

УДК 533.9

## ПОПЕРЕЧНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ НЕВЫРОЖДЕННОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЫ СО СТОЛКНОВЕНИЯМИ

© 2023 г. С. А. Маслов\*, В. Б. Бобров, С. А. Тригер  
Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия  
\*E-mail: sergm90@mail.ru

Поступила в редакцию 10.06.2022 г.

После доработки 10.06.2022 г.

Принята к публикации 13.10.2022 г.

Найдено аналитическое выражение для поперечной диэлектрической проницаемости невырожденной электронной плазмы в приближении эффективной частоты столкновений для слабонеидеального газа с учетом спина электрона. Полученное выражение учитывает как диамагнетизм Ландау, так и парамагнетизм Паули в электронной плазме.

DOI: 10.31857/S0040364423040087

### ВВЕДЕНИЕ

Поведение однородной и изотропной плазменной системы в слабом внешнем электромагнитном поле полностью определяется [1] тензором диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon'_{\alpha\beta}(k, \omega) \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2} + \varepsilon^{\text{tr}}(k, \omega) \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{\alpha}k_{\beta}}{k^2} \right),$$

где  $\varepsilon'_{\alpha\beta}(k, \omega)$  и  $\varepsilon^{\text{tr}}(k, \omega)$  – соответственно продольная и поперечная диэлектрические проницаемости (ДП). Зависимости от волнового числа  $k$  и частоты  $\omega$ , определяющие пространственную и частотную дисперсии функций  $\varepsilon'_{\alpha\beta}(k, \omega)$  и  $\varepsilon^{\text{tr}}(k, \omega)$ , различны. Это приводит к соответствующим (продольным и поперечным) вкладам в коллективные потери при движении потока быстрых заряженных частиц в плазме [2] и поверхностный импеданс полуграниченной плазмы [3]. При этом продольная ДП  $\varepsilon'_{\alpha\beta}(k, \omega)$  однозначно определяет среднюю энергию электростатического взаимодействия заряженных частиц в плазме [4], в то время как поперечная ДП  $\varepsilon^{\text{tr}}(k, \omega)$  – магнитные свойства [5, 6] и характеристики равновесного излучения в плазме [7]. Только в длинноволновом пределе ( $k \rightarrow 0$ ) продольная и поперечная ДП совпадают [1]:

$\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon'_{\alpha\beta}(k, \omega) = \lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon^{\text{tr}}(k, \omega) = \varepsilon(\omega)$ . Величина  $\varepsilon(\omega)$  используется при исследовании оптических свойств плазменных систем на основе формул Френеля [8].

В максвелловской плазме электроны не вырождены в силу условия  $T \gg e_F$ , где  $T$  – температура плазмы в энергетических единицах,  $e_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$  –

энергия Ферми,  $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$  – волновой вектор Ферми для системы электронов массы  $m$  со средней плотностью числа частиц  $n$ . В случае слабого взаимодействия между электронами проводимости и ионами в качестве важного исходного приближения широко применяется модель электронной жидкости (однокомпонентной электронной плазмы), которая представляет собой квантовую систему электронов, находящихся в компенсирующем фоне ионов [9]. Исследованию продольной ДП вырожденной и невырожденной электронной плазмы уделяется большое внимание, что обусловлено, прежде всего, ее связью с термодинамическими свойствами металлов и плазмы [10–13]. Отметим, что рассмотрение поперечной диэлектрической проницаемости (ПОДП) электронной плазмы фактически ограничивалось случаем идеального электронного газа, хотя исследованию магнитных свойств уделялось значительное внимание (см. [9] и цитируемую там литературу). При определении ПОДП идеальной электронной плазмы для описания воздействия внешнего поля можно использовать гамильтониан

$$\hat{H}_0 = \int \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \left\{ \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}^{(\text{ext})} \right)^2 + e\varphi^{(\text{ext})} \right\} \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (1)$$

