

УДК 519.6:004.942

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

© 2024 г. Э. М. Кольцова*, М. А. Бабкин, Н. А. Попова, А. В. Женса

Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева, Москва, Россия

* e-mail: koltsova.e.m@muctr.ru

Поступила в редакцию 13.12.2023 г.

После доработки 02.02.2024 г.

Принята к публикации 07.02.2024 г.

На основе знания термодинамических потоков и движущих сил процесса дробления и применения принципа минимума производства энтропии получена зависимость для определения размера частиц, устойчивых к дроблению, проверенная на экспериментальных результатах по измельчению корунда в планетарной мельнице. Для моделирования кинетики измельчения получено интегро-дифференциальное уравнение баланса числа частиц по линейным размерам, где вероятность дробления частиц определена из физико-химической сущности термодинамических потоков дробления. Приведены результаты расчета плотности функции распределения числа частиц и изменения среднего размера частиц корунда при измельчении во времени, хорошо совпадающие с экспериментальными данными. Найдены оптимальные режимы проведения процесса измельчения корунда в планетарной мельнице для получения частиц заданного размера.

Ключевые слова: дробление частиц, математическое моделирование, плотность распределения по размерам, разностная схема, размер частиц устойчивых к дроблению

DOI: 10.31857/S0040357124010141, **EDN:** YVTKPL

ВВЕДЕНИЕ

При измельчении происходит разрушение частиц за счет достижения критических напряжений, вызванных воздействием на частицу внешних сил. Такими воздействиями могут быть температурные воздействия, ультразвуковые или механические. Последние встречаются наиболее часто в химических производствах. Классификация оборудования и видов измельчения, в зависимости от размера получаемых частиц, представлена в работах Романкова П.Г. [1, 2]. В [1] указаны шаровые мельницы для тонкого измельчения. Среди шаровых мельниц планетарная мельница является простым и универсальным устройством для эффективного измельчения. В работе будет рассматриваться процесс измельчения корунда в планетарной мельнице.

Для исследования кинетики измельчения в мировой практике рассматривают балансовые уравнения в виде интегродифференциальных уравнений для плотности распределения частиц по объемам (размерам) [3–12], где в левой части находится производная от плотности распределения во времени, а в правой части – слагаемые, ответственные за приход и уход частиц при их измельчении. Эти работы, по сути, отличаются тем,

что различными зависимостями описываются соотношения для вероятности дробления частиц “А” и для условной вероятности “В” (которая характеризует, что при дроблении частицы возникает частица, попадающая в группу размеров, для которой в данный момент рассчитывается плотность распределения). Наиболее часто встречаемые зависимости для вероятности “А” дробления частиц и условной вероятности “В” (характеризующей распределение дочерних частиц), соответственно, имеют вид [4, 5, 11]:

$$A = a \left(\frac{l}{l_0} \right)^{\alpha_1} Q(l)$$

$$Q(l) = \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{\mu} \right)^{\lambda}}, \quad (1)$$

и

$$B = \psi \left(\frac{l}{l_{\gamma}} \right)^{\alpha_2} + (1 - \psi) \left(\frac{l}{l_{\gamma}} \right)^{\alpha_3}, \quad 0 < \psi < 1. \quad (2)$$

По результатам сопоставления экспериментальных и расчетных данных находились неизвестные параметры функций A и B . Такие зависимости для определения вероятности дробления A носят скорее эмпирический характер

и не отражают в целом физико-химическую сущность явлений дробления.

С другой стороны, имеется большое количество работ, посвященных изучению собственно механизмов измельчения [13–20]. Так, в работе [19] был получен безразмерный критерий Вебера We , характеризующий скорость разрушения частиц:

$$We = \frac{\rho D V^2}{\Sigma},$$

$$\Sigma = 2\Sigma_1 - \Sigma_{12}, \quad (3)$$

и проанализировано влияние прочности связи в агломерате на скорость разрушения агломерата.

В [20] было скорректировано соотношение для критерия Вебера с учетом предельного значения скорости удара V_0 , меньше которого не нарушается связь в агрегате:

$$We = \frac{\rho D (V - V_0)^2}{\Sigma}, \quad (4)$$

Понимание механизма измельчения должно привести к тому, чтобы увидеть связь между вероятностью дробления частицы A с критерием Вебера We .

