

УДК 539.3

# СЛУЧАИ ПРЕВРАЩЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

© 2023 г. А. В. Соловьев<sup>а</sup>, \*, С. П. Карлов<sup>б</sup>, Н. Ю. Шкарин<sup>а</sup><sup>а</sup>Институт энергоэффективных и энергосберегающих решений, Москва, Россия<sup>б</sup>Московский политехнический университет, Москва, Россия

\*e-mail: a.v.soloviev@mail.ru

Поступила в редакцию 15.12.2022 г.

После доработки 23.12.2022 г.

Принята к публикации 11.01.2023 г.

В химической технологии важное место занимают исследования процессов массо- и теплопередачи в движущихся средах. Очевидно, чтобы изучить эти процессы, необходимо знать, как перемещаются данные среды. Определение поля скоростей жидкостей и газов задача чисто кинематическая. Можно ли ее решить, не прибегая к уравнениям движения, ограничиваясь только уравнением неразрывности?

**Ключевые слова:** точные решения, гидродинамика, уравнения Эйлера приближение Стокса, несжимаемая жидкость, вязкость, математическое моделирование

DOI: 10.31857/S0040357123020100, EDN: EJNEER

Ответ утвердительный, если пользоваться моделью идеальной жидкости, т.е. системой уравнений Эйлера. Если уравнение неразрывности имеет вид:  $\operatorname{div} \bar{V}_1 = 0$ , то единственное слагаемое,  $\mu \Delta \bar{V}$ , отличающее систему уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости от уравнений Эйлера, можно записать в виде  $\mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{V}_1$ .

Возможны три случая, когда это слагаемое исчезает, автоматически превращая уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости в систему, не содержащую вязкости, т.е. в уравнения Эйлера.

Первый случай – математическая модель виртуальной идеальной жидкости,  $\mu = 0$

Второй случай – когда  $\mu \neq 0$ ,  $\operatorname{rot} \bar{V}_1 = 0$  (безвихревое потенциальное течение). В этом случае уравнение неразрывности превращается в уравнение Лапласа относительно потенциала  $\varphi$ . Необходимость в уравнениях движения отпадает. Поле скоростей находится как поле  $\nabla \varphi$ .

Третий возможный случай –  $\mu \neq 0$ ,  $\operatorname{rot} \bar{V}_2 \neq 0$ , но  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{V}_2 = 0$ .

Остановимся вначале подробнее на втором случае перехода от уравнений Навье–Стокса к уравнениям Эйлера, когда потенциальное поле  $\bar{V}_1$ , порождается вихревыми нитями. Такую математическую модель успешно использовал в своих классических трудах Н.Е. Жуковский. Он называл вихревые нити вихревыми шнурами. В совре-

менной терминологии [1] дается точное определение этого важного понятия. Приведем соответствующую цитату: “Ключевым объектом в теории завихренности жидкости является вихревая нить, которая в наиболее общем виде определяется как вихревая трубка, окруженная жидкостью с нулевой завихренностью. Если устремить сечение вихревой нити к нулю, сохраняя при этом постоянное значение циркуляции  $\Gamma$ , то получим распределение завихренности отличное от нуля только вдоль некоторой пространственной кривой. Такое распределение завихренности будем называть бесконечно тонкой вихревой нитью”.

В случае течения, создаваемого вихревыми нитями, поле скоростей  $\bar{V}_1$ , ими порожаемое, таково, что  $\bar{V}_1 = \operatorname{rot} \bar{A}$ . Здесь вектор  $\bar{A}$  является векторным потенциалом поля  $\bar{V}_1$ . Следует отметить, что циркуляционное течение, возбуждаемое вихревой нитью, происходит в соответствии с формулой Стокса, которая преобразует поток ротора, абстрактного вектора через поверхность  $S$ , опирающуюся на замкнутый контур  $L$ , в криволинейный интеграл по данному контуру.

В гидродинамике абстрактный вектор наделяется конкретным физическим смыслом и рассматривается как вектор скорости движущегося потока жидкости. При этом формула Стокса означает, что поток ротора скорости через поверхность  $S$  при пересечении ее с вихревой труб-

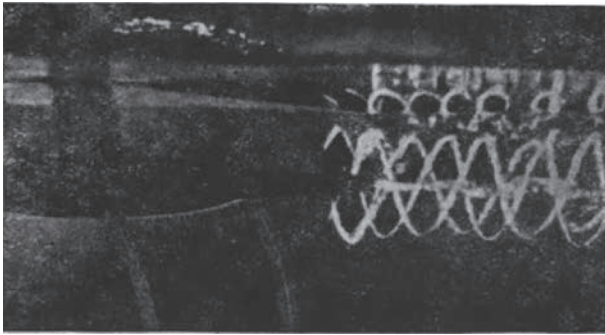


Рис. 1. Фотография Фламма.

кой (трубками) равен циркуляции скорости по контуру  $L$ :

$$\iint_S (\text{rot} \bar{V}_1 dS) = \oint_L (\bar{V}_1 d\bar{l}).$$

Циркуляцию  $\Gamma$  называют еще напряженностью вихревой трубки (нити). Подчеркнем, что  $\text{rot} \bar{V}_1 \neq 0$  только в точках, принадлежащих вихревой нити. Во всем остальном пространстве течение безвихревое, поле скоростей  $\bar{V}_1$  потенциальное.

Вихревые трубки можно непосредственно наблюдать. Так Н.Е. Жуковский приступил к созданию теории гребного винта [2], заинтересовавшись фотографиями Фламма (рис. 1).

При изучении работы перемешивающих устройств получены фотографии, на которых видны две круговые вихревые трубки (рис. 2).

Вихревые нити на рис. 1 Н.Е. Жуковский назвал свободными вихрями, являющимися продолжением вихрей присоединенных [3]. Дальнейшие исследования в этом направлении позволили Н.Е. Жуковскому найти формулы для вычисления подъемной силы и сопротивления крыла самолета, содержащие подлежащую определению величину циркуляции [4]. Найти ее удалось С.А. Чаплыгину [5]. Проверка формул Жуковского—Чаплыгина при испытаниях в аэродинамической трубе дала прекрасное совпадение теории с экспериментами. Оказалось, что опираясь на несодержащие вязкости уравнения Эйлера, можно получить расчетные формулы для вязкой несжимаемой жидкости. Внесение циркуляции  $\Gamma$  в потенциальный поток компенсировало пренебрежение вязкостью. Заметим также, что циркуляция скорости имеет размерность кинематической вязкости. Переход к уравнениям Эйлера оказался в данном случае настолько плодотворен, что привел к созданию целого нового направления науки — аэродинамики.

Рассмотрим теперь третий возможный случай превращения уравнений вязкой несжимаемой жидкости в уравнения Эйлера, когда  $\mu \neq 0$ ,  $\text{rot} \bar{V}_2 \neq 0$ , но  $\mu \text{rot} \text{rot} \bar{V}_2 = 0$ .

В этом случае единственное слагаемое в уравнениях движения, содержащее вязкость, исчезает.

Обозначим

$$\text{rot} \bar{V}_2 = \bar{\omega}. \quad (1)$$

Данная формула означает, что  $\bar{V}_2$  является векторным потенциалом поля  $\bar{\omega}$ .

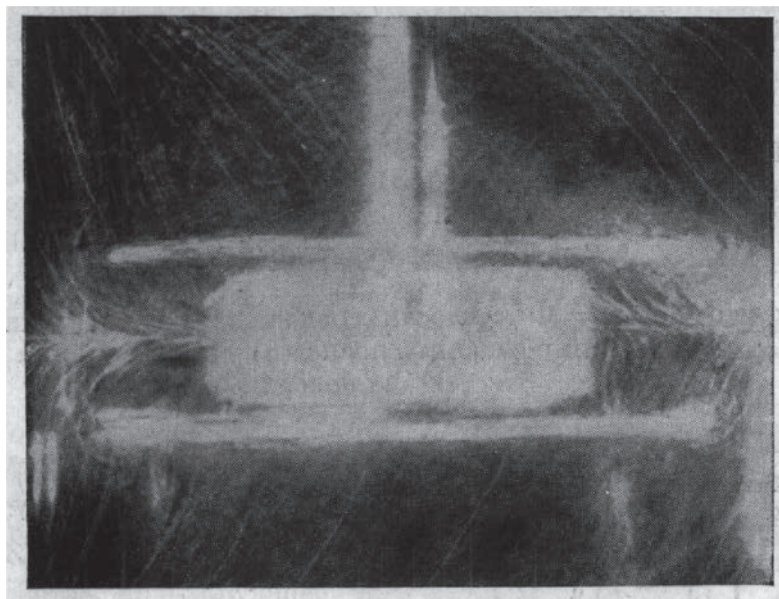


Рис. 2.

Формула Стокса применима к вектору  $\bar{\omega}$ :

$$\iint_S (\text{rot } \bar{\omega} ds) = \oint_L (\bar{\omega} dl) \quad (2)$$

т.е.

$$\iint_S (\text{rot rot } \bar{V}_2 ds) = \oint_L (\text{rot } \bar{V}_2 dl).$$

Следовательно, поток вектора  $\text{rot } \bar{\omega}$  через поверхность  $S$  равен циркуляции  $\bar{\omega}$  по контуру  $L$ . Внутри вихревой трубки, из которой получена вихревая нить  $\text{rot rot } \bar{V}_2 \neq 0$  а всюду за ее пределами  $\text{rot rot } \bar{V}_2 = 0$ . Значит, во всем остальном пространстве уравнения движения не содержат вязкости ( $\mu \text{rot rot } \bar{V}_2 = 0$ ). Следовательно, это уравнения Эйлера. Кроме того, за пределами вихревой нити циркулирует вектор  $\bar{\omega} = \text{rot } \bar{V}_2 \neq 0$ .

Это означает, что поле  $\bar{V}_2$  вихревое в отличие от потенциального поля  $\bar{V}_1$ . Частицы жидкости только вращаются. В поле  $\bar{V}_1$  частицы жидкости перемещаются вдоль линий тока, но не вращаются.

При суперпозиции полей  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$ ,  $\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$ , движение частиц превращается в винтовое. Это становится возможным, когда внутри вихревой трубки, порождающей движение, присутствуют одновременно два потока  $\text{rot } \bar{V}_1$  и  $\text{rot rot } \bar{V}_2$ .

Если применить такой способ суперпозиции для вихревой круговой нити

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

С циркуляцией  $\Gamma = \oint_L (\bar{V}_1 dl)$  в поле  $\bar{V}_1$  и циркуляцией  $\Gamma_\omega = \oint_L (\bar{\omega} dl)$  в поле  $\bar{\omega} = \text{rot } \bar{V}_2$  [10], то удастся получить неожиданные результаты. Поскольку векторный потенциал  $\bar{A} = \{0, A_\phi, 0\}$  в поле  $\bar{V}_1$  имеет лишь одну ненулевую окружную составляющую в цилиндрической системе координат [8], то и вектор скорости  $\bar{V}_2$ , являющийся векторным потенциалом в поле  $\bar{\omega} = \text{rot } \bar{V}_2$ , имеет лишь одну окружную составляющую скорости, отличающуюся от нуля,  $\bar{V}_2 = \{0, V_{2\phi}, 0\}$ .

Это означает, что найдена неизвестная до сих пор окружная скорость, порождаемая круговой вихревой нитью, и отличается она от  $A_\phi$  только множителем  $\Gamma_\omega$  вместо  $\Gamma$ :

$$V_\phi = \frac{a\Gamma_\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{z^2 + a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \alpha}}. \quad (3)$$

Отсутствие теоретических результатов в этой области приводило к тому, что в инженерной практике использовали приближенную модель вихря Рэнкина [6], в которой вовсе не учитывалась радиальная и вертикальная составляющие скорости  $\bar{V}_1$ . Считали, что эти составляющие много меньше окружной, хотя это не подтверждалось экспериментами.