представленный в формализме вторичного квантования. Здесь  $\hat{\psi}^+(\mathbf{r})$  и  $\hat{\psi}(\mathbf{r})$  – полевые операторы рождения и уничтожения электрона;  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$  – оператор импульса электрона, который характеризуется зарядом  $e$ ;  $\mathbf{A}^{(\text{ext})}$  и  $\varphi^{(\text{ext})}$  – соответственно векторный и скалярный потенциалы внешнего поля, изменяющиеся во времени и пространстве;  $c$  – скорость света. В рассматриваемом нереляти-

вистском приближении используется кулоновская калибровка для векторного потенциала:  $\text{div}\mathbf{A}^{(\text{ext})} = 0$ . Гамильтониан (1) применяется для явного аналитического вычисления ПОДП слабонеидеальной вырожденной (начиная с известной работы Линдхарда [14]) и невырожденной [3, 4] электронной плазмы как в рамках метода кинетического уравнения (см., например, [15–17] и цитируемую там литературу), так и на основе теории линейного отклика [18, 19]. Однако применение гамильтониана (1) возможно только при рассмотрении плазменных систем, состоящих из частиц, не имеющих спина (см., например, [20, 21] и цитируемую там литературу). На это было указано уже в работе Линдхарда [14], где дан способ учета спина для частиц плазмы при вычислении ПОДП вырожденного электронного газа. Однако результаты аналитические выражения для ПОДП бесстолкновительной электронной плазмы с явным учетом спина электрона осуществлены лишь недавно [22, 23].

Частицы со спином обладают также определенным “собственным” магнитным моментом [24], которому отвечает оператор  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mu\hat{\mathbf{s}}/s$ , пропорциональный оператору спина  $\hat{\mathbf{s}}$ , где  $s$  – величина спина частицы, а  $\mu$  – характерная для частицы постоянная. Собственный магнитный момент электрона, который характеризуется спином  $s = 1/2$ , равен  $-\mu_B$ , где  $\mu_B = |e|\hbar/(2mc)$  – магнетон Бора. Таким образом, вместо гамильтониана (1) следует использовать оператор

$$\hat{H} = \int \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \left\{ \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}^{(\text{ext})} \right)^2 + e\varphi^{(\text{ext})} - \frac{\mu}{s} \mathbf{H}^{(\text{ext})} \hat{\mathbf{s}} \right\} \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{H}^{(\text{ext})} = \text{rot}\mathbf{A}^{(\text{ext})}$  – напряженность внешнего магнитного поля [25]. При этом гамильтониану (2) соответствует следующий оператор плотности электронного тока [24, 25]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) &= \hat{\mathbf{j}}^{(\text{ext})}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{j}}_d(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{j}}_p(\mathbf{r}), \\ \hat{\mathbf{j}}^{(\text{ext})}(\mathbf{r}) &= -\frac{e^2}{mc} \mathbf{A}^{(\text{ext})} \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}), \\ \hat{\mathbf{j}}_d(\mathbf{r}) &= \frac{ie\hbar}{2m} [(\nabla \hat{\psi}^+(\mathbf{r})) \hat{\psi}(\mathbf{r}) - \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) (\nabla \hat{\psi}(\mathbf{r}))], \\ \hat{\mathbf{j}}_p(\mathbf{r}) &= \frac{\mu c}{s} \text{rot}(\hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{s}} \hat{\psi}(\mathbf{r})). \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{\mathbf{j}}^{(\text{ext})}(\mathbf{r})$  – плотность электронного тока, обусловленного наличием внешнего электромагнитного поля;  $\hat{\mathbf{j}}_d(\mathbf{r})$  – плотность электронного тока без явного учета спина электрона, которая соответствует гамильтониану (1);  $\hat{\mathbf{j}}_p(\mathbf{r})$  – плотность электронного тока, связанного с наличием спина у электрона. Другими словами, при вычислении

ПОДП необходимо не только учитывать эффекты квантовой статистики, которые определяются значением спина, но и принимать во внимание сам факт наличия спина, который характеризует взаимодействие электрона с внешним магнитным полем. Наличие спина у частиц плазмы приводит к качественным нелинейным эффектам в квантовой плазме (см. подробнее [26]).

В настоящей статье полученные в работах [22, 23] аналитические выражения для ПОДП бесстолкновительной плазмы, учитывающие собственный магнитный момент электрона, обобщаются на случай столкновительной плазмы с использованием не зависящей от импульса частоты электронно-ионных столкновений. Такое обобщение является модельным, однако позволяет получить в явном аналитическом виде ПОДП при наличии частотной и пространственной дисперсии.

### ПОПЕРЕЧНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ В ПРИБЛИЖЕНИИ БХАТНАГАРА–ГРОССА–КРУКА

Как известно, приближение постоянной частоты столкновений широко используется для электронно-атомных столкновений в кинетической теории (интеграл столкновений Бхатнагара–Гросса–Крука, см., например, [3]). В работах [27, 28] было достигнуто хорошее совпадение с экспериментальными данными по оптическим свойствам плазмы с параметром неидеальности  $\Gamma_a = z_a^2 e^2 n_a^{1/3} / T \leq 1$  при использовании модельной не зависящей от импульса частоты столкновений уже в простейшем приближении Друде.

Очевидное обобщение выражений для бесстолкновительной ПОДП [23] при учете электронно-ионных столкновений с частотой  $\nu$  для произвольно вырожденной плазмы записывается в виде

$$\epsilon_0^{\text{tr}}(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{4\pi}{\omega^2} (\Phi_0^{(dd)}(k, \omega) + \Phi_0^{(pp)}(k, \omega)), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(dd)}(k, \omega) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_a (2s_a + 1) \frac{z_a^2 e^2 \hbar^2}{m_a^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( p^2 - \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})^2}{k^2} \right) \times \\ &\times \frac{f_a(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2) - f_a(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2)}{\hbar\omega + f_a(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2) - f_a(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2) + i\nu}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(pp)}(k, \omega) &= k^2 \sum_a \frac{(2s_a + 1) s_a (s_a + 1)}{3} \left( \frac{\mu_a c}{s_a} \right)^2 \times \\ &\times \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{f_a(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2) - f_a(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2)}{\hbar\omega + f_a(\mathbf{p} - \mathbf{k}/2) - f_a(\mathbf{p} + \mathbf{k}/2) + i\nu}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\omega_p = \left( \sum_a 4\pi n_a z_a^2 e^2 / m_a \right)^{1/2}$  – плазменная частота,  $f_a(\mathbf{p}) = \{\exp[(e_a(\mathbf{p}) - \zeta_a)/T] + 1\}^{-1}$  – функция

распределения Ферми–Дирака,  $e_a(\mathbf{p}) = \hbar^2 p^2 / 2m_a -$  энергетический спектр свободного заряда,  $\zeta_a$  – химический потенциал свободных частиц сорта  $a$  плазмы. Величина  $\zeta_a$  определяется из условия нормировки  $n_a(T, \zeta_a) = (2s_a + 1) \int f_a(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$ . Легко показать, что при использовании гамильтониана (1) в выражении (3) для поперечной ДП  $\epsilon_0^{\text{tr}}(k, \omega)$  будет отсутствовать функция  $\Phi_0^{(pp)}(k, \omega)$ .

Переходя к рассмотрению максвелловской плазмы, запишем

$$f_a(\mathbf{p}) = \frac{n_a \Lambda_a^3}{2s_a + 1} \exp\left(-\frac{\hbar^2 p^2}{2m_a T}\right), \quad \Lambda_a = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_a T}},$$

где  $\Lambda_a$  – длина волны де Бройля для частиц сорта  $a$ . Используя в (4) и (5) цилиндрическую систему координат с осью  $z$ , при которой  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$ ,  $p_z = p_1$  вдоль  $\mathbf{k}$ , получаем

$$\Phi_0^{(dd)}(k, \omega) = \frac{1}{4} \sum_a \frac{n_a \Lambda_a^3 z_a^2 e^2 \hbar^2 4m_a^2 T^2}{m_a^2 \hbar^4} \times \int \frac{dp_1}{(2\pi)^2 (\hbar\omega + iv - \hbar^2 p_1 k / m_z)} \times \left[ \exp\left(-\frac{\hbar^2 (p_1 - k/2)^2}{2m_a T}\right) - \exp\left(-\frac{\hbar^2 (p_1 + k/2)^2}{2m_a T}\right) \right],$$

$$\Phi_0^{(dd)}(k, \omega) = k^2 \sum_a \frac{n_a \Lambda_a^3 s_a (s_a + 1)}{6} \left(\frac{\mu_a c}{s_a}\right)^2 \times \int \frac{dp_1}{(2\pi)^2 (\hbar\omega + iv - \hbar^2 p_1 k / m_z)} \times \left[ \exp\left(-\frac{\hbar^2 (p_1 - k/2)^2}{2m_a T}\right) - \exp\left(-\frac{\hbar^2 (p_1 + k/2)^2}{2m_a T}\right) \right].$$

Далее введем в рассмотрение безразмерные переменные

$$W = \frac{\hbar\omega}{T}, \quad N = \frac{\hbar\nu}{T}, \quad Y = \frac{k\Lambda_e}{2\sqrt{\pi}} = \frac{k\hbar}{\sqrt{2m_e T}},$$

$$P = \frac{p_1 \hbar}{\sqrt{2m_e T}}, \quad \Gamma_a = \frac{z_a^2 e^2 n_a^{1/3}}{T}, \quad \eta_a = n_a \Lambda_a^3, \quad t_a = \frac{m_e}{m_a},$$

так что ПОДП  $\epsilon_0^{\text{tr}}(k, \omega)$  (3) принимает вид

$$\epsilon_0^{\text{tr}}(Y, W) = 1 - \sum_a \frac{2\Gamma_a \eta_a^{2/3}}{W^2} - \sum_a \frac{2\Gamma_a \eta_a^{2/3}}{\sqrt{\pi} W^2} \times \left(1 + \frac{u_a^2 t_a Y^2 (s_a + 1)}{6s_a}\right) \int \frac{\sqrt{t_a} dP}{W - 2t_a P Y + iN} \times \left[ \exp(-t_a (P - Y/2)^2) - \exp(-t_a (P + Y/2)^2) \right], \quad (6)$$

где  $u_a$  определено равенством  $\mu_a = u_a |e| \hbar / (2m_a c)$ ; в частности, для электронов  $u_e = 1$ , а для протонов  $u_p = 2.79$ .

Интегрирование в (6) позволяет выразить ПОДП через интеграл вероятностей  $w(z)$  от комплексного аргумента:

$$\epsilon_0^{\text{tr}}(Y, W) = 1 - \sum_a \frac{2\Gamma_a \eta_a^{2/3}}{W^2} + \sum_a \frac{i\sqrt{\pi} \Gamma_a \eta_a^{2/3}}{Y \sqrt{t_a} W^2} \left(1 + \frac{u_a^2 t_a Y^2 (s_a + 1)}{6s_a}\right) \times \left[ w\left(\frac{W}{2Y\sqrt{t_a}} - \frac{Y\sqrt{t_a}}{2} + \frac{iN}{2Y\sqrt{t_a}}\right) - w\left(\frac{W}{2Y\sqrt{t_a}} + \frac{Y\sqrt{t_a}}{2} + \frac{iN}{2Y\sqrt{t_a}}\right) \right], \quad (7)$$

где для табулированной функции  $w(z)$  справедливо интегральное представление

$$w(z) = \frac{i}{\pi} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-x^2) dx}{z - x}, \quad \text{Im } z > 0.$$

