

Том 69, Номер 10

ISSN 0033-8494

Октябрь 2024



РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 69, номер 10, 2024

К 85-ЛЕТИЮ В.Ф. КРАВЧЕНКО

Повышение точности восстановления qam-символов при применении метода ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией

К. А. Будунова, В. Ф. Кравченко

935

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Широкополосный поглотитель электромагнитного излучения

В. А. Богуш, В. А. Лабунов, А. В. Гусинский, В. А. Карпович, В. Н. Родионова, Н. А. Певнева, М. М. Касперович, И. А. Кашко

947

АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Двухполяризационный сверхширокополосный металлодиэлектрический рупорный облучатель

В. А. Калошин, Нгуен Тхе Тхань

954

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Метод синтеза эффективных оценок параметров сигналов с использованием функций от полных достаточных статистик

А. Г. Вострецов, С. Г. Филатова

960

Исследование и реконструкция кусочно-стертых процессов

В. В. Климов

967

РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

Возбуждение электромагнитных волн при ударном воздействии света на магнитную пленку

В. С. Власов, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов

973

ЭЛЕКТРОНИКА СВЧ

Замедляющие системы со свойствами метаматериалов для ламп бегущей волны w -диапазона

А. А. Ростунцова, Е. Е. Колесниченко, Н. М. Рыскин

982

НАНОЭЛЕКТРОНИКА

Сравнительный анализ магнитных и электронных свойств 2d фаз теллуридов хрома

А. И. Карцев, А. А. Сафронов

989

О допированных железом алмазоподобных пленках, полученных в разряде с полым катодом

И. А. Сорокин, Д. В. Колодко

996

Получение сегнетоэлектрических пленок оксида гафния методом магнетронного распыления

В. А. Лузанов

1000

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

Точные решения уравнений двумерного нестационарного электронного пучка

Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой

1004

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

Особенности решения феноменологических уравнений Блоха для определения времени продольной релаксации T_1 в потоке жидкости

В. В. Давыдов, А. А. Гольдберг, В. И. Дудкин, Р. В. Давыдов

1020

ХРОНИКА

Памяти Андрея Федоровича Александрова

1031

Памяти Владимира Григорьевича Шаврова

1033

Памяти Александра Степановича Бугаева

1035

УДК 621.396.41

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ QAM-СИМВОЛОВ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ОРТОГОНАЛЬНОГО ЧАСТОТНОГО МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЯ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ

© 2024 г. К. А. Будунова^{а,*}, В. Ф. Кравченко^{а,б,с,**}

^аИнститут радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

^бМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, 105005 Российская Федерация

^сНаучно-технологический центр уникального приборостроения РАН,
ул. Бутлерова, 15, Москва, 117342 Российская Федерация

E-mail: *1917schw@mail.ru, ** kvf-ok@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2024 г.

После доработки 07.09.2024 г.

Принята к публикации 15.09.2024 г.

Проанализирован метод ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией, применяющийся для передачи сигналов, спектры которых расположены в соседних субполосах частот. Описано три вида погрешностей, образующихся при применении метода для передачи символов квадратурной амплитудной модуляции. С целью снижения погрешности разработан модифицированный алгоритм, основанный на свойствах циклической свертки. В численном эксперименте стандартный и модифицированный алгоритмы использованы в сочетании со схемами модуляции высокого порядка.

Ключевые слова: метод OFDM с фильтрацией, QAM модуляция, беспроводная связь

DOI: 10.31857/S0033849424100017, **EDN:** HQSZFK

ВВЕДЕНИЕ

Технология цифровой модуляции, основанная на мультиплексировании с ортогональным частотным разделением каналов [1,2] (orthogonal frequency division multiplexing, OFDM) широко используется для беспроводной передачи данных. Преимущества схемы OFDM заключаются в устойчивости к искажениям в канале, а также в ее гибкости — возможности менять параметры модуляции, например, размер сигнального созвездия и скорость кодирования [1]. Технология OFDM и ее сочетание с методами множественного доступа (orthogonal frequency-division multiple access, OFDMA) применяются в современных стандартах беспроводной связи IEEE 802.11 (Wi-Fi), IEEE 802.16 (WiMAX), LTE.

Сигналы OFDM имеют медленно спадающий спектр [1]. Из-за этого возникает внеполосное излучение, влияющее на сигналы, спектры которых

расположены в соседних частотных полосах [3–7]. Медленный спад спектра может отрицательно влиять на восстановление данных, передающихся по схеме OFDMA [6], в которой имеющийся диапазон частот разделяется на субполосы, соответствующие различным пользователям. Внеполосное излучение также плохо сказывается на работе когнитивных и программно-определяемых радиосистем [7], где соседние полосы частот используются различными радиосредствами.

Для подавления внеполосного излучения спектра OFDM-сигнала в классической схеме используется оконная обработка [1,8]. Разработаны и другие методы улучшения спектра: схема OFDM с фильтрацией [5–7] и предварительное кодирование [4].

Цель данной работы — исследовать возможность повышения эффективности алгоритма фильтрации OFDM-сигналов.

Алгоритм OFDM с фильтрацией применяется в случае, когда имеющаяся полоса частот разделена на несколько субполос, для каждой из которых формируется свой сигнал. Сигнал, соответствующий субполосе, подвергается фильтрации, что позволяет снизить его излучение вне данной субполосы. При использовании классической схемы OFDM для снижения взаимодействия между соседними спектрами сигналов выделяется набор нулевых защитных поднесущих частот, что приводит к снижению эффективности использования имеющегося частотного диапазона. Технология OFDM с фильтрацией может быть использована при существенно меньшем количестве защитных частот по сравнению с классической схемой [5].

Благодаря низкой сложности расчета в схеме OFDM с фильтрацией наиболее часто применяются цифровые фильтры, полученные усечением идеальной импульсной характеристики (ИХ) весовой оконной функцией [5–7].

1. МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОГО ЧАСТОТНОГО МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЯ

Низкочастотное комплексное представление OFDM-символа имеет вид [1]

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1} d_k \exp(2\pi j k (t - t_s) / T), & t \in [t_s, t_s + T], \\ 0, & t \notin [t_s, t_s + T], \end{cases} \quad (1)$$

где t_s — время начала символа, T — его длительность, d_0, \dots, d_{N-1} — символы квадратурной амплитудной модуляции (quadrature amplitude modulation, QAM). Данная формула соответствует OFDM-сигналу с набором поднесущих частот

$$f_c - (k + 1/2) / T, k = -N/2, \dots, N/2 - 1,$$

расположенных симметрично вокруг несущей частоты f_c . Сигнал $S(t)$ на отрезке $t \in [t_s, t_s + T]$ полностью описывается конечным числом своих отсчетов в моменты времени $t - t_s = Tl / N_1$, $l = 0, \dots, N_1 - 1$, $N_1 \geq N$, поэтому OFDM-символу (1) эквивалентен дискретный сигнал s_l , равный

$$s_l = \frac{1}{N_1} \sum_{k=0}^{N_1-1} d_k \exp(2\pi j l k / N_1), \quad 0 \leq l \leq N_1 - 1. \quad (2)$$

Для чисел $N_1 > N$ дискретизация сигнала $S(t)$ имеет запас по частоте. Избыточная дискретизация требуется для реконструкции сигнала $S(t)$ в цифро-аналоговом преобразователе [1]. Формула (2) представляет собой обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) размера N_1 последова-

тельности QAM-символов, дополненной $N_1 - N$ нулями.

Числа d_k можно восстановить, вычисляя дискретное преобразование Фурье (ДПФ) последовательности s_l :

$$d_k = \sum_{l=0}^{N_1-1} s_l \exp(-2\pi j k l / N_1), \quad k = 0, \dots, N_1 - 1. \quad (3)$$

Сигнал OFDM состоит из набора символов $S(t)$. При прохождении сигнала через канал отдельные поднесущие могут задерживаться. В этом случае возникает эффект, называемый интерференцией между поднесущими [1]. При наличии данного эффекта QAM-символы не могут быть восстановлены в форме ДПФ (3). Для устранения интерференции между поднесущими к каждому OFDM-символу вида (2) слева добавляется циклический префикс (ЦП) — набор из n последних отсчетов символа. Сигнал u_l , состоящий из одного OFDM-символа и ЦП, имеет вид

$$u_l = \begin{cases} s_{N_1-n+l}, & 0 \leq l \leq n-1, \\ s_{l-n}, & n \leq l \leq N_1+n-1. \end{cases}$$

2. МЕТОД OFDM С ФИЛЬТРАЦИЕЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ АСИНХРОННОЙ ПЕРЕДАЧЕ ДАННЫХ

При применении метода OFDM с фильтрацией в частотной области выделяется P субполос

$$[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}], \quad p = 1, \dots, P.$$

Каждой субполосе $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ соответствует свой OFDM-сигнал $x_l^{(p)}$, образованный отсчетами K OFDM-символов $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ длиной N с ЦП $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=0}^{n-1}$ длиной n , $q = 1, \dots, K$:

$$x_l^{(p)} = \sum_{q=1}^K u_{l-l_q}^{(p,q)}, \quad (4)$$

где $l_q = (q-1)(N+n)$. В сумме (4) отсчеты $u_l^{(p,q)}$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} u_l^{(p,q)} &= 0, \quad l < 0, \\ u_l^{(p,q)} &= 0, \quad l \geq n + N. \end{aligned}$$

На отрезках $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ расположены центры спектров поднесущих, образующих сигнал $x_l^{(p)}$, а интервалы вида $(\omega_{p,2}, \omega_{p+1,1})$ содержат защитные частоты.

Символы $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ — ОДПФ последовательности $\{d_k^{(p,q)}\}_{k=0}^{N-1}$.

$$u_{n+l}^{(p,q)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} d_k^{(p,q)} \exp(j2\pi kl / N), \quad l = 0, \dots, N-1,$$

где числа $d_k^{(p,q)}, k = 0, \dots, N-1$, — символы QAM-модуляции при $2\pi k / N \in [\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ или нулевые коэффициенты $d_k^{(p,q)} = 0$, если $2\pi k / N \notin [\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$.

Блок-схема метода OFDM с фильтрацией для асинхронной передачи данных [6] показана на рис. 1.

После формирования последовательностей $x_l^{(p)}$ в передатчиках выполняется свертка каждого из сигналов $x_l^{(p)}$ с субполосным фильтром $h_l^{(p)}$:

$$y_l^{(p)} = h_l^{(p)} * x_l^{(p)}, \quad p = 1, \dots, P.$$

Фильтры $h_l^{(p)}$ имеют амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) $|H_p(\exp(j\omega))|$, полоса пропускания которых включает в себя отрезок $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$. При $\omega \in [0, 2\pi]$ в общем случае у АЧХ $|H_p(\exp(j\omega))|$ должно быть две полосы подавления, одна из которых содержит отрезок $[0, \omega_{p-1,2}]$, а вторая — отрезок $[\omega_{p+1,1}, 2\pi]$. В случае конечной ИХ (КИХ) и физической реализуемости фильтра [9] коэффициенты $h_l^{(p)}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$h_l^{(p)} = 0, \quad l < 0,$$

$$h_l^{(p)} = 0, \quad l \geq 2L + 1,$$

где $2L + 1$ — длина фильтра.

Сигналы $y_l^{(p)}$ передаются в различное время, причем допускается запаздывание $y_l^{(p)}$, превыша-

ющее длительность защитного интервала [6]. На вход приемника поступает сигнал r_l :

$$r_l = \sum_{p=1}^P \tilde{h}_l^{(p)} * \tilde{y}_l^{(p)} + z_l,$$

где $\tilde{h}_l^{(p)}$ — ИХ канала между p -м передатчиком и приемником, z_l — аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ), $\tilde{y}_l^{(p)} = y_{l-v_p}^{(p)}$ — сигнал на выходе p -го передатчика с учетом задержки на v_p отсчетов.

Полученный сигнал r_l подается на вход субполосных фильтров $f_l^{(p)}$:

$$r_l^{(p)} = f_l^{(p)} * r_l, \quad p = 1, \dots, P.$$

Коэффициенты ИХ фильтров $f_l^{(p)}$ определяются формулой

$$f_l^{(p)} = \begin{cases} 0, & l < 0, \\ \overline{h_{2L-l}^{(p)}}, & 0 \leq l \leq 2L, \\ 0, & l > 2L. \end{cases}$$

Для произведения частотных характеристик $H_p(\exp(j\omega)), F_p(\exp(j\omega))$ фильтров $h_l^{(p)}, f_l^{(p)}$ выполняется равенство

$$H_p(\exp(j\omega))F_p(\exp(j\omega)) = \exp(-j2L\omega) |H_p(\exp(j\omega))|^2. \quad (5)$$

После фильтрации для каждой из последовательностей $r_l^{(p)}$ проводится временная синхронизация с p -м передатчиком [6]. Восстановление сим-

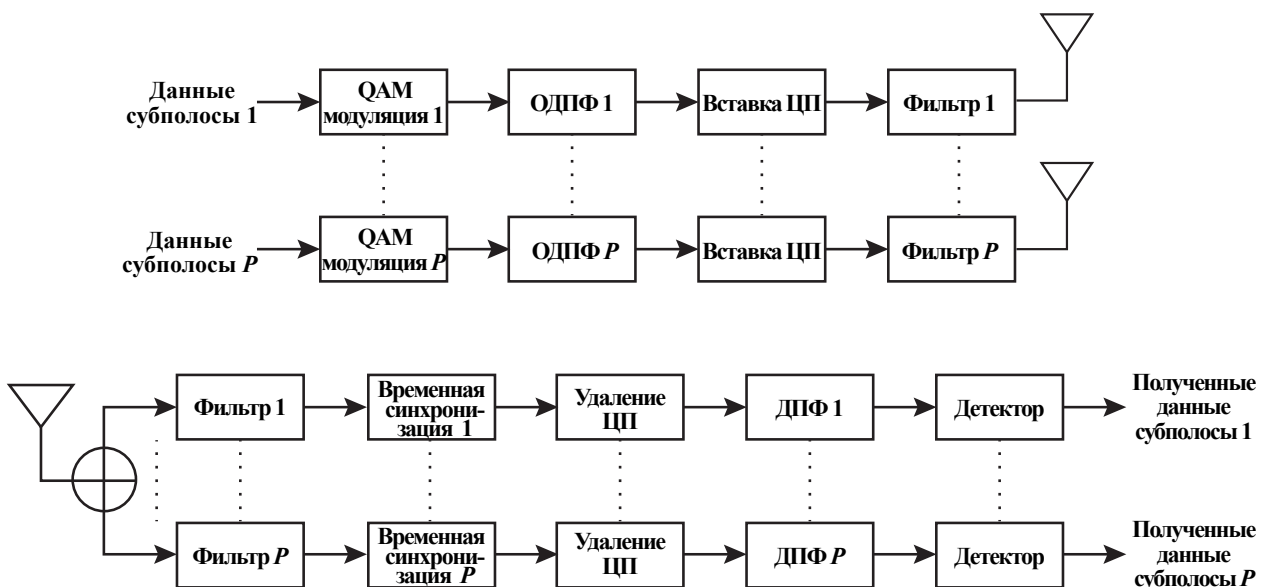


Рис. 1. Блок-схема метода OFDM с фильтрацией.

волов QAM-модуляции $d_k^{(p,q)}$ для чисел $p = 1, \dots, P$, $q = 1, \dots, K$ при $2\pi k / N \in [\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ осуществляется по формуле

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = \sum_{l=0}^{N-1} r_{l+D_{p,q}}^{(p,q)} \exp(-2\pi jkl / N),$$

где $D_{p,q} = 2L + v_p + n + (q - 1)(N + n)$.

3. ПОГРЕШНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА OFDM С ФИЛЬТРАЦИЕЙ

При использовании метода OFDM с фильтрацией даже при условии отсутствия помех во время передачи сигналов по каналу QAM-символы в приемнике восстанавливаются с ошибкой. Погрешность, вносимая методом, образуется из нескольких составляющих, которые рассматриваются ниже.

3.1. Погрешность, вызываемая фильтрацией OFDM-символа с циклическим префиксом и усечением полученной последовательности

Для фиксированных чисел p и q положим

$$c_l = \begin{cases} u_l^{(p,q)}, & l = 0, \dots, n-1, \\ 0, & l \geq n, \end{cases}$$

$$s_l = \begin{cases} u_{n+l}^{(p,q)}, & l = 0, \dots, N-1, \\ 0, & l \geq N, \end{cases}$$

где $u_0^{(p,q)}, \dots, u_{n-1}^{(p,q)}$ — отсчеты префикса, $u_n^{(p,q)}, \dots, u_{n+N-1}^{(p,q)}$ — отсчеты OFDM-символа, n и N — длина ЦП и символа соответственно. Здесь и далее последовательности считаются физически реализуемыми, т.е. для любой последовательности x_l предполагается $x_l = 0$ при $l < 0$.

Рассмотрим последовательность

$$u_l = c_l + s_{l-n}, \tag{6}$$

образованную отсчетами одного OFDM-символа с ЦП:

$$\{u_l\}_{l=0}^{N+n-1} = \{c_0, \dots, c_{n-1}, s_0, \dots, s_{N-1}\}.$$

Фильтрация сигнала (6) в передатчике с применением фильтра $h_l^{(p)}$, а затем в приемнике с использованием фильтра $f_l^{(p)}$ эквивалентна линейной свертке w_l последовательности (6) с фильтром, имеющим ИХ $g_l = h_l^{(p)} * f_l^{(p)}$:

$$w_l = g_l * u_l.$$

Если длина ИХ $h_l^{(p)}$ равна $2L + 1$, то ИХ g_l будет состоять из $4L + 1$ отсчетов и задержка сигнала из-за фильтрации составит $2L$ отсчетов. Запишем w_l в виде суммы

$$w_l = \tilde{c}_l + \tilde{s}_{l-n}, \tag{7}$$

где

$$\tilde{c}_l = g_l * c_l, \tilde{s}_l = g_l * s_l.$$

Символ $d_k^{(p,q)}$ QAM-модуляции, соответствующий поднесущей с номером k , $0 \leq k \leq N - 1$, можно найти, вычисляя значение спектра $S(\exp(j\omega))$ сигнала $\{s_l\}_{l=0}^{N-1}$

$$S(\exp(j\omega)) = \sum_{l=0}^{N-1} s_l \exp(-j\omega l)$$

в точке $\omega = 2\pi k / N$.

Фильтр g_l имеет частотную характеристику $G(\exp(j\omega))$, равную, в соответствии с (5),

$$G(\exp(j\omega)) = H_p(\exp(j\omega))F_p(\exp(j\omega)) = \exp(-2j\omega L) |H_p(\exp(j\omega))|^2.$$

Если $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ — полоса пропускания $|H_p(\exp(j\omega))|$ и

$$\gamma_p(\omega) = |H_p(\exp(j\omega))| - 1$$

— неравномерность АЧХ в полосе $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$, то в точке $\omega = 2\pi k / N$ при условии $\omega_{p,1} \leq 2\pi k / N \leq \omega_{p,2}$ характеристика $G(\exp(j\omega))$ удовлетворяет равенству

$$\exp(4j\pi kL / N)G(\exp(2\pi k j / N)) = 1 + \delta_k^{(p)}, \tag{8}$$

где

$$\delta_k^{(p)} = 2\gamma_p(2\pi k / N) + \gamma_p^2(2\pi k / N).$$

Поэтому для функции

$$\tilde{S}(\exp(j\omega)) = \sum_{l=-2L}^{N+2L-1} \tilde{s}_{l+2L} \exp(-j\omega l)$$

справедливо выражение

$$\tilde{S}(\exp(j2\pi k / N)) = (1 + \delta_k^{(p)})S(\exp(j2\pi k / N)).$$

В сигнале w_l отсчеты состоят из сумм вида (7). Для восстановления QAM-символов $d_k^{(p,q)}$ используется формула

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = \sum_{l=0}^{N-1} w_{l+n+2L} \exp(-j2\pi kl / N).$$

Введем функцию

$$\tilde{W}(\exp(j\omega)) = \sum_{l=0}^{N-1} w_{l+n+2L} \exp(-j\omega l).$$

Число $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ можно записать в виде

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = \tilde{W}(\exp(j2\pi k / N)) - \tilde{S}(\exp(j2\pi k / N)) + (1 + \delta_k^{(p)})S(\exp(j2\pi k / N)). \quad (9)$$

Из (9) следует, что числа $d_k^{(p,q)}$ и $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ связаны

соотношением

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)})d_k^{(p,q)} + \varepsilon_{1,k}^{(p,q)}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,k}^{(p,q)} &= \tilde{W}(\exp(j2\pi k / N)) - \tilde{S}(\exp(j2\pi k / N)) = \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{c}_{l+n+2L} \exp(-j2\pi kl / N) - \\ &- \sum_{l=-2L}^{-1} \tilde{s}_{l+2L} \exp(-j2\pi kl / N) - \\ &- \sum_{l=N}^{N+2L-1} \tilde{s}_{l+2L} \exp(-j2\pi kl / N). \end{aligned}$$

Таким образом, при фильтрации одного OFDM-символа вместе с ЦП и усечении полученной последовательности возникает погрешность, имеющая следующие составляющие:

- 1) ошибка, возникающая из-за наложения на сигнал $\{\tilde{s}_l\}_{l=2L}^{2L+N-1}$ задержки от фильтрации префикса;
- 2) погрешность из-за отсечения от последовательности $\{\tilde{s}_l\}_{l=0}^{N+4L-1}$ первых $2L$ и последних $2L$ отсчетов;
- 3) ошибка, вызванная N отклонением фильтра в полосе пропускания.

Последняя ошибка для качественного фильтра может быть незначительной по сравнению с общей погрешностью. В этом случае теряется выгода от применения фильтров с малым отклонением в полосе пропускания.

3.2. Погрешность, вносимая соседними по времени сигналами

В результате фильтрации каждый OFDM-символ искажается задержкой от соседних по времени сигналов, попавшей в область, где вычисляется

ДПФ. Этот эффект для двух символов показан на рис. 2.

Для фиксированного числа p рассмотрим субполосный сигнал $x_l^{(p)}$ (4), состоящий из OFDM-символов $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=n}^{n+N-1}$ длиной N с ЦП $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=0}^{n-1}$ длиной n , $q = 1, \dots, K$. Обозначим

$$w_l^{(p,q)} = g_l * u_l^{(p,q)}, \quad q = 1, \dots, K,$$

где $g_l = h_l^{(p)} * f_l^{(p)}$, $u_l^{(p,q)} = 0$ при $l \geq n + N$.

После фильтрации сигнала $x_l^{(p)}$ с применением фильтра g_l в интервале ДПФ OFDM-символа с номером q , $1 \leq q \leq K$, будут располагаться отсчеты, заданные суммами

$$w_{l+n+N}^{(p,q-1)} + w_l^{(p,q)} + w_{l-n-N}^{(p,q+1)}, \quad (11)$$

$$l = n + 2L, \dots, n + 2L + N - 1.$$

В формуле (11) $w_l^{(p,q)} = 0$ для $q = -1$ и $q = K + 1$.

Для восстановления символа QAM-модуляции $d_k^{(p,q)}$, соответствующего поднесущей с номером k , $0 \leq k \leq N - 1$, используется выражение

$$\begin{aligned} \tilde{d}_k^{(p,q)} &= \sum_{l=2L+n}^{2L+n+N-1} (w_{l+N+n}^{(p,q-1)} + w_l^{(p,q)} + \\ &+ w_{l-N-n}^{(p,q+1)}) \exp(-2\pi jk(l - 2L - n) / N). \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,k}^{(p,q)} &= \sum_{l=2L+n}^{2L+n+N-1} (w_{l+N+n}^{(p,q-1)} + w_{l-N-n}^{(p,q+1)}) \times \\ &\times \exp(-2\pi jk(l - 2L - n) / N). \end{aligned}$$

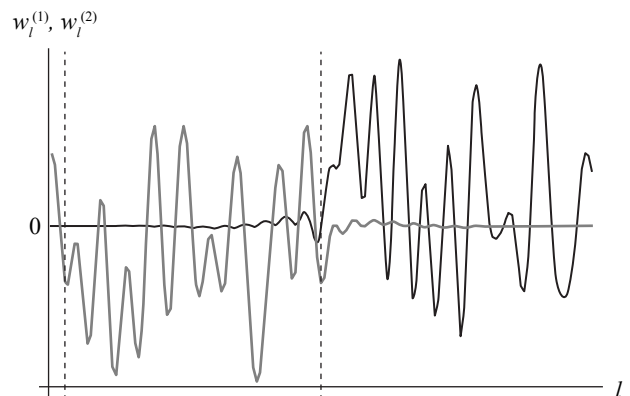


Рис. 2. Последовательности $w_l^{(1)}$ и $w_l^{(2)}$ (светлая и темная кривые соответственно), полученные в результате фильтрации двух соседних OFDM-символов $u_l^{(1)}$ и $u_l^{(2)}$ с циклическим префиксом; задержка от фильтрации сигнала $u_l^{(2)}$ попадает в область взятия ДПФ сигнала $u_l^{(1)}$, границы которой показаны штриховыми линиями.

Учитывая (10), из (12) получим

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)})d_k^{(p,q)} + \varepsilon_{1,k}^{(p,q)} + \varepsilon_{2,k}^{(p,q)}.$$

Таким образом, если рассматривается сигнал из нескольких OFDM-символов, к ошибке $\varepsilon_{1,k}^{(p,q)}$, возникающей при фильтрации и усечении последовательности отсчетов отдельного символа, добавляется ошибка $\varepsilon_{2,k}^{(p,q)}$, вызванная наличием соседних по времени символов.