Так, в работах [21–22] была получена взаимосвязь вероятности дробления частицы A с критерием дробления частицы We в виде:

$$A \approx LWe, \quad (5)$$

и, таким образом, зависимость для вероятности дробления стала отражать физико-механическую сущность процесса дробления.

В данной работе ставилась задача проверки соотношения (5). Для этой цели записывалось уравнение баланса числа частиц по размерам с учетом дробления частиц, проводились экспериментальные исследования по кинетике измельчения частиц корунда в планетарной мельнице. Также в данной работе ставилась задача получения зависимости для диаметра, устойчивого к дроблению, для нахождения предельного размера частицы при измельчении при приложенных усилиях и заданных режимах.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Процесс дробления оксида алюминия (с средним начальным размером $d \sim 32$ мкм) происходил в планетарной мельнице рис. 1 (при скорости вращения барабанов 200 об/мин) в среде этанола, влияющим на уменьшение поверхностной энергии частиц. В барабаны планетарной мельницы загружались мелющие шары, состоящие из диоксида циркония, размер которых, в зависимости от эксперимента, был равен либо 2 мм, либо 5 мм. После помещения в барабан мелющих тел опре-

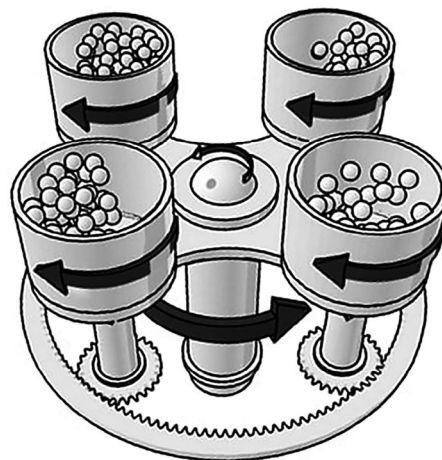


Рис. 1. Устройство планетарной мельницы.

деленной массы, засыпался порошок Al_2O_3 . Масса порошка Al_2O_3 рассматривалась на основе массы мелющих тел.

Распределение частиц по размерам определялось с использованием лазерного дифракционного микроанализатора.

В экспериментальных исследованиях варьировали значениями параметров:

$$z_1 = \frac{m_{ball}}{m_p} \in [3 : 1; 5 : 1],$$

$$z_2 = \frac{d_0}{d_{ball}} \in [2 \text{ мм}; 5 \text{ мм}],$$

где m_{ball} — масса мелющих шаров, m_p — масса порошка, d_{ball} — диаметр мелющего шара, $d_0 = 1$ мм.

Для каждого эксперимента из серии (выбирался определенный размер мелющего шара и соотношение масс мелющих шаров к массе порошка, время измельчения) измерялось распределение частиц по размерам и средний размер частиц. Время измельчения соответствовало 5, 15, 30, 45,

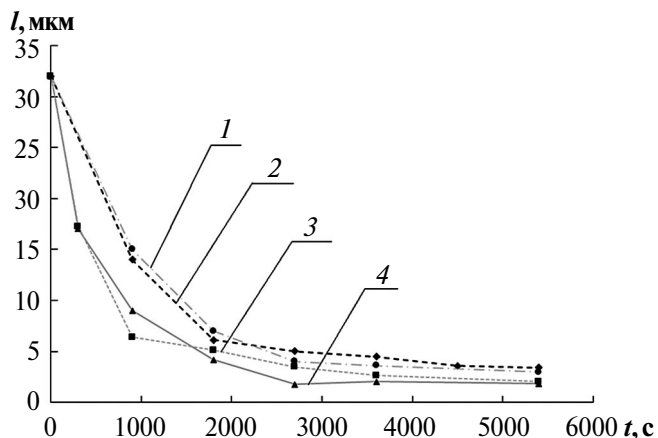


Рис. 2. Экспериментальная зависимость среднего размера частиц от времени для различных условий проведения эксперимента: 1 — $d_{ball} = 5$ мм, $z_1 = 5:1$; 2 — $d_{ball} = 5$ мм, $z_1 = 3:1$; 3 — $d_{ball} = 2$ мм, $z_1 = 3:1$; 4 — $d_{ball} = 2$ мм, $z_1 = 5:1$.