Для плазмы с  $z_a = z_e = 1$  условие квазинейтральности имеет вид  $n_a = n_e$  (индекс  $a$  относится к ионам, а  $e$  – к электронам), и можно получить  $\Gamma_a = \Gamma_e$ ,

$$\eta_a^{2/3} = n_a^{2/3} \Lambda_a^2 = \frac{2\pi n_a^{2/3} \hbar^2}{m_a T} = \frac{2\pi n_a^{2/3} \hbar^2 t_a}{m_e T} = t_a \eta_e^{2/3}.$$

Обозначая далее  $\Gamma_e = \Gamma$ ,  $\eta_e = \eta$  и полагая  $s_a = 1/2$ , запишем (7) в виде

$$\epsilon_0^{\text{tr}}(Y, W) = 1 - \frac{2\Gamma \eta^{2/3} (1 + t_a)}{W^2} + \frac{i\sqrt{\pi} \Gamma \eta^{2/3}}{Y W^2} \times \left(1 + \frac{Y^2}{2}\right) \left[ w\left(\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2} + \frac{iN}{2Y}\right) - w\left(\frac{W}{2Y} + \frac{Y}{2} + \frac{iN}{2Y}\right) \right] + \frac{i\sqrt{\pi} \Gamma_a \eta_a^{2/3}}{Y \sqrt{t_a} W^2} \left(1 + \frac{u_a^2 t_a Y^2 (s_a + 1)}{6s_a}\right) \times \left[ w\left(\frac{W}{2Y\sqrt{t_a}} - \frac{Y\sqrt{t_a}}{2} + \frac{iN}{2Y\sqrt{t_a}}\right) - w\left(\frac{W}{2Y\sqrt{t_a}} + \frac{Y\sqrt{t_a}}{2} + \frac{iN}{2Y\sqrt{t_a}}\right) \right]. \quad (8)$$

Для электронного газа  $N \rightarrow +0$  и уравнение (8) переходит в известный результат [23]

$$\text{Re} \epsilon^{\text{tr}}(Y, W) = 1 - \frac{2\Gamma \eta^{2/3}}{W^2} - \frac{2\Gamma \eta^{2/3}}{\sqrt{\pi} Y W^2} \left(1 + \frac{Y^2}{2}\right) \times \left[ \left(\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2}\right) {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}, -\left(\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{W}{2Y} + \frac{Y}{2}\right) {}_1F_1\left(1, \frac{3}{2}, -\left(\frac{W}{2Y} + \frac{Y}{2}\right)^2\right) \right],$$

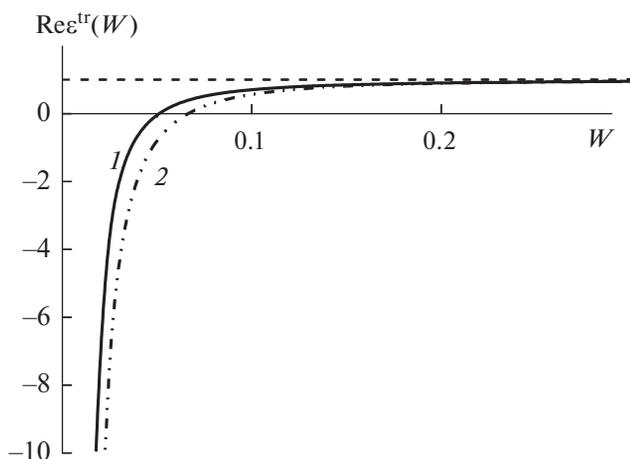


Рис. 1. Зависимость  $\text{Re}\epsilon^{\text{tr}}(Y, W)$  от  $W$  при  $\Gamma = 0.01$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $Y = 0.1$  для  $N = 0.1$  (1) и 10 (2).

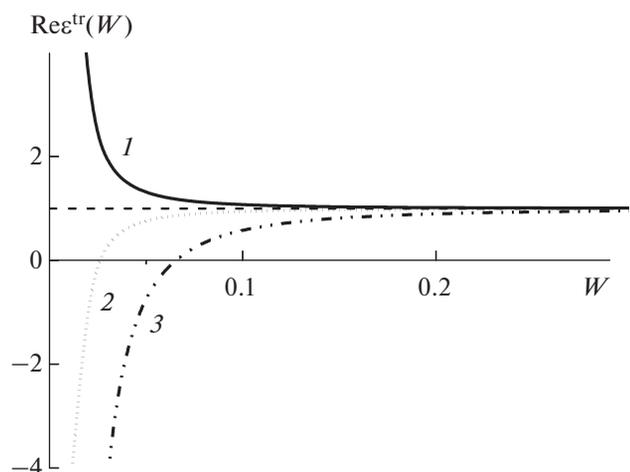


Рис. 2. Зависимость  $\text{Re}\epsilon^{\text{tr}}(Y, W)$  от  $W$  при  $\Gamma = 0.01$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $Y = 0.1$  для  $N = 0.1$  (1), 0.5 (2) и 10 (3).

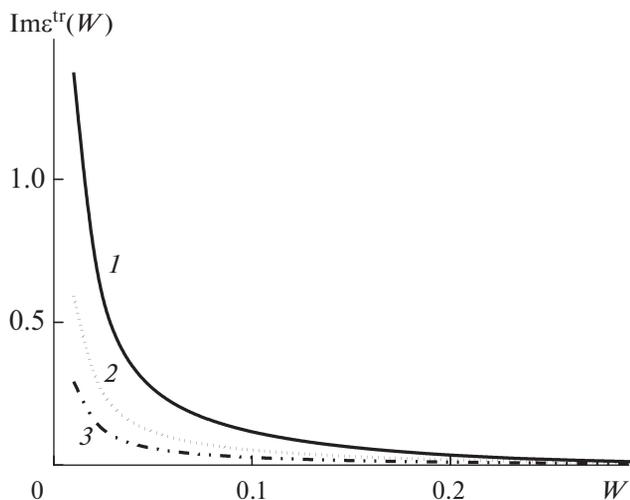


Рис. 3. Зависимость  $\text{Im}\epsilon^{\text{tr}}(Y, W)$  от  $W$  при  $\Gamma = 0.01$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $Y = 0.1$  для  $N = 0.1$  (1), 0.2 (2) и 0.3 (3).

$$\text{Im}\epsilon^{\text{tr}}(Y, W) = \frac{2\Gamma\eta^{2/3}}{\sqrt{\pi Y W^2}} \left(1 + \frac{Y^2}{2}\right) \times \left[ \exp\left(-\left(\frac{W}{2Y} - \frac{Y}{2}\right)^2\right) - \exp\left(-\left(\frac{W}{2Y} + \frac{Y}{2}\right)^2\right) \right].$$

На рис. 1–3 представлены графики для действительной и мнимой частей ПОДП в соответствии с (8).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты могут быть использованы для описания имеющихся экспериментов по статической и оптической проводимости плазменных систем, а также при расчетах спектральной плотности энергии равновесного излучения [7, 29]. При наличии плазмы спектральная плотность полностью определяется видом ПОДП.