Модель круговых вихревых нитей не плод фантазии, они реально наблюдаются, например, при работе лопастной мешалки [7] и четко видны на рис. (2), и формулы для  $V_{1\rho}$  и  $V_{1z}$  хорошо известны [8]:

$$V_{1\rho} = \frac{\partial A_\phi}{\partial z}, \quad V_{1z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho}. \quad (4)$$

Игнорирование вертикального перемешивания, отказ от его учета, приводит к ошибочным выводам. Так в известном парадоксе Эйнштейна считается необъяснимым тот факт, что чайники собираются в центре на дне стакана с чаем вопреки действию центробежной силы. Однако, если учесть наличие  $V_{1\rho}$  и  $V_{1z}$ , то парадокс можно объяснить.

Чайники собираются в центре на дне стакана в конце процесса перемешивания, когда воронка на поверхности начинает убывать (*глубина воронки на поверхности жидкости начинает уменьшаться*), стремясь к исходному *равновесному* состоянию горизонтальной плоскости. Частицы жидкости при этом поднимаются из глубины воронки и опускаются вблизи стенки стакана, как это изображено на Рис.3. Возникает циркуляция, обеспечивающая движение чаинок от **периферии к центру вблизи дна стакана**.

Суперпозиция полей  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$  позволяет решать трехмерные задачи, и избегать ошибочных выводов, а также объясняет то, что раньше объяснить не удавалось. Так, в 1967 г. была опубликована статья [9], в которой описано как с помощью вибрации возбуждалась система вихрей, расположенных в шахматном порядке с чередованием направления вращения (рис. 4).

Не удавалось понять, почему колебания в вертикальном направлении вызывают вращение. Теперь можно понять, почему так происходит. Каждый вихрь был виден благодаря воронке с приподнятыми краями, напоминающий пару тороидального и осевого вихря, описанных в статье [10].

Там же представлен график, показывающий, как меняется  $\omega_z$  в зависимости от расстояния от оси, проходящей через воронку. Из представленного там рисунка, видно, что  $\omega_z$  меняется скачкообразно, резко возрастающая в малой окрестности от оси  $OZ$ . Подобное явление можно отчетливо на-

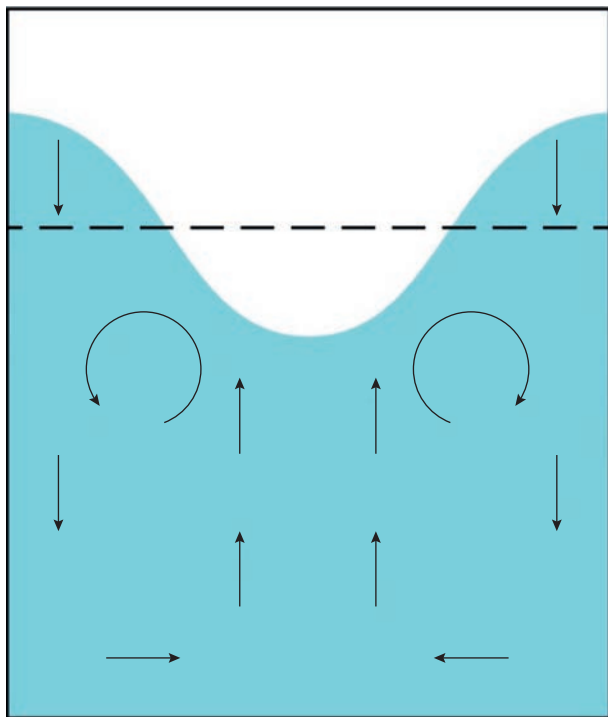


Рис. 3.

блюдают в экспериментах с псевдооживленными сыпучими телами. Видно также, что все твердые частицы вращаются. Это доказывает, что движение их винтовое, как и должно быть при суперпозиции полей  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$ .

Из вышеизложенного следует, что третий случай превращения уравнений вязкой несжимаемой жидкости в уравнения Эйлера весьма перспективен для исследований в химической технологии. С помощью этой модели можно определить, например, окружную составляющую скорости в сферическом сосуде с мешалкой.

С этой целью рассмотрим сперва виртуальную сферу в неограниченном жидком пространстве с радиусом  $R$  и центром в начале координат. Поместим одну круговую вихревую нить радиуса  $a$  и напряженности  $\Gamma_a$  внутри сферы, а другую радиуса  $b$  и напряженности  $\Gamma_b$  вне сферы таким образом, чтобы вторая нить была зеркальным отображением первой относительно воображаемой сферы. Тогда  $R^2 = R_a R_b$ , где  $R_a = M_a O$  и  $R_b = M_b O$ , как изображено на рис. 5а. Здесь точки  $M_a$  и  $M_b$  лежат на одной образующей конуса с вершиной в начале координат.

Значение окружной составляющей  $A_\phi$  векторного потенциала  $\bar{A} = \{0, A_\phi, 0\}$  в произвольной точке  $M$  виртуальной сферы согласно [8] равно:

$$A_\phi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{a\Gamma_a}{M_a M} - \frac{b\Gamma_b}{M_b M} \right) \cos \phi d\phi, \quad (5)$$

где  $\Gamma_a$  и  $\Gamma_b$  циркуляции нитей  $a$  и  $b$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_a M} &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + R_a^2 - 2RR_a \cos \theta}} = \\ &= \frac{1}{R \sqrt{1 + \left(\frac{R_a}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{R_a}{R}\right) \cos \theta}}; \end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{M_b M} = \frac{1}{R \sqrt{1 + \left(\frac{R_b}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{R_b}{R}\right) \cos \theta}}.$$

Здесь  $\left[1 + \left(\frac{R_a}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{R_a}{R}\right) \cos \theta\right]^{-1/2}$  и  $\left[1 + \left(\frac{R_b}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{R_b}{R}\right) \cos \theta\right]^{-1/2}$  являются производящими функциями полиномов Лежандра [11]. Следовательно, формуле (5) можно придать вид:

$$A_\phi = \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[ a\Gamma_a \left(\frac{R_a}{R}\right)^n - b\Gamma_b \left(\frac{R_b}{R}\right)^{n+1} \right] \times P_n(\cos \theta_1) \cos \phi d\phi. \quad (6)$$

Очевидно,  $A_\phi = 0$ , когда  $a\Gamma_a \left(\frac{R_a}{R}\right)^n = b\Gamma_b \left(\frac{R_b}{R}\right)^{n+1}$  при любых целых  $n$ .

Учитывая, что  $\frac{a}{b} = \frac{R_a}{R_b}$  и  $R = \sqrt{R_a R_b}$  получим:

$$\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} = \sqrt{\frac{R_b}{R_a}} = \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (7)$$

независимо от  $n$ .

Уравнение  $2\pi rA = \text{const}$  согласно [8] определяет поверхность тока, непроницаемую для жидких частиц. Следовательно, условия (7) означают, что сфера радиуса  $R$ , является такой поверхностью. Таким образом, мы можем теперь рассматривать ее как реальную (а не виртуальную) стенку сферического сосуда с круговой вихревой нитью радиуса  $a$  внутри нее.

Если теперь зеркально отобразить часть этой картины при  $Z > 0$  относительно плоскости  $Z = 0$ , мы снова приходим к выводу, что  $\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b} = \sqrt{\frac{R_b}{R_a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ . В этом случае вихревые нити  $a$  и  $b$  будут находиться в области  $Z < 0$ .

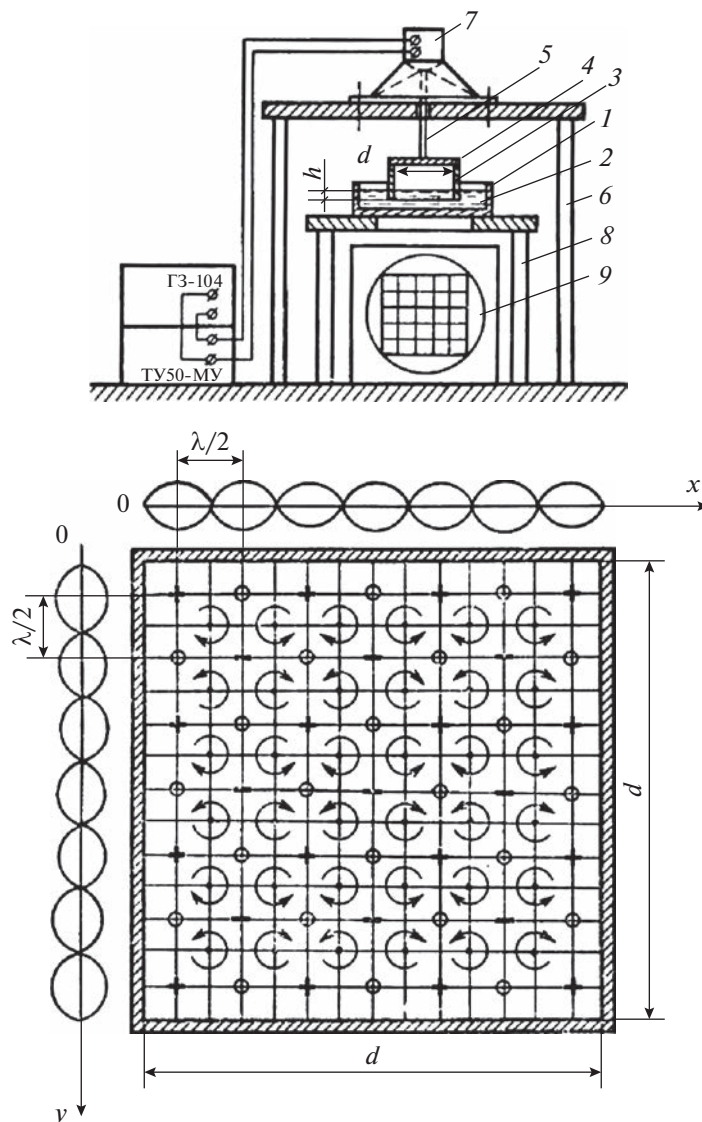


Рис. 4.

Суммарная окружная составляющая векторного потенциала  $\bar{A} = \{0, A_\varphi, 0\}$  поля  $\bar{V}_1$  в точке  $M$ , генерируемая от четырех вихревых нитей, изображаемых на рис. 5б, записывается в виде:

$$A_\varphi(M) = \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ a\Gamma_a \left( \frac{R_a}{R} \right)^n - b\Gamma_b \left( \frac{R}{R_b} \right)^{n+1} \right] \times \right. \\ \times P_n(\cos \theta_1) \cos \varphi d\varphi - \\ \left. - \left[ a\Gamma_a \left( \frac{R_a}{R} \right)^n - b\Gamma_b \left( \frac{R}{R_b} \right)^{n+1} \right] \times \right. \\ \left. \times P_n(\cos \theta_2) \cos \varphi d\varphi \right\} \quad (8)$$

Здесь точка  $M$  находится внутри сферы радиуса  $OM = R < \sqrt{R_a R_b}$ .

Формула (8) позволяет найти окружную составляющую поля  $\bar{V}_2 = \{0, V_{2\varphi}, 0\}$  просто заменяя циркуляции  $\Gamma_a$  и  $\Gamma_b$  на  $\Gamma_{\omega a}$  и  $\Gamma_{\omega b}$ :

$$V_{2\varphi}(M) = \frac{1}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ a\Gamma_{\omega a} \left( \frac{R_a}{R} \right)^n - b\Gamma_{\omega b} \left( \frac{R}{R_b} \right)^{n+1} \right] \times \right. \\ \times P_n(\cos \theta_1) \cos \varphi d\varphi - \\ \left. - \left[ a\Gamma_{\omega a} \left( \frac{R_a}{R} \right)^n - b\Gamma_{\omega b} \left( \frac{R}{R_b} \right)^{n+1} \right] \times \right. \\ \left. \times P_n(\cos \theta_2) \cos \varphi d\varphi \right\} \quad (9)$$

