 2°	0	65	-10	0.3	104	450
4	профиль NACA0012 хорда 0.8 м, угол атаки 2°	0	163	-10	0.3	104	450

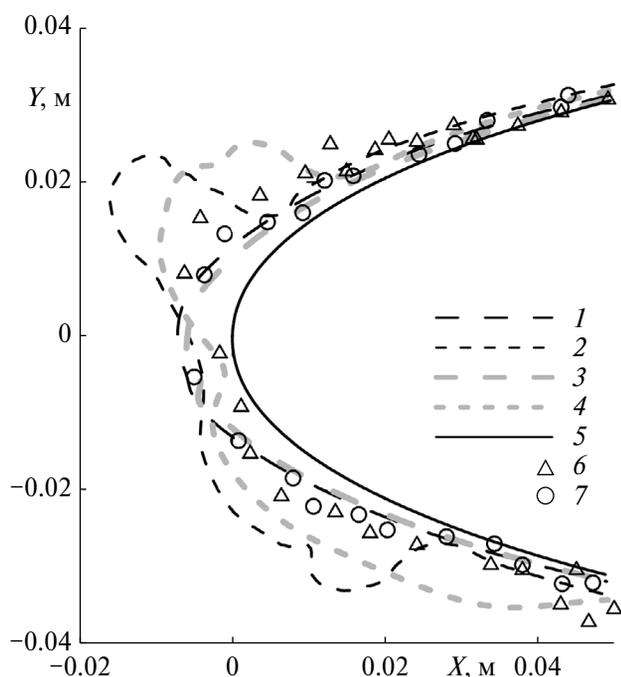


Рис. 10. Формы льда на профиле NACA0012 при режимах №№ 3, 4: 1 – результаты ПК Ansys FENSAP-ICE, режим № 3; 2 – № 4; 3 – предлагаемой расчетной модели, режим № 3; 4 – № 4; 5 – чистый профиль NACA0012; 6 – эксперимент [34], режим № 3; 7 – № 4.

описании теплообменных процессов, сопровождающих формирование льда. Продемонстрированы корректные результаты расчета распределения температур по поверхности объекта на начальной стадии формирования льда при режиме обледенения как “изморозь”, так и при смешанном режиме обледенения “гляцевый лед” – “изморозь”.

На основе анализа соотношения величин составляющих теплового баланса в типичных условиях обледенения выявлена определяющая роль конвективного теплового потока на процесс формирования льда. Предложен алгоритм расчета местного коэффициента теплоотдачи α на поверхностях ледяных наростов, основанный на использовании ПМ Лазурит. Результаты расчетов α , выполненных с помощью ПМ Лазурит для гладких и шероховатых поверхностей, в целом хорошо согласуются с экспериментальными данными, а характер распределения значений коэффициента теплоотдачи по поверхности ледяного нароста соответствует характеру кривых, полученных с помощью программного комплекса Ansys FENSAP-ICE.

Предложенная модель расчета коэффициента теплоотдачи достоверно описывает величину α в наиболее проблемных областях поверхности ледяного нароста: около передней критической точки, в районе “рога” ледяного нароста. Наи-

большие отклонения от эксперимента характерны для крупных отрывных зон за “рогом”, поскольку методы расчета (RANS) не позволяют точно описывать вихревые течения в этих областях.

Эффективность предложенной модели расчета обледенения продемонстрирована на примерах расчетов форм ледяных наростов как на поверхностях модельных элементов (мерные цилиндры), так и на поверхностях аэродинамических профилей. Расчеты выполнялись в условиях, характеризующихся широким спектром скоростей и температур потока, а также размеров капель, включая условия крупных переохлажденных капель “замерзающая морось”.

Сравнение с результатами, выполненными с использованием иных ПК (Ansys FENSAP-ICE, FlowVision), показывает преимущества разработанной расчетной модели по точности определения форм, размеров и мест локализации ледяных наростов на элементах поверхностей авиационной техники. Предлагаемая расчетная модель позволяет более точно определить положение “рога” рогаобразного нароста, протяженность зоны сплошного отложения льда, толщину льда в области за “рогом” рогаобразного ледяного нароста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Messinger B.L. Equilibrium Temperature of an Unheated Icing Surface as a Function of Airspeed // J. Aeronautical Sciences. 1953. V. 20. № 1. P. 29.
2. Hansman R.J. Jr., Turnock S.R. Investigation of Surface Water Behavior During Glaze Ice Accretion // J. Aircraft. 1989. V. 26. P. 140.
3. Bilanin A.J. Proposed Modifications to Ice Accretion – Icing Scaling Theory // J. Aircraft. 1991. V. 28. P. 353.
4. Hansman R.J. Jr., Yagamuchi K., Berkowitz B., Potapczuk M. Modeling of Surface Roughness Effects on Glaze Ice Accretion // J. Thermophysics. 1991. V. 5. P. 54.
5. Hansman R.J. Jr., Breuer K.S., Hazan D. et al. Close-up Analysis of Aircraft Ice Accretion // AIAA Paper 1993–0029. 1993.
6. Palacios J. Rotorcraft Research. 2013. <https://www.aero.psu.edu/palacios/rotorcraft.html>
7. McAndrew I., Witcher K., Navarro E. Glide Effects on Low Speed Unmanned Aerial Vehicles with Ice Formation // Int. J. Information Technology & Mechanical Engineering. 2016. V. 2. № 2. P. 1.
8. Bourgault Y., Beaugendre H., Habashi W.G. Development of a Shallow-water Icing Model in FENSAP-ICE // J. Aircraft. 2000. V. 37. № 4. P. 640.
9. Программный комплекс Ansys FENSAP-ICE: Ice Accretion Simulation Software. 2019. <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fensap-ice>
10. Программный комплекс FlowVision компании ООО “ТЕСИС”. 2020. <https://flowvision.ru/ru/>
11. Алексеенко С.В., Приходько А.А. Численное моделирование обледенения цилиндра и профиля. Обзор

- моделей и результатов расчетов // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. 44. № 6. С. 25.
12. *Hospers J., Hoesjmakers H.* Numerical Simulation of SLD ICE Accretions // SAE Technical Paper № 2011-38-0071. 2011.
 13. *Guffond D., Hedde T.* Prediction of Ice Accretion: Comparison between the 2D and 3D Codes // La Recherche Aerospaciale. 1994. № 2. P. 103.
 14. *Ozcer I.A., Baruzzi G.S., Reid T., Habashi W.G., Fos-sati M., Croce G.* FENSAP-ICE: Numerical Prediction of Ice Roughness Evolution, and its Effects on Ice Shapes // SAE Technical Paper № 2011-38-0024. 2011.
 15. *Сорокин К.Э., Бывальцев П.М., Аксенов А.А. и др.* Численное моделирование обледенения в программном комплексе FlowVision // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12. № 1. С. 83.
 16. *Tong X., Thompson D., Arnoldus Q., Collins E., Luke E.* Three-dimensional Surface Evolution and Mesh Deformation for Aircraft Icing Applications // J. Aircraft. 2017. V. 54. № 3. P. 1047.
 17. *Рыбаков А.А., Шумилин С.С., Горячев П.А., Горячев А.В.* Разработка программного модуля Кристалл для 3D-расчета процесса обледенения элементов авиационной техники // Тез. докл. Национального суперкомпьютерного форума (НСКФ-2021). Россия, Переславль-Залесский: ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, 2021.
 18. *Huang J., Nie S., Cao Y., Yao Y., Yao J.* Multistep Simulation for Three-dimensional Ice Accretion on an Aircraft Wing // AIAA 2016–1918. AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference. San Diego, California, USA. 2016.
 19. *Verdin P., Charpin J., Thompson C.* Multistep Results in ICECREMO2 // J. Aircraft. 2009. V. 46. № 5. P. 1607.
 20. Программный модуль компьютерного моделирования на основе уравнений RANS/URANS (“Лазурит-RANS”). Свид. гос. регистрации программы для ЭВМ № 2019661604. Дата регистрации: 04.09.2019.
 21. *Авдеев Е.Е., Булович С.В., Горский Ю.А.* Анализ моделей уноса и осаждения капель в дисперсно-кольцевом режиме течения // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2019. Т. 25. № 2. С. 54.
 22. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И., Зейгарник Ю.А., Соловьев С.Л., Стоник О.Г.* Развитие трехжидкостной модели двухфазного потока для дисперсно-кольцевого режима течения в каналах. Осаждение и унос капель // ТВТ. 2002. Т. 40. № 5. С. 772.
 23. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1987.
 24. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И., Зейгарник Ю.А., Соловьев С.Л., Стоник О.Г.* Развитие трехжидкостной модели двухфазного потока для дисперсно-кольцевого режима течения в каналах. Размер капель // ТВТ. 2002. Т. 40. № 4. С. 641.
 25. *Macarthur C., Keller J., Luers J.* Mathematical Modeling of Ice Accretion on Airfoils // AIAA 82–0284. 20th Aerospace Sciences Meeting. Orlando, Florida, USA. 1982.
 26. *Roe P.L.* Characteristic-based Schemes for the Euler Equations // Annual Rev. Fluid Mech. 1986. V. 18. P. 337.
 27. *Olsen W., Walker E.* Experimental Evidence for Modifying the Current Technical Model for Ice Accretion on Aircraft Surfaces // NASA T. Memorandum № 87184. 1986.
 28. *Антонов А.Н. и др.* Экспериментальные и теоретические исследования тепловых потоков на поверхности цилиндра при образовании на ней льда рогаобразной формы // Отчет № 6/03–1818 INTAS. Программа № 1818 INTAS. 2003.
 29. *Van Fossen G.J., Simoneau R.J., Olsen W.A., Shaw R.J.* Heat Transfer Distribution Around Nominal Ice Accretion Shapes Formed on a Cylinder in the NASA Lewis Icing Research Tunnel // NASA T. Memorandum № 83557. 1984.
 30. *Antonov A.N., Goryachev A.V., Levchenko V.S.* Study of Heat Exchange Process on Ice Buildup Surface // Proc. European Conf. Aerospace Sciences (EUCASS). 2005. 7 p.
 31. *Любимов Д.А.* Разработка и применение эффективного RANS/ILES-метода для расчета сложных турбулентных струй // ТВТ. 2008. Т. 46. № 2. С. 271.
 32. *Любимов Д.А.* Разработка и применение метода высокого разрешения для расчета струйных течений методом моделирования крупных вихрей // ТВТ. 2012. Т. 50. № 3. С. 450.
 33. *Антонов А.Н., Петров С.Б., Горячев А.В.* Калибровочные испытания стендов для проведения испытаний авиационной техники в условиях обледенения // Материалы V Минского международного форума “Тепломассообмен ММФ-2004”. Тепломассообмен в двухфазных (парожидкостных) системах. Минск, 2004. С. 10.
 34. *Puffing R.* Ice Genesis Icing Database. 2021. <https://icing-database.eu/index.php>