Авторы благодарны Ю.А. Грибову за полезные обсуждения и замечания. Данная работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение с ОИВТ РАН № 075-15-2020-785 от 23 сентября 2020 г.).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Госатомиздат, 1961. 244 с.
2. Климонтович Ю.Л., Силин В.П. О спектрах систем взаимодействующих частиц и коллективных потерях при прохождении заряженных частиц через вещество // УФН. 1960. Т. 70. № 2. С. 247.
3. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1978. 407 с.
4. Крефт В.-Д., Кремп Д., Эбелинг В., Ренке Г. Квантовая статистика систем заряженных частиц. Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 408 с.
5. Киржниц Д.А. Общие свойства электромагнитных функций отклика // УФН. 1987. Т. 152. № 7. С. 399.
6. Bobrov V.B. To the Theory of the Linear Magnetic Permeability of a Medium // Physica A. 1992. V. 187. № 3–4. P. 603.
7. Бобров В.Б., Соколов И.М., Тригер С.А. О спектральном распределении энергии равновесного излучения в веществе // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. № 5. С. 326.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
9. Коваленко Н.П., Красный Ю.П., Тригер С.А. Статистическая теория жидких металлов. М.: Наука, 1990. 204 с.
10. Горобченко В.Д., Максимов Е.Г. Диэлектрическая проницаемость взаимодействующего электронного газа // УФН. 1980. Т. 130. № 1. С. 65.
11. Ichimaru S. Strongly Coupled Plasmas: High Density Classical Plasmas and Degenerate Electron Liquids // Rev. Mod. Phys. 1982. V. 54. P. 1017.
12. Бобров В.Б., Тригер С.А. Соотношения Крамерса–Кронига для диэлектрической проницаемости,

- “истинный” радиус экранирования и критическая точка кулоновской системы // ТВТ. 2011. Т. 49. № 4. С. 513.
13. Латышев А.В., Юшканов А.А. Продольная диэлектрическая проницаемость квантовой вырожденной плазмы с постоянной частотой столкновений // ТВТ. 2014. Т. 52. № 1. С. 136.
  14. Lindhard J. On the Properties of a Gas of Charged Particles // Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk–Fysiske Meddelelser. 1954. V. 28. № 8. P. 1.
  15. Кузьменков Л.С., Максимов С.Г. О функциях распределения в квантовой механике и функциях Вигнера // ТМФ. 2002. Т. 131. № 2. С. 231.
  16. Dressel M., Grüner G. Electrodynamics of Solids. Optical Properties of Electrons in Matter. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. 487 p.
  17. Латышев А.В., Юшканов А.А. Поперечная электрическая проводимость в квантовой столкновительной плазме // Физика плазмы. 2012. Т. 38. № 11. С. 977.
  18. Пайнс Д. Элементарные возбуждения в твердых телах. Пер. с англ. М.: Мир, 1965. 383 с.
  19. Giuliani G., Vignale G. Quantum Theory of the Electron Liquid. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. 800 p.
  20. Владимиров С.В., Тыщцкий Ю.О. Об описании бесстолкновительной квантовой плазмы // УФН. 2011. Т. 181. № 12. С. 1313.
  21. Бобылев Ю.В., Кузелев М.В. Диэлектрические проницаемости квантовой плазмы. Часть I // Физика плазмы. 2014. Т. 40. № 5. С. 417.
  22. Bobrov V.B., Trigger S.A. Quantum Effects in the Transverse Dielectric Permittivity of a Maxwellian Plasma // Theor. Math. Phys. 2017. V. 192. P. 1396.
  23. Bobrov V.B., Maslov S.A., Trigger S.A. On the Transverse Dielectric Permittivity of the Collisionless Plasmas with Quantum Effects // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. P. 072116.
  24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
  25. Ахиезер А.И., Пелетминский С.В. Методы статистической физики. М.: Наука, 1977. 368 с.
  26. Шукла П.К., Элиассон Б. Нелинейные аспекты квантовой физики плазмы // УФН. 2010. Т. 180. № 1. С. 55.
  27. Zaporozhets Yu., Mintsev V., Gryaznov V., Fortov V., Reinholz H., Raitza T., Röpke G. Reflectivity of Nonideal Plasmas // J. Phys. A: Math. General. 2006. V. 39. № 17. P. 4329.
  28. Bronin S.Ya., Zelener B.B., Zelener B.V. Refraction, Absorption, and Reflectivity of Radiation in Strongly Coupled Plasma // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2021. V. 268. P. 107621.
  29. Trigger S.A., Maslov S.A. Primordial Plasma: Influence of Non-ideality on Equilibrium Radiation // Phys. Scripta. 2021. V. 96. P. 015605.