3.3. Погрешность, возникающая при фильтрации сигналов из других субполос

В общую погрешность метода входит еще одна составляющая, появляющаяся из-за применения субполосного фильтра к сигналам, спектры которых сосредоточены вне данной субполосы.

При отсутствии шума в канале в приемник поступает сумма y_l сигналов $y_l^{(p)} = h_l^{(p)} * x_l^{(p)}$, полученных в результате свертки последовательностей $x_l^{(p)}$ с фильтрами $h_l^{(p)}$, $p = 1, \dots, P$:

$$y_l = \sum_{p=1}^P y_l^{(p)}. \tag{13}$$

Поскольку в приемнике выполняется синхронизация, запаздывание при передаче сигналов здесь не учитывается.

Для выделения из (13) одного из сигналов $y_l^{(p)}$ выполняется свертка y_l с фильтром $f_l^{(p)}$, имеющим АЧХ $|F_p(\exp(j\omega))|$:

$$y_l^{(p)} \approx f_l^{(p)} * y_l. \tag{14}$$

Правая часть (14) равна

$$f_l^{(p)} * y_l = g_l * x_l^{(p)} + w_l,$$

где $g_l = h_l^{(p)} * f_l^{(p)}$, а w_l определяется формулой

$$w_l = \sum_{\substack{r=1, \\ r \neq p}}^P f_l^{(p)} * y_l^{(r)}. \tag{15}$$

Из последовательности w_l при дальнейшей обработке выбирают наборы отсчетов, т.е. выполняется ее усечение. Для OFDM-символа с номером q , $1 \leq q \leq K$, усеченная последовательность имеет вид

$$\{w_{l_q}, \dots, w_{l_q+N-1}\}, \tag{16}$$

где $l_q = 2L + n + (q - 1)(N + n)$.

При фильтрации в приемнике переходная полоса АЧХ фильтра захватывает небольшую часть эффективного носителя спектра соседнего субполосного сигнала (см. рис. 3а). После усечения w_l получаем последовательность (16) с плохо локализованным спектром $\tilde{W}(\exp(j\omega))$, распространяющимся в субполосу $[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}]$ (см. рис. 3б).

Результат восстановления $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ QAM-символа $d_k^{(p,q)}$, соответствующего поднесущей с номером k , определяется выражением

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)})d_k^{(p,q)} + \varepsilon_{1,k}^{(p,q)} + \varepsilon_{2,k}^{(p,q)} + \varepsilon_{3,k}^{(p,q)}, \tag{17}$$

где $\varepsilon_{3,k}^{(p,q)}$ — ДПФ последовательности (16):

$$\varepsilon_{3,k}^{(p,q)} = \sum_{l=0}^{N-1} w_{l+l_q} \exp(-j2\pi kl / N).$$

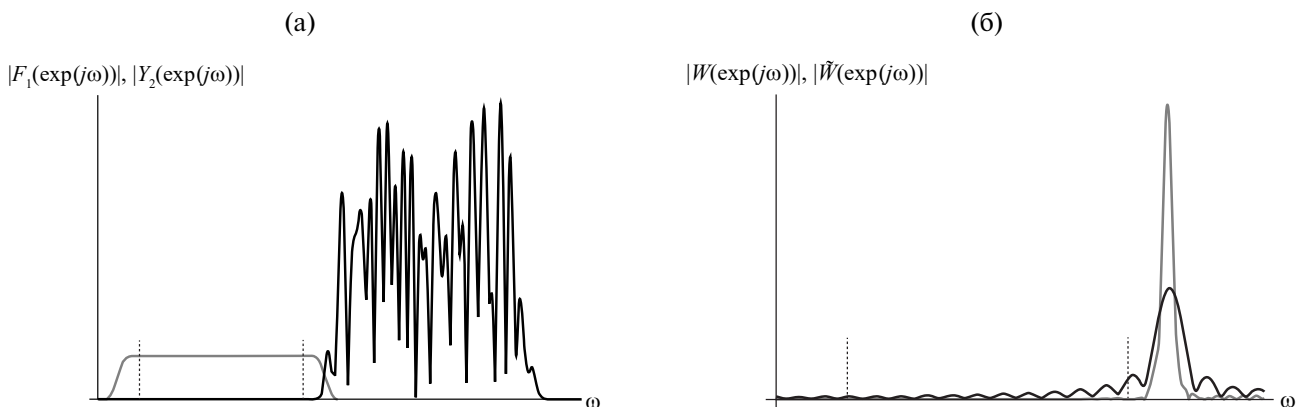


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики: а) $|F_1(\exp(j\omega))|$ (светлая кривая), $|Y_2(\exp(j\omega))|$ (темная) фильтра $f_l^{(1)}$ и сигнала $y_l^{(2)}$ (пунктир — границы полосы пропускания $|F_1(\exp(j\omega))|$); б) $|W(\exp(j\omega))|$ (светлая кривая), $|\tilde{W}(\exp(j\omega))|$ (темная) последовательностей (15) и (16).

Формула (17) определяет общий вид восстанавливающих QAM-символов $d_k^{(p,q)}$ чисел $\tilde{d}_k^{(p,q)}$, получаемых в результате применения метода OFDM с фильтрацией при передаче по идеальному каналу.

4. ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ МЕТОДА OFDM С ФИЛЬТРАЦИЕЙ

Пусть s_l — последовательность, заданная формулой

$$s_l = \begin{cases} u_{n+l}^{(p,q)}, & 0 \leq l \leq N-1, \\ 0, & l > N-1, \end{cases}$$

где $u_n^{(p,q)}, \dots, u_{n+N-1}^{(p,q)}$ — отсчеты OFDM-символа длины N , а p и q — фиксированные числа. Рассмотрим сигнал u_l , образованный суммой

$$u_l = s_l + s_{l-N} + s_{l-2N}.$$

Последовательность $\{u_l\}_{l=0}^{3N-1}$ составлена из трех одинаковых OFDM-символов $\{s_l\}_{l=0}^{N-1}$:

$$\{u_l\}_{l=0}^{3N-1} = \{s_0, \dots, s_{N-1}, s_0, \dots, s_{N-1}, s_0, \dots, s_{N-1}\}.$$

Предполагая, что $2L+1 \leq N$, применим к последовательности u_l КИХ-фильтр $h_l^{(p)}$ с ИХ $\{h_l^{(p)}\}_{l=0}^{2L}$.

Обозначим

$$\tilde{s}_l = h_l^{(p)} * s_l.$$

Свертка v_l последовательности u_l с фильтром $h_l^{(p)}$ равна

$$v_l = h_l^{(p)} * u_l = \tilde{s}_l + \tilde{s}_{l-N} + \tilde{s}_{l-2N}. \quad (18)$$

Вычислим свертку (18) для индексов $l = L+N, \dots, L+2N-1$:

$$v_l = \sum_{r=l-N+1}^{2L} h_r^{(p)} s_{l-r} + \sum_{r=0}^{l-N} h_r^{(p)} s_{l-N-r}, \\ l = L+N, \dots, 2L+N-1;$$

$$v_l = \sum_{r=0}^{2L} h_r^{(p)} s_{l-N-r}, \quad l = 2L+N, \dots, 2N-1;$$

$$v_l = \sum_{r=l-2N+1}^{2L} h_r^{(p)} s_{l-N-r} + \sum_{r=0}^{l-2N} h_r^{(p)} s_{l-2N-r}, \\ l = 2N, \dots, L+2N-1.$$

Можно убедиться, что последовательность \tilde{v}_l , равная

$$\tilde{v}_l = v_{L+N+l}, \quad l = 0, \dots, N-1,$$

представляет собой циклическую свертку сигнала

$$\{s_L, \dots, s_{N-1}, s_0, \dots, s_{L-1}\} \quad (19)$$

с последовательностью

$$\{h_0^{(p)}, \dots, h_{2L-1}^{(p)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2L}\}. \quad (20)$$

Кроме того, справедливо

$$v_l = v_{l+N}, \quad l = N, \dots, L+N-1, \\ v_l = v_{l-N}, \quad l = L+2N, \dots, 2L+2N-1.$$

Рассматривая линейную свертку

$$w_l = f_l^{(p)} * v_l,$$

можно получить аналогичный результат. Сигнал

$$\tilde{w}_l = w_{2L+N+l}, \quad l = 0, \dots, N-1, \quad (21)$$

является циклической сверткой последовательностей

$$\{\tilde{v}_L, \dots, \tilde{v}_{N-1}, \tilde{v}_0, \dots, \tilde{v}_{L-1}\}, \\ \{f_0^{(p)}, \dots, f_{2L-1}^{(p)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-2L}\}.$$

Формула для ДПФ \tilde{W}_k последовательности (21) вытекает из свойств циклической свертки:

$$\tilde{W}_k = \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{w}_l \exp(-j2\pi lk / N) = \\ = \exp(2\pi jkL / N) F_p(\exp(j2\pi k / N)) \times \\ \times \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{v}_l \exp(-j2\pi lk / N) = \\ = \exp(4\pi jkL / N) F_p(\exp(j2\pi k / N)) \times \\ \times H_p(\exp(j2\pi k / N)) \sum_{l=0}^{N-1} s_l \exp(-j2\pi lk / N) = \\ = \left| H_p(\exp(j2\pi k / N)) \right|^2 \sum_{l=0}^{N-1} s_l \exp(-j2\pi lk / N).$$

Легко показать, что такое же соотношение будет справедливо для свертки

$$w_l = h_l^{(p)} * f_l^{(p)} * u_l,$$

где сигнал u_l равен

$$u_l = \begin{cases} s_{l+N-2L} + s_{l-2L} + s_{l-N-2L}, & l = 0, \dots, N+4L-1, \\ 0, & l > N+4L-1. \end{cases}$$

Последовательность $\{u_l\}_{l=0}^{N+4L-1}$ в этом случае образована добавлением к OFDM-символу $\{s_l\}_{l=0}^{N-1}$ ЦП длиной $2L$ и циклического продолжения длиной $2L$

$$\{u_l\}_{l=0}^{N+4L-1} = \{s_{N-2L}, \dots, s_{N-1}, s_0, \dots, s_{N-1}, s_0, \dots, s_{2L-1}\}.$$

Сформулируем полученный результат в форме утверждения.

Утверждение 1. Пусть $\{s_l\}_{l=0}^{N-1}$ — OFDM-символ, состоящий из N отсчетов и имеющий ДПФ

$$\sum_{l=0}^{N-1} s_l \exp(-2j\pi kl / N) = d_k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

$\{h_l\}_{l=0}^{2L}$, $\{f_l\}_{l=0}^{2L}$ — импульсные характеристики КИХ-фильтров длиной $2L+1 \leq N$, имеющих частотные характеристики $H(\exp(j\omega))$ и $F(\exp(j\omega))$ соответственно, причем

$$H(\exp(j\omega))F(\exp(j\omega)) = \exp(-2jL\omega) |H(\exp(j\omega))|^2.$$

Тогда результатом применения к последовательности

$$u_l = \begin{cases} s_{l+N-2L}, & l = 0, \dots, 2L-1, \\ s_{l-2L}, & l = 2L, \dots, 2L+N-1, \\ s_{l-N-2L}, & l = 2L+N, \dots, 4L+N-1, \\ 0, & l > 4L+N-1 \end{cases}$$

фильтров h_l и f_l будет последовательность

$$w_l = h_l * f_l * u_l,$$

отсчеты которой при $l = 2L, \dots, 2L+N-1$ обладают следующим свойством:

$$\sum_{l=0}^{N-1} w_{2L+l} \exp(-2j\pi kl / N) = d_k |H(\exp(j2\pi k / N))|^2.$$

Рассмотрим теперь для фиксированного числа p сигнал $x_l^{(p)}$, равный

$$x_l^{(p)} = \sum_{q=1}^K u_{l-l_q}^{(p,q)},$$

где $l_q = (N+4L)(q-1)$, $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=2L}^{2L+N-1}$ — OFDM-

символ длиной N , $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=0}^{2L-1}$ — префикс символа

длиной $2L$, $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=2L+N}^{4L+N-1}$ — циклическое продол-

жение символа из $2L$ отсчетов и

$$u_l^{(p,q)} = 0, \quad l > 4L+N-1,$$

$$u_l^{(p,q)} = 0, \quad l < 0.$$

Осуществляя свертку сигнала $x_l^{(p)}$ с фильтрами

$h_l^{(p)}$, $f_l^{(p)}$, получим последовательность

$$w_l = h_l^{(p)} * f_l^{(p)} * x_l^{(p)}.$$

Символы QAM-модуляции для q -го OFDM символа $\{u_l^{(p,q)}\}_{l=2L}^{2L+N-1}$ восстанавливаются по формуле

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = \sum_{l=0}^{N-1} w_{l+2L+l_q} \exp(-j2\pi kl / N).$$

Связь между числами $\tilde{d}_k^{(p,q)}$ и исходными QAM-символами

$$d_k^{(p,q)} = \sum_{l=2L}^{2L+N-1} u_l^{(p,q)} \exp(-j2\pi kl / N)$$

задается соотношением

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = |H_p(\exp(j2\pi k / N))|^2 d_k^{(p,q)}.$$

Если фильтр $h_l^{(p)}$ имеет полосу пропускания

$$[\omega_{p,1}, \omega_{p,2}] \text{ и } 2\pi k / N \in [\omega_{p,1}, \omega_{p,2}],$$

то в соответствии с (8) имеем

$$\tilde{d}_k^{(p,q)} = (1 + \delta_k^{(p)}) d_k^{(p,q)}.$$

Добавление к OFDM-символу циклического продолжения длиной $2L$ и расширение ЦП до $2L$ отсчетов позволило полностью исключить возникающую при фильтрации одного символа погрешность $\epsilon_{1,k}^{(p,q)}$, рассмотренную в разд. 3.1. Отсчеты ЦП и циклического продолжения, располагающиеся между символами, препятствуют появлению погрешности $\epsilon_{2,k}^{(p,q)}$, обусловленной фильтрацией соседних по времени символов (разд. 3.2).

При дополнении каждого символа префиксом и продолжением из $n < 2L$ отсчетов погрешности вида $\epsilon_{1,k}^{(p,q)}$, $\epsilon_{2,k}^{(p,q)}$ подавляются частично.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим применение стандартного и модифицированного методов OFDM с фильтрацией для передачи данных. В примере имеющаяся полоса частот разделена на три субполосы, каждой из которых соответствует свой набор из M подне-

сущих. Между соседними субполосами располагается g защитных частот.

Используемые в схеме субполосные фильтры получены из трех различных КИХ-фильтров низких частот, синтезированных методом оконного взвешивания идеальной характеристики [10]. Для построения фильтров применялись некоторые из весовых функций, использованных в других работах о методе OFDM с фильтрацией: Хэмминга $w_1(x)$, Ханна $w_2(x)$ и Блэкмана $w_3(x)$ [5–7]. Функции $w_1(x)$, $w_2(x)$, $w_3(x)$ определяются выражениями [11]

$$w_1(x) = \begin{cases} \frac{21}{46} \cos(2\pi x) + \frac{25}{46}, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(2\pi x) + \frac{1}{2}, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$w_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{50} (25 \cos(2\pi x) + 4 \cos(4\pi x) + 21), & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Все фильтры низких частот имеют частоту среза $\omega_c = (M + g)\pi / N$, где N — размер ОДПФ. Для эффективного восстановления QAM-символов граничные частоты полос пропускания и подавления ω_0 и ω_1 должны удовлетворять неравенствам

$$\omega_0 \geq \omega_c - (g + 1)\pi / N, \quad \omega_1 \leq \omega_c + (g + 1)\pi / N.$$

Для используемых в примере фильтров были вычислены отклонения АЧХ $|H(\exp(j\omega))|$ в полосах $[0, \omega_c - (g + 1)\pi / N]$, $[\omega_c + (g + 1)\pi / N, \pi]$:

$$\delta_0 = \max | |H(\exp(j\omega))| - 1 |, \quad \omega \in [0, \omega_c - (g + 1)\pi / N],$$

$$\delta_1 = \max | |H(\exp(j\omega))| |, \quad \omega \in [\omega_c + (g + 1)\pi / N, \pi].$$

Характеристики используемой схемы передачи данных приведены в табл. 1, параметры фильтров — в табл. 2.

В первой части численного эксперимента предложенный в работе метод сравнивали со стандартным. В модифицированном алгоритме к каждому OFDM-символу, помимо ЦП длиной n , добавлялась справа последовательность из n первых отсчетов символа.

Для фильтрации сигналов были использованы фильтры на основе оконных функций $w_k(x)$, $k = 1, 2, 3$. Длина ИХ фильтров равна $2L + 1 = 301$. Помимо ЦП размером $n = 300$, обеспечивающего

выполнение утверждения 1, рассматривались ЦП из меньшего числа отсчетов, вплоть до $n = 36$, что соответствует стандартной длине префикса для применяемой схемы. Выполнялось моделирование асинхронной передачи сигналов — принято, что сигнал, соответствующий субполосе 2, запаздывает на $n + 10$ отсчетов относительно субполосных сигналов 1 и 3. Чтобы иметь возможность оценить погрешность, вносимую в восстановленные QAM-символы в процессе реализации метода, была рассмотрена передача по идеальному каналу без помех.

Таблица 1. Характеристики схемы передачи данных

Ширина канала, МГц	5
Расстояние между поднесущими, кГц	15
Количество субполос	3
Число M поднесущих в субполосе	72
Число защитных частот g	8
Размер ОДПФ N	512
Схемы модуляции	QAM 256, QAM 1024, QAM 4096
Длина фильтров $2L + 1$	301, 401, 501

Таблица 2. Параметры фильтров для $L = 150$

Окно	δ_0	δ_1
w_1	0.0016	0.0016
w_2	0.0019	0.0019
w_3	0.0004	0.0004

В стандартном методе передачи OFDM-сигналов с фильтрацией использовали ЦП из 36 отсчетов. Помимо фильтров длиной $2L + 1 = 301$ применяли фильтры с $2L + 1 = 401, 501$. Увеличение порядка фильтра уменьшает ширину переходной полосы и неравномерность АЧХ в полосах пропускания и подавления.

Для полученных после работы модифицированного и стандартного алгоритмов восстановленных QAM-символов \tilde{d}_k были вычислены абсолютная и среднеквадратическая погрешности:

$$e_1 = \max_{0 \leq k \leq 3M-1} | \tilde{d}_k - d_k |, \quad e_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{3M-1} | \tilde{d}_k - d_k |^2 / (3M)}.$$

Результаты применения при передаче данных модифицированной схемы OFDM с фильтрацией приведены в табл. 3. Наименьшие погрешности e_1 и e_2 получены при добавлении к OFDM-символам слева и справа периодических продолжений, со-

стоящих из $n = 150$ и $n = 300$ отсчетов. Для $n = 150, 300$ погрешности сопоставимы. Далее при уменьшении n ошибки e_1 и e_2 возрастают. Модифицированный метод позволил осуществить эффективную передачу данных даже при периодическом продолжении OFDM-символа длиной в стандартный ЦП $n = 36$ для всех рассмотренных схем QAM-модуляции, в том числе для схемы высокого порядка QAM 4096, где среднеквадратическая погрешность составила $e_2 \approx 0.2$.

Ошибки e_1, e_2 , полученные при использовании стандартного метода с фильтрацией, приведены в табл. 4. Метод достаточно хорошо работает для схемы QAM 256. При повышении порядка схемы модуляции погрешности e_1, e_2 возрастают. Для схемы QAM 4096 получены погрешности $e_2 \approx 1$ и

2.5. При таких значениях e_1 и e_2 теряется возможность безошибочного восстановления данных при переходе от чисел \tilde{d}_k к последовательности бит.

Из табл. 3 также видно, что повышение длины КИХ-фильтров не оказало существенного влияния на ошибку. Оконные фильтры высокого порядка позволяют уменьшить в формуле (17) числа δ_k и погрешность $\epsilon_{3,k}^{(p,q)}$, но не подавляют погрешности $\epsilon_{1,k}^{(p,q)}$ и $\epsilon_{2,k}^{(p,q)}$.

В следующей части эксперимента была рассмотрена передача данных при наличии в канале АГБШ. Наборы чисел \tilde{d}_k преобразовывались в последовательности из нулей и единиц. Для получен-

ных последовательностей вычислено число ошибочно восстановленных бит. В эксперименте рассматривались двоичные последовательности из N_b бит, $N_b > 10^4$.

Значения коэффициента ошибок на 1 бит (bit error ratio, BER) вычисляли для различных значений отношения энергии бита к спектральной плотности шума E_b / N_0 . Величина E_b / N_0 связана с отношением сигнал/шум (ОСШ) формулой [1]

$$\text{ОСШ} = \frac{E_b}{N_0} \frac{1}{BT_b},$$

где B — ширина полосы частот входного шума, T_b — длительность бита.

Графики величины BER, полученные при применении стандартного и модифицированного методов для схем QAM 256, QAM 1024, QAM 4096 показаны на рис. 4. В обоих методах использовались КИХ-фильтры на основе окна Хэмминга $w_1(x)$. Длина фильтров составляет $2L + 1 = 301$, размер ЦП равен $n = 36$.

Для всех схем модуляции модифицированный метод при $E_b / N_0 > 15$ дБ позволил получить меньшее количество ошибок. Новый метод эффективно работает для схем высокого порядка QAM 1024 и QAM 4096. Для стандартного алгоритма в сочетании со схемами QAM 1024, QAM 4096 число ошибок остается высоким при уменьшении уровня шума.

Таблица 3. Абсолютная и среднеквадратическая погрешности e_1, e_2 восстановления QAM-символов, полученные при применении модифицированного метода OFDM с фильтрацией

w_k	QAM 256				QAM 1024				QAM 4096			
	$n = 36$	75	150	300	36	75	150	300	36	75	150	300
Погрешность e_1												
w_1	0.211	0.110	0.075	0.055	0.581	0.248	0.095	0.106	0.886	0.601	0.243	0.277
w_2	0.244	0.124	0.065	0.074	0.626	0.263	0.127	0.151	0.903	0.576	0.289	0.258
w_3	0.204	0.097	0.068	0.078	0.518	0.200	0.107	0.132	0.901	0.312	0.349	0.335
Погрешность e_2												
w_1	0.044	0.024	0.016	0.015	0.116	0.050	0.027	0.028	0.203	0.106	0.063	0.060
w_2	0.043	0.023	0.012	0.011	0.118	0.050	0.020	0.022	0.203	0.105	0.048	0.046
w_3	0.040	0.018	0.015	0.012	0.109	0.038	0.019	0.023	0.197	0.072	0.051	0.049

Таблица 4. Абсолютная и среднеквадратическая погрешности e_1, e_2 восстановления QAM-символов, полученные при применении стандартного метода OFDM с фильтрацией

w_k	QAM 256			QAM 1024			QAM 4096		
	$L=150$	200	250	150	200	250	150	200	250
Погрешность e_1									
w_1	0.822	0.793	0.754	1.566	1.483	1.514	2.506	2.501	2.456
w_2	0.840	0.794	0.768	1.520	1.513	1.505	2.918	2.563	2.486
w_3	0.924	0.834	0.796	1.651	1.518	1.508	2.656	2.440	2.426
Погрешность e_2									
w_1	0.291	0.286	0.284	0.722	0.711	0.706	0.976	0.960	0.955
w_2	0.291	0.287	0.284	0.724	0.713	0.706	0.976	0.963	0.952
w_3	0.297	0.290	0.287	0.744	0.723	0.713	1.010	0.976	0.963

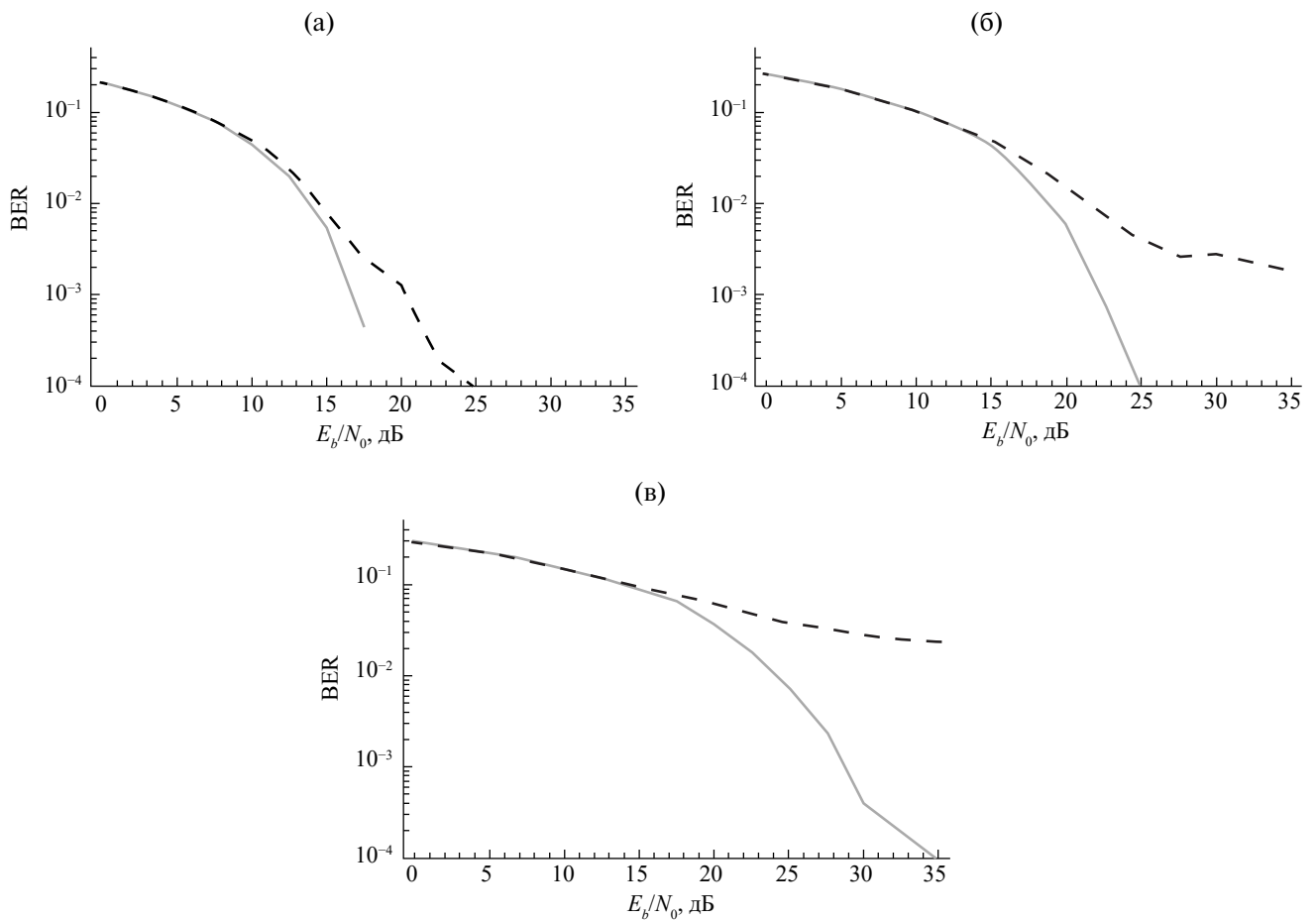


Рис. 4. Зависимости величины BER от отношения E_b / N_0 для схем модуляции QAM 256 (а), QAM 1024 (б), QAM 4096 (в), полученные при использовании стандартного (штриховая кривая) и модифицированного (сплошная) алгоритмов OFDM с фильтрацией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализирован алгоритм передачи данных на основе ортогонального частотного мультиплексирования с фильтрацией. Показано, что при применении метода OFDM с фильтрацией возникают погрешности трех различных видов.

1. Погрешность, вызываемая фильтрацией OFDM-символа с циклическим префиксом и усечением полученной последовательности.

2. Погрешность из-за фильтрации соседних по времени символов.

3. Погрешность, появляющаяся при применении субполосного фильтра к сигналам из других субполос.

Для подавления погрешностей, указанных в п.1 и п.2, разработан модифицированный алгоритм, основанный на свойствах циклической свертки. Выполнено экспериментальное сравнение эффективности предложенного и стандартного алгоритмов. Модифицированный метод OFDM с фильтрацией позволил получить QAM-символы с меньшей погрешностью и обеспечил качественное восстановление данных для схем высокого порядка QAM 1024 и QAM 4096.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Шлома А.М., Шумов А.П. Технология OFDM. М.: Горячая линия—Телеком, 2017.
2. Arslan H. *Wireless Communication Signals: a Laboratory-based Approach*. Hoboken: Wiley, 2021.
3. Zayani R., Medjahdi Y., Shaiek H., Roviras D. // Proc. 2016 IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps). Washington. 04–08 Dec. N.Y.: IEEE, 2016. Paper No. 7849087. doi: 10.1109/GLOCOMW.2016.7849087
4. Mohamad M., Nilsson R., Beek J.v.d. // Proc. of Europ. Wireless 2015. 21th Europ Wireless Conf. Budapest. 20–22 May. Berlin: VDE Verlag, 2015. Paper No. 53604. doi: 10.13140/RG.2.2.27153.53604
5. Zhang X., Jia M., Chen L. et al. // Proc. 2015 IEEE Global Commun. Conf. (GLOBECOM). San Diego. 06–10 Dec. N.Y.: IEEE, 2015. Paper No. 7417854. doi: 10.1109/GLOCOM.2015.7417854
6. Abdoli J., Jia M., Ma J. // Proc. 2015 IEEE 16th Int. Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Commun. (SPAWC). Stockholm, 28 Jun.– 02 Jul. N.Y.: IEEE, 2015. P. 66.
7. Ali D.M., Yahya Z.Z. // Int. J. Microwave and Optical Technology. 2022. V. 17. № 1. Paper No. 172247.
8. Кравченко В.Ф., Назаров Л.Е., Пустовойт В.И. // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 95.
9. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. Расчет и реализация. М.: Мир, 1982.
10. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов. М.: ИД «Вильямс», 2008.
11. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016.

INCREASING OF THE QAM SYMBOLS RECONSTRUCTION ACCURACY WHEN APPLYING THE FILTERED ORTHOGONAL FREQUENCY DIVISION MULTIPLEXING METHOD

K. A. Budunova^{a,*}, V. F. Kravchenko^{a,b,c,**}

^a*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, Mokhovaya Str., 11, Build. 7, Moscow, 125009 Russian Federation*

^b*Bauman State Technical University, 2nd Baumanskaya Str., 5, Build. 1, Moscow, 105005 Russian Federation*

^c*Scientific and Technological Center of Unique Instrumentation, Russian Academy of Sciences, Butlerova Str., 15, Moscow, 117342 Russian Federation*

*E-mail: *1917schw@mail.ru, ** kyf-ok@mail.ru*

Received August 24, 2024, revised September 07, 2024, accepted September 15, 2024

The filtered orthogonal frequency division multiplexing method used for the transmission of the signals with spectra in adjacent frequency subbands has been analyzed. Three types of errors appearing when applying the method for quadrature amplitude modulation symbols transmission have been described. For the error reduction the modified algorithm based on cyclic convolution properties has been developed. In the numerical experiment, the classical and modified algorithms have been applied in combination with modulation schemes of large order.

Keywords: filtered OFDM method, QAM modulation, wireless communication

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.37.029.6

ШИРОКОПОЛОСНЫЙ ПОГЛОТИТЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2024 г. В. А. Богуш, В. А. Лабунов, А. В. Гусинский, В. А. Карпович, В. Н. Родионова*,
Н. А. Певнева, М. М. Касперович, И. А. Кашко

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (БГУИР),
ул. Петруся Бровки, 6, Минск, 220013 Республика Беларусь*

**E-mail: valent-r@yandex.by*

Поступила в редакцию 15.01.2024 г.

После доработки 01.08.2024 г.

Принята к публикации 15.08.2024 г.

Получен поглотитель электромагнитных волн градиентного типа с использованием войлока углеволокнистого «Карбопон-В22М» со следующими характеристиками: коэффициент отражения от -10 до -30 дБ в диапазоне частот от 2 до 18 ГГц, напряжение изгиба и напряжение растяжения ≥ 300 МПа (процент деформации -0.7%); плотность ≤ 2.5 г/см³, толщина ≤ 6 мм. Показаны перспективы применения созданного радиопоглощающего материала для скрытия расположенных под ним крупногабаритных движущихся либо неподвижных объектов от систем радиолокационного обнаружения, а также для защиты радиоэлектронной аппаратуры, носителей информации и биологических объектов от повышенного уровня электромагнитного излучения, локализации электромагнитных излучений.

Ключевые слова: сверхвысокие частоты, объемные поглощающие материалы, поглощение и отражение электромагнитного излучения, электромагнитная защита

DOI: 10.31857/S0033849424100025, **EDN:** HQOQIB

ВВЕДЕНИЕ

Радиопоглощающие материалы (РПМ) предназначены для экранирования источников излучений, для защиты объектов от обнаружения, для решения экологических проблем, связанных с электромагнитным излучением. Разработка эффективных систем защиты от широкополосного электромагнитного излучения (ЭМИ) требует совместного решения сложных электрофизических, электродинамических, материаловедческих и конструкторско-технологических задач.

Современные тенденции в области защиты от ЭМИ требуют, чтобы широкополосный РПМ представлял собой композиционный материал и одновременно являлся конструкционным материалом. В таком материале происходят процессы поглощения, рассеяния и интерференции электромагнитных (ЭМ) волн, обеспечивая эффективное поглощение ЭМ-волн за счет активных потерь в объеме материала и малые

отражения от поверхности за счет согласования со средой распространения ЭМ-волн. Технологически задача получения требуемого отражения в широкой полосе частот обеспечивается путем варьирования количества, толщины и электрофизических характеристик слоев композитной структуры.

Эффективность поглощения ЭМИ определяется специфическими для заданного диапазона частот свойствами применяемых материалов, такими как комплексные магнитная и диэлектрическая проницаемости, удельная электропроводность, а также размерами и взаимосвязью структурных элементов в композитных радиопоглощающих материалах. При создании радиопоглощающих материалов часто используют композитные диэлектрические матрицы, содержащие проводящий наполнитель, что позволяет сочетать механические свойства связующего и высокую эффективность поглощения ЭМИ [1–7].

1. ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РПМ

Для широкополосного поглотителя ЭМИ с низким коэффициентом отражения оптимальной конструкцией является градиентная структура. В таком поглотителе реализуется изменение от сопротивления $Z_{\text{св}}$ и проводимости $\sigma_{\text{св}} = 0$ свободного пространства на поверхности падения ЭМ-волны на поглотитель до более низкого сопротивления и более высокой проводимости на противоположной стороне поглотителя. Такое изменение может быть достигнуто либо изменением его геометрической формы, либо изменением свойств материала. Неоднородная внешняя поверхность поглотителя (гофрированная, конусная, игольчатая и т.п.) уменьшает коэффициент отражения ЭМИ. Схожий эффект достигается при неоднородности внутренних слоев градиентной структуры. Простейший вариант — это создание внутренних неоднородных по толщине слоев или формирование неплоской границы раздела сред. Более сложный вариант — создание нескольких внутренних слоев, представляющих собой дифракционные решетки. Такие поглотители обладают большой широкополосностью при малой величине коэффициента отражения и небольшой толщине [8], однако являются сложными с точки зрения практической реализации.

Перспективным направлением создания широкополосного РПМ является реализация градиентной структуры на базе углеродных волокон с волновым сопротивлением, согласованным со средой распространения ЭМ-волн [9, 10].

В настоящее время в конструкциях экранов ЭМИ [11, 12], в композитных экранирующих и радиопоглощающих материалах [13] широко применяются углеродные волокна, обладающие высокой механической прочностью и высокой электропроводностью. Еще одним важным моментом при выборе углеродных волокон в качестве поглотителей ЭМИ является то, что недавно был обнаружен эффект аномально большого поглощения ЭМИ очень тонкими проводящими волокнами [14–16]. Он наблюдается, когда на волокно падает ЭМ-волна, электрический вектор которой параллелен оси волокна. Эффективный диаметр волокна в этом случае может в несколько сотен раз превышать его геометрический диаметр. Это размерный эффект, природа которого, возможно, связана с возбуждением токов при определенных соотношениях между эффективным диаметром волокна и длиной волны ЭМИ.

2. ВОЙЛОК УГЛЕВОЛОКНИСТЫЙ

Углеродные волокна выпускаются в виде нитей, жгутов, тканей и войлоков. Углеродный войлок особенно интересен тем, что волокна в нем раз-

несены друг относительно друга на значительную величину, в десятки раз превышающую диаметр самих волокон (рис. 1).

Как видно из микрофотографий, средний диаметр углеродного волокна лежит в диапазоне 5...7 мкм. Средняя дистанция между волокнами (разреженность) 10...20 мкм. Внутренняя структура волокна при микронном разрешении — плотная, сплошная, без видимых дефектов, включений и полостей. Данный материал характеризуется содержанием углерода до 99.9%; термостойкостью в инертной среде до 3600°C; теплопроводностью в диапазоне 20...2000 °C от 0.07 до 0.5 Вт/(м·К), теплоемкостью 800 Дж/(кг·К); материал электропроводен, обладает радиопоглощающими свойствами. Разнесенные в объеме волокна, отоженные при определенной температуре для получения требуемой проводимости, позволяют получить материал, волновое сопротивление которого согласуется с волновым сопротивлением среды распространения электромагнитных волн.

При создании широкополосного РПМ был использован углеволокнистый войлок на основе карбонизированного вискозного волокна — материал углеродный нетканый «Карбопон В22-М» (рис. 2), производства «Светлогорскхимволокно».

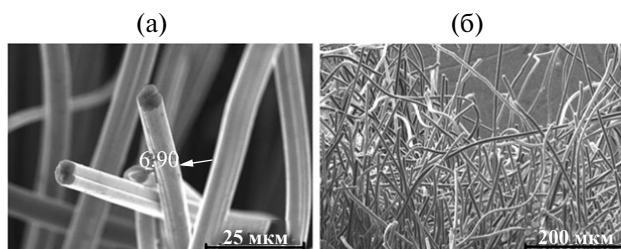


Рис. 1. Структура углеволокнистого войлока (сканирующая электронная микроскопия, увеличение $\times 1500$ (а) и $\times 200$ (б)).



Рис. 2. Фотография углеволокнистого войлока «Карбопон В22-М».

В качестве материала, обеспечивающего высокие механические свойства, использовали модифицированный стеклопластик (обладающий в отличие от серийно выпускаемого материала повышенными механическими характеристиками), разработанный для БГУИР предприятием «Фабрика композитных пластиков». Результаты исследований показали, что такая структура позволяет получить эффективный РПМ, обладающий высокими физико-механическими характеристиками.

Для придания экспериментальным образцам РПМ свойств поглотителя градиентного типа были использованы слои углеволокнистого войлока (толщиной от 2 мм) с различной проводимостью. Проводимость углеволокнистого войлока зависит от температуры повторного отжига. Чем выше температура отжига, тем выше процентное отношение углерода в волокнах и, таким образом, выше проводимость материала. Был разработан температурно-временной технологический профиль высокотемпературного отжига в инертной азотной среде серийно выпускаемого углеродного нетканого материала «Карбопон В22-М» с удельным поверхностным сопротивлением 0.5 Ом. Измерение сопротивления слоя осуществлялось посредством накладных контактов из алюминиевой фольги, размещенных по краям образца.

В табл. 1 приведены параметры отжига трех образцов войлока, указаны удельные поверхностные сопротивления, полученные в результате этой технологической операции, а также приведены результаты исследования взаимодействия СВЧ-излучения с этими образцами в диапазоне 1...4 ГГц. Величина поглощения является расчетной на основе параметров прохождения и отражения.

Из экспериментальных данных, приведенных в табл. 1, видно, что при уменьшении температуры отжига величина отражения ЭМИ образцов резко уменьшается.

3. ОПИСАНИЕ ОБРАЗЦОВ РПМ

Экспериментальный образец широкополосного РПМ состоит из модифицированного радиопрозрачного стеклопластика толщиной 3 мм и поглощающей градиентной структуры (толщина

5.5...6.0 мм), выполненный в виде собранных в пакет трех диэлектрических слоев, изготовленных из углеволокнистого войлока, скрепленных между собой радиопрозрачной клейкой лентой 3М 467MP. Первый диэлектрический слой (толщина 1.8...2.0 мм) с удельным поверхностным электрическим сопротивлением 340...380 Ом является согласующим слоем. Второй и третий диэлектрические слои пропитаны раствором оксида железа Fe_3O_4 , концентрацией которого можно изменять поглощающие свойства диэлектрического слоя, обеспечивая тем самым максимальное поглощение мощности падающей электромагнитной волны при ее минимальном отражении.

Конструкционные свойства композитной структуры обеспечивает стеклопластик, который также защищает пористый углеродный материал с повышенными сорбционными свойствами от воздействия внешней среды. Для эксплуатации в сложных климатических условиях используется еще один лист стеклопластика. Благодаря такой конструкции «сэндвича» возможна герметизация поглощающего материала специальным компаундом по контуру.

Механические прочностные характеристики (H/mm^2) модифицированного стеклопластика, использованного нами при создании экспериментальных образцов широкополосного РПМ, представлены ниже:

- напряжение растяжения 319.1;
- модуль растяжения 11 296.8;
- напряжение изгиба 419.4;
- модуль изгиба 16 731.0.

Измерения характеристик стеклопластика проводилось в БГУИР на универсальной испытательной машине MTS 43 с погрешностью измерений не более 1%. Использовался силоизмерительный датчик на 10 кН при скорости нагружения 2 мм/мин.

Разработанная широкополосная радиопоглощающая градиентная структура работает следующим образом. Наряду с процессами поглощения электромагнитных волн, обусловленными потерями в диэлектрических слоях поглощающей градиентной структуры, имеют место процессы много-

Таблица 1. Параметры экспериментальных образцов углеродных нетканых материалов после различных режимов отжига

Номер образца	Температура отжига, °С	Удельное поверхностное сопротивление, Ом	Отражение, %	Прохождение, %	Поглощение, %
1	720	100–150	40–31	5–6	55–63
2	710	150–200	25	10–8	65–67
3	700	300–400	10–6	30–16	60–78

Примечание. Для всех образцов время отжига 10 мин, диапазон частот 1...4 ГГц.

кратного отражения и переотражения падающих волн от хаотично расположенных углеродных нитей, из которых состоят диэлектрические слои. Эти процессы сопровождаются дополнительным поглощением энергии электромагнитных волн. Изменением концентрации оксида железа Fe_3O_4 в диэлектрических слоях можно оптимизировать свойства поглощающего материала для обеспечения максимального поглощения мощности падающей электромагнитной волны при ее минимальном отражении. Минимальное отражение электромагнитной волны от поверхностного слоя образца РПМ получено при пропитке его 20%-ным раствором оксида железа Fe_3O_4 с диаметром частиц от 1 до 5 мкм. Пропитку РПМ производили следующим образом: перемолотый порошок Fe_3O_4 просеивали через сито с размером ячеек в 60 мкм. Затем на основе просеянного порошка, лимонной кислоты и изопропилового спирта была изготовлена суспензия, которой с помощью ручного пульверизатора при постоянном перемешивании равномерно опрыскивали весь образец. Процентное отношение массы порошка Fe_3O_4 к весу обрабатываемого войлока не учитывало вес растворителя. Фотография образца представлена на рис. 3.

Наличие относительно равномерно расположенных в объеме диэлектрического слоя частиц материала наполнителя (в нашем случае это оксид железа Fe_3O_4) приводит к образованию релейевских рассеивающих структур, что также способствует расширению рабочего частотного диапазона разработанного РПМ.

4. МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

Для проведения измерений был изготовлен комплект РПМ ЭМИ с размерами 500x500x6 мм (6 шт.) и 300x300x6 мм (6 шт.). Размеры экспериментальных образцов выбирали, исходя из размеров раскрытия рупора измерительных антенн, с помощью которых были выполнены измерения характеристик РПМ (антенна измерительная Пб-23М, антенна измерительная ЕМСО-3115).

Все экспериментальные исследования выполнялись с использованием векторного анализатора электрических цепей Anritsu MS4644В. Измеренная с помощью векторного анализатора матрица S -параметров позволяет однозначно определить параметры распространения ЭМИ в среде. При этом для многих практических применений, например в случае разработки радиопоглощающих покрытий и электромагнитных экранов, достаточно измерять только модуль коэффициента отражения (либо коэффициент стоячей волны по напряжению).

Коэффициент отражения S_{22} экспериментальных образцов РПМ и их составляющих

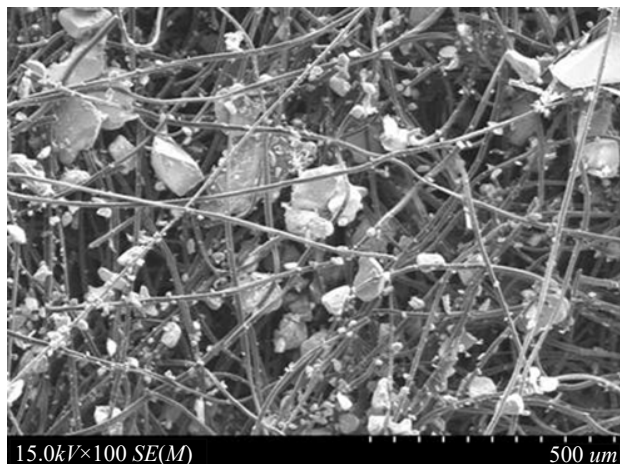


Рис. 3. Фотография диэлектрического слоя, пропитанного 20%-ным раствором оксида железа Fe_3O_4 .

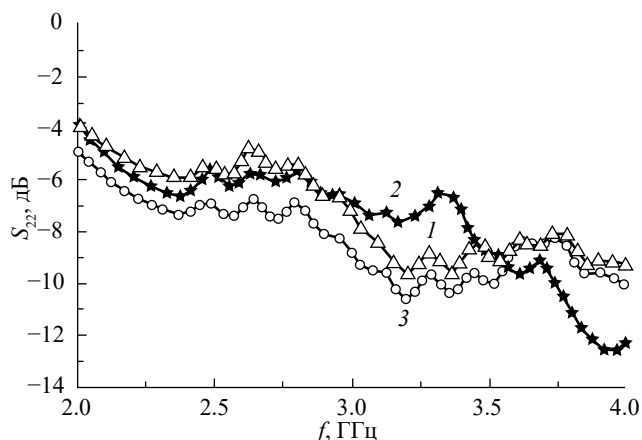


Рис. 4. Характеристики коэффициента отражения экспериментальных образцов 1–3 углеродных нетканых материалов, отожженных при разных температурах, в диапазоне 2...4 ГГц при размещении на металлическом экране.

измеряли на металлическом экране по стандарту GJB2038A-2011.

Первоначально выполняли измерения образцов углеродных нетканых материалов «Карбопон В-22М» после высокотемпературного отжига в инертной среде. На рис. 4 представлены характеристики отражения экспериментальных образцов углеродных нетканых материалов 1–3 в диапазоне 2...4 ГГц при размещении их на металлическом экране. Диапазон 2...4 ГГц был выделен на первоначальном этапе исследований, как наиболее сложный для обеспечения минимального коэффициента отражения S_{22} . Минимальное значение коэффициента отражения соответствует образцу 3, параметры которого: удельное поверхностное сопротивление 300...400 Ом, отражение 6%, прохождение 16%, поглощение 78%.

Таким образом, высокотемпературный отжиг в инертной среде позволяет оптимизировать электрофизические параметры углеродных нетканых материалов «Карбопон В-22М», в нашем случае, для минимизации отражения СВЧ-излучения. Это позволило создать диэлектрический слой с волновым сопротивлением порядка 400 Ом для согласования градиентного РПМ с волновым сопротивлением свободного пространства.

На рис. 5 приведены характеристики отражения S_{22} экспериментального образца углеволокнистого войлока, модифицированного 20%-ным раствором оксида железа Fe_3O_4 с диаметром частиц от 1 до 5 мкм в диапазоне частот 2...4 и 4...18 ГГц.

Введение наполнителя позволило получить импедансную поверхность с высокими поглощающими свойствами, обеспечивающими минимальное отражение падающей ЭМ-волны.

На рис. 6 приведены результаты измерения в диапазоне частот 1...18 ГГц коэффициента отражения S_{22} модифицированного стеклопластика, обеспечивающего высокие механические свойства образцам РПМ.

На рис. 7 приведены характеристики коэффициента отражения S_{22} одного из экспериментальных образцов широкополосного РПМ ЭМИ (остальные образцы имеют идентичные характеристики) в диапазоне частот 0.8...18 ГГц.

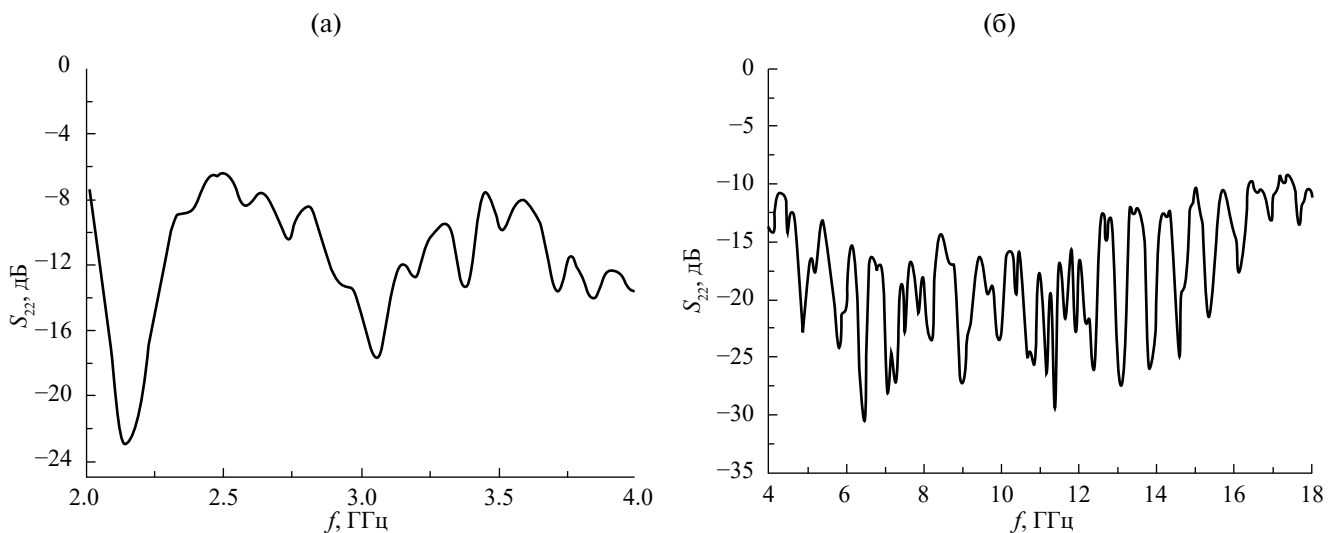


Рис. 5. Характеристики коэффициента отражения экспериментального образца углеволокнистого войлока, модифицированного 20%-ным раствором оксида железа Fe_3O_4 , с диаметром частиц от 1 до 5 мкм в диапазонах частот 2...4 ГГц (а) и 4...18 ГГц (б).

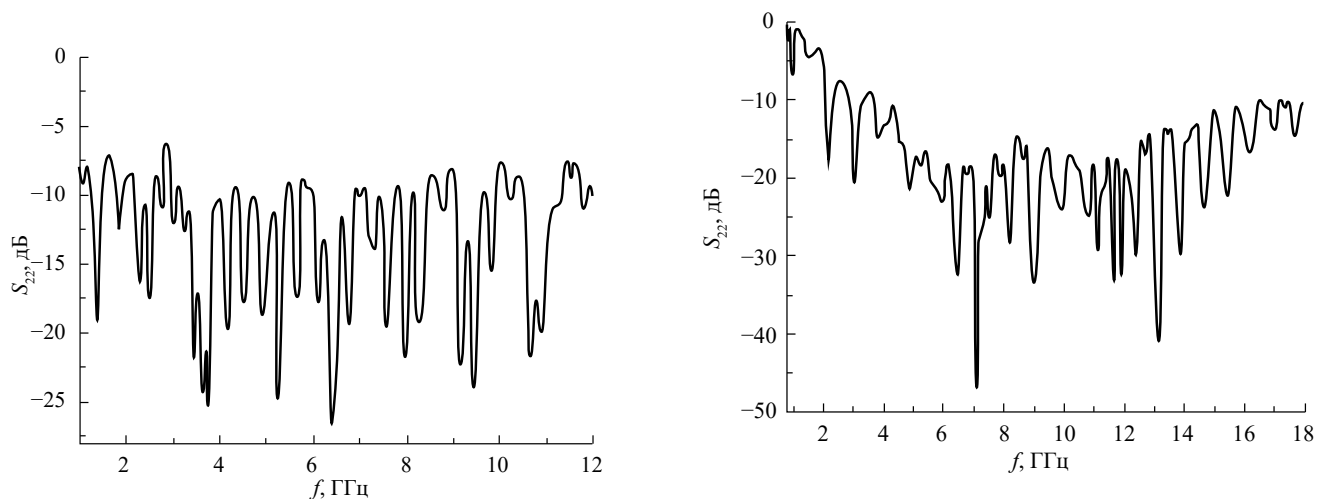


Рис. 6. Характеристика коэффициента отражения модифицированного стеклопластика.

Рис. 7. Характеристика коэффициента отражения экспериментального образца РПМ ЭМИ в диапазоне частот 0.8...18 ГГц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный РПМ ЭМИ градиентного типа с использованием углеволокнистого войлока на основе карбонизированного вискозного волокна — материал углеродный нетканый «Карбопон В22-М» имеет коэффициент отражения от -10 до -30 дБ в диапазоне частот от 2 до 18 ГГц, напряжение изгиба и напряжение растяжения ≥ 300 МПа; процент деформации 0.7%; плотность ≤ 2.5 г/см³ и толщину ≤ 6 мм. Эти характеристики определяются электрофизическими и конструктивными свойствами диэлектрических слоев, концентрацией проводящего наполнителя оксида железа Fe₃O₄, свойствами модифицированного радиопрозрачного стеклопластика. Материал может изготавливаться как в виде плоских панелей заданного размера, так и в виде сложных заказных форм.

Созданный РПМ может быть использован для скрытия расположенных под ним крупногабаритных движущихся либо неподвижных объектов от систем наблюдения радиолокационного обнаружения, защиты радиоэлектронной аппаратуры, носителей информации и биологических объектов от повышенного уровня электромагнитного излучения, а также локализации электромагнитных излучений.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев А.А., Кондрашов С.В., Лепешкин В.В., Романов А.М.* //Авиационные материалы и технологии. 2012. № 6. С. 348.
2. *Лабунов В.А., Жданок С.А., Карпович В.А. и др.* // Фундамент. и прикл. физич. исслед. 2010–2016 гг. Сб. трудов. Минск: Изд. центр БГУ, 2016. С. 348.
3. *Беспалова Е.Е.* // Труды ВИАМ. 2015. № 3. С. 45.
4. *Иванова В.И., Кибец С.Г., Краснолобов И.И. и др.* // Журн. радиоэлектроники. 2016. № 7. С. 1.
5. *Лыньков Л. М., Богуш, В.А., Глыбин, В. П. и др.* Гибкие конструкции экранов электромагнитного излучения. Минск, 2000.
6. *Богуш, В. А., Борботько, Т. В., Гусинский, А. В. и др.* Электромагнитные излучения. Методы и средства защиты. Минск: Бестпринт, 2003.
7. *Vogush, V.* // J. Optoelectron. Adv. Mater. 2005. V. 7. № 3. P. 1635.
8. *Звездина М.Ю., Карелова Е.С., Касьянов А.О. и др.* Композиционные материалы: разработка и применение. Новосибирск: СибАК, 2017.
9. *Фитцер Э., Дифендорф Р., Калнин И. и др.* Углеродные волокна и углекомпозиты / Пер. с англ. под ред. Э. Фитцера. М.: Мир, 1988.
10. *Priou A., Sihvola A., Tretyakov S., Vinogradov A.* // NATO ASI Ser. 3. High Technology. Kluwer Akad. Publ. The Netherialands, 1997. V. 28. P. 396.
11. *Агафонова А.С., Беляев А.А., Кондрашов Э.К., Романов А.М.* // Авиаци. материалы и технологии. 2013. № 3. С. 56.
12. *Лушина М.В., Паршин С.Г., Ржевский А.А.* // Системы управления и обработка информации. 2011. № 22. С. 208.
13. *Chung D.D.L.* // Carbon. 2001. V. 39. P. 279.
14. *Shi He, Shulga S. N., Kokodity N. G.* // J. Commun. Technol. Electron. 2011. V. 56. P. 1193.
15. *Kuzmichev V. M., Kokodii N. G., Safronov B. V., Balkashin V. P.* // J. Commun. Technol. Electron. 2003. V. 48. № 11. P. 1240.
16. *Cofer C.G., Mccoay D.E.* Method Fabrication of Electroconductive Fibers. US Pat. № 3022026. Publ. March 13, 2019.

BROADBAND ABSORBER OF ELECTROMAGNETIC RADIATION

**V. A. Bogush, V. A. Labunov, A. V. Gusinsky, V. A. Karpovich,
V. N. Rodionova*, N. A. Pevneva, M. M. Kasperovich, I. A. Kashko**

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (BSUIR),
Petrusya Brovki str., 6, Minsk, 220013 Republic of Belarus*

**E-mail: valent-r@yandex.by*

Received January 15, 2024, revised August 01, 2024, accepted August 15, 2024

An absorber of electromagnetic waves of a gradient type has been obtained using carbon fiber felt “Karbopon-V22M” with the following characteristics: reflection coefficient from -10 to -30 dB in the frequency range from 2 to 18 GHz, bending stress and tensile stress ≥ 300 MPa (deformation percentage -0.7%); density ≤ 2.5 g/cm³, thickness ≤ 6 mm. The prospects of using the created radio-absorbing material for concealing large-sized moving or stationary objects located underneath from radar detection systems, as well as for protecting electronic equipment, information carriers and biological objects from increased levels of electromagnetic radiation, localization of electromagnetic radiation are shown.

Keywords: ultra-high frequencies, bulk absorbing materials, absorption and reflection of electromagnetic radiation, electromagnetic protection

УДК 621.396.67

ДВУХПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫЙ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РУПОРНЫЙ ОБЛУЧАТЕЛЬ

© 2024 г. В. А. Калошин^{а,*}, Нгуен Тхе Тхань^б

^аИнститут радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125007 Российская Федерация

^бМосковский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет),
Институтский пер., 9, Долгопрудный, Московская обл., 141700 Российская Федерация

*E-mail: vak@cplire.ru

Поступила в редакцию 25.03.2024 г.

После доработки 03.04.2024 г.

Принята к публикации 24.04.2024 г.

Предложен и исследован двухполяризационный сверхширокополосный облучатель в виде металлического четырехреберного конического рупора с конической двухслойной диэлектрической вставкой. Электродинамическое моделирование и оптимизация параметров перехода проведены с использованием методов конечных элементов и конечных разностей во временной области. Показано, что предложенный облучатель обеспечивает согласование ниже уровня -10 дБ в полосе частот $6...40$ ГГц и коэффициент использования поверхности однозеркальной офсетной системы более 0.5 в полосе частот $6...30$ ГГц.

Ключевые слова: сверхширокополосный облучатель, металлодиэлектрический рупор, четырехреберный рупор, оптимизация параметров

DOI: 10.31857/S0033849424100036, EDN: HQLRPA

ВВЕДЕНИЕ

Разработка сверхширокополосного (СШП) облучателя является актуальной, но достаточно сложной задачей. Это связано с необходимостью реализации как согласования облучателя, так и стабильной амплитудной и фазовой диаграмм направленности (ДН), и в том числе стабильного положения фазового центра в полосе частот более 50% .

Наиболее популярными СШП-облучателями СВЧ-диапазона волн являются круглые нерегулярные четырехреберные рупоры [1–10].

Круглый нерегулярный рупор с четырьмя криволинейными ребрами, исследованный в работе [1], обеспечивает в полосе частот $2...12$ ГГц согласование по уровню -10 дБ и ширину ДН по уровню -10 дБ от 65 до 110 град.

В работе [2] аналогичный облучатель обеспечивает согласование по уровню -10 дБ в полосе частот $1.9...19$ ГГц и ширину ДН от 70 до 110 град.

В работе [3] оптимизация образующей рупора и профиля ребер обеспечила согласование по уровню -10 дБ облучателя в полосе $1...6.75$ ГГц и ширину ДН в H -плоскости от 60 до 100 град, в E -плоскости — от 80 до 100 град.

В работе [4] также проведена оптимизация профилей рупора и ребер, а в задней части рупора для улучшения согласования имеется коническая полость. Реализовано согласование по уровню -10 дБ в полосе частот $4.6...24$ ГГц. Рассчитанная величина апертурного коэффициента использования поверхности (КИП) офсетной двухзеркальной антенны (ДЗА) типа Грегори с оптимизированным облучателем в этой полосе частот более 0.6 .

Исследованный в работе [5] облучатель обеспечивает согласование по уровню -10 дБ в полосе частот от 4 до 19 ГГц, апертурный КИП офсетной ДЗА типа Грегори с этим облучателем выше 0.55 в полосе $2.4...24$ ГГц.

В работе [6] исследована конструкция круглого нерегулярного металлодиэлектрического рупора с четырьмя криволинейными продольными ребрами, криволинейной образующей стенок рупора и диэлектрической вставкой, а также гофрированным фланцем. Оптимизация профиля стенок, ребер и диэлектрической вставки позволила обеспечить согласование по уровню -14 дБ в полосе частот $0.7...4.2$ ГГц с шириной ДН в этой полосе частот от 90 до 130 град.

В работах [7, 8] исследован облучатель с четырьмя криволинейными продольными ребрами, криволинейной образующей стенок рупора и диэлектрической вставкой. Облучатель обеспечивает согласование на уровне -8 дБ в полосе частот $1.5...15.5$ ГГц и ширину ДН от 80 до 160 град в H -плоскости и от 140 до 200 град в E -плоскости. Рассчитанная величина апертурного КИП облучаемой осесимметричной однозеркальной антенны в этой полосе частот выше 0.43 .

В работе [9] также исследован облучатель с четырьмя криволинейными продольными ребрами, криволинейной образующей стенок рупора и диэлектрической вставкой. Облучатель обеспечивает коэффициент отражения (КО) ниже уровня -8 дБ в полосе $1...20$ ГГц. Рассчитанная величина апертурного КИП облучаемой офсетной ДЗА выше 0.55 в этой полосе частот.

Недостатком перечисленных выше облучателей является сложная конструкция.

В работе [10] предложен и исследован облучатель простой конструкции в виде конического металлического рупора с четырьмя прямолинейными продольными ребрами с конической диэлектрической вставкой и рупорным возбуждателем с криволинейным профилем ребер. Недостатком облучателя является сравнительно узкая полоса частот ($7.5...18.5$ ГГц).

Цель данной работы — расширение полосы частот двухполяризаационного облучателя в виде металлического четырехреберного конического рупора с конической диэлектрической вставкой.

1. КОНСТРУКЦИЯ ОБЛУЧАТЕЛЯ

С целью расширения полосы частот по сравнению с двухполяризаационным четырехреберным коническим рупорным облучателем с однородной диэлектрической вставкой [10] рассмотрим аналогичный рупор с двухслойной конической диэлектрической вставкой (рис. 1).

Облучатель, как и в работе [10], состоит из двух частей: конического четырехреберного металлического рупора 1 длиной L_1 и радиусом апертуры c , и возбуждателя 2 в виде конического четырехреберного рупора длиной L_2 и выходным радиусом R с питающим, закороченном на конце круглым волноводом радиусом r , длиной L_3 . Внутри ру-

пора 1 вдоль его оси расположена двухслойная коническая диэлектрическая вставка 3 , которая заходит внутрь возбуждателя и касается четырех металлических ребер 4 , расположенных в ортогональных плоскостях. Апертура рупора закрыта диэлектрической пластиной 5 , с радиусом c и диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Двухслойная диэлектрическая вставка 3 состоит из внутреннего конуса, диэлектрическая проницаемость которого ϵ_1 и радиус основания a , и внешнего конуса с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 и радиусом основания b .

Внутри рупора 1 ребра прямолинейные с прямоугольным вырезом на конце, внутри возбуждателя 2 — профиль ребер экспоненциальный:

$$a(z) = c_1 \exp(Kz) + c_2, \tag{1}$$

где

$$c_1 = (a_0 - a_1) / (\exp(KL_2) - 1),$$

$$c_2 = (a_1 \exp(KL_2) - a_0) / (\exp(KL_2) - 1),$$

a_0, a_1, K — параметры оптимизации с целью минимизации величины КО.

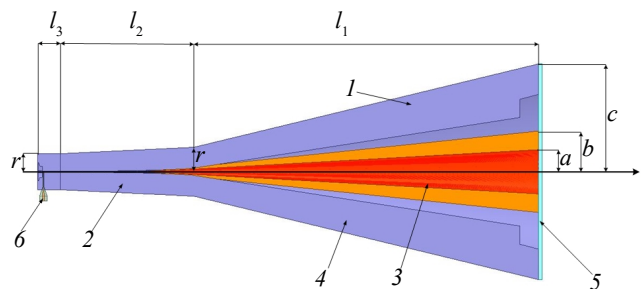


Рис. 1. Продольное сечение металлодиэлектрического рупорного облучателя.

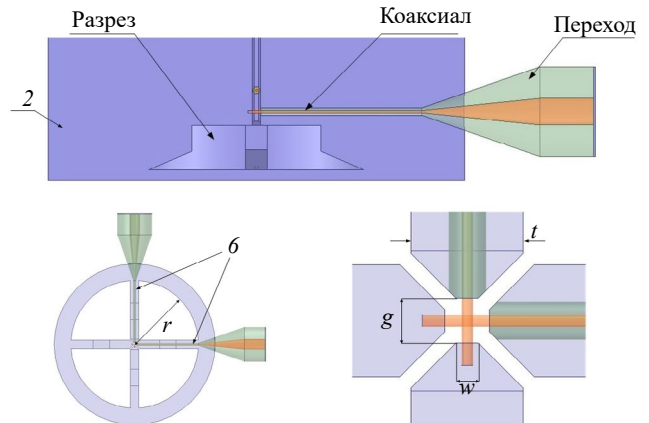


Рис. 2. Возбуждающий узел.

Круглый волновод возбуждается двумя питающими коаксиальными линиями диаметром 1.66 мм, расположенными внутри соседних ребер (рис. 2). Внутренние жилы коаксиальных линий диаметром 0.5 мм соединены с противоположными ребрами. Коаксиальные линии через линейные переходы соединены с разьемами (на рисунке не показаны).

Образующие ребер имеют прямоугольную форму с кромками в форме равнобедренной трапеции. На концах ребер выполнены пазы с ломаной образующей (см. рис. 2).

2. ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РУПОРНОГО ОБЛУЧАТЕЛЯ

С использованием электродинамического моделирования методом конечных элементов (МКЭ) в программной среде ANSYS HFSS сначала были исследованы частотные зависимости ширины главного лепестка ДН рупорного облучателя. В процессе исследования проводилась оптимизация параметров для заданной длины облучателя 270 мм с целью максимизации полосы частот,

в которой уровень главного лепестка ДН находится в интервале $-9...-18$ дБ. В результате оптимизации для угла отклонения от оси 28° были найдены следующие оптимальные значения параметров, которые обеспечивают стабильность ширины главного лепестка ДН: $L_1 = 186$ мм, $L_2 = 72$ мм, $a = 15.25$ мм, $b = 28$ мм, $c = 64$ мм, $R = 22.3$ мм, $\epsilon_1 = 1.4$, $\epsilon_2 = 1.15$.

Диаграммы направленности облучателя с указанными параметрами в E - и H -плоскостях на пяти частотах, рассчитанные с использованием МКЭ, представлены на рис. 3. Из рисунка видно, что ширина ДН по уровню -10 дБ как в E -, так и в H -плоскости меняется от 36 до 60 град.

На рис. 4 представлены частотные зависимости полуширины (ПШ) главного лепестка ДН облучателя по уровням -9 и -18 дБ. Из рисунка видно, что в полосе частот 6...30 ГГц при отклонении от оси облучателя на угол 28° уровень главного лепестка ДН находится в пределах $-10...-18$ дБ. Также видно, что изменения ПШ ДН в полосе частот в E - и H -плоскости коррелированы, т.е. форма главного лепестка ДН остается осесимметричной.

Далее с использованием МКЭ было исследовано отклонение положения фазового центра облу-

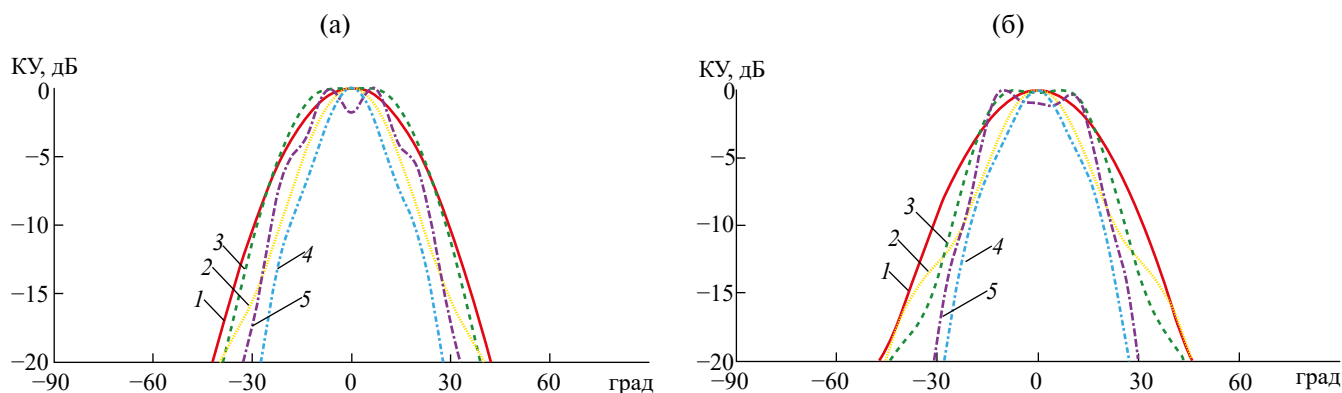


Рис. 3. Нормированные диаграммы направленности облучателя в E - (а) и H -плоскости (б) на частотах 6 (1), 12 (2), 18 (3), 24 (4), 30 ГГц (5).

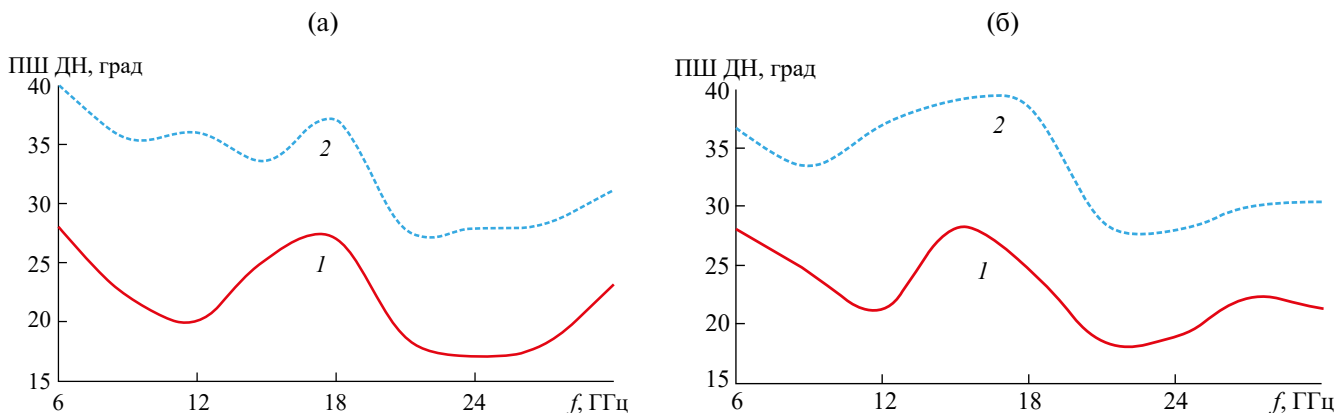


Рис. 4. Зависимость полуширины главного лепестка ДН облучателя от частоты по уровню -9 (1) и -18 дБ (2) в E - (а) и H -плоскости (б).

чателю (Δz) от плоскости апертуры в зависимости от частоты по следующей методике. Фазовые ДН облучателя вычисляли относительно начала координат в центре его апертуры. Далее находили сдвиг фаз $\Delta\phi$ между значением фазовой ДН на оси облучателя и под углом θ_m , величина которого определялась из условия справедливости аппроксимации фазовой ДН для углов $\theta < \theta_m$ в виде $\Delta\phi = k\delta\cos\theta$, где $k = 2\pi/\lambda$ (λ — длина волны). Отклонение положения фазового центра облучателя (Δz) от плоскости апертуры определяли по формуле

$$\delta = (\Delta\phi\lambda) / (2\pi\cos\theta_m). \quad (2)$$

Рассчитанные с использованием МКЭ частотные зависимости отклонения положения фазового центра облучателя (Δz) от среднего положения приведены на рис. 5. Как видно из рисунка, его среднее положение — в апертуре облучателя ($\Delta z = 0$), а разброс положений фазового центра в полосе частот 6...30 ГГц от среднего положения в обеих плоскостях не превышает 8 мм.

На рис. 6 приведены рассчитанные с использованием МКЭ на пяти частотах фазовые ДН в E - и H -плоскости относительно среднего положения фазового центра. Как видно из рисунка, фазовые искажения ДН в угле 56° не превышают 25° .

В результате оптимизации с целью максимизации полосы частот, в которой облучатель обеспечивает уровень КО ниже -10 дБ были найдены оптимальные значения следующих параметров: $r = 11$, $t = 1$ мм, $g = 0.4$ мм, $w = 0.2$ мм, $a_0 = 40.48$ мм, $a_1 = 0.2$ мм, $K = 0.04$.

На рис. 7 представлена частотная зависимость КО рупорного облучателя с указанными параметрами, рассчитанная с использованием МКЭ и метода конечных разностей во временной области (МКРВО).

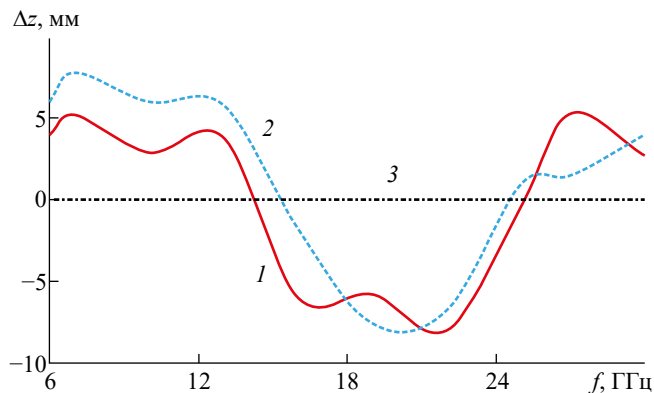


Рис. 5. Частотная зависимость отклонения положения фазового центра облучателя от среднего положения в E - (1) и H -плоскости (2) и его среднее положение (3).

Из рисунка видно, что КО облучателя в полосе 6...40 ГГц не превышает -10 дБ при возбуждении с обоих входов.

На рис. 8 представлена частотная зависимость развязки между входами рупорного облучателя, рассчитанная с использованием МКЭ и МКРВО. Как видно из рисунка, эта величина в полосе частот 5...49 ГГц не превышает -30 дБ.

Рассчитанные с использованием МКЭ и МКРВО частотные зависимости коэффициента усиления

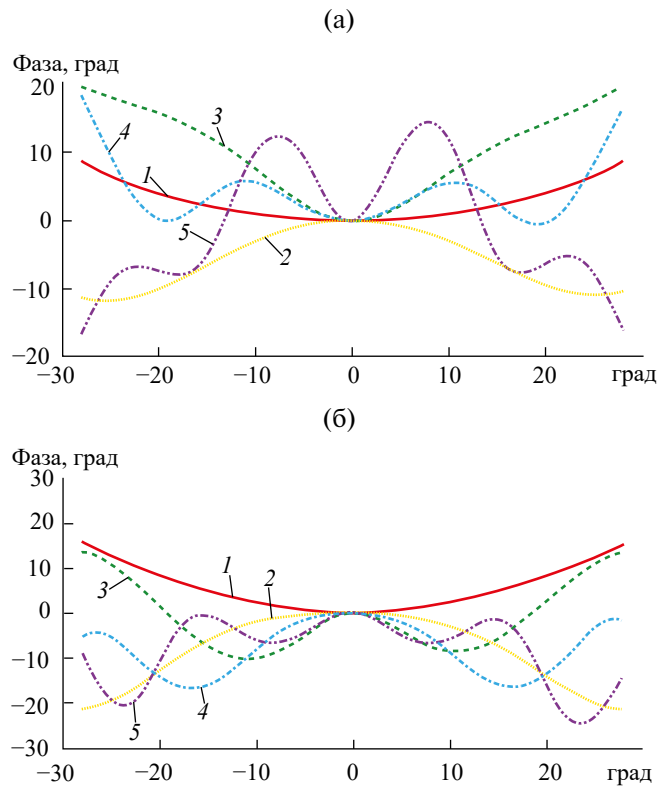


Рис. 6. Фазовые диаграммы направленности в E - (а) и H -плоскости (б) на частотах 6 (1), 12 (2), 18 (3), 24 (4) и 30 ГГц (5).

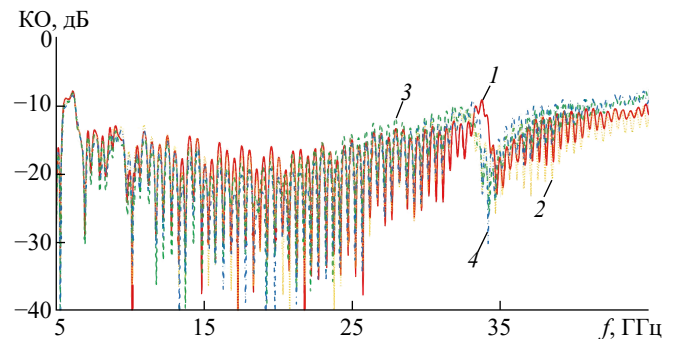


Рис. 7. Частотная зависимость коэффициента отражения облучателя с первого (1, 2) и второго входа (3, 4), рассчитанная с использованием МКЭ (1, 3) и МКРВО (2, 4).

(КУ) и величины КИП параболической офсетной зеркальной антенны с угловым размером 60° и апертурой диаметром 600 мм приведены на рис. 9.

Видно, что результаты, рассчитанные с использованием МКЭ и МКРВО, практически совпадают, при этом КУ антенны монотонно возрастает при увеличении частоты, а величина КИП выше 0.5 в полосе частот 6...30 ГГц.

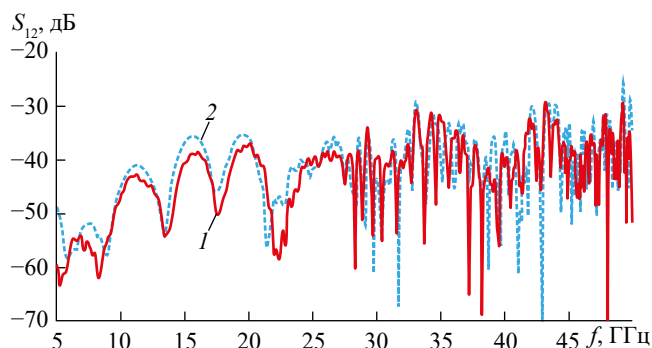


Рис. 8. Частотная зависимость коэффициента развязки по входу облучателя с использованием МКЭ (1), МКРВО (2).

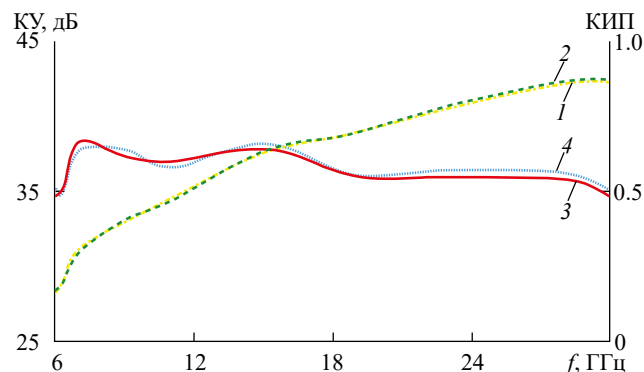


Рис. 9. Зависимость коэффициента усиления (1, 2) и величины КИП (3, 4) зеркальной антенны от частоты, рассчитанная с использованием МКЭ (1, 3) и МКРВО (2, 4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Разработанный и оптимизированный облучатель в полосе частот 6...40 ГГц согласован по уровню -10 дБ при уровне развязки по входу ниже -30 дБ.

2. Разработанный и оптимизированный облучатель обеспечивает на угле 28° от оси уровень спада ДН в E - и H -плоскости от -9 до -18 дБ в полосе частот 6...30 ГГц.

3. Разработанный и оптимизированный облучатель при облучении офсетного параболического зеркала с угловым размером 60° обеспечивает величину КИП более 0.5 в полосе частот 6...30 ГГц.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания (тема 0030-2019-006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akgiray A., Weinreb S., Imbriale W. // Proc. 2011 IEEE Int. Symp. on Antennas and Propagation. Spokane. 03-08 Jul. N.Y.:IEEE, 2011. P. 1135.
2. Akgiray A., Weinreb S. // Proc. 2012 IEEE Int. Conf. on Ultra-Wideband. Syracuse. 17-20 Sept. N.Y.: IEEE, 2012. P. 518.
3. Solak B., Secmen M., Tekin A. // Appl. Comp. Electromagnetics Soc. J. 2018. V. 33. № 9. P. 1009.
4. Dong Bin, Yang Jian, Dahlstrom J. et al. // IEEE Trans. 2019. V. AP-67. № 1. P. 585.
5. Ma Yue, Hwang C.S., Pang F. et al. // IEEE Access. 2020. V. 8. Article No. 81101.
6. Dunning A., Bowen M., Bourne M. et al. // Proc. 2015 IEEE-APS Topical Conf. on Antennas and Propagation for Wireless Commun. (APWC). Turin. 07-11 Sept. N.Y.:IEEE, 2015. P. 787.
7. Flygare J., Pantaleev M., Olvhammar S. // Proc. 12th Europ. Conf. on Antennas and Propagation (EuCAP 2018). London. 09-13 Apr. N.Y.:IEEE, 2018. Paper No. 0817.
8. Flygare J., Pantaleev M. // IEEE Trans. 2020. V. AP-68. № 1. P. 207.
9. Flygare J., Jang Jian., Pollak A.W. et al. // IEEE Trans. 2023. V. AP-71. № 3. P. 2110.
10. Калошин В.А., Фам В.Ч. // РЭ. 2021. Т. 66. № 7. С. 649.

DUAL-POLARIZATION ULTRA-WIDEBAND METAL-DIELECTRIC HORN FEED

V. A. Kaloshin^{a,*}, Nguyen The Thanh^b

^a*Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences,
ul. Mokhovaya, 11, building 7, Moscow, 125007 Russian Federation*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Institutsky per., 9, Dolgoprudny, Moscow region, 141700 Russian Federation*

**E-mail: vak@cplire.ru*

Received March 25, 2024, revised April 03, 2024, accepted April, 24, 2024

A dual-polarization ultra-wideband feed in the form of a metal four-ridge conical horn with a conical two-layer dielectric insert is proposed and investigated. Electrodynamic modeling and optimization of the transition parameters are carried out using finite element and finite difference methods in the time domain. It is shown that the proposed feed provides matching below the level of -10 dB in the frequency band of 6...40 GHz and the efficiency of a single-mirror offset system of more than 0.5 in the frequency band of 6...30 GHz.

Keywords: ultra-wideband feed, metal-dielectric horn, four- ridge horn, parameter optimization

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

УДК 621.391.8;519.246.2

**МЕТОД СИНТЕЗА ЭФФЕКТИВНЫХ ОЦЕНОК
ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ
ОТ ПОЛНЫХ ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИК**

© 2024 г. А. Г. Вострецов^{a,b,*}, С. Г. Филатова^{a,c}

^aНовосибирский государственный технический университет,
просп. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073 Российская Федерация

^bИнститут горного дела им. Н.А. Чинакала СО РАН,
Красный просп., 54, Новосибирск, 630091 Российская Федерация

^cФедеральный институт промышленной собственности,
Бережковская наб., 30, корп. 1, Москва, 125993 Российская Федерация

*E-mail: vostreczov@corp.nstu.ru

Поступила в редакцию 22.02.2024 г.

После доработки 22.03.2024 г.

Принята к публикации 24.03.2024 г.

Предложен метод синтеза эффективных оценок параметров случайного процесса, распределение отсчетов которого обладает полными достаточными статистиками. Метод основан на представлении оцениваемых параметров процесса в виде решения системы уравнений для математических ожиданий функций от полных достаточных статистик, подобранных таким образом, чтобы система уравнений была разрешима относительно оцениваемых параметров, с последующей заменой математических ожиданий в полученном решении на эти функции. Приведены условия, при выполнении которых получаемые оценки будут эффективными. Приведены примеры оценок параметров распределений выборок из равномерного распределения и аддитивной смеси гауссовского шума и последовательности прямоугольных импульсов с неизвестными амплитудами, показана их эффективность.

Ключевые слова: оценка параметров сигналов, эффективные оценки, априорная неопределенность, полные достаточные статистики

DOI: 10.31857/S0033849424100044, **EDN:** HQKKUJ

ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах связи, радиолокации, радионавигации, дистанционного зондирования Земли, масс-спектрометрии, медико-биологических исследований и других приложений возникают проблемы оценки параметров наблюдаемых процессов в условиях действия априорно не определенных шумов и помех [1–5]. При решении практических задач использование широко распространенных байесовских, марковских оценок, оценок максимального правдоподобия и максимума апостериорной вероятности [6–11] в ряде случаев затруднено. Например, слишком велика

размерность системы нелинейных уравнений при использовании метода максимального правдоподобия; полученные решения носят численный характер и становятся непригодными для реализации в цифровых системах в реальном масштабе времени, либо число неизвестных параметров увеличивается с ростом объема выборки, что ведет к несостоятельности получаемых оценок. Поэтому задача поиска методов получения эффективных оценок параметров сигналов, наблюдаемых на фоне помех, продолжает оставаться актуальной.

В большинстве источников под эффективными оценками понимают несмещенные оценки, матрица вторых моментов которых достигает нижней границы Крамера–Рао. Однако далеко не для всех распределений наблюдаемых данных существуют

такие оценки. Поэтому, как и в работе [12], под эффективной мы будем понимать несмещенную оценку, минимизирующую для данного распределения наблюдаемых данных квадратичную функцию потерь. А под наиболее эффективной — эффективную оценку, достигающую нижней границы Крамера—Рао. Естественно, что если существует наиболее эффективная оценка, то эффективная оценка совпадает с нею.

В настоящее время появились работы, в которых эффективная оценка параметров сигнала строится с использованием свойств полных достаточных статистик. Так, в работах [13, 14] на основе полных достаточных статистик получены эффективные оценки фазы и амплитуды сигнала, уровня постоянной составляющей и дисперсии шума в условиях априорной неопределенности относительно этих параметров. В работе [15] предложены эффективные оценки периода квазипрямоугольных импульсов с учетом коэффициента заполнения и коэффициента прямоугольности импульса, в работе [16] — оценки параметров контактов Джозефсона по результатам измерения их вольт-амперных характеристик.

Оценки на основе полных достаточных статистик обладают рядом преимуществ перед другими методами оценки. Во-первых, несмещенные оценки на основе полных достаточных статистик всегда являются эффективными, а при наличии смещения имеют минимальную квадратичную функцию потерь в классе оценок с данной величиной смещения [17, 18]. Во-вторых, во многих случаях применение предлагаемого в данной статье метода приводит к более простой системе уравнений для получения оценок, чем при использовании других методов, и ее решение может быть представлено в аналитическом виде.

Цель данной работы состоит в разработке пригодного для практического использования регулярного метода синтеза эффективных оценок параметров сигналов и помех на основе использования математических ожиданий специально подобранных функций от полных достаточных статистик.

1. МОДЕЛЬ НАБЛЮДАЕМОГО ПРОЦЕССА

Пусть наблюдаемый процесс $x(t)$ представляет собой известную функцию $q(\cdot)$ сигнала $s(t, \vec{\gamma})$ и помехи $\eta(t, \vec{v})$ т.е.

$$x(t) = q[s(t, \vec{\gamma}), \eta(t, \vec{v})].$$

При этом сигнал характеризуется вектором параметров

$$\vec{\gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}^T \in \Gamma,$$

а помеха — вектором параметров

$$\vec{v} = \{v_1, \dots, v_k\}^T \in N,$$

где Γ и N — области значений, r и k — размерности векторных параметров $\vec{\gamma}$ и \vec{v} соответственно, T — знак транспонирования.

В условиях априорной неопределенности относительно параметров сигнала и помехи часто используют метод контраста [19], согласно которому для синтеза алгоритма оценки параметров сигнала и помехи формируется объединенная выборка \vec{x} , состоящая из двух статистически независимых выборок — помеховой выборки $\vec{y} = \{y_1, \dots, y_N\}^T \in Y$ из наблюдаемого процесса на интервале T_1 , где полезный сигнал заведомо отсутствует, и сформированной на интервале T_2 выборки $\vec{u} = \{u_1, \dots, u_K\}^T \in U$ из смеси сигнала и помехи. Здесь Y и K — соответственно размерности выборок \vec{y} и \vec{u} , $N + K = M$; Y и U — области значений векторов \vec{y} и \vec{u} . Таким образом,

$$\vec{x} = \{x_1, \dots, x_M\}^T = \{\vec{y}^T, \vec{u}^T\}^T,$$

причем $\vec{x} \in X$, а $X = Y \times U$.

Выборка \vec{x} характеризуется распределением вероятностей $P_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}$. D -мерный параметр $\vec{\Theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_D\}^T$ распределения $P_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}$ представляет собой некоторую известную в общем случае векторную функцию параметров сигнала и помехи, т.е.

$$\vec{\Theta} = \vec{f}(\vec{\gamma}, \vec{v}) \in \Omega,$$

где Ω — область значений параметра $\vec{\Theta}$.

На практике часто распределения наблюдаемых данных $P_{\vec{\Theta}}^{\vec{x}}$ обладают полными достаточными для параметра $\vec{\Theta}$ статистиками

$$\vec{T}(\vec{x}) = \{T_1(\vec{x}), \dots, T_D(\vec{x})\}^T.$$

К числу таких распределений, в частности, относятся распределения из экспоненциального семейства, каноническое представление плотностей вероятностей которых имеет следующий вид:

$$w(\vec{x}) = C(\vec{\Theta}) \exp\left\{\sum_{i=1}^D \Theta_i T_i(\vec{x})\right\} g(\vec{x}), \quad (1)$$

где $C(\vec{\Theta})$ — нормирующий множитель, $g(\vec{x})$ — функция, не зависящая от параметра $\vec{\Theta}$. В случае, когда область Ω возможных значений параметра $\vec{\Theta}$ содержит D -мерный интервал, распределения (1)

и соответствующие достаточные статистики будут полными [20].

На практике некоторые или даже все компоненты векторных параметров сигнала и помехи, а следовательно, и параметра Θ , являются априорно неопределенными. Оценке подлежит один или несколько параметров сигнала и/или помехи.

2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА И ПОМЕХИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ПОЛНЫХ ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИК

Обозначим $\vec{\Lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_L\}^T$ вектор оцениваемых параметров сигнала и/или помехи. В качестве компонентов вектора $\vec{\Lambda}$ могут выступать соответствующие компоненты вектора параметров сигнала γ и (или) помехи v ; L — число оцениваемых параметров. Таким образом, векторный параметр Θ распределения (1) зависит как от подлежащего оценке вектора параметров Λ , так и от неопределяемых параметров сигнала и шума. Векторный параметр Λ может быть представлен в виде некоторой векторной функции от параметра Θ распределения $P_{\Theta}^{\vec{x}}$, т.е.

$$\vec{\Lambda} = \vec{\psi}(\vec{\Theta}). \quad (2)$$

Введем векторные функции

$$\vec{h}[\vec{T}(\vec{x})] = \{h_1[\vec{T}(\vec{x})], \dots, h_L[\vec{T}(\vec{x})]\}^T$$

и

$$\vec{V}(\vec{\Theta}) = \{V_1(\vec{\Theta}), \dots, V_L(\vec{\Theta})\}^T.$$

Компоненты функции $\vec{V}(\vec{\Theta})$ представляют собой зависящие от параметра Θ математические ожидания соответствующих компонентов функции $\vec{h}[\vec{T}(\vec{x})]$, т.е.

$$V_j(\vec{\Theta}) = E_{\Theta}^{\vec{x}} \{h_j[\vec{T}(\vec{x})]\},$$

где $j = 1, \dots, L$; $E_{\Theta}^{\vec{x}} \{\cdot\}$ означает усреднение по распределению $P_{\Theta}^{\vec{x}}$. Обозначим $\vec{m} = \{m_1, \dots, m_L\}^T$ — вектор значений математических ожиданий компонентов функции $\vec{h}[\vec{T}(\vec{x})]$, а саму функцию $\vec{h}[\vec{T}(\vec{x})]$ выберем так, чтобы система уравнений

$$\vec{m} = \vec{V}(\vec{\Theta}), \quad (3)$$

была однозначно и непрерывно разрешима относительно $\vec{\Lambda}$ в области значений $\vec{\Lambda} = \vec{\psi}(\vec{\Theta})$, $\vec{\Theta} \in \Omega$, т.е.

$$\vec{\Lambda} = \vec{s}(\vec{m}), \quad (4)$$

здесь $\vec{s}(\vec{m}) = \{s_1(\vec{m}), \dots, s_L(\vec{m})\}^T$ — решение системы уравнений (3) относительно $\vec{\Lambda}$.

Пусть вектор $\vec{h}[\vec{T}(\vec{x})]$ принадлежит области значений $\vec{V}(\vec{\Theta})$ при всех $\vec{x} \in X$. В качестве оценки параметра $\vec{\Lambda}$ примем вектор

$$\hat{\vec{\Lambda}}(\vec{x}) = \vec{s} \left\{ \vec{h}[\vec{T}(\vec{x})] \right\}. \quad (5)$$

Таким образом, для получения оценки $\hat{\vec{\Lambda}}(\vec{x})$ вектора параметров сигнала (помехи) Λ необходимо в решении (4) системы уравнений (3) компоненты вектора \vec{m} заменить соответствующими компонентами векторной функции $\vec{h}[\vec{T}(\vec{x})]$. В качестве компонентов функции $\vec{h}[\vec{T}(\vec{x})]$ часто бывает удобно выбрать функции вида

$$h_j[T_j(\vec{x})] = [T_j(\vec{x})]^j,$$

где $j = 1, 2, \dots$ — целые числа. В этом случае вектор \vec{m} представляет собой вектор начальных моментов соответствующих порядков полных достаточных статистик.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ПОЛНЫХ ДОСТАТОЧНЫХ СТАТИСТИК

Пусть $\hat{\vec{\Lambda}}(\vec{x})$ — оценка (5) L -мерного параметра $\vec{\Lambda}$; \vec{A} — произвольный L -мерный вектор. Качество оценки $\hat{\vec{\Lambda}}(\vec{x})$ характеризуется средним значением $E_{\Theta}^{\vec{x}} \{Q(\vec{x})\}$ квадратичной функции потерь

$$Q(\vec{x}) = \left(\hat{\vec{\Lambda}}(\vec{x}) - \vec{\Lambda}, \vec{A} \right)^2,$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение. Данная функция определяет рассеяние оценки относительно истинного значения параметра и зависит как от матрицы вторых моментов оценки, так и от величины ее смещения

$$\vec{b} = E_{\Theta}^{\vec{x}} \left\{ \hat{\vec{\Lambda}}(\vec{x}) \right\} - \vec{\Lambda}.$$

Так как оценка $\hat{\vec{\Lambda}}(\vec{x})$ зависит от \vec{x} только через $\vec{T}(\vec{x})$, т.е. является функцией от полных достаточных статистик, то существенным ее преимуществом является то, что при любых конечных M она обеспечит минимум квадратичной функции потерь в классе $K_{\vec{b}}$ оценок со смещением \vec{b} [17]. При $\vec{b} = 0$ оценка будет эффективной, при существовании наиболее эффективной оценки — наиболее эффективной.

Отдельно рассмотрим случай, когда компоненты векторной функции $\vec{s}(\vec{m})$ в выражении (4) представляют собой линейные комбинации компонентов вектора \vec{m} , т.е. для всех $j = 1, \dots, L$ получаем

$$s_j(\vec{m}) = \sum_{i=1}^L \alpha_i^{(j)} m_i, \quad (6)$$

где $\alpha_i^{(j)}$ — скаляр. В этом случае оценка (5) будет несмещенной и, следовательно, эффективной. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству, приведенному в работе [21] для случая, когда

$$V_j(\vec{\Theta}) = E_{\vec{\Theta}} \left\{ T_j^{k_j}(\vec{x}) \right\},$$

где $j = 1, \dots, L$, k_j — целое положительное число. Если условие (6) не выполняется, то величина смещения оценки в общем случае требует отдельного исследования.

Если наблюдаемый процесс $x(t)$ является стационарным в узком смысле случайным процессом, смещенная при конечных размерах выборки оценка становится асимптотически несмещенной. В этом случае наблюдаемая выборка \vec{x} представляет собой вектор одинаково распределенных случайных величин, характеризующих распределением $P_{\vec{x}}$. При

$$\vec{h}[\vec{T}(\vec{x})] = \left\{ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h_1(x_i), \dots, \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h_L(x_i) \right\}^T$$

оценка (5) будет классической оценкой по методу моментов [17]. В работе [17] подробно рассмотрены свойства таких оценок. В частности, они являются сильно состоятельными, т.е. при $n \rightarrow \infty$ оценки $\hat{\Lambda}(\vec{x})$ стремятся к истинным значениям $\bar{\Lambda}$ с вероятностью, равной 1. Кроме того, так как оценка $\hat{\Lambda}(\vec{x})$ является функцией полных достаточных статистик, то при конечных M и нулевом смещении она будет эффективной, а при ненулевом смещении — асимптотически эффективной, а значение квадратичной функции потерь при каждом конкретном объеме выборки будет оставаться минимально возможным [17].

Для одномерного параметра $\theta = \lambda$ имеем сильно состоятельную асимптотически нормальную оценку

$$\hat{\lambda} = s \left\{ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(x_i) \right\}$$

со средним, равным λ , и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{1}{M} [s'(\lambda)]^2 D[h(x)],$$

где $D[h(x)]$ — дисперсия случайной величины $h(x)$, $s'(\lambda)$ — производная функции $s(\lambda)$ в точке λ .

В качестве функций $h(x)$ в классическом методе моментов используют степенные функции $h(x) = x^j$ (отсюда и название метода). В этом случае

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(x_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i^j$$

представляет собой выборочный начальный момент j -го порядка случайной величины x .

4. ПРИМЕРЫ

4.1. Оценка параметра независимой выборки из равномерного распределения

Пусть $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_M\}^T$ — независимая выборка из равномерного на интервале $[0, \lambda]$ распределения с плотностью вероятности

$$w(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^M}, & 0 \leq x_i \leq \lambda \forall i = 1, \dots, M; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (7)$$

Требуется оценить величину параметра λ . В данном случае параметр распределения (7) одномерный. Полной достаточной статистикой для него является одномерная статистика [17]

$$T_1(\vec{x}) = \max_{i=1, \dots, M} (x_i).$$

Выберем функцию

$$h_1[T_1(\vec{x})] = T_1(\vec{x}),$$

тогда уравнение (3) примет следующий вид:

$$m_1 = M / (M + 1). \quad (8)$$

При вычислении правой части уравнения (8) учтено, что плотность вероятности статистики T_1 задается формулой

$$w(T_1) = \begin{cases} \frac{M T_1^{M-1}}{\lambda^M}, & 0 \leq T_1 \leq \lambda; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из уравнения (8) получаем

$$\lambda = \frac{M + 1}{M} m_1. \quad (9)$$

Заменяя в выражении (9) m_1 на $T_1(\vec{x})$, получаем оценку $\hat{\lambda}(\vec{x})$ параметра

$$\hat{\lambda}(\vec{x}) = \frac{M + 1}{M} T_1(\vec{x}) = \frac{M + 1}{M} \max_{i=1, \dots, M} (x_i). \quad (10)$$

Оценка (10) — эффективная, так как оцениваемый параметр согласно выражению (10) линейно зависит от начального момента m_1 . Традиционно используемая оценка максимального правдоподобия (МП)

$$\hat{\lambda}_{МП} = \max_{i=1, \dots, M} (x_i)$$

является асимптотически эффективной, но смещенной при конечных M .

4.2. Оценка дисперсии стационарного гауссовского случайного процесса по независимой выборке из аддитивной смеси стационарного гауссовского шума и последовательности прямоугольных импульсов с неизвестными амплитудами

Пусть наблюдаемый процесс представляет собой аддитивную смесь n прямоугольных импульсов с различными (и неизвестными) амплитудами U_i , $i = 0 \dots n - 1$, и стационарного гауссовского шума с нулевым средним значением и неизвестной дисперсией σ^2 . Длительность импульсов и шаг дискретизации наблюдаемого процесса соотносятся между собой таким образом, что на протяжении i -го импульса берется только два статистически независимых отсчета x_i и y_i . По выборкам

$$\vec{x} = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}^T, \vec{y} = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}^T$$

требуется оценить значение дисперсии σ^2 . Совместное распределение векторов \vec{x} и \vec{y} имеет следующий вид:

$$w(\vec{x}, \vec{y}) = C(\vec{U}, \sigma^2) \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i^2 + y_i^2) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{U_i}{\sigma^2} (x_i + y_i) \right\}, \quad (11)$$

где $\vec{U} = \{U_0, \dots, U_{n-1}\}^T$, $C(\vec{U}, \sigma^2)$ — нормирующий множитель.

Распределение (11) принадлежит экспоненциальному семейству распределений и характеризуется $(n + 1)$ -мерным параметром

$$\vec{\Theta} = \{\theta_0, \dots, \theta_n\}^T,$$

где $\theta_i = U_i / (\sigma^2)$ при $i = 0 \dots n - 1$, и $\theta_n = -1 / (2\sigma^2)$, и полной достаточной статистикой

$$\vec{T}(\vec{x}, \vec{y}) = \{T_0(\vec{x}, \vec{y}), \dots, T_n(\vec{x}, \vec{y})\}^T,$$

где $T_i(\vec{x}, \vec{y}) = (x_i + y_i)$ при $i = 0, \dots, n - 1$ и $T_n(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i^2 + y_i^2)$. Оценке подлежит одномерный параметр $\sigma^2 = -1 / (2\theta_n)$.

Выберем векторную функцию

$$\vec{h}[\vec{T}(\vec{x}, \vec{y})] = \left\{ [T_0(\vec{x})]^2, \dots, [T_{n-1}(\vec{x})]^2, T_n(\vec{x}) \right\}^T$$

и в соответствии с (2) составим систему из $(n + 1)$ уравнений

$$\begin{cases} m_i = E_{\vec{\Theta}}^{(\vec{x}, \vec{y})} \left\{ [T_i(\vec{x}, \vec{y})]^2 \right\} = 2\sigma^2 + 4U_i^2, i = 0, \dots, n - 1; \\ m_n = E_{\vec{\Theta}}^{(\vec{x}, \vec{y})} \left\{ T_n(\vec{x}, \vec{y}) \right\} = 2n\sigma^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} U_i^2. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно σ^2 , получим зависимость параметра σ^2 от математических ожиданий компонент векторной функции $\vec{h}[\vec{T}(\vec{x}, \vec{y})]$:

$$\sigma^2 = \frac{2m_n - \sum_{i=0}^{n-1} m_i}{2n}. \quad (12)$$

Из выражения (12) видно, что оцениваемый параметр σ^2 представляет собой линейную комбинацию математических ожиданий компонент векторной функции $\vec{h}[\vec{T}(\vec{x}, \vec{y})]$. Поэтому, заменяя в (12) m_i соответствующими значениями $T_i(\vec{x}, \vec{y})$,

получим искомую эффективную оценку $\widehat{\sigma^2}$ параметра σ^2 :

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma^2} &= \frac{1}{2n} \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} (x_i^2 + y_i^2) - \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + y_i)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

При тех же условиях оценка максимального правдоподобия, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\widehat{\sigma_{МП}^2} = \frac{1}{4n} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - y_i)^2,$$

ее дисперсия в четыре раза меньше, чем у оценки (13), но в отличие от оценки (13) она не является состоятельной, так как ее математическое ожидание равно $\sigma^2 / 2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача синтеза оценок параметров случайного процесса, распределение отсчетов которого обладает полными достаточными статистиками. Предложен регулярный метод синтеза эффективных оценок на основе представления оцениваемых параметров процесса в виде решения системы уравнений для математических ожиданий

функций от полных достаточных статистик, подобранных таким образом, чтобы система уравнений относительно оцениваемых параметров была разрешима, с последующей заменой полученного решения на эти функции.

Оценки будут эффективными для данного распределения наблюдаемых данных, если оцениваемые параметры представляют собой линейную комбинацию математических ожиданий функций от полных достаточных статистик. Если смещение оценки при конечных объемах выборки отличается от нуля, то полученные оценки обеспечат минимальное для данного смещения значение квадратичной функции потерь при каждом конкретном объеме выборки.

В качестве примеров получены эффективные оценки параметра распределения независимой выборки из равномерного распределения и дисперсии шумовой составляющей выборки из аддитивной смеси стационарного гауссовского шума и прямоугольных импульсов с неизвестными амплитудами. Показано, что данные оценки, в отличие от оценок максимального правдоподобия, являются несмещенными.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSUN-2023-0007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Woodward P.M.* Probability and Information Theory with Applications to Radar. N.Y.: McGraw-Hill, 1953.
2. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2006.
3. *den Dekker A. J., Sijbers J.* // *Physica Medica*. 2014. V. 30. № 7. P. 725.
4. *Разников В.В., Разникова М.О.* Информационно-аналитическая масс-спектрометрия. М.: Наука, 1991.
5. *Xinya Li, Zhiquan D.D., Rauchenstein L.T., Carlson T.J.* // *Rev. Sci. Instrum.* 2016. V. 87. № 4. Article No. 041502. doi:10.1063/1.5012687
6. *Губарев В.В.* Алгоритмы статистических измерений. М.: Энергоатомиздат, 1985.
7. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
8. *Миронов М.А.* Марковская теория оптимального оценивания случайных процессов. М.: Изд-во ГосНИИАС, 2013.
9. *Emery A.F., Valenti E., Bardot D.* // *Measurement Sci. Technol.* 2006. V. 18. № 1. P. 19. doi: 10.1088/0957-0233/18/1/003
10. *Morelli M., Moretti M.* // *IEEE Wireless Commun. Lett.* 2013. V. 2. № 1. P. 42. doi: 10.1109/WCL.2012.100912.120508.
11. *Shieh W.* // *IEEE Photonics Technol. Lett.* 2008. V. 20. № 8. P. 605. doi: 10.1109/LPT.2008.918873
12. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.
13. *Ivanov S.I., Liokumovich L.B., Medvedev A.V.* // *Proc. 2017 XX IEEE Int. Conf. on Soft Computing and Measurements (SCM)*. St. Petersburg. 24-26 May. N.Y.: IEEE, 2017. P. 11. doi: 10.1109/SCM.2017.7970480.
14. *Ivanov S.I., Liokumovich L.B., Medvedev A.V.* *Proc. 18 Int. Conf. NEW2AN*. St. Petersburg. 26-27 Aug 2018/Eds by O.Galinina et al. Cham: Springer Switzerland AG, 2018. P. 666. doi: 10.1007/978-3-030-01168-0_61
15. *Zhuchkov K., Vasilchenko M., Zagrebneva A., Zavyalov A.* // *Sci. Rep.* 2022 V. 12. P. 19932. doi: 10.1038/s41598-022-24457-2
16. *Vostretsov A.G., Filatova S.G.* // *J. Electronic Sci. Technol.* 2023. V. 21. № 4. Article No. 100230. doi: 10.1016/j.jnlest.2023.100230
17. *Боровков А.А.* Математическая статистика. М.: Наука, 1984.
18. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975.
19. *Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др.* Теория обнаружения сигналов. М.: Радио и связь, 1984.
20. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.
21. *Вострецов А.Г.* // *РЭ*. 1999. Т. 44. № 5. С. 551.

METHOD FOR SYNTHESIZING EFFICIENT ESTIMATES OF SIGNAL PARAMETERS USING FUNCTIONS FROM COMPLETE SUFFICIENT STATISTICS

A. G. Vostretsov^{a,b,*}, S. G. Filatova^{a,c}

^a*Novosibirsk State Technical University,*

20 K. Marx Ave., Novosibirsk, 630073 Russian Federation

^b*Chinakal Institute of Mining of the Siberian Branch of the RAS,*

54, Krasny Ave., Novosibirsk, 630091 Russian Federation

^c*Federal Institute of Industrial Property,*

30-1 Berezhevskaya nab., Moscow, G-59, GSP-3 125993 Russian Federation

**E-mail: vostretsov@corp.nstu.ru*

Received February 22, 2024, revised March 22, 2024, accepted March 24, 2024

A method for synthesizing efficient estimates of parameters of a random process whose distribution of samples has complete sufficient statistics is proposed. The method is based on the representation of the estimated parameters of the process in the form of a solution to the system of equations for mathematical expectations of functions derived from complete sufficient statistics, selected in such a way that the system of equations was solvable with respect to the estimated parameters. This solution is then replaced by the aforementioned functions in order to obtain the final estimate. The conditions under which the obtained estimates will be efficient are provided. Examples of parameter estimation for sample distributions from a uniform distribution and an additive mixture of Gaussian noise and a sequence of rectangular pulses with unknown amplitudes are presented, and their efficiency is demonstrated.

Keywords: estimation of signal parameters, efficient estimates, a priori uncertainty, complete sufficient statistics

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

УДК 621.391.2

**ИССЛЕДОВАНИЕ И РЕКОНСТРУКЦИЯ
КУСОЧНО-СТЕРТЫХ ПРОЦЕССОВ**

© 2024 г. В. В. Климов

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190 Российская Федерация*

E-mail: klimov47@list.ru

Поступила в редакцию 26.04.2022 г.

После доработки 26.04.2022 г.

Принята к публикации 11.05.2022 г.

Рассмотрены и обоснованы новые подходы к построению комплекса математических и программных средств для исследования и реконструкции кусочно-стертых процессов. Для решения этой задачи в случае полиномиальных процессов получены простые аналитические соотношения. При восстановлении полигармонических процессов подробно рассмотрен случай с неизвестным числом гармоник.

Ключевые слова: многочлен, конечная разность, гармоника, определитель

DOI: 10.31857/S0033849424100051, **EDN:** HQLJVT

Дистанционные методы измерения физических характеристик играют все большую роль в исследовании природных ресурсов Земли. Такие методы зондирования реализуются аппаратно-программными средствами различных уровней иерархической геоинформационной мониторинговой системы (ГИМС). Процесс функционирования и взаимодействия всех ее уровней, осуществляющих наблюдение за окружающей средой с искусственных спутников Земли, самолетов-лабораторий, судов, наземных пунктов, связан с обменом значительных объемов информации, что предъявляет высокие требования к техническим средствам регистрации, передачи, записи данных. Однако даже при высокой надежности аппаратуры информационные потоки нередко имеют отрывочный характер, что связано с ограниченными возможностями охвата всей территории исследуемого региона. Сбои могут происходить и в канале связи, что приводит к искажению или потере информации. Искаженные и потерянные данные могут вызвать значительные трудности при последующем анализе поступающей информации и построении математической модели. Поэтому актуальной задачей первичной обработки информации является разработка эффективных

алгоритмов выявления искаженных данных и построение формул восстановления информации. Приводимые ниже соотношения дают возможность решать эту задачу в режиме реального времени.

Пусть x_k — рассматриваемый процесс, $k = 1, \dots, N$. Рассмотрим вариационный ряд $x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*$, медиана которого есть робастная оценка среднего. Пусть это будет X_k , тогда при выполнении условия $|x_k - X_k| > P$ можно считать, что произошло амплитудное искажение информации. Для выявления фазовых искажений рассматривается процесс $y_k = x_k - x_k'$, где x_k' — текущее среднее. Пусть интервалы времени, на которых $y_k > 0$, имеют длину t . Тогда, если выполняется неравенство $t_i > p\delta_i$ (δ_i — среднеквадратичное отклонение для процесса t_i), то несколько подряд стоящих значений x_k , соответствующих этому t_i , считаются искаженными. Для восстановления искаженных значений сигнала применяются методы полиномиальной интерполяции или оптимальной интерполяции. Но наиболее простыми и эффективными оказываются формулы сплайн-интерполяции, использующие полиномы достаточно низкой степени.

Пусть в рассматриваемом процессе оказались стертые значения в соседних узлах x_{k-1} , x_k , x_{k+1} . Пусть N — степень интерполяционного сплайн-многочлена. Построим формулы непрерывного восстановления данных для трех значений N .

При $N = 1$ формулы экстраполирования имеют вид

$$\begin{aligned}x_{k-1} &= -x_{k-3} + 2x_{k-2}, & x_{k-1} &= 4x_{k+2} - 3x_{k+3}, \\x_k &= -2x_{k-3} + 3x_{k-2}, & x_k &= 3x_{k+2} - 2x_{k+3}, \\x_{k+1} &= -x_{k-3} + 4x_{k-2}, & x_{k+1} &= 2x_{k+2} - x_{k+3}.\end{aligned}$$

Центральные значения определяются в виде

$$\begin{aligned}x_{k-1} &= 1/4 (3x_{k-2} + x_{k+2}), & x_{k-1} &= -x_{k-3} + 2x_{k-2}, \\x_k &= 1/2 (x_{k-2} + x_{k+2}), \\x_k &= 1/2 (-x_{k-3} + 2x_{k-2} + 2x_{k+2} - x_{k+3}), \\x_{k+1} &= 1/4 (x_{k-2} + 3x_{k+2}), & x_{k+1} &= 2x_{k+2} - x_{k+3}.\end{aligned}$$

При $N = 2$ экстраполирование происходит по формулам

$$\begin{aligned}x_{k-1} &= x_{k-4} - 3x_{k-3} + 3x_{k-2}, \\x_{k-1} &= 10x_{k+2} - 15x_{k+3} + 6x_{k+4}, \\x_k &= 3x_{k-4} - 8x_{k-3} + x_{k-2}, \\x_k &= 6x_{k+2} - 8x_{k+3} + 3x_{k+4}, \\x_{k+1} &= 6x_{k-4} - 15x_{k-3} + 10x_{k-2}, \\x_{k+1} &= 3x_{k+2} - 3x_{k+3} + x_{k+4}.\end{aligned}$$

Интерполяционные формулы имеют вид

$$\begin{aligned}x_{k-1} &= x_{k-4} - 3x_{k-3} + 3x_{k-2}, \\x_{k-1} &= x_{k-4} - 3x_{k-3} + 3x_{k-2}, \\x_k &= (1/3)(3x_{k-4} - 9x_{k-3} + 8x_{k-2} + \\&+ 3x_{k+2} - 3x_{k+3} + x_{k+4}), \\x_k &= (1/3)(x_{k-4} - 3x_{k-3} + 3x_{k-2} + \\&+ 8x_{k+2} - 9x_{k+3} + 3x_{k+4}), \\x_{k+1} &= 3x_{k+2} - 3x_{k+3} + x_{k+4}, \\x_{k+1} &= 3x_{k+2} - 3x_{k+3} + x_{k+4}.\end{aligned}$$

При $N = 3$ экстраполяционные формулы имеют вид

$$\begin{aligned}x_{k-1} &= 4x_{k-2} - 6x_{k-3} + 4x_{k-4} - x_{k-5}, \\x_{k-1} &= 20x_{k+2} - 45x_{k+3} + 36x_{k+4} - 10x_{k+5}, \\x_k &= 10x_{k-2} - 20x_{k-3} + 15x_{k-4} - 4x_{k-5}, \\x_k &= 10x_{k+2} - 20x_{k+3} + 15x_{k+4} - 4x_{k+5}, \\x_{k+1} &= -10x_{k-5} + 3x_{k-4} - 45x_{k-3} + 20x_{k-2}, \\x_{k+1} &= 4x_{k+2} - 6x_{k+3} + 4x_{k+4} - x_{k+5}.\end{aligned}$$

Центральные значения определяются в виде

$$\begin{aligned}x_{k-1} &= 4x_{k-2} - 6x_{k-3} + 4x_{k-4} - x_{k-5}, \\x_k &= (1/6)(-4x_{k-5} + 16x_{k-4} - 24x_{k-3} + 15x_{k-2} + \\&+ 15x_{k+2} - 24x_{k+3} + 16x_{k+4} - 4x_{k+5}), \\x_{k+1} &= 4x_{k+2} - 6x_{k+3} + 4x_{k+4} - x_{k+5}.\end{aligned}$$

Аналогичные формулы можно получить и для большего числа узлов.

В случае, когда исследуемый процесс содержит регулярные составляющие, например годовой ход температуры, восстановление стертых участков можно осуществить на основе полигармонического представления процесса.

Известные методы оценивания параметров структуры таких процессов (критерий Кюнена, метод Лагранжа–Дейля [1], критерий Гопфнера и др.) предполагают наличие достаточно большого ряда эквидистантных наблюдений y_1, y_2, y_m (число наблюдений m должно удовлетворять условию $m > 4N + 2$, где N — число гармоник). В практических ситуациях иногда возникает такое положение, когда некоторое число наблюдений оказывается пропущенным. И хотя общее количество точек наблюдения бывает велико, «непрерывных отрезков» ряда с числом точек наблюдения $m > 4N + 2$ нет, но при этом встречается достаточное число отрезков ряда $\{y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \dots, y_{m_l}^{(l)}\}$ с числом эквидистантных наблюдений $m_l > 2N + 1$, где $j = 1, 2, \dots, N, \dots$. Применить известные методы определения числа синусоидальных компонент в этом случае не удастся, так как нарушена непрерывность наблюдений.

Итак, пусть имеется ряд числовых наблюдений y_1, y_2, \dots, y_m . Во временном ряде пропущено некоторое число наблюдений и имеется возможность рассматривать данный ряд как некую совокупность отрезков временных рядов

$$\{(y_1^1, y_2^1, \dots, y_{m_l}^1), (y_1^2, y_2^2, \dots, y_{m_l}^2), \dots, (y_1^l, y_2^l, \dots, y_{m_l}^l)\},$$

где $\sum_{j=1}^l m_j = m$.

Положим, что число синусоидальных компонент N нам известно и выполнены следующие условия:

$$l \geq N, m_j > 2N + 1, j = 1, 2, \dots, l. \quad (1)$$

Тогда ординату $y_{sj}^{(j)}$ j -го отрезка ряда можно представить в виде

$$\begin{aligned}y_{sj}^{(j)} &= y_{cp} + \sum_{i=1}^N \sin\left(\frac{2\pi}{T_i} s_j g + \alpha_i^{(j)}\right); \\j &= 1, 2, \dots, l; 1 \leq s_j \leq m_j.\end{aligned} \quad (2)$$

Необходимо отметить, что при такой форме записи для различных отрезков временного ряда начальные фазы одной и той же компоненты в общем случае различны $\alpha_i^{(j)} \neq \alpha_i^{(k)}; i = 1, N; j \neq k; j, k = 1, 2, \dots, l$. Составим для каждого отрезка временного ряда центральные конечные разности четных порядков

$$\Delta^{2j} y_{sk}^{(k)} = y_{sk-j}^{(k)} - c_{2j}^1 y_{sk-j+1}^{(k)} + c_{2j}^2 y_{sk-j+2}^{(k)} + \dots + c_{2j}^{2j-2} y_{sk+j-2}^{(k)} - c_{2j}^{2j-1} y_{sk+j-1}^{(k)} + y_{sk+j}^{(k)}, \quad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots, l.$$

Подставляя в (3) выражение (2) для $y_i^{(k)}; k = 1, 2, \dots, l; t = 1, 2, \dots, m_k$ и проводя соответствующие тригонометрические преобразования, получим аналогично

$$\Delta^{2j} y_{sk}^{(k)} = (-1)^j 2^{2j} \sum_{i=1}^N r_i \left(\sin \frac{\pi g}{T_i} \right)^{2j} \sin \left(\frac{2\pi}{T_i} s_k g + \alpha_i^{(k)} \right), \quad (4)$$

$$k = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, N.$$

Обозначив для краткости

$$\lambda_i = 4 \sin^2 \frac{\pi g}{T_i}; A_i^{(k)} = r_i \sin \left(\frac{2\pi}{T_i} s_k g + \alpha_i^{(k)} \right), \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, l.$$

Перепишем систему уравнений (2) и (4) в виде

$$y_{sj}^{(j)} - y_{cp} = \sum_{i=1}^N A_i^{(k)},$$

$$\Delta^{2j} y_{sk}^{(k)} = (-1)^j \sum_{i=1}^N A_i^{(k)} \lambda_i^j, \quad (6)$$

$$k = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, N, \dots$$

Введем обозначения

$$B_i^{(k)} = \sum_{i=1}^N A_i^{(k)} \lambda_i^j = \begin{cases} y_{sj}^{(j)} - y_{cp}, & \text{при } t = 0, \\ (-1)^t \Delta^{2t} y_{sk}^{(k)}, & \text{при } t = 1, 2, \dots, N, \dots, \end{cases} \quad (7)$$

$$k = 1, 2, \dots, l.$$

Таким образом, имеется возможность получить по наблюдаемым отрезкам рядов $\{(y_1^1, y_2^1, \dots, y_{ml}^1), (y_1^2, y_2^2, \dots, y_{ml}^2), \dots, (y_1^l, y_2^l, \dots, y_{ml}^l)\}$ систему значений

$$\{(B_0^{(1)}, B_1^{(1)}, \dots, B_N^{(1)}), (B_0^{(2)}, B_1^{(2)}, \dots, B_N^{(2)}), \dots, (B_0^{(l)}, B_1^{(l)}, \dots, B_N^{(l)})\},$$

связанную с неизвестными параметрами $\{(r_i, T_i, \alpha_i^{(k)}); i = 1, N; k = 1, 2, \dots, l\}$, системами уравнений (7) и (8). Соответственно, задача сводится к нахождению по известной последовательности $(B_0^{(k)}, B_1^{(k)}, \dots, B_N^{(k)}, \dots); k = 1, 2, \dots, l$, регулярного способа определения, $\{(r_i, T_i, \alpha_i^{(k)}); i = 1, N; k = 1, 2, \dots, l\}$, а также, при необходимости, и числа N синусоидальных компонент ряда. Допустим, что число синусоидальных компонент нам известно. При выполнении условий однозначного определения периодов компонент ($g < 0.5 T_{\min}$, где T_{\min} — наименьший период синусоидальных компонент) удовлетворяется условие $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $T_i = T_j; i, j = 1, N$. Положим, что величины $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ — корни уравнения

$$\lambda^N + C_{N-1} \lambda^{N-1} + \dots + C_1 \lambda + C_0 = 0. \quad (8)$$

Возьмем в системе (7) какую-нибудь группу из $N + 1$ последовательных уравнений, например, группу

$$B_0^{(k)} = \sum_{i=1}^N A_i^{(k)}, B_1^{(k)} = \sum_{i=1}^N A_i^{(k)} \lambda_i,$$

$$\dots$$

$$B_N^{(k)} = \sum_{i=1}^N A_i^{(k)} \lambda_i^N. \quad (9)$$

Отсюда можно получить для системы $(B_t^{(k)}, t = 0, 1, 2, \dots, N)$ уравнение

$$B_N^{(k)} + C_{N-1} B_{N-1}^{(k)} + \dots + C_1 B_1^{(k)} + C_0 B_0^{(k)} = 0. \quad (10)$$

Таким же образом, полагая последовательно k равным $1, 2, \dots, N$, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $(C_0, C_1, \dots, C_{N-1})$

$$\mathbf{D}(N \times N) \bar{\mathbf{C}} = -\bar{\mathbf{G}}, \quad (11)$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{D}(N \times N) = \begin{pmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & B_{N-1}^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & \dots & B_{N-1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{(N)} & B_1^{(N)} & \dots & B_{N-1}^{(N)} \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_N \end{pmatrix}; \bar{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} B_N^{(1)} \\ B_N^{(2)} \\ \dots \\ B_N^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

При условии, что матрица $\mathbf{D}(N \times N)$ неособенная, из решения матричного уравнения (11) легко получить вектор $\bar{\mathbf{C}}$, что позволяет дальше, определяя корни уравнения (8), получить значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Можно непосредственно определить $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ как корни уравнения

$$P(\lambda) = \frac{1}{\det \mathbf{D}(N \times N)} \det \times \begin{pmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & B_{N-1}^{(1)} & B_N^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & \dots & B_{N-1}^{(2)} & B_N^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{(N)} & B_1^{(N)} & \dots & B_{N-1}^{(N)} & B_N^{(N)} \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda^{N-1} & \lambda^N \end{pmatrix} = 0. \quad (13)$$

Определив $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ из (8) или (13), находим из (5) периоды

$$T_i = \frac{\pi g}{\arcsin(0.5\sqrt{\lambda_i})}; i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

и параметры $\{(r_i, \alpha_i^{(k)}); i = 1, N; k = 1, N\}$, например, методом наименьших квадратов. Рассмотрим возможность определения числа синусоидальных компонент временного ряда. Пусть число синусоидальных компонент ряда, равное N , неизвестно наблюдателю. Введем в рассмотрение квадратную матрицу размером $k \times k$

$$\mathbf{D}(k \times k) = \begin{pmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & B_{k-1}^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & \dots & B_{k-1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{(k)} & B_1^{(k)} & \dots & B_{k-1}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N A_i^{(1)} & \sum_{i=1}^N A_i^{(1)} \lambda_i & \dots & \sum_{i=1}^N A_i^{(1)} \lambda_i^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N A_i^{(k)} \lambda_i^N & \sum_{i=1}^N A_i^{(k)} \lambda_i & \dots & \sum_{i=1}^N A_i^{(k)} \lambda_i^{k-1} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

которую можно представить в виде произведения

$$\mathbf{D}(k \times k) = \mathbf{T}(k \times N) \mathbf{P}(N \times k), \quad (16)$$

где

$$\mathbf{T}(k \times N) = \begin{pmatrix} A_1^{(1)} & A_2^{(1)} & \dots & A_N^{(1)} \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & \dots & A_N^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(k)} & A_2^{(k)} & \dots & A_N^{(k)} \end{pmatrix}; \quad (17)$$

$$\mathbf{P}(N \times k) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_N & \dots & \lambda_N^{k-1} \end{pmatrix} = \mathbf{L}^T(k \times N).$$

Используя формулу Бине–Коши [2], вычислим определитель матрицы $\mathbf{D}(k \times k)$:

$$\det \mathbf{D}(k \times k) = \sum_{\substack{1 \leq m_1 < m_2 < \dots < \\ < m_N \leq l - N + 1}} T \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$k \leq N,$$

где $P \begin{pmatrix} m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}$ — минор порядка k матрицы $P(N \times k)$, равный

$$P \begin{pmatrix} m_1 & m_1 & \dots & m_1 \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq k} (\lambda_{mi} - \lambda_{mj}), \quad (19)$$

и в силу $\lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j; i, j = 1, N$ не обращается в нуль.

Здесь $T \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ m_1 & m_2 & \dots & m_k \end{pmatrix}$ означает минор порядка k матрицы $\mathbf{T}(k \times N)$. Элемент $A_i^{(k)}$ матрицы $\mathbf{T}(k \times N)$ имеет вид

$$A_i^{(k)} = r_i \sin \left(\frac{2\pi}{T_i} s_k g + \alpha_i^{(k)} \right),$$

$$k = 1, 2, \dots, l; i = 1, 2, \dots, N.$$

Отметим, что при переходе от одного отрезка ряда к другому получаемые синусоидальные A_i и Δ_j

фазовые сдвиги различны, т.е.

$$\alpha_i^{(k+1)} - \alpha_i^{(k)} \neq \alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)}, \quad (20)$$

$$i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, N.$$

И поэтому в общем случае строки матрицы $\mathbf{T}(k \times N)$ линейно независимы, что позволяет для ранга матрицы $\mathbf{T}(k \times N)$ записать

$$\text{rank} \mathbf{T}(k \times N) = \begin{cases} k, & \text{при } k < N, \\ N, & \text{при } k \geq N. \end{cases} \quad (21)$$

Таким образом, среди миноров порядка k матрицы $\mathbf{T}(k \times N)$ имеются ненулевые. Это не дает основания утверждать, что определитель матрицы $\mathbf{D}(k \times k)$ (18) при $k \leq N$ обязательно отличен от нуля. Однако путем изменения порядка строк матрицы $\mathbf{D}(k \times k)$ и путем выбора других точек $\{y_{s1}^{(1)}, y_{s2}^{(2)}, \dots, y_{sk}^{(k)}\}$ в отрезках временного ряда при вычислении центральных конечных разностей четного порядка (3) можно всегда добиться того, что определитель таким образом видоизмененной матрицы $\mathbf{D}(k \times k)$ будет отличен от нуля при $k \leq N$

и равен нулю в обратном случае. Проведенное рассмотрение позволяет предложить метод определения числа синусоидальных компонент и их параметров $\{N; (r_i, T_i, \alpha_i^{(k)}); i = 1, N; k = 1, N\}$ применительно к временным рядам с пропущенными наблюдениями [3].

По имеющемуся временному ряду y_1, y_2, \dots, y_m с пропущенными наблюдениями формируем совокупность эквидистантных отрезков временных рядов $\{(y_1^1, y_2^1, \dots, y_{m_l}^1), (y_1^2, y_2^2, \dots, y_{m_l}^2), \dots, (y_1^l, y_2^l, \dots, y_{m_l}^l)\}$. Для каждого эквидистантного отрезка ряда вычисляем центральные конечные разности четных порядков $\{\Delta^{2j} y_{sk}^{(k)}, k = 1, 2, \dots, N, \dots; j = 1, 2, \dots, N, \dots\}$ и на их основе получаем систему $\{(B_0^{(1)}, B_1^{(1)}, \dots, B_N^{(1)}, \dots), (B_0^{(2)}, B_1^{(2)}, \dots, B_N^{(2)}, \dots), \dots, (B_0^{(l)}, B_1^{(l)}, \dots, B_N^{(l)}, \dots)\}$, далее составляем матричную последовательность $\{\mathbf{D}(k \times k), k = 1, 2, \dots\}$

$$\mathbf{D}(k \times k) = \begin{pmatrix} B_0^{(1)} & B_1^{(1)} & \dots & B_{k-1}^{(1)} \\ B_0^{(2)} & B_1^{(2)} & \dots & B_{k-1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{(k)} & B_1^{(k)} & \dots & B_{k-1}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

И вычисляются определители $\det \mathbf{D}(k \times k)$ каждой последовательности.

Указанный процесс обрывается только после того, как найдется некоторая матрица, скажем $\mathbf{D}(k_0 \times k_0)$, в последовательности $\{\mathbf{D}(k \times k), k = 1, 2, \dots\}$, определитель которой «устойчиво» равен нулю, т.е. сохраняет свое ненулевое значение при изменении порядка строк в матрице $\mathbf{D}(k_0 \times k_0)$ и при выборе других значений $\{y_{s1}^{(1)}, y_{s2}^{(2)}, \dots, y_{sk}^{(k)}\}$ для вычисления центральных конечных разностей согласно алгоритму (3). В этом случае число синусоидальных компонент временного ряда $N = k_0 - 1$. Определение параметров $\{(r_i, T_i, \alpha_i); i = 1, N\}$ синусоидальных компонент ряда можно осуществить согласно описанной выше методике с использованием выражений (13) и (14).

В заключение отметим, что в описанном выше методе можно использовать вместо центральных конечных разностей четного порядка разности и суммы разностей ординат, аналогичные находящим применение в методе Лагранжа–Дейля [4–6]. Запишем разности и суммы разностей в виде

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= y_1 - y_0, \\ \Delta_1 &= y_2 - y_1; E\Delta_1 = \Delta_0 + \Delta_2, \\ \Delta_2 &= y_3 - y_2; E\Delta_2 = \Delta_1 + \Delta_3; \\ E\Delta_2^2 &= E\Delta_1 + E\Delta_3, \\ \dots & \\ \Delta_k &= y_{k+1} - y_k; E\Delta_k = \Delta_{k+1} + \Delta_{k-1}; \\ E\Delta_k^2 &= E\Delta_{k-1} + E\Delta_{k+1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Подставим в (22) выражение для y_s (2) и получим

$$\begin{aligned} \Delta_s &= \sum_{i=1}^N 2r_i \sin \frac{w_i g}{2} \cos \left(w_i \frac{2s+1}{2} g + \alpha_i \right), \\ E\Delta_s &= \sum_{i=1}^N 2r_i \sin \frac{w_i g}{2} \cos \left(w_i \frac{2s+1}{2} g + \alpha_i \right) \times \\ &\times 2 \cos w_i g, \end{aligned} \tag{23}$$

...

$$\begin{aligned} E^l \Delta_s &= \sum_{i=1}^N 2r_i \sin \frac{w_i g}{2} \cos \left(w_i \frac{2s+1}{2} g + \alpha_i \right) \times \\ &\times 2^l \cos^l w_i g, \end{aligned}$$

где $w_i = 2\pi / T_i$.

Если обозначить

$$\begin{aligned} A_i &= 2r_i \sin \frac{w_i g}{2} \cos \left(w_i \frac{(2s+1)}{2} g + \alpha_i \right); \\ \lambda_i &= 2 \cos w_i g, \end{aligned} \tag{24}$$

то систему уравнений (23) можно записать так

$$E^l \Delta_s = \sum_{i=1}^N A_i^{(k)} \lambda_i^l; l = 0, 1, 2, \dots, \tag{25}$$

где $E^0 \Delta_s = \Delta_s$.

Таким образом, вычисляя на основе временного ряда y_1, y_2, \dots, y_m разности и суммы согласно алгоритма (22), получаем систему параметров

$$\{B_k = E^k \Delta_s = \sum_{i=1}^N A_i \lambda_i^k\}. \tag{26}$$

Если для процесса без стирания y_1, y_2, \dots, y_m формировать разности (22) для соседних точек $y_s, y_{s+1}, \dots, y_{s+v-1}$ вместо точек $(y_{s1}^{(1)}, y_{s2}^{(2)}, \dots, y_{sN}^{(N)})$ в различных отрезках ряда и далее проводить анализ по описанной методике, то предлагаемый алгоритм совпадает с методом Лагранжа–Дейля.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Серебренников М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965.
2. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.

3. *Абрамов А.Д., Климов В.В., Коновалов Л.Н.* // Математическое моделирование в задачах радиотехники и электроники. М., 1984. Ч. 2. С. 152.
4. *Голд Б., Рейдер Ч.* Цифровая обработка сигналов. М.: Сов. радио, 1973.
5. *Кендалл М. Дж., Стюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976.
6. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.

RESEARCH AND RECONSTRUCTION PIECEWISE ERASED PROCESSES

V. V. Klimov

*Fryazino Branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,
Vvedenskii Squar., 1, Fryazino, Moscow Region, 141190 Russian Federation
E-mail: klimov47@list.ru*

Received April 26, 2022, revised April 26, 2022, accepted May 11, 2022

The paper considers and substantiates new approaches to constructing complex of mathematical and software tools for research and reconstruction of piecewise-erased processes. To solve this problem in the case of polynomial processes, simple analytical ratios. When restoring polyharmonic processes in detail the case with an unknown number of harmonics is considered.

Keywords: polynomial, finite difference, harmonic, determinant

УДК 537.874;537.624

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ СВЕТА НА МАГНИТНУЮ ПЛЕНКУ

© 2024 г. В. С. Власов^а, В. Г. Шавров^б, В. И. Щеглов^{б,*}

^аСыктывкарский государственный университет им. П.Сорокина,
Октябрьский просп., 55, Сыктывкар, 167001 Российская Федерация
^бИнститут радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

*E-mail: vshcheg@cplire.ru

Поступила в редакцию 02.08.2023 г.

После доработки 15.10.2023 г.

Принята к публикации 24.11.2023 г.

Рассмотрена задача об излучении электромагнитной волны из магнитной пленки при воздействии короткого импульса света от фемтосекундного лазера. В качестве причины излучения предложена модель ускоренного движения магнитных зарядов. Выявлена пропорциональность поля излучаемой волны второй производной от намагниченности по времени. Предложены к рассмотрению импульсы двух видов — прямоугольные и полусинусоидальные. Показано, что поле излучаемой волны для полусинусоидального импульса превышает поле от прямоугольного импульса более чем в два раза.

Ключевые слова: излучение, электромагнитная волна, магнитная пленка

DOI: 10.31857/S0033849424100068, EDN: HQBJSS

ВВЕДЕНИЕ

Современная техника обработки информации требует введения в практику процессов, характерное время которых исчисляется фемтосекундами. Важнейшим направлением здесь является исследование динамических процессов в магнитоупорядоченных средах при воздействии мощными импульсами света, генерируемыми фемтосекундным лазером [1–3]. Главным инструментом исследования здесь является метод «накачки–зондирования», при котором возмущение магнитных свойств среды, вызванное фемтосекундным лазером (накачкой), регистрируется с помощью зондирующего луча от другого лазера (зонда) по эффекту Фарадея или Керра [1, 4].

Основным механизмом воздействия мощного светового импульса на магнитную среду является резкое повышение ее температуры с соответствующим тепловым расширением, приводящим к генерации упругих и магнитоупругих волн [5–10].

В то же время увеличение температуры магнитной среды приводит к уменьшению ее намагниченности [11–13].

В работах [14, 15] наблюдалось происходящее при нагревании пленки сильное излучение электромагнитных волн терагерцового диапазона. В работах [16, 17] для интерпретации излучения был предложен механизм ускоренного движения магнитных зарядов.

Данная работа является развитием предложенного механизма с учетом характера возбуждающего импульса.

1. ОБОСНОВАНИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается воздействие света непосредственно на магнитную пленку, за счет высокой мощности которого пленка нагревается, что приводит к уменьшению ее намагниченности. Для интерпретации подобных экспериментов используется «трехтемпературная

модель» [11, 12], в которой предполагается, что в магнитной среде одновременно возбуждаются три различные системы: электронов, спинов и колебаний решетки. Времена релаксации трех систем значительно различаются. Так, минимальным оно является только у электронной системы, которая и раскачивается за время действия импульса до значительной амплитуды, что проявляется как повышение температуры магнитной среды в целом.

Резкий рост температуры приводит к возбуждению магнетонного резервуара, снижающего суммарную намагниченность. Поскольку необходимым условием изменения намагниченности является наличие быстро релаксирующей электронной системы, то в эксперименте выбирается хорошо проводящий металл, а именно — никель. Сочетание достаточно высокой начальной намагниченности никеля с его значительной проводимостью обеспечивает крайне быстрое (за фемтосекунды) изменение намагниченности на значительную величину, достигающую полутора и более раз [11, 12], что в рамках данной работы рассматривается как механизм возбуждения электромагнитной волны.

1.1. Схема метода «накачки-зондирования»

Общая схема геометрии метода «накачки-зондирования», рассматриваемая в данной работе, представлена на рис. 1. Схема является достаточно традиционной и совпадает с использовавшейся в работе [16].

Основу геометрии образует магнитная пленка 1, намагниченная полем \vec{H} перпендикулярно ее плос-

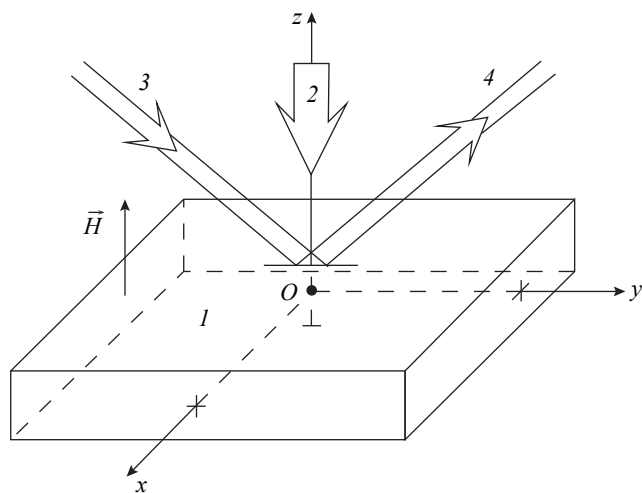


Рис. 1. Схема геометрии метода «накачки-зондирования»: 1 — пленка, 2 — пучок света от фемтосекундного лазера («накачка»), 3 — падающий пучок зондирующего света, 4 — отраженный пучок зондирующего света.

кости. Система координат $Oxyz$ ориентирована таким образом, что плоскость Oxy совпадает с плоскостью пленки, а ось Oz перпендикулярна ей. На пленку по нормали к ней, т.е. вдоль оси Oz , падает мощный пучок света 2 от фемтосекундного лазера («накачка»). Этот пучок подается в импульсном режиме. Продолжительность воздействия света на пленку составляет десятки и сотни фемтосекунд, частота импульсов — десятки и сотни мегагерц. Благодаря высокой мощности пучка 2 пленка нагревается, в результате чего меняется ее магнитное состояние. Для анализа такого состояния на пленку подается непрерывный пучок поляризованного света 3 («зонд») от маломощного лазера, не меняющий состояния пленки. Отраженный пучок 4 в результате взаимодействия с намагниченностью пленки, испытывает поворот плоскости поляризации (эффект Керра). Изменение плоскости поляризации отраженного пучка 4 относительно исходного 3 позволяет судить о магнитном состоянии пленки.

2. МОДЕЛЬ УСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ МАГНИТНЫХ ЗАРЯДОВ

Воздействие мощного импульса света на магнитную пленку приводит к резкому повышению ее температуры. В ферромагнитном состоянии намагниченность пленки представляет собой совокупность связанных обменным взаимодействием магнитных диполей, ориентированных в одном направлении. Повышение температуры приводит к частичному разупорядочению диполей, уменьшающему суммарный магнитный момент, что проявляется как уменьшение намагниченности пленки в целом.

В работе [16] на микроскопическом уровне качественно рассмотрена модель такого разупорядочения, предполагающая уменьшение магнитного момента отдельного диполя как результат ускоренного встречного движения образующих диполь двух магнитных зарядов противоположных знаков. Заряды начинают свой путь с концов диполя и движутся далее навстречу друг другу. На середине диполя заряды встречаются, их движение прекращается, а суммарная намагниченность диполя становится равной нулю. Модель предполагает, что сначала заряд движется медленно, затем постепенно ускоряется, после чего, ближе к окончанию пути, замедляется. Таким образом, скорость заряда сначала возрастает, а пройдя через максимум, убывает. То есть на протяжении всего пути заряд движется с ускорением: сначала положительным, затем — с отрицательным.

Поскольку здесь имеет место встречное движение двух зарядов противоположных знаков, то их поля складываются. Таким образом, в первом приближении достаточно рассмотреть поле только одного заряда, после чего его удвоить, в результате будет получено суммарное поле от совокупности двух зарядов.

Модель предполагает, что уменьшение полной намагниченности пленки происходит за счет большого количества ускоренно движущихся магнитных зарядов, в результате в континуальном приближении поля отдельных зарядов складываются, давая общее электромагнитное поле. Согласно общим положениям электродинамики, ускоренное движение зарядов приводит к возбуждению электромагнитной волны [18, с. 116]. Рассмотрим образование поля такой волны подробнее.

3. ПОТЕНЦИАЛЫ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ

Для нахождения поля движущегося заряда сначала определим его потенциалы, подобно работе [16]. На рис. 2 введены обозначения, принятые в [18, рис. 5; 16, рис. 5]: O — начало координат; N — точка наблюдения. Обозначения векторов следующие: \vec{r} — вектор от начала координат до точки наблюдения; \vec{r}' — вектор от начала координат до точки заряда; $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ — вектор от заряда до точки наблюдения. Время запаздывания равно

$$\tau = t - \frac{R}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}. \quad (1)$$

Поскольку главным предметом рассмотрения будут магнитные заряды, то надо пользоваться общими уравнениями электродинамики с учетом магнитных зарядов [19, ф-ла (1.2); 20, с. 249]:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m; \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0; \quad (4)$$

$$\text{div } \vec{H} = 4\pi \rho_m, \quad (5)$$

где ρ_m и \vec{j}_m — размазанные в объеме магнитный заряд и плотность тока соответственно. При этом точечный заряд и сосредоточенный ток, выражаются через дельта-функции:

$$\rho_m = q_m \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0), \quad (6)$$

$$\vec{j}_m = \rho_m \vec{v}_0 = q_m \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \vec{v}_0, \quad (7)$$

где \vec{r}_0 — вектор от начала координат в точку расположения точечного заряда, \vec{v}_0 — скорость движения точечного заряда,

Введем потенциалы — векторный \vec{B}_m и скалярный ψ_m . Выражения полей через потенциалы имеют вид

$$\vec{E}_m = \text{rot } \vec{B}_m; \quad (8)$$

$$\vec{H}_m = -\text{grad } \psi_m + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_m}{\partial t}. \quad (9)$$

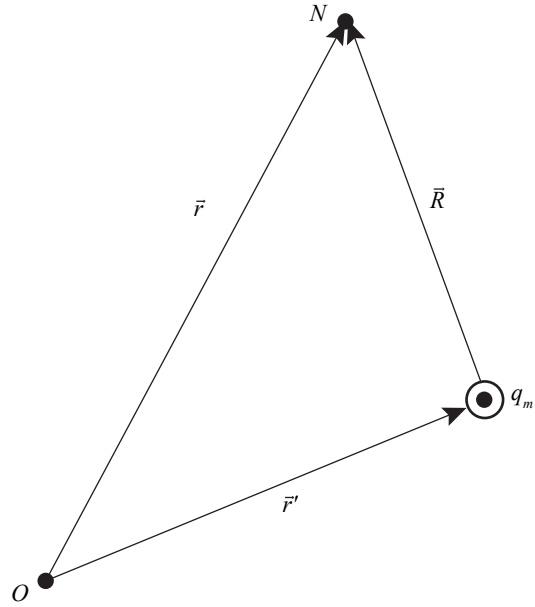


Рис. 2. Геометрия задачи о поле движущегося заряда q_m .

Уравнение для векторного потенциала имеет вид

$$\Delta \vec{B}_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_m}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m; \quad (10)$$

В форме запаздывающих потенциалов его решение принимает вид

$$\vec{B}_m = -\frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}_m(\vec{r}', \tau)}{R} dV'. \quad (11)$$

Аналогично для скалярного потенциала получаем уравнение и решение

$$\Delta \psi_m - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2} = -4\pi \rho_m; \quad (12)$$

$$\psi_m = \int \frac{\rho_m(\vec{r}', \tau)}{R} dV'. \quad (13)$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$\lambda(\tau) = R(\tau) - \frac{(\vec{v}_0(\tau) \cdot \vec{R}(\tau))}{c} \quad (14)$$

— расстояние от заряда до точки наблюдения при запаздывании;

$$\tau = t - \frac{R}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c} \quad (15)$$

— время запаздывания.

Подставляя (6), (7) в (11) и (13), получаем векторный и скалярный потенциалы типа Лиенара–Вихерта [20, ф-лы (7.82), (7.83)], но для магнитных зарядов q_m :

$$\vec{B}_m = -\frac{q_m \vec{v}_0}{c \lambda}; \quad (16)$$

$$\psi_m = \frac{q_m}{\lambda}. \quad (17)$$

4. ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ДВИЖЕНИЕМ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА

Найдем магнитное поле, создаваемое движением точечного магнитного заряда. Подставляя (16) и (17) в (9) и выполняя преобразования, аналогичные проведенным в [18, с. 104], получаем

$$\vec{H}_m = q_m \frac{\left(1 - \frac{\vec{v}_0^2}{c^2}\right)}{\left(R - \frac{(\vec{v}_0 \cdot \vec{R})}{c}\right)^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}_0}{c} R\right) - \frac{q_m}{c^2 \left(R - \frac{(\vec{v}_0 \cdot \vec{R})}{c}\right)^3} \left(\vec{R} \times \left(\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}_0}{c} R\right) \times \dot{\vec{v}}_0\right)\right). \quad (18)$$

Рассмотрим структуру выражения (18). При скорости заряда малой по сравнению со скоростью света первое слагаемое пропорционально величине $1/R^2$, что эквивалентно полю покоящегося заряда. В то же время второе слагаемое пропорционально $1/R$, что соответствует распространению в пространстве волны сферической симметрии. Это второе слагаемое пропорционально ускорению движущегося заряда $\dot{\vec{v}}_0$, что аналогично условию излучения волны ускоренно движущимся электрическим зарядом [18, с. 109].

Таким образом, ускоренное движение магнитных зарядов приводит к излучению электромагнитных волн, которое подобно возникающему при движении электрических зарядов.

При $\vec{v}_0 \ll c$ второе слагаемое в формуле (18) принимает вид

$$\vec{H}_m = \frac{q_m}{c^2 R^3} \left(\vec{R} \times \left(\vec{R} \times \dot{\vec{v}}_0\right)\right). \quad (19)$$

5. ВЫРАЖЕНИЕ МАГНИТНОГО ЗАРЯДА ЧЕРЕЗ НАМАГНИЧЕННОСТЬ

В эксперименте измеряется не величина магнитного заряда, а намагниченность магнитной среды. В практике доменных структур [21] вводится поверхностная плотность магнитных зарядов σ_m , связанная с намагниченностью соотношением

$$\sigma_m = M_0. \quad (20)$$

Как видно, это соотношение подобно аналогичному соотношению для электрических зарядов [22, ф-ла (12.2)]. Величину магнитного заряда площади S определим с помощью формулы

$$q_m = \sigma_m S = M_0 S. \quad (21)$$

5.1. Поле волны, создаваемой движущимся магнитным зарядом

Подставляя (21) в (18), а также учитывая, что суммарное поле формируется за счет встречного

движения двух зарядов противоположных знаков, получаем

$$\vec{H}_m = \frac{2M_0 S}{c^2 R^3} \left(\vec{R} \times \left(\vec{R} \times \dot{\vec{v}}_0\right)\right), \quad (22)$$

где $\dot{\vec{v}}_0$ — ускорение движения магнитного заряда.

В соответствии с геометрией на рис. 1 можно полагать, что заряд движется вдоль оси Oz , так что ускорение соответствует второй производной от координаты заряда по z_m . В этом случае поле по абсолютной величине принимает вид

$$H_m = \frac{2M_0 S}{c^2 R} \dot{v}_0 = \frac{2M_0 S}{c^2 R} \frac{d^2 z_m}{dt^2}. \quad (23)$$

Ориентация поля, в соответствии с двойным векторным произведением в (22), перпендикулярна вектору \vec{R} . При $|\vec{r}'| \ll |\vec{R}|$ можно считать, что поле \vec{H}_m перпендикулярно направлению на центр магнитной пленки (точка O на рис. 2).

Подобно работе [16] примем, что зависимость координаты заряда от времени с точностью до постоянного множителя подобна зависимости намагниченности от времени

$$\frac{d^2 z_m}{dt^2} = A_m \frac{d^2 M}{dt^2}, \quad (24)$$

где A_m — нормирующий коэффициент, который должен быть определен из эксперимента. При этом поле (23) принимает вид

$$H_m = \frac{2M_0 S A_m}{c^2 R} \frac{d^2 M}{dt^2}. \quad (25)$$

Таким образом, чтобы получить поле излучаемой волны следует найти вторую производную от намагниченности по времени, которая в свою очередь определяется интенсивностью нагревания пленки светом от мощного лазера.

6. ДИНАМИКА ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассмотрим теперь температурный режим, создаваемый в магнитной пленке импульсом света от фемтосекундного лазера. Пусть в продолжение импульса пленке сообщается количество теплоты Q_e . При этом температура пленки возрастает от T_1 до T_2 . Температуры T_1 и T_2 связаны с количеством переданного тепла соотношением

$$Q_e = cm(T_2 - T_1), \quad (26)$$

где c — теплоемкость, m — масса пленки.

Из этого соотношения, при заданной начальной температуре T_1 можно найти конечную температуру T_2 :

$$T_2 = T_1 + Q_e/cm. \quad (27)$$

После окончания импульса пленка остывает, и ее температура уменьшается от T_2 до T_1 . Количе-

ство рассеиваемого тепла — обратное, поэтому вместо соотношения (26) получаем

$$Q_q = -cm(T_2 - T_1). \quad (28)$$

Из этого соотношения при заданной начальной температуре T_2 можно найти конечную температуру

$$T_1 = T_2 + Q_e/cm, \quad (29)$$

где Q_q — величина отрицательная, так что заведомо $T_1 < T_2$.

Время нагревания равно времени действия импульса τ_e . Вследствие краткости импульса нагревается только пленка без подложки. При охлаждении тепло из пленки уходит в подложку со скоростью, определяемой теплопроводностью подложки, поэтому время остывания значительно превышает время нагревания.

7. ВОЗМОЖНЫЕ ВИДЫ ИМПУЛЬСА

Импульс света от фемтосекундного лазера, образованный за счет механизма синхронизации мод, может иметь довольно сложную форму. В работе [16] импульс предполагался чисто прямоугольным с резкими фронтами. Однако можно полагать, что импульс имеет плавные фронты, т.е. по форме близок к колоколообразному. Для простоты расчета положим, что огибающая импульса во времени является синусоидальной и составляет половину периода синусоиды, так что длительность импульса равна τ_e .

7.1. Нагревание прямоугольным импульсом

Два рассматриваемых далее вида импульсов представлены на рис. 3. Сначала рассмотрим прямоугольный импульс, в основном, следуя работе [16].

Предполагаем, что скорость изменения температуры во времени dT/dt , пропорциональна разности между текущим значением температуры и тем, которое может быть достигнуто при бесконечно долгом действии импульса. Это конечное значение температуры обозначим T_p . При этом получаем

$$dT/dt = \alpha(T_p - T), \quad (30)$$

где α — коэффициент нагревания ($\alpha > 0$).

Из (30) получаем уравнение относительно T

$$dT/dt + \alpha T = \alpha T_p. \quad (31)$$

Решая его методом вариации постоянных [23, 24], получаем

$$T = T_p + \alpha T_p C \exp(-\alpha t). \quad (32)$$

Находя C из начального условия

$$T|_{t=0} = T_1, \quad (33)$$

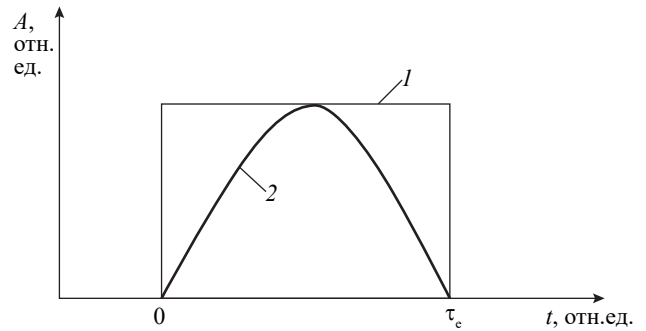


Рис. 3. Форма импульса света от фемтосекундного лазера: 1 — прямоугольная, 2 — полусинусоидальная.

получаем решение (31) в виде

$$T = T_p - (T_p - T_1) \exp(-\alpha t). \quad (34)$$

За время действия импульса τ_e температура должна принять значение T_2 :

$$T|_{t=\tau_e} = T_2. \quad (35)$$

При этом из (34) получаем

$$T_2 = T_p - (T_p - T_1) \exp(-\alpha \tau_e). \quad (36)$$

7.2. Нагревание синусоидальным импульсом

Теперь рассмотрим импульс полусинусоидальной формы, длительностью τ_e (рис. 3, кривая 2). В этом случае нельзя считать, что температура пленки растет по экспоненте, так как амплитуда импульса по времени меняется, поэтому будем опираться на поток энергии, падающий на магнитную пленку.

Подобно (26), количество теплоты Q_e , сообщаемой пленке при нагревании от T_1 до T , равно

$$Q_e = cm(T - T_1). \quad (37)$$

Поток энергии соответствует производной (37) по времени:

$$\frac{dQ_e}{dt} = cm \frac{dT}{dt}, \quad (38)$$

откуда получаем

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{cm} \frac{dQ_e}{dt}. \quad (39)$$

Положим поток энергии в виде половины синусоиды, показанной на рис. 3. При этом (39) принимает вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{cm} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_e} t\right). \quad (40)$$

Интегрируя (40) и полагая начальным условием (33), получаем температуру пленки, достигаемую по прошествии времени τ_e :

$$T = \frac{\tau_e}{\pi cm} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\tau_e} t\right) \right\} + T_1. \quad (41)$$

Обозначая эту температуру через T_2 и исключая $1/\pi$ т.с, получаем

$$T = \frac{T_2 - T_1}{2} \left\{ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\tau_e} t\right) \right\} + T_1. \quad (42)$$

7.3. Свободное охлаждение пленки

Рассмотрим теперь охлаждение пленки после окончания действия импульса лазера. Процесс охлаждения при любой форме импульса один и тот же, т.е. происходит по экспоненте от начальной температуры к конечной.

Предполагаем, что скорость изменения температуры во времени, т.е. величина dT/dt , пропорциональна разности между текущим значением температуры и тем, которое может быть достигнуто при бесконечно долгом процессе охлаждения. Будем считать, что пленка после охлаждения принимает ту же температуру, что была до нагревания, т.е. T_1 . За начальное значение примем то, которого достигла пленка в результате воздействия импульса, т.е. T_2 . Коэффициент охлаждения обозначим через β .

В силу сделанного предположения, где теперь конечная температура равна T_1 , полагаем

$$dT/dt = -\beta(T - T_1). \quad (43)$$

Из этого выражения получаем уравнение для T

$$dT/dt + \beta T = \beta T_1. \quad (44)$$

Решая это уравнение методом вариации постоянных [23, 24], а также учитывая, что охлаждение начинается с момента времени $t = \tau_e$, при котором $T = T_2$, получаем зависимость температуры пленки от времени при ее охлаждении:

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \exp(-\beta(t - \tau_e)). \quad (45)$$

7.4. Единый процесс нагревания и охлаждения

Запишем зависимость температуры пленки от времени в едином процессе нагревания (кривые 1,2) и охлаждения (кривая 3) с помощью формул (34), (42), (45) соответственно (рис. 4). Пунктирные части кривых — продолжения в обе стороны за точку окончания действия импульса $t = \tau_e$; температура T_2 получена из формулы (34) при $t = \tau_e$; остальные параметры — те же, что в работе [16].

Из рисунка видно, что все три кривые пересекаются в единой точке, соответствующей окончанию импульса $t = \tau_e$ при $T = T_2$. Кривые 1 и 3 подобны таковым в работе [16]. Кривая, соответствующая синусоидальному импульсу, проходит ниже кривой, соответствующей прямоугольному импульсу, однако при $t = \tau_e$ приходит в ту же точку, что кривая 1. Более низкий ход кривой 2 по сравнению с кривой 1 обусловлен постепенным развитием амплитуды синусоидального импульса, по сравнению с резким для прямоугольного.

7.5. Изменение намагниченности при нагревании и охлаждении

Рассмотрим изменение намагниченности в едином процессе нагревания и охлаждения, для чего воспользуемся приближенной зависимостью намагниченности от температуры [25, ф-ла (18.7)]:

$$M(T) = \frac{1}{N_m} \sqrt{\frac{3}{T_c}} (T_c - T), \quad (46)$$

где M — нормированная намагниченность (нормировка производится на значение M_0 при абсолютном нуле), T_c — температура Кюри, T — температура по шкале Кельвина, N_m — нормирующий множитель.

Введем вспомогательное обозначение

$$M_g = \frac{1}{N_m} \sqrt{\frac{3}{T_c}} \quad (47)$$

и получим

$$M(T) = M_g \sqrt{T_c - T}. \quad (48)$$

Подставляя формулы (34), (42), (45) в выражение (48), получим

$$M(T) = M_g \sqrt{(T_c - T_p) + (T_p - T_1) \exp(-\alpha t)} \quad (49)$$

— нагревание $0 \leq t < \tau_e$ при прямоугольном импульсе;

$$M(T) = M_g \sqrt{T_c - \left\{ \frac{T_2 - T_1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{\tau_e} t\right) \right] + T_1 \right\}} \quad (50)$$

— нагревание $0 \leq t < \tau_e$ при синусоидальном импульсе;

$$M(T) = M_g \sqrt{(T_c - T_1) - (T_2 - T_1) \exp(\beta \tau_e - \beta t)} \quad (51)$$

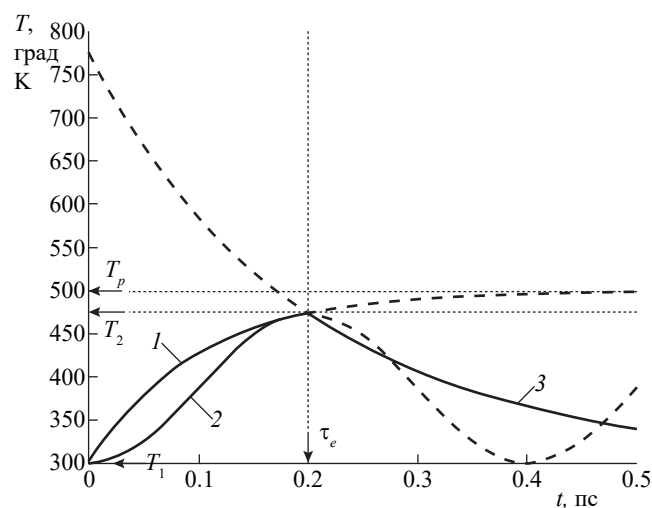


Рис. 4. Зависимости температуры пленки от времени: 1 — по формуле (37); 2 — по формуле (45); 3 — по формуле (48): $\alpha = 10 \text{ пс}^{-1}$, $\beta = 5 \text{ пс}^{-1}$, $\tau_e = 0,2 \text{ пс}$; $T_1 = 300 \text{ К}$; $T_2 = 472,93 \text{ К}$; $T_p = 500 \text{ К}$.

– охлаждение $\tau_e < t < +\infty$ при любой форме импульса.

Зависимости нормированной намагниченности от времени, построенные по этим формулам, показаны на рис. 5. Из рисунка видно, что при нагревании синусоидальным импульсом (кривая 2) намагниченность падает медленнее, чем в случае импульса прямоугольного (кривая 1). В обоих случаях минимальное значение намагниченности достигается при $t = \tau_e$ и составляет 0.6908 отн.ед. С учетом того что начальное значение намагниченности никеля при 300 К равно 510 Гс, минимальное значение будет соответствовать 352.308 Гс. Охлаждение происходит одинаково в обоих случаях, так что намагниченность постепенно стремится к исходному значению, однако значительно медленнее, чем при нагревании.

8. ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЕ ИЗМЕНЕНИЕМ НАМАГНИЧЕННОСТИ

В разд. 5.1 было показано, что обусловленное действием фемтосекундного лазера изменение намагниченности порождает электромагнитную волну, поле которой имеет вид (25)

$$H_m = \frac{2M_0 S A_m}{c^2 R} \frac{d^2 M}{dt^2}. \quad (52)$$

Таким образом, чтобы определить поле, следует найти вторую производную от намагниченности. Рассмотрим возможные варианты изменения намагниченности по отдельности.

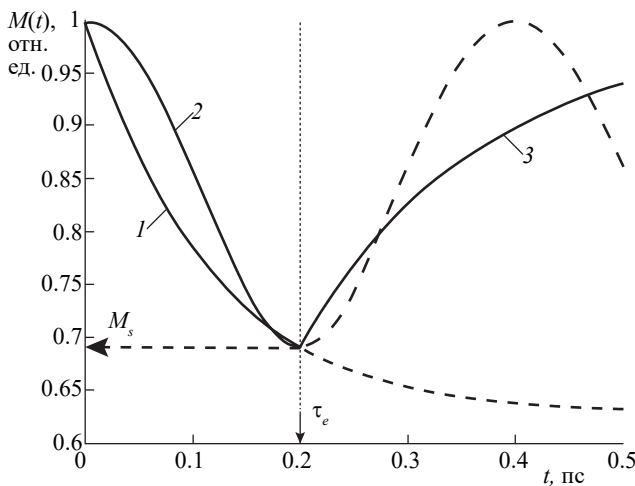


Рис. 5. Зависимости нормированной намагниченности от времени, построенные при $M_g = 0.055$ по разным формулам: 1 – по формуле (52); 2 – по формуле (53); 3 – по формуле (54); характер штриховых кривых тот же, что на рис. 4; $T_1 = 300$ К, $T = 500$ К, $T_e = 631$ К, $\tau_e = 0.2$ пс, $\alpha = 10$ пс⁻¹, $\beta = 5$ пс⁻¹.

8.1. Нагревание прямоугольным импульсом

В этом случае зависимость намагниченности от времени определяется формулой (49). Дифференцируя эту формулу два раза, получаем

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = -\frac{M_g \alpha^2 (T_p - T_1)}{2\tau_e^2} \{A\}^{-1/2} \{B\} \exp(-\alpha t), \quad (53)$$

где

$$\{A\} = (T_c - T_p) + (T_p - T_1) \exp(-\alpha t); \quad (54)$$

$$\{B\} = \frac{T_p - T_1}{2} \{A\}^{-1} \exp(-\alpha t) - 1, \quad (55)$$

а M_g определяется формулой (47).

8.2. Нагревание синусоидальным импульсом

Аналогично предыдущему случаю из (50) получаем

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = -\frac{M_g \pi^2 T_b}{2\tau_e^2} \{C\}^{-1/2} \{D\}, \quad (56)$$

где

$$\{C\} = T_a + T_b \cos\left(\frac{\pi}{\tau_e} t\right); \quad (57)$$

$$\{D\} = \frac{T_b}{2} \{C\}^{-1} \sin^2\left(\frac{\pi}{\tau_e} t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\tau_e} t\right); \quad (58)$$

$$T_a = \frac{1}{2}(2T_c - T_1 - T_2); \quad (59)$$

$$T_b = \frac{1}{2}(T_2 - T_1). \quad (60)$$

8.3. Охлаждение

Этот случай по структуре подобен нагреванию прямоугольным импульсом, так что из (51) получаем

$$\frac{d^2 M}{dt^2} = -\frac{M_g \beta^2 (T_2 - T_1) \exp(\beta \tau_e)}{2} \{E\}^{-1/2} \times \{F\} \exp(-\alpha t), \quad (61)$$

где

$$\{E\} = (T_c - T_1) - (T_2 - T_1) \exp(\beta \tau_e) \exp(-\beta t); \quad (62)$$

$$\{F\} = \frac{(T_1 - T_1) \exp(\beta \tau_e)}{2} \{E\}^{-1} \exp(-\beta t) - 1. \quad (63)$$

Подстановка формул (53), (56), (61) в (52) дает поле излучаемой электромагнитной волны.

На рис. 6 представлены зависимости поля излучаемой волны от времени. Из рисунка видим, что нагревание прямоугольным импульсом (кривая 1) дает постепенно спадающее поле одного знака, которое после перехода к охлаждению (кривая 3) спадает с тем же знаком, медленно стремясь к нулю.

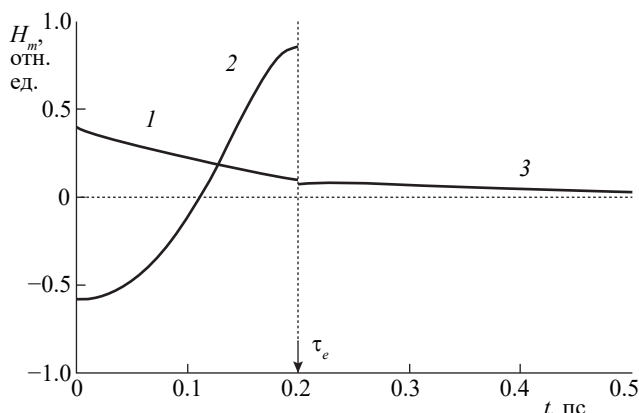


Рис. 6. Зависимости поля излучаемой волны от времени: 1 — нагревание прямоугольным импульсом (формула (56)); 2 — нагревание синусоидальным импульсом (формула (59)); 3 — охлаждение (формула (64)). Параметры те же, что на рис. 5.

Нагревание синусоидальным импульсом (кривая 2) дает поле значительно большей амплитуды, причем это поле сначала падает, после чего, проходя через нуль, снова возрастает, теперь уже с другим знаком. Таким образом, синусоидальный импульс лазера обеспечивает не один импульс поля, а два с меняющейся фазой, причем амплитуда обоих импульсов превышает амплитуду импульса поля при прямоугольном возбуждении более чем в два раза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача об излучении электромагнитной волны из магнитной пленки при воздействии короткого импульса света от фемтосекундного лазера. Приведена схема метода «накачки-зондирования», являющегося основным в экспериментах по сверхбыстрой динамике намагниченности. Отмечено, что ударное изменение намагниченности приводит к интенсивному излучению электромагнитных волн терагерцового диапазона. В качестве причины такого излучения предложена модель ускоренного движения магнитных зарядов. Приведен вывод запаздывающих потенциалов, на основе которых получено поле излучаемой волны. Выявлена пропорциональность поля второй производной от намагниченности по времени. Рассмотрен тепловой режим пленки, подверженной действию мощного импульса света. Отмечена важность формы возбуждающего импульса. Предложены к рассмотрению импульсы двух видов — прямоугольные и полусинусоидальные. Исследована температура пленки. Показано, что в течение синусоидального импульса температура растет медленнее, чем в течение прямоугольного, а по окончании импульса падает одинаково в обоих случаях. Получено динамическое изменение намагниченности во времени, найдены вторые производные, определяющие излучаемое поле.

Показано, что поле излучаемой волны для полусинусоидального импульса превышает поле от прямоугольного импульса более чем в два раза, причем во время действия импульса поле меняет знак, что соответствует изменению фазы излучаемой волны.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kirilyuk A., Kimel A.V., Rasing T. // *Rev. Mod. Phys.* 2010. V. 82. № 3. P. 2731.
2. Bigot J.V., Vomir M. // *Ann. Phys. (Berlin)*. 2013. V. 525. № 1-2. P. 2.
3. Walowski J., Münzenberg M. // *J. Appl. Phys.* 2016. V. 120. № 14. P. 140901.
4. Ka Shen, Bauer G.E.W. // *Phys. Rev. Lett.* 2015. V. 115. № 19. P. 197201.
5. Dreher L., Weiler M., Pernpeintner M. et al. // *Phys. Rev. B*. 2012. V. 86. № 13. P. 134415.
6. Thevenard L., Gourdon C., Prieur J.Y. et al. // *Phys. Rev. B*. 2014. V. 90. № 9. P. 094401.
7. Janusonis J., Chang C.L., Jansma T. et al. // *Phys. Rev. B*. 2016. V. 94. № 2. P. 024415.
8. Chang C.L., Lomonosov A.M., Janusonis J. et al. // *Phys. Rev. B*. 2017. V. 95. № 6. P. 060409.
9. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // *Журн. радиоэлектроники*. 2017. № 6. <http://jre.cplire.ru/jre/jun17/5/text.pdf>.
10. Власов В.С., Макаров П.А., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // *Журн. радиоэлектроники*. 2018. № 4. <http://jre.cplire.ru/jre/apr18/3/text.pdf>.
11. Beaurepaire E., Merle J.C., Daunois A., Bigot J.Y. // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76. № 22. P. 4250.
12. Bigot J.V., Vomir M. // *Ann. Phys. (Berlin)*. 2013. V. 525. № 1-2. P. 2.
13. Koopmans B., Malinowski G., Dalla Longa F. et al. // *Nature Mater.* 2010. V. 9. № 3. P. 259.
14. Beaurepaire E., Turner G.M., Harrel S.M. et al. // *Appl. Phys. Lett.* 2004. V. 84. № 18. P. 3465.
15. Hilton D.J., Averitt R.D., Meserole C.A. et al. // *Opt. Lett.* 2004. V. 29. № 15. P. 1805.
16. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // *Журн. радиоэлектроники*. 2020. № 6. <http://jre.cplire.ru/jre/jun20/14/text.pdf>
17. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. // *Письма в ЖТФ*. 2021. Т. 47. № 11. С. 3.
18. Левич В.Г. *Курс теоретической физики*. М.: Наука, 1969. Т. 1.
19. Семенов А.А. *Теория электромагнитных волн*. М.: Изд-во МГУ, 1968.
20. Шавров В.Г., Щеглов В.И. *Магнитоэлектроника и электромагнитные волны в сложных структурах*. М.: Физматлит, 2017.
21. Малоземов А., Слонзуски Дж. *Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами*. М.: Мир, 1982.
22. Сивухин Д.В. *Общий курс физики*. Т. 3. *Электричество*. М.: Наука, 1977.
23. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений*. М., Л.: Гостехтеориздат, 1945.
24. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М.: Наука, 1965.
25. Вонсовский С.В. *Магнетизм*. М.: Наука, 1971.

EXCITATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES UNDER THE IMPACT OF LIGHT ON A MAGNETIC FILM

V. S. Vlasov^a, V. G. Shavrov^b, V. I. Shcheglov^{b,*}

^a*Syktvykar State University named after P. Sorokin,
Oktyabrsky Prospekt, 55, Syktvykar, 167001 Russian Federation*

^b*Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics RAS,
Mokhovaya Str. 11, Bild. 7, Moscow, 125009 Russian Federation*

**E-mail: vshcheg@cplire.ru*

Received August 02, 2023, revised October 15, 2023, accepted November 24, 2023

The problem of electromagnetic wave emission from a magnetic film under the influence of a short pulse of light from a femtosecond laser is considered. The model of accelerated motion of magnetic charges is proposed as the cause of radiation. The proportionality of the field of the emitted wave to the second derivative of the magnetization in time is revealed. Pulses of two types — rectangular and half-sinusoidal — are proposed for consideration. It is shown that the field of the radiated wave for a half-sinusoidal pulse exceeds the field from a rectangular pulse more than twice.

Keywords: radiation, electromagnetic wave, magnetic film

УДК 621.385.632

ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ СО СВОЙСТВАМИ МЕТАМАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ЛАМП БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ W-ДИАПАЗОНА¹

© 2024 г. А. А. Ростунцова^{a, b, *}, Е. Е. Колесниченко^{a, b}, Н. М. Рыскин^{a, b}

^aСаратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Зеленая, 38, Саратов, 410019 Российская Федерация,

^bСаратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012 Российская Федерация

*E-mail: rostuncova@mail.ru

Поступила в редакцию 26.04.2024 г.

После доработки 22.05.2024 г.

Принята к публикации 25.05.2024 г.

Исследованы электродинамические характеристики лестничных замедляющих систем (ЗС), которые образованы металлической пластиной с периодически расположенными щелями определенной формы, помещенной в волновод. Предложены модификации лестничной ЗС, связанные с усложнением формы щелей в пластине или формы волновода таким образом, чтобы частота щелевого резонанса была ниже частоты отсечки волновода, при этом ЗС проявляет свойства дважды отрицательного метаматериала. Показано, что основная пространственная гармоника является обратной, в то время как на +1-й гармонике имеет место нормальная дисперсия и обеспечивается синхронизм пучка с волной в достаточно широкой полосе частот. Разработаны конструкции ЗС с гантелеобразными щелями и ЗС в волноводе с продольными пазами для лампы бегущей волны W-диапазона (75...110 ГГц) с относительной шириной полосы частот порядка 25% и рабочими напряжениями 8...13 кВ, в которых имеется возможность взаимодействия замедленной волны с двумя ленточными электронными пучками, распространяющимися сверху и снизу пластины.

Ключевые слова: замедляющая система, метаматериал, лампа бегущей волны, миллиметровый диапазон

DOI: 10.31857/S0033849424100077, EDN: HPYSIG

ВВЕДЕНИЕ

Субтерагерцевый (субТГц) диапазон частот имеет широкие перспективы применения, прежде всего для нового поколения высокоскоростных систем беспроводной передачи данных [1]. Актуальным является создание миниатюрных электровакуумных приборов субТГц-диапазона, прежде всего широкополосных усилителей на основе лампы бегущей волны (ЛБВ) [2]. Для получения приемлемых значений выходной мощности целесообразно использовать пространственно-развитые замедляющие системы (ЗС), в которых

осуществляется взаимодействие с многолучевыми электронными пучками. В частности, вызывают интерес лестничные ЗС, которые представляют собой систему параллельных металлических пластин с периодически вырезанными в них щелями определенной формы [3,4]. Между пластинами может распространяться несколько электронных пучков. Однако простейший вариант лестничной ЗС с прямоугольными щелями обладает сильной дисперсией на основной гармонике, поэтому его проблематично использовