

УДК 534-13

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ДИОКСИДОВ ТИТАНА НА БИОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БИОНЕОРГАНИЧЕСКИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2023 г. В. П. Мешалкин^{a, b}, О. Б. Бутусов^{a, b, *}, А. Г. Колмаков^c,
М. А. Севостьянов^c, Т. Б. Чистякова^d

^aРоссийский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева, Москва, Россия

^bИнститут физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН, Москва, Россия

^cИнститут металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН, Москва, Россия

^dСанкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет),
Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: butusov-1@mail.ru

Поступила в редакцию 08.10.2022 г.

После доработки 10.12.2022 г.

Принята к публикации 23.12.2022 г.

Статья посвящена проблеме создания экологически безопасных материалов за счет использования нового поколения композитов на основе биоразлагаемых биосовместимых полимерных матриц с возможностью длительного контролируемого адресного высвобождения питательных и биопротекторных веществ. Разработаны методика и алгоритм использования фрактального анализа для оценки биологических свойств бионеорганического композиционного материала хитозан-оксид титана, который применяется в сельском хозяйстве для получения высокоэффективных комплексных удобрений. Разработанный алгоритм отличается от аналогов использованием скелетонов для расчета фрактальной размерности микрофотоизображений. Исследованы фрактальные и механические свойства органо-неорганических пленок бионеорганического композиционного материала хитозан-оксид титана. Полученные результаты имеют важное значение для оценки таких характеристик бионеорганических композиционных материалов, как биodeградируемость, биосовместимость, экологическая безопасность, которые имеют важное значение для защиты окружающей среды. Установлено существование зависимости между величиной коэффициентов асимметрии и эксцесса фрактальной размерности микрофотоизображений пленок хитозана и процентом содержания в них оксида титана. Результаты исследования механических свойств пленок композита хитозан-оксид титана позволяют сделать вывод о влиянии примесей оксида титана на прочность пленок.

Ключевые слова: бионеорганический композиционный материал хитозан-оксид титана, оптическая микроскопия, фрактальная размерность, механическая прочность, защита растений от вредных бактерий

DOI: 10.31857/S0040357123030120, EDN: RPHOUW

ВВЕДЕНИЕ

Объектом исследования являются биodeградируемые бионеорганические композиционные материалы (БИН) хитозан-оксид титана (ХОТ) в виде хитозановых пленок (ХП) с биодобавками оксидов титана, которые в настоящее время активно используются в сельском хозяйстве для защиты сельскохозяйственных культур от вредных бактерий и в качестве дополнительного источника микроэлементов.

Предметом исследования является изучение влияния процентного содержания оксидов титана на:

— механические свойства (пластичность, прочность) ХП;

— микрооптические свойства (фрактальная размерность микрофотоизображений (МФИ)) ХП.

Методы исследований: оптическая микроскопия; механические испытания; фрактальная размерность МФИ.

Практическая значимость исследований заключается в возможности применения ХП в сельском хозяйстве, как эффективное средство доставки наночастиц диоксида титана для защиты растений от вредных бактерий.

Инструментом исследования являются экспериментальные методы измерения механических

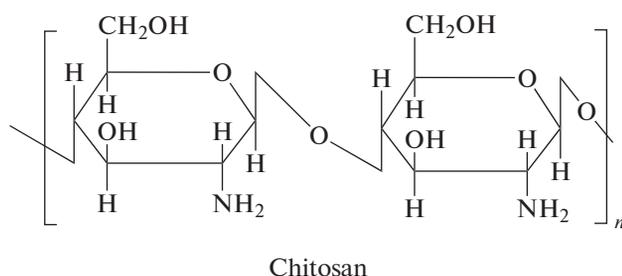


Рис. 1. Структурная формула хитозана.