60, 75, 90 мин. В эти моменты времени проводился отбор проб для анализа распределения частиц по размерам на лазерном дифракционном микроанализаторе. При достижении времени измельчения в 90 мин средний размер частиц не менялся.

Процесс измельчения вели до тех пор, пока средний размер частиц не становился постоянным во времени.

На рис. 2 представлены кривые изменения среднего размера частиц оксида алюминия от времени для различных условий проведения процесса измельчения.

Из рис. 2 видно, что при времени измельчения 90 мин средний размер частиц не меняется и система выходит на стационарное состояние.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В [21–23] на основе аппарата механики гетерогенных сред были получены уравнения сохранения массы, импульса и энергии с учетом дробления частиц для сплошной и гетерогенной полидисперсной среды.

В [21, 22] на основе применения методов термодинамики необратимых процессов были получены термодинамические движущие силы и термодинамические потоки дробления в виде:

$$X = \frac{-\pi d^2 (2\Sigma_1 - \Sigma_{12})}{2} + \frac{\pi \rho d^3 v^2}{12}, \quad (6)$$

$$J = \rho r A(r) f(r) dr, \quad (7)$$

где $f(r)dr$ – число частиц, принадлежащих интервалу $[r, r + dr]$.

В турбулентном режиме смешения скорость движения можно представить в виде [24]:

$$v^2 = (\varepsilon d)^{2/3},$$

тогда движущая сила дробления преобразуется к виду:

$$X = \frac{-\pi d^2 (2\Sigma_1 - \Sigma_{12})}{2} + \frac{\pi \rho d^3 (\varepsilon d)^{2/3}}{12}. \quad (8)$$

Процесс дробления идет до тех пор, пока размер включений не становится постоянным. То есть рассматриваемая система будет находиться в стационарном состоянии. Тогда, согласно принципу минимума для стационарного состояния [25, 26], производство энтропии минимально ($\min \sigma$).

Производство энтропии σ гетерогенной системы, в которой происходит процесс дробления, будет иметь вид:

$$\sigma = JX. \quad (9)$$

Поток и сила дробления связаны между собой соотношением Онзагера [25, 26]:

$$J = LX. \quad (10)$$

Необходимым условием минимума производства энтропии является условие экстремума σ , т. е.:

$$\frac{d\sigma}{dd} = 0. \quad (11)$$

С учетом соотношений (9, 10) условие экстремума σ приобретает вид:

$$2J \frac{dX}{dd} = 0, \quad (12)$$

где поток дробления для частиц имеет вид:

$$J = L \left[\frac{-\pi d^2 (2\Sigma_1 - \Sigma_{12})}{2} + \frac{\pi \rho d^3 (\varepsilon d)^{2/3}}{12} \right]. \quad (13)$$

Необходимое условие $\min \sigma$ (11) реализуется при выполнении условий:

$$J = 0, \frac{dX}{dd} \neq 0, \quad (14)$$

$$J > 0, \frac{dX}{dd} = 0, \quad (15)$$

$$J = 0, \frac{dX}{dd} = 0. \quad (16)$$

Критерий Вебера для частицы имеет вид:

$$We = \frac{\rho d v^2}{2\Sigma_1 - \Sigma_{12}}, \quad (17)$$

или

$$We = \frac{\rho d^{5/3} \varepsilon^{2/3}}{2\Sigma_1 - \Sigma_{12}}. \quad (18)$$

Из условия (14) имеем: $We \neq 3.27$, $We = 6$. Из условия (15) имеем: $We = 3.27$, $We > 6$ (это условие не имеет физического смысла). Из условия (16) имеем: $We = 3.27$, $We = 6$ (это условие тоже не имеет физического смысла). Таким образом, соотношение

$$We = 6 \quad (19)$$

удовлетворяет необходимому признаку $\min \sigma$ (минимума производства энтропии).

Из соотношения (19) определим зависимость для размеров включений, устойчивых к дроблению (к предельным размерам включений):

$$d = \frac{[6(2\Sigma_1 - \Sigma_{12})]^{3/5}}{\rho^{3/5} \varepsilon^{2/5}}. \quad (20)$$

Предельный размер частиц пропорционален поверхностной энергии в степени $3/5$, обратно пропорционален удельной мощности на перемешивание в степени $2/5$.

Соотношение (20) использовали для поиска оптимальных условий процесса измельчения при приведении экспериментальных исследований достижения размера частицы не более 1.5 мкм.

Для рассмотрения кинетики процесса дробления частиц запишем уравнение изменения плотности распределения числа частиц по их объемам:

$$\frac{df}{dt} = -f(r)A(r) + \int_r^{r_{\max}} f(\gamma)A(\gamma)B(r, \gamma)d\gamma. \quad (21)$$

Распределение дочерних частиц было взято из статьи [27].

$$B(r, \gamma) \approx \frac{P}{\gamma^{1/3}} \left(\frac{r}{\gamma} \right)^2 \left(1 - \frac{r}{\gamma} \right)^m, \quad (22)$$

где P и m подбираются из эксперимента.

Перейдем от плотности распределения частиц по объемам к плотности распределения частиц по линейным размерам, учитывая, что $f(r)dr = \varphi(l)dl$. Введение плотности распределения частиц по линейным размерам связано с уменьшением размерности задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\varphi(l)A(l) + 4\pi l^2 \times \\ &\times \int_{l\sqrt{D(t)}}^{l_{\max}} \varphi(l_\gamma)A(l_\gamma)B(l, l_\gamma)dl_\gamma, \\ B(l, l_\gamma) &= \frac{P}{l_\gamma} \left(\frac{l}{l_\gamma} \right)^6 \left(1 - \left(\frac{l}{l_\gamma} \right)^3 \right)^m. \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая выражение (7) для термодинамического потока и соотношение Онзагера, связывающего линейно термодинамический поток с термодинамической движущей силой, определим вероятность дробления частиц соотношением:

$$A(l) = LWe. \quad (24)$$

Параметр $D(t)$ характеризует число дочерних частиц, образующихся из родительской частицы размером l_γ .

Для решения уравнения (23) нами разработана разностная схема расщепления, состоящая из 2 подсхем:

Первая подсхема:

$$\frac{\varphi_j^{n+1/2} - \varphi_j^n}{\Delta t} = 4\pi l_j^2 \sum_{k=j}^{Nr} \varphi_k^n A_k^n B_{jk}^n \Delta l, \quad (25)$$

где для k происходит подбор специального индекса, соответствующего $l\sqrt{D(t)}$

Вторая подсхема:

$$\frac{\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^{n+1/2}}{\Delta t} = -\varphi_j^{n+1/2} A_j^n, \quad (26)$$

где из подсхемы (25) определяется $\varphi_j^{n+1/2}$ по следующему соотношению:

$$\varphi_j^{n+1/2} = \varphi_j^n + 4\pi l_j^2 \Delta t \sum_{k=j}^{Nr} \varphi_k^n A_k^n B_{ik}^n \Delta l. \quad (27)$$

Найденные значения $\varphi_j^{n+1/2}$ (27) подставляются во вторую подсхему (26) и определяется значение φ_j^{n+1} :

$$\varphi_j^{n+1} = \frac{\varphi_j^{n+1/2}}{1 + \Delta t A_j^n}, \quad (28)$$

где n — n -й шаг по времени, $n+1/2$ — дробный шаг по времени, $n+1$ — $n+1$ -й шаг по времени, Δt — интервал времени, индекс j относится к размеру частиц.

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Для определения размера частиц, устойчивого к дроблению, пользовались соотношением (20). Где неизвестным является мощность на дробление частиц. В произведенных экспериментах по измельчению корунда варьировали соотношением массы мелющих шаров к массе дробящегося материала. $z_1 = m_{\text{ball}} / m_p$, а также размером мелющих шаров.

Вторым параметром был $z_2 = d_0/d_{\text{ball}}$, где $d_0 = 1$ мм. Мощность, затрачиваемую на дробление частиц, представили в виде регрессионной зависимости:

$$\varepsilon = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_{12} z_1 z_2. \quad (29)$$

Коэффициенты регрессии a_0 , a_1 , a_2 и a_{12} подбирались из минимума функционала:

$$\min \sum_{i=1}^W \left(\frac{d_{\text{exp}}^i - d_{\text{calc}}^i}{d_{\text{exp}}^i} \right)^2.$$

При этом d_{calc} определяется из соотношения (20).

В качестве значения d_{exp} брали размер частиц, когда при данных условиях (соотношение мелющих шаров к порошку материала, выбранного размера шара) размер частицы уже не менялся во времени, т. е. был предельным, что соответствовало времени дробления около 90 мин. В табл. 1 представлен результат сравнения экспериментальных и расчетных данных по значению диаметра частиц, устойчивых к дроблению.

Таблица 1. Сравнение результатов расчетных и экспериментальных данных

Размер мелющего шара, мм	Соотношение масс мелющих шаров к порошку	Моделируемый размер частиц, мкм	Размер частиц в результате эксперимента, мкм	Относительная ошибка, %
5	3:1	3.25	3.42	4.8
5	5:1	2.83	2.97	4.5
2	3:1	2.05	2.04	0.53
2	5:1	1.86	1.83	3.4

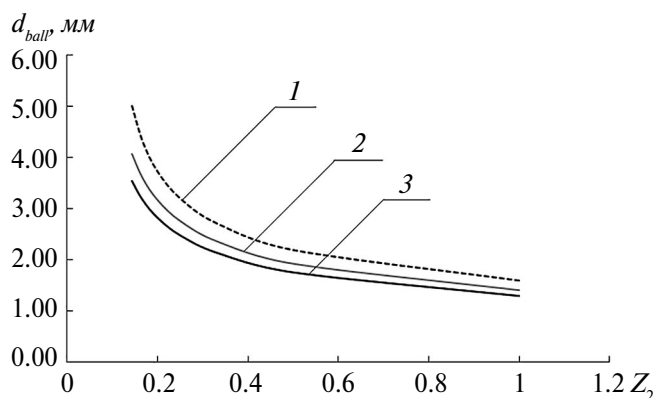


Рис. 3. Размер частиц устойчивых к дроблению при изменении диаметра шаров и соотношений масс мелющих шаров к порошку: 1 – $z_1 = 2$; 2 – $z_1 = 4$; 3 – $z_1 = 6$.

На рис. 3 представлен график, по которому хорошо просматривается зависимость того, что чем меньше диаметр мелющего шара и чем сильнее превосходит общая масса шаров массу дробящегося материала, тем интенсивнее идет дробление и, следовательно, размер частиц, устойчивых к дроблению, меньше.

Таким образом, выбирая для планетарной мельницы определенный режим, можно получать частицы заданных размеров, используя соотношения (20), (29). Так, размер частиц ~ 1.5 мкм можно получить при режимах: а) соотношение масс – 3, размер мелющего шара 1 мм; б) соотношение масс – 6, размер мелющего шара 2 мм.

Учитывая найденные параметры для мощности на дробление в регрессионной зависимости (29), запишем выражение для вероятности дробления частиц:

$$A = L \frac{\rho d^{5/3} (a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_{12} z_1 z_2)^{2/3}}{\Sigma}. \quad (30)$$

У измельчаемых частиц, чем размер частицы больше, тем вероятность дробления выше. Также вероятность дробления частиц в планетарной мельнице зависела от соотношения масс мелющих шаров к измельчаемому порошку. Чем это соотношение выше, тем вероятность дробления больше. Зависимость от размера мелющих шаров, чем меньше размер шара при постоянном соотношении мелющих шаров к измельчаемому материалу, тем выше вероятность их дробления. То есть для данной конкретной планетарной мельницы вероятность дробления частиц стала отражать реальную физико-химическую сущность протекаемых явлений.

Неизвестными параметрами кинетической модели являлись: феноменологический коэффициент L в зависимости (24), связывающий поток с термодинамической движущей силой, коэффициент P в распределении дочерних частиц (22) и число дочерних частиц $D(t)$, на которые может разбиться родительская частица. Эти параметры

подбирались из двух условий: а) совпадения расчетных и экспериментальных данных в ходе процесса измельчения (сравнивались средние размеры частиц $l = \frac{\int_{l_0}^{l_{\max}} l \varphi(l) dl}{\int_{l_0}^{l_{\max}} \varphi(l) dl}$); б) соблюдения закона

сохранения массы при дроблении частиц.

На рис. 4 приведена плотность функции распределения частиц по размерам в различные моменты времени. Кривая 1 характеризует начальное распределение частиц по размерам при условии: соотношение масс 5:1, размер мелющего шара 5 мм. Кривая 2 характеризует распределение частиц по размерам по истечении 25 мин. И кривая 3 описывает распределение частиц по размерам в момент времени 90 мин с начала дробления. Средний размер частиц в этих условиях $\sim 2,8$ мкм.

На рис. 5 представлены расчетные значения среднего размера частиц во времени при режиме: соотношения масс 3:1, размер мелющего шара 2 мм. Из рис. 4 и 5 видно, что с увеличением времени дробления средние размеры частиц уменьшаются и максимумы плотности распределения частиц сдвигаются в стороны меньших размеров. Также из рис. 5 следует, что наиболее быстро измельчение происходит на ~ 17 мин, а при достижении части-

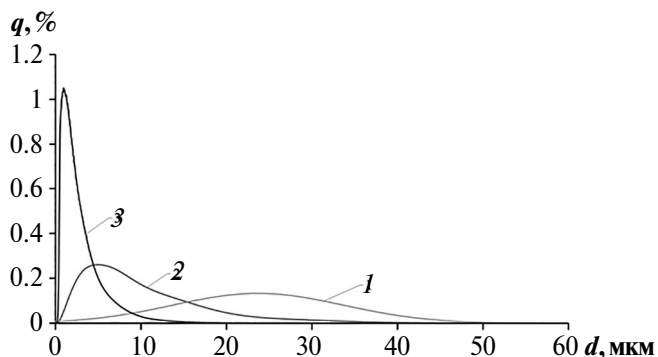


Рис. 4. Расчетная плотность распределения частиц по размерам во времени для эксперимента $d_{\text{ball}} = 5$ мм, соотношение масс 5:1: 1 – 0 мин; 2 – 25 мин.; 3 – 90 мин.

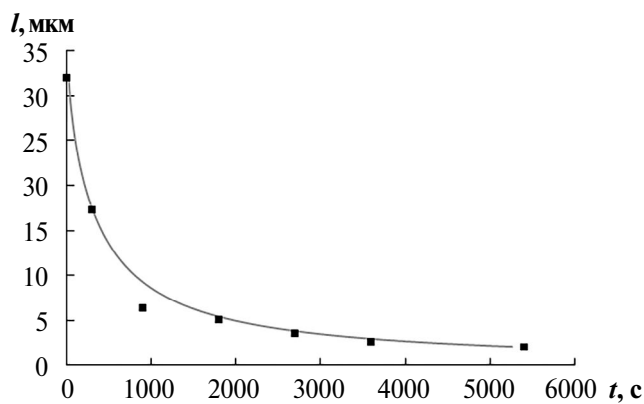


Рис. 5. Изменение среднего размера частиц во времени, для эксперимента $d_{\text{ball}} = 2$ мм и соотношением масс 3:1. Точки – эксперимент, линия – расчет.

цами ~ 5 мкм скорость измельчения замедляется. Это следует и из анализа зависимости для вероятности дробления. В формуле (18) для критерия Вебера и формуле (30) для вероятности дробления наблюдается зависимость от размера в степени $5/3$.

То есть скорость дробления сильно нелинейно зависит от размера частицы. При подборе параметров кинетической модели измельчения (23) получили значения параметров P и m равными: $P = 0.9$; $m = 2$ для всех режимов экспериментальных исследований. Оказалось, что феноменологический коэффициент L и параметр D не зависят от соотношения масс мелющих тел к массе порошка, но чувствительны к размерам мелющих тел.

Так, для режимов $z_2 = 5:1, 3:1$; $d_{\text{ball}} = 5$ мм параметры равны $L = 6.4$; $Dt = 4$.

Для режимов $z_2 = 5:1, 3:1$; $d_{\text{ball}} = 2$ мм параметры равны $L = 7.1$; $Dt = 5$.

Если проанализировать вклад в формулу для вероятности дробления частиц с учетом регрессионной зависимости, отражающей влияние соотношений масс, размеров частиц, их синергетического воздействия (в виде корреляции), то можно отметить, что наибольший вклад в увеличение скорости дробления частиц вносит размер мелющего тела при постоянном соотношении масс.

Следует отметить, что одним из важных факторов, влияющих на мощность дробления частиц, является скорость вращения. В данной работе в связи с тем, что экспериментальные исследования проводились при одинаковой скорости вращения (что было связано с особенностями именно этой планетарной мельницы), данный фактор не учитывался.