Суперпозиция полей  $\bar{V}_1 + \bar{V}_2$  решает трехмерную задачу для течения в сферическом сосуде с мешалкой. Возможности третьего способа пере-



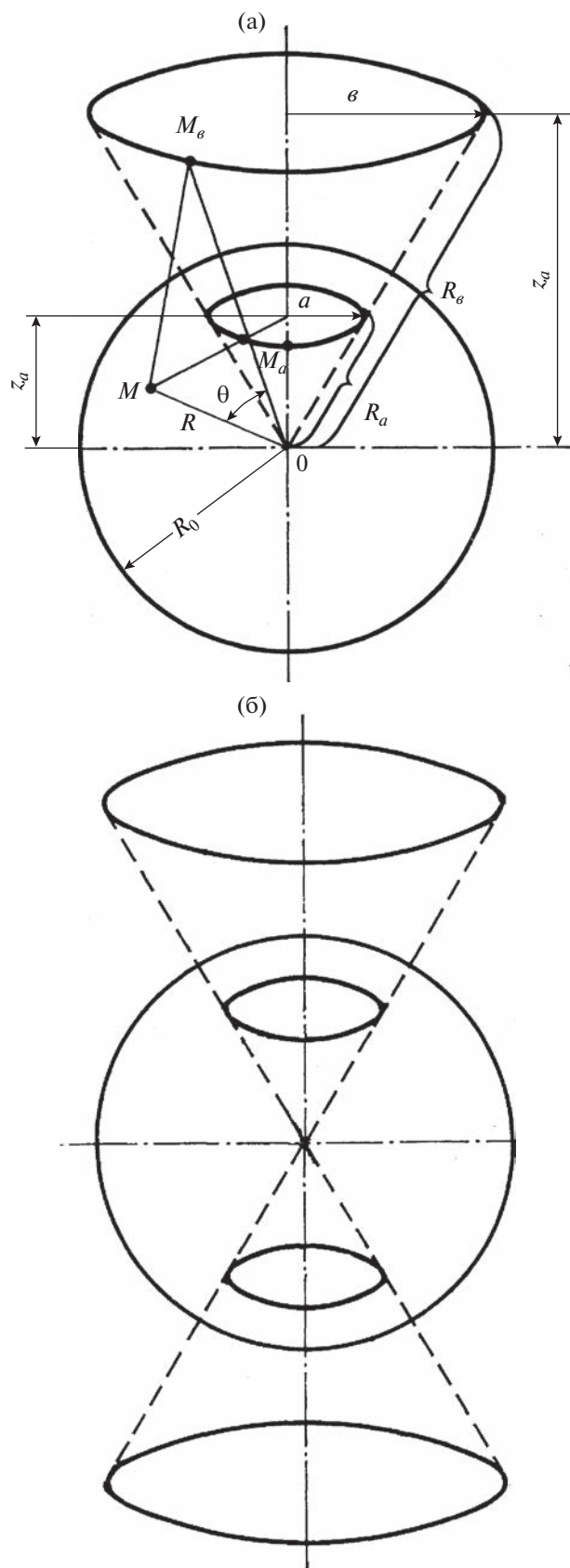


Рис. 5. (а) Схема расположения круговых вихревых нитей относительно сферы. Рис. 5б.