показателей, таких как пластичность и прочность, а также вычислительные методы изучения микрооптических свойств ХП с помощью оценок фрактальной размерности МФИ микроскопа АЛЬТАМИ с использованием разработанного алгоритма расчета фрактальной размерности. Экспериментальные измерения механических свойств проводились с использованием разрывной машины Instor 3382.¹

Следует отметить, что в последнее время для изучения свойств материалов широко применяются методы фрактального анализа [1–3]. В работе [4] на основе фрактального анализа разработаны новые методы исследования свойств нанокompозитных материалов. В [5] разработана и детально описана фрактально-кластерная модель полимерных материалов. С помощью разработанных алгоритмов фрактально-кластерного анализа в работе [5] исследовано влияние фрактальных свойств полимеров на их механические и физико-химические свойства. Исследования, выполненные в [5], показали, что существует корреляционная взаимосвязь между длиной микротрещины полимера и фрактальной размерностью ее границы.

Одним из активно развивающихся в настоящее время направлений практического использования полимерных пленок является разработка биоразлагаемых пленок для защиты сельскохозяйственных культур. Особое место в практической разработке пленок отводится БИН композиционным материалам [6].

Следует отметить, что в процессе разложения синтетических полимеров выделяются вредные вещества. Часть из образующихся отходов используется повторно, но не основная. Для оценки качества синтезируемых биodeградируемых материалов [6, 7] перспективным является использование аппарата фрактального анализа [1–5], результаты которого применительно к БИН хитозан-оксидам титана изучались в данной работе.

¹ В экспериментальных исследованиях принимала участие А.Г. Александрова.

1. ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БИН ХИТОЗАН-ОКСИДОВ ТИТАНА

На основе матриц хитозана созданы образцы бионеорганических полимеров с возможностью длительного контролируемого адресного высвобождения питательных и биопротекторных веществ (к примеру, ввод в качестве прекурсора диоксида титана) для применения в агрокомплексе без ущерба для окружающей среды. Использование описанных выше композиционных материалов повысит эффективность сельского хозяйства и уменьшит отрицательное воздействие на окружающую среду.

На рис. 1 представлена химическая формула хитозана, который представляет собой *N*-деацетилированное производное хитина [6, 7].

Преимуществом хитозана являются его нерастворимость в воде и органических растворителях, вяжущие свойства получаемых на его основе растворов путем растворения в кислотах, способность образовывать пленки, гранулы, волокна, биологическая совместимость с живыми тканями и отсутствие токсичности [6–9].

Диоксид титана существует в трех модификациях: анатаз, брукит, рутил [9]. Диоксид титана в форме анатаза представляет собой пирамидальные кристаллы, где элементарная ячейка имеет тетрагональную форму; в форме рутила – кристаллы игольчатой формы, где ячейка тетрагональной формы; в форме брукита – кристаллы имеют очень сложную структуру, где ячейки орторомбической формы [9].

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Экспериментальное исследование механических свойств

Для определения механических свойств пленок применялась разрывная машина INSTRON 3382 совместно с программным обеспечением Bluehill 2.0, которая дает результаты в виде значений данных таких, как время проведения опыта, напряжение, деформация при растяжении, нагрузка, удлинение, удлинение при растяжении, а также выдача автоматически построенных графиков.

2.2. Микроскопические исследования

На сегодняшний день существует множество методов исследования наноструктур такие, как оже-спектроскопия, фурье-спектроскопия, методы месбауэровской, ультрафиолетовой и инфракрасной спектроскопии, рамановская спектроскопия и ряд других, которые применяются для получения микрофотоизображений (МФИ) текстуры наноматериалов.

Таблица 1. Микроскопы, используемые для получения микрофотоизображений

Название	СЭМ	ПЭМ	ММ	АСМ
Характеристика	Позволяет возможность отображать габаритные, сложные по форме образцы	Позволяет использовать разрешение до 0.2 нм, детекторы для получения добавочных характеристик исследуемого материала	Позволяет осуществлять исследования в отраженном свете методами светлого поля и полимеризации в проходящем свете по методу поляризации	Позволяет делать трехмерные изображения. В воздухе, в жидкости

Для получения микрофотоизображений текстуры часто используют атомно-силовой микроскоп (АСМ), сканирующий электронный микроскоп (СЭМ), просвечивающий электронный микроскоп (ПЭМ), металлографический микроскоп (ММ) и метод рентгеновской компьютерной томографии (КРТ) (см. табл. 1).