Также следует отметить, что при проведении экспериментальных исследований по измельчению карбида кремния на другой планетарной мельнице с возможностью менять скорость вращения от 200 до 500 об/мин, рассматривали мощность на дробление в виде регрессионной зависимости от трех факторов: соотношений мелющих тел к порошку карбида кремния, размера шара, скорости вращения. В этом исследовании меняли поверхностную энергию частиц путем введения различных ПАВ. И вели процессы измельчения при различных условиях до тех пор, пока размеры частиц переставали уменьшаться, то есть также выходили на стационарный режим. Для карбида кремния были проведены расчеты по определению размера частицы, устойчивой к дроблению по соотношению (20), которые хорошо согласовались с экспериментальными значениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе отражается, что проведены экспериментальные исследования по измельчению корунда в планетарной мельнице с целью,

чтобы полученные экспериментальные результаты использовались для верификации математической модели.

На основе методов механики гетерогенных сред и термодинамики необратимых процессов (с использованием вариационного принципа минимума производства энтропии) получена зависимость для определения диаметра частицы, устойчивой к дроблению. Мощность на дробление частиц, входящая в данную зависимость, была представлена в виде регрессии от факторов, влияющих на процесс дробления (соотношение мелющих тел к измельчаемому материалу, размер мелющих шаров). Расчетные и экспериментальные значения размеров частиц, устойчивых к дроблению, хорошо согласуются.

Получено уравнение для плотности распределения частиц по линейным размерам с учетом явлений дробления (что позволило сократить расчетное время для решения этого уравнения).

Разработана разностная схема для решения уравнения плотности распределения частиц по размерам с учетом явлений дробления.

Получена зависимость для вероятности дробления частиц в уравнении баланса числа частиц, отражающая физико-химическую сущность явлений, протекающих при дроблении (нелинейное влияние размера измельчаемой частицы, влияние режимных параметров планетарной мельницы).

Проведены расчеты по кинетике процесса измельчения корунда. Результаты изменений среднего размера частицы во времени хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Работа выполнена в рамках программы развития РХТУ им. Д.И. Менделеева "Приоритет-2030".

ОБОЗНАЧЕНИЯ

A	вероятность разрушения частицы
a_1, a_2, a_{12}, a_0	коэффициенты регрессионной зависимости для мощности на перемешивании
B	вероятность получения частицы за счет разрушения родительской частицы
D	диаметр измельчаемой частицы
$D(t)$	корректирующий параметр интегрирования
d	диаметр частиц, м
d_0	характеристический размер, мм
d_{ball}	диаметр мелющих шаров, мм
J	термодинамический поток дробления
L	феноменологический коэффициент
l	размер частицы, мкм
m	масса, кг
m_{ball}	масса мелющих шаров, кг
m_p	масса порошка, кг
P	корректирующий эмпирический коэффициент порождения дочерних частиц

Q	корректирующий коэффициент для дробления на низких скоростях
t	время, с
V	предельное значение скорости удара, м/с
V_0	предельное значение скорости удара, м/с
z_1	величина, характеризующая во сколько раз масса шаров превосходит массу измельчаемого материала
z_2	отнесенный к характеристическому размеру диаметр мелющего тела
X	термодинамическая сила дробления
$\varphi(l)$	распределение частиц по размерам (линейным)
γ	размер, характеризующий родительскую частицу, м
σ	производство энтропии
Σ	поверхностная энергия взаимодействия, Дж/м ²
ρ	истинная плотность дисперсной фазы
Σ_1	поверхностная энергии частицы, Дж/м ²
Σ_{12}	поверхностная энергия при взаимодействии частиц при разрушении, Дж/м ²
We	критерий Вебера