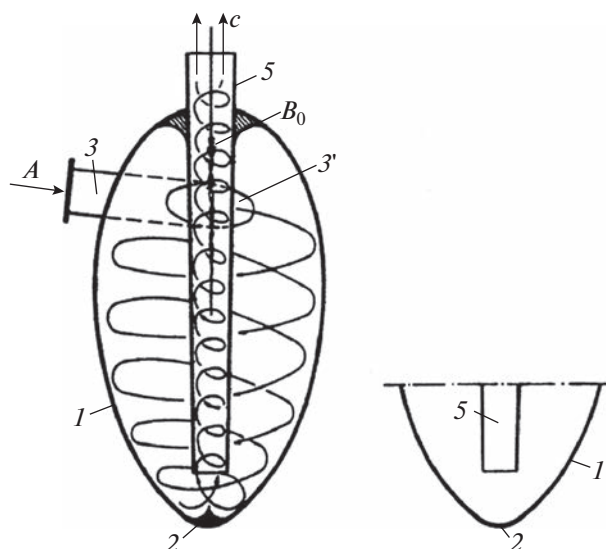


Рис. 6. Реакционная камера (1) имеет яйцевидную или грушевидную форму на большей части своей длины и на ней – предпочтительно у тупого полюса один или несколько вставные патрубки (3) для обрабатываемой среды (А) присоединены тангенциально. на тупом полюсе реакционной камеры (1) установлен патрубков (5) вставляется с аксиальной потайной головкой, которая предпочтительно сужается внутрь, через которую продукт реакции (С) выбрасывается вращательным движением, в то время как соответствующая реакция одновременно продолжается, и вторичный воздух ( $B_0$ ) предпочтительно вводится в противоположном направлении в в результате образовался центральный всасывающий вихрь.

хода от уравнений движения несжимаемой вязкой жидкости к уравнениям Эйлера, полезны не только при исследовании работы перемешивающих устройств, но и вихревых аппаратов.

В качестве примера можно предложить фрагмент из патента Schauberg Biotechnik AG DE1442734.

Достаточно взглянуть на рисунок, как обнаруживается комбинация из осевого и тороидального вихрей, рассмотренных в статье [10].

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

|                      |                                             |
|----------------------|---------------------------------------------|
| $\vec{v}$            | вектор скорости                             |
| $\rho, \varphi, z$   | цилиндрические координаты                   |
| $\vec{A}$            | векторный потенциал                         |
| $A_\varphi$          | окружная составляющая векторного потенциала |
| $\Gamma$             | циркуляция скорости                         |
| $\Gamma_\omega$      | циркуляция ротора скорости                  |
| $a, b$               | радиусы круговых вихревых нитей             |
| $\Gamma_a, \Gamma_b$ | циркуляция круговых вихревых нитей          |

$\psi$  функция тока  
 $\mu$  коэффициент динамической вязкости

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев Г.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН. 2003 г.
2. *Жуковский Н. Е.* Вихревая теория гребного винта (статьи 1–4). ПОЛН. собр. СОЧ. Т. IV. ГРАЛ. 1937.
3. *Жуковский Н.Г.* Теоретические основы воздухоплавания. Собрание сочинений. Т. VI. 1948 г.
4. *Чаплыгин С.А.* К общей теории крыла моноплана. Собрание сочинений. Т. II. 1948 г.
5. Гзовский Степан Яковлевич. Исследование процесса перемешивания в жидких средах радиально-лопастными мешалками : диссертация ... доктора технических наук: 05.00.00 / С.Я. Гзовский. Москва, 1963. 216 с.: ил.
6. *Соловьев А.В., Туманов Ю.В., Муслаев И.М.* О радиальной и осевой составляющих поля скоростей жидкости в сферическом сосуде с мешалкой. ТОХТ. 1967. Т. I. № 2.
7. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе И.В.* Теоретическая гидродинамика. Гостехиздат. М., 1955 г.
8. *Кардашев Г.А., Салосин А.В., Манукян С.Г., Соловьев А.В.* О возбуждении вихревых течений колебаниями поверхности жидкости // Коллоидный журн. АН СССР. 1987. Т. XLIX. Вып. 1. С. 154–157.
9. *Соловьев А.В., Казенин Д.А., Карлов С.П., Шкарин Н.Ю.* О влиянии вихрей на диффузию и теплопередачу. ТОХТ. Т. 46. № 5. С. 576–582.
10. *Тихонов А.И., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М. 1953, Главииздат СССР, с. 324.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М. Издательство “Наука”, 1970 г. с. 661.