Для исследования поверхности полученных пленок был использован оптический микроскоп АЛЬТАМИ. Образцы рассматривались на разрешениях $\times 10$, $\times 20$ и $\times 40$ на свет и просвет. Микроскоп оснащен средствами программного анализа, предназначенными для интегрального составления целостной картины, что существенно улучшает качество фотографий для дальнейшей работы с ними.

2.3. Исследование фрактальных свойств материалов

2.3.1. Алгоритм Минковского–Хаусдорфа. Фрактальные свойства МФИ относятся к классу геометрических объектов, которые называются случайными фракталами [10]. Фрактальные объекты характеризуются свойством самоподобия. Например, трещина является фракталом, форма которого приблизительно повторяется при изменении масштаба изображения. Для описания фракталов используется численная характеристика, которая называется фрактальной размерностью (ФР). Для расчета ФР используется формула Минковского–Хаусдорфа [10–14]

$$d = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lg(N(\Delta t))}{\lg(\Delta t)}, \quad (1)$$

где Δt – размер квадрата покрытия; $N(\Delta t)$ – количество квадратов, покрывающих фрактальный объект. Для вычисления предела (1) последовательность $\left\{ \frac{\lg_2 N(a_k)}{\lg_2 a_k} \right\}$ необходимо изобразить в виде точек на графике в координатах $y = f(x)$, где $y = \lg_2 N(a)$, $x = \lg_2 a$. Далее следует вычислить фрактальную размерность как тангенс угла наклона графика по формуле линейной регрессии.

2.3.2. Box counting алгоритм. Box counting алгоритм (BC-алгоритм) является итеративным алгоритмом, в котором от итерации к итерации уменьшается в заданное число раз размер квадратной сетки [10–14]. На первом этапе работы алгоритма осуществляется бинаризация изображения с целью выделения на нем изучаемых кластерных элементов в виде бинарных объектов. При этом для выделения объектов задается порог бинаризации. На следующем этапе изображение равномерно покрывается квадратной сеткой заданного начального размера. Далее вычисляется число квадратов, покрывающих объект. На каждой последующей итерации шаг расчетной сетки уменьшается в заданное число раз, после чего расчеты повторяются [10–14]. Результаты расчетов можно представить в виде графиков, что проиллюстрировано на рис. 2.

В данной работе МФИ были предварительно преобразованы с помощью градиентного фильтра, позволяющего перейти от объектов на изображении к их скелетонам, которые наилучшим образом передают фрактальную структуру изображения.

Разработанный в данной статье BC-алгоритм предназначен для сегментации черно-белых изображений и включает следующие этапы:

Этап 1. Преобразование цветного трехканального изображения в черно-белое одноканальное.

Шаг 1.1. Выбор весовых коэффициентов.

Шаг 1.2. Преобразование исходного трехканального изображения с помощью среднего взвешенного в одноканальное изображение.

Шаг 1.3. Нормализация одноканального среднего взвешенного изображения.

Этап 2. Выделение границ объектов на изображении с помощью градиентного фильтра.

Шаг 2.1. Численные эксперименты по выбору вида градиентного фильтра.

Шаг 2.2. Преобразование изображения с помощью выбранного градиентного фильтра.

Этап 3. Бинаризация градиентного изображения.

Шаг 3.1. Выбор порога бинаризации.

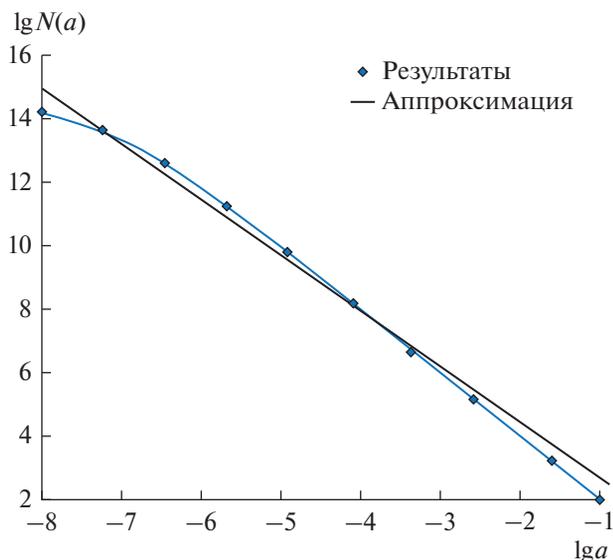


Рис. 2. График зависимости $y = f(x)$, где $y = \lg_2 N(a)$, $x = \lg_2 a$ для определения фрактальной размерности. Угловой коэффициент графика дает оценку фрактальной размерности объекта.