ИНДЕКСЫ

ball	мелющие шары
exp	экспериментальные данные
calc	расчетные данные
p	порошок

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романков П.Г., Курочкина М.И., Мозжерин Ю.Я. Процессы и аппараты химической промышленности. Л.: Химия, 1989.
2. Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М. Методы расчета процессов и аппаратов химической технологии. СПб.: ХИМИЗДАТ, 2009.
3. Müller L., Klar A., Schneider F. A numerical comparison of the method of moments for the population balance equation // Mathem. Comp. Simul. 2019. V. 165. P. 26.
4. Rosales-Marín G., Andrade J., Alvarado G., Delgadillo J.A., Tuzcu E.T. Study of lifter wear and breakage rates for different lifter geometries in tumbling mill: Experimental and simulation analysis using population balance model // Miner. Eng. 2019. V. 141. P. 110.
5. Bhattacharyya A., Tuzcu E.T., Rajamani R. Experimental study on nonlinear behavior of breakage rates due to fines generation in wet batch milling // Miner. Eng. 2016. V. 99. P. 19.
6. Liné A., Frances Ch. Discussion on DQMOM to solve a bivariate population balance equation applied to a grinding process // Powder Technol. 2016. V. 295. P. 234.
7. Frances C., Liné A. Comminution process modeling based on the monovariate and bivariate direct quadrature method of moments // AIChE. 2014. V. 60. P. 1621.
8. Bazin Cl. Data reconciliation for the calibration of a model for batch grinding // Miner. Eng. 2005. V. 18. P. 1052.
9. Pieper M., Kutelova Z., Aman S., Tomas J. Modeling of baryte batch grinding in a vibratory disc mill // Adv. Powder Technol. 2013. V. 24. P. 229.
10. Hasan M., Palaniandy S., Hilden M., Powell M. Simulating product size distribution of an industrial scale VertiMill® using a time-based population balance model // Miner. Eng. 2018. V. 127. P. 312.
11. Xiaoli W., Weihua G., Chunhua Y., Yalin W. Wet grindability of an industrial ore and its breakage parameters estimation using population balances // Int. J. Miner. Proc. 2011. V. 98. P. 113.
12. Xiaoli W., Yalin W., Chunhua Y., Degang X., Weihua G. Hybrid modeling of an industrial grinding-classification process // Powder Technol. 2015. V. 279. P. 75.
13. Hutchings I.M. Mechanisms of wear in powder technology: A review // Powder Technol. 1993. V. 76(1). P. 3.
14. Ghadiri M., Yuregir K.R. Impact attrition of NaCl particles. // In B.J. Briscoe, M.J. Adams (Eds.) Tribology in particulate technology. 1987. P. 439.
15. Lawn B.R., Wilshaw R. Review – indentation fracture: Principles and applications // J. Mater. Sci. 1975. V. 10. P. 1049–1060.
16. Rumpf H. The strength of granules and agglomerates // In: Knepper, W.A. (Ed.), Agglomeration-Proceedings of the first international symposium on Agglomeration Philadelphia. 1962. P. 379.
17. Moreno R., Ghadiri M. Computer simulation analysis of the effect of bond strength on the breakage pattern of agglomerates // PARTEC. 2004. V.3. P. 5.
18. Subero J. Impact breakage of agglomerates. Ph.D. Dissertation. Surrey University. Guildford. UK. 2001.
19. Thornton C., Yin K.K., Adams M.J. Numerical simulation of the impact fracture and fragmentation of agglomerates // J. Phys. D – Applied Phys. 1996. V. 29. P. 425.
20. Kafui K.D., Thornton C. Computer simulated impact of agglomerate // Powders & Grains. 1993. V. 93. P. 401.
21. Кафаров В.В., Дорохов И.Н., Кольцова Э.М. Системный анализ процессов химической технологии. Энтропия и вариационные методы неравновесной термодинамики в задачах химической технологии. М.: Наука, 1988.
22. Кафаров В.В., Дорохов И.Н., Кольцова Э.М. Системный анализ процессов химической технологии: методы неравновесной термодинамики: монография / Под ред. Н.М. Жаворонкова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2021.
23. Кафаров В.В., Дорохов И.Н., Кольцова Э.М. Системный анализ процессов химической технологии: массовая кристаллизация: монография / Отв. ред. Н.М. Жаворонков. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2023.
24. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. Изд. 3-е, испр. М.: ИКИ. 2016.
25. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: Прогресс. 2014.
26. Кольцова Э.М., Гордеев Л.С. Синергетика в химии и химической технологии. М.: Юрайт. 2023.
27. Laakkonen M., Alopaeus V., Aittamaa J. Validation of bubble breakage, coalescence and mass transfer models for gas-liquid dispersion in agitated vessel // Chem. Eng. Sci. 2006. V. 61. № 1. P. 218.