Шаг 3.2. Бинаризация изображения на выбранном пороге бинаризации.

Шаг 3.3. Связывание пикселей бинарного изображения в линейные объекты.

Шаг 3.4. Кодирование скелетонных объектов и формирование скелетонной структуры.

Этап 4. Вычисление фрактальной размерности методом “box-counting”.

Шаг 4.1. Цикл по размерам ячеек расчетной сетки (a_i).

Шаг 4.1.1. Наложение на изображение квадратной расчетной сетки.

Шаг 4.1.2. Подсчет числа квадратов, содержащих скелетонные объекты $N(a_i)$.

Шаг 4.1.3. Возврат к началу цикла

Шаг 4.2. Построение графика

$$y_i = f(x_i), \quad y_i = \lg_2 N(a_i), \quad x_i = \lg_2 a_i.$$

Шаг 4.3. Вычисление коэффициентов линейной регрессии и расчет фрактальной размерности.

Этап 5. Визуализация и вывод изображения фрактальной размерности на экран [4].

2.3.3. Алгоритм вычисления фрактальной размерности по спектру мощности. Вычисление ФР по спектру мощности, основано на преобразованиях Фурье [10–14]. Для черно-белых изображений формула для спектра мощности имеет следующий вид:

$$P(k_1, k_2) = \frac{C}{|k_1^2 + k_2^2|^{d/2}}, \quad (2)$$

где d – показатель самоподобия, k_1, k_2 – волновые числа спектра мощности.

Фрактальная размерность связана с показателем самоподобия следующим соотношением:

$$D = 4 - \frac{d}{2}. \quad (3)$$

Диапазон значений ФР для изображения, как правило, лежит в интервале: $2 < D < 3$. Данное соотношение выражает тот факт, что изломанность яркостного поля изображения превышает размерность гладкой поверхности, однако при этом ФР двумерного изображения все же остается меньше размерности трехмерных объектов.

Для практических расчетов фрактальной размерности по формулам (2)–(3) был использован метод скользящего окна и алгоритм дискретного преобразования Фурье. При этом следует подчеркнуть, что размер скользящего окна должен быть достаточным для использования дискретного преобразования Фурье, а также должен быть равен степени числа два. Окончательный выбор размера окна определяется выходом на устойчивое (слабо зависящее) от размеров окна распределение ФР.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ФРАКТАЛЬНОГО И МЕХАНИЧЕСКОГО АНАЛИЗОВ

3.1. Фрактальный анализ

В данном разделе проведен анализ МФИ БИН композитов хитозан-титан, полученных на оптическом микроскопе АЛЬТАМИ. Образцы рассматривались при увеличениях $\times 10$, $\times 20$ и $\times 40$ разрешениях на свет и просвет, при этом МФИ были получены с помощью программы ALTAMI STUDIO. Примеры полученных МФИ представлены на рис. 3.

Средний размер частиц оксида титана составляет ~ 0.037 мкм. Для расчета полей фрактальной размерности использовалась компьютерная программа ВС-алгоритма [4]. Распределения плотности вероятности ФР по матрице МФИ сохранялись в базах данных (БД) в виде двумерных массивов. По этим данным рассчитывались точечные статистические характеристики распределения ФР по изображению.

Массивы ФР использовались для расчета точечных статистических характеристик распределения двумерных плотностей вероятности ФР. На рис. 4 представлены графики зависимости статистических характеристик фрактальной размерности от концентрации добавляемого в хитозан количества оксида титана, рассчитанные с помощью ВС-алгоритма [4]. В качестве статисти-

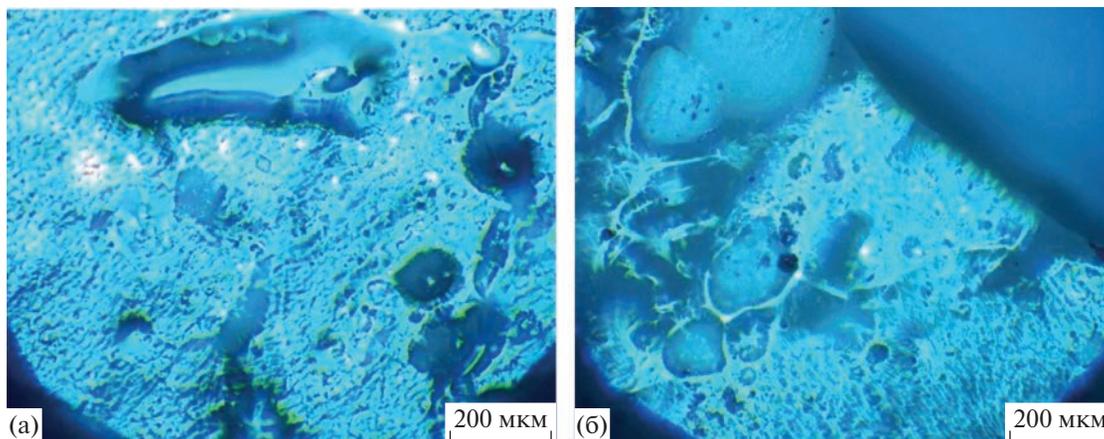


Рис. 3. Образец Хитозан (3.2 г) с концентрацией TiO_2 : а – 0.1 г и б – 1.25 г при увеличении $\times 10$.

ческих показателей выбраны показатели, наиболее полно характеризующие функцию плотности распределения вероятностей ФР: среднее арифметическое, среднее квадратическое отклонение (СКО), коэффициенты автокорреляции, асимметрии и эксцесса, а также мода статистического распределения.

Самоподобие фрактальной геометрии позволяет изучать закономерности поведения дискретных структур на малых масштабах, с помощью исследований структуры на более крупных масштабах. Эти свойства самоподобия широко применяются в различных научно-технических областях, например в гидродинамике.

Как следует из рис. 4 зависимость большинства статистических показателей ФР от величины добавок оксидов титана в структуру образцов хитозана имеет невыраженный характер. Исключения составляют коэффициент эксцесса и коэффициент асимметрии, характеризующие заостренность формы гистограммы и ее асимметрию. Из рис. 4 также следует существенное увеличение коэффициента эксцесса и абсолютного значения коэффициента асимметрии при увеличении количества добавок TiO_2 . Таким образом, в качестве критерия влияния добавок TiO_2 на величину фрактальной размерности МФИ пленок хитозана наиболее рационально использовать коэффициенты асимметрии и эксцесса, которые значительно возрастают при больших значениях добавок TiO_2 .

Также следует отметить, что в основном фрактальный характер образцов обусловлен фрактальностью кристаллической матрицы хитозана, на которую добавки оксидов титана оказывают лишь небольшое влияние.

Графики гистограммы фрактальной размерности для добавки 0.1 г TiO_2 в хитозан (3.2 г) представлена на рис. 5. Как следует из рис. 5, гистограмма

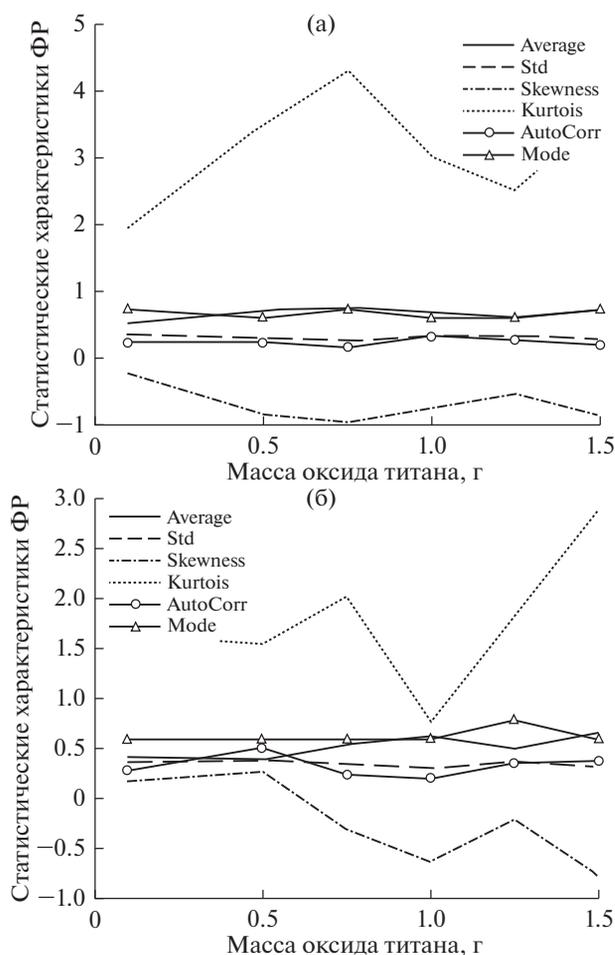


Рис. 4. Графики статистических характеристик фрактальной размерности от концентрации добавляемого количества оксида титана в: а – хитозан (1.8 г); б – хитозан (3.2 г); использованы следующие обозначения: Average – среднее арифметическое; Std – среднее квадратическое отклонение; Skewness – коэффициент асимметрии; Kurtosis – коэффициент эксцесса; AutoCorr – коэффициент автокорреляции; Mode – мода.

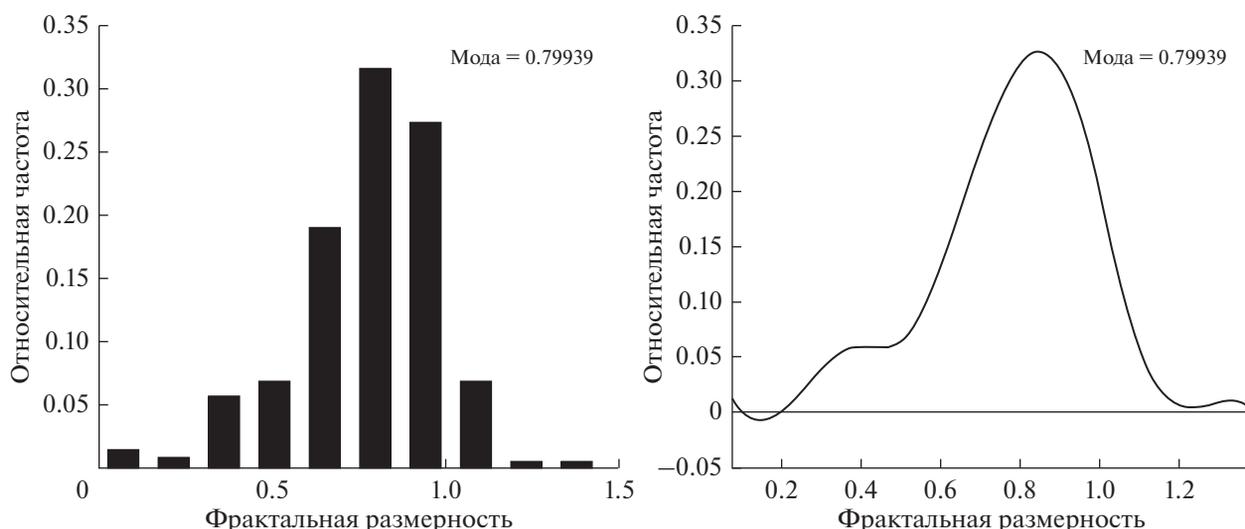


Рис. 5. Графики гистограммы фрактальной размерности для добавки 0.1 г TiO₂ в хитозан (3.2 г).

ФР имеет выраженный заостренный характер, что коррессируется с большой величиной коэффициента эксцесса для добавки 0.1 г TiO₂ (см. рис. 4б). При этом коэффициент асимметрии имеет небольшую положительную величину.

3.2. Результаты расчета механических показателей

В результате механических исследований установлено существование статистической зависимости между показателями прочности образцов хитозана от количества добавленных в образцы оксидов. Изготовленные образцы после первичного анализа с помощью микроскопа, были под-

вергнуты механическим испытаниям. Данные испытания проводились на разрывной машине Instor 3382 совместно с программным обеспечением Bluehill 2.0, которая дает результаты в виде значений данных таких, как время проведения опыта, напряжение, деформация при растяжении, нагрузка, удлинение при растяжении, а также автоматическое построение графиков.

Показано, что предел прочности падает в зависимости от увеличения добавок оксида титана в хитозан. При этом пластичность образцов возрастает, причем нагрузка, требуемая для разрыва образца, уменьшается при добавлении оксида титана. Следует также отметить, что такие механические показатели, как прочность, пластичность и нагрузка растут пропорционально добавлению оксида титана в хитозан.

На рис. 6 представлены результаты измерения прочности хитозана в зависимости от количества добавленных оксидов и график линейной регрессии с угловым коэффициентом $k \approx 0.07$ МПа/г (коэффициент детерминации равен 0.6947).

Большой угловой коэффициент линейной регрессии свидетельствует о заметном влиянии добавок оксида титана на прочность пленок хитозана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований сделаны следующие выводы:

1. Результаты расчета ФР показали, что такие статистические показатели, как среднее арифметическое, стандартное отклонение, автокорреляция и мода мало зависят от величины добавок оксидов титана в пленки хитозана. При этом показатели формы распределения ФР, такие как

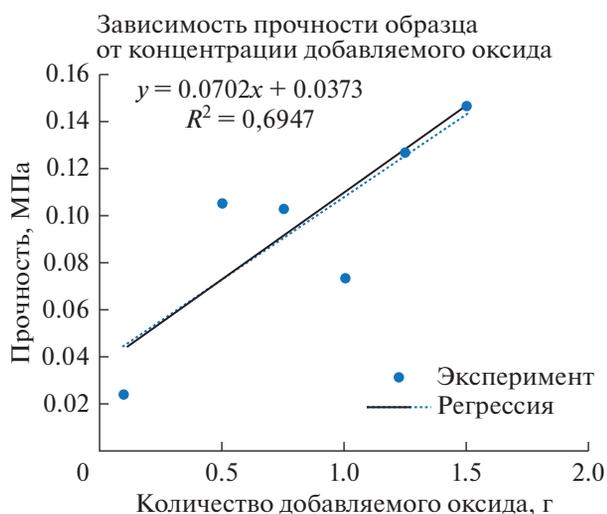


Рис. 6. Линейная регрессия зависимости прочности хитозана от концентрации добавляемого оксида.

коэффициенты асимметрии и эксцесса, возрастают почти в два раза с увеличением добавок оксидов титана от 0.1 до 1.5 г.

2. На основе анализа статистических характеристик распределения ФР МФИ образцов сделан вывод о том, что в основном фрактальность образцов обусловлена фрактальностью кристаллической матрицы хитозана. При этом добавки оксидов имеют лишь небольшое влияние на распределение ФР.

3. Показано, что как следует из графиков коэффициентов асимметрии и эксцесса, существует критическая точка вблизи 0.75 г добавки оксида титана, в которой наблюдается скачкообразное уменьшение коэффициента эксцесса и изменение знака коэффициента асимметрии (см. рис.4), что указывает на перестройку формы функции площадного распределения фрактальной размерности.

4. В результате экспериментальных исследований установлено, что образцы на основе хитозана с добавлением оксида титана менее прочные чем с добавлением оксида кремния. При этом образцы, изготовленные на основе хитозана, более пластичные. Например, относительное удлинение пленки хитозана (3.2 г) с добавкой оксида титана составляет 126.00–197.00%

ОБОЗНАЧЕНИЯ

БИН	бионеорганические композиционные материалы
ХОТ	хитозан-оксид титана
ХП	хитозановые пленки
МФИ	микрофотоизображения
xN	коэффициент увеличения микроскопа
ФР	фрактальная размерность
БД	базах данных
Average	среднее арифметическое
Std	среднее квадратическое отклонение
Skewness	коэффициент асимметрии
Kurtosis	коэффициент эксцесса
AutoCorr	коэффициент автокорреляции
Mode	мода статистического распределения
k	угловой коэффициент линейной регрессии, МПа/г
Δt	размер квадрата сетки покрытия, пиксели
$N(\Delta t)$	количество квадратов, покрывающих фрактальный объект
$\left\{ \frac{\lg_2 N(a_k)}{\lg_2 a_k} \right\}$	фрактальная числовая последовательность

$N(a_i)$	числа квадратов, содержащих скелетонные объекты
a_i	размер квадратной ячейки расчетной сетки, пиксели
d	показатель самоподобия
D	фрактальная размерность
k_1, k_2	волновые числа спектра мощности, м ⁻¹
$P(k_1, k_2)$	спектр мощности

БЛАГОДАРНОСТЬ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-79-30029 “Разработка комплекса технологий переработки отходов 3–5 классов опасности с получением полезных продуктов”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Valeriy P. Meshalkin, Vincenzo G. Dovi, Vladimir I. Bobkov et al.* State of the art and research development prospects of energy and resource-efficient environmentally safe chemical process systems engineering // *Mendeleev Communications*. 2021. V. 31. P. 593–604.
2. *Meshalkin V.P., Butusov O.B., Reverberi Andrea, Kolmakov A.G., Sevostyanov M.A., Garabadzhiu A.V., Alexandrova A.G.* Multifractal Analysis of the Mechanical Properties of the Texture of Biopolymer-Inorganic Composites of Chitosan-Silicon Dioxide. *Energies* 2022. V. 15. Iss. 19. 7147–7163. <https://doi.org/10.3390/en15197147>
3. *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* Мультифрактальный анализ сложных сигналов // *Успехи физических наук*. 2007. Т. 177. № 8. С. 859–876.
4. *Саркисов П.Д., Бутусов О.Б., Мешалкин В.П., Севастьянов В.Г., Галаев А.Б.* Компьютерный метод анализа текстуры нанокмполитов на основе расчета изолиний фрактальных размерностей // *Теоретические основы химической технологии*. 2010. Т. 44. № 6. С. 620–625.
5. *Kozlov G.V., Yanovskii Yu.G.* Fractal Mechanics of Polymers: Chemistry and Physics of Complex Polymeric Materials. Toronto, New Jersey: Apple Academic Press, 2015. 372 p.
6. *Колоколова А.Ю., Тарасюк В.Т., Курбанова М.Н., Ильин А.А.* Изучение антимикробных свойств модифицированных полимерных материалов // *Вестник ВГУ* 2019. Серия: Химия. Биология. Фармация. № 1. С. 12–19.
7. *Озерин А.Н., Павлова-Веревкина О.Б., Зеленский А.Н., Аконова Т.А., Озерина Л.А., Сурин Н.М., Кечекьян А.С.* Нанокмполиты на основе модифицированного хитозана и оксида титана // *Высокомолекулярные соединения*. 2006. Серия А. Т. 48. № 6. С 983–989.
8. *Токова И.С., Суворова А.И., Окунева А.И., Шишкин Е.И.* Получение и структура органо-неорганических гибридных пленок хитозан-оксид кремния // *Высокомолекулярные соединения*. 2010. Сер. Б. Т. 52. № 9. С. 1702–1709.

9. Янагисава К., Овенстон Дж. Кристаллизация анатаза из аморфного диоксида титана гидротермальным методом: влияние исходного материала и температуры // J. Phys. Chem. B. 1999. Т. 103. С. 7781–7787.
10. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Пост маркет, 2000. 352 с.
11. Stojić T., Reljin I., Reljin B. Adaptation of multifractal analysis to segmentation of microcalcifications in digital mammograms // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. V. 367. P. 494–508.
12. Mukundan R., Hemsley A. Tissue Image Classification Using Multi-Fractal Spectra // International J Multimedia Data Engineering and Management (IJMDEM). 2010. V. 1. P. 62–75.
13. Reljin I.S., Reljin B.D. Fractal geometry and multifractals in analyzing and processing medical data and images // Archive of Oncology. 2002. V. 10. P. 283–293.
14. Кантюков Р.А. Мультифрактальный анализ изображений турбулентных газовых потоков в газопроводах // Прикладная информатика. 2016. Т. 11. № 4(64). С. 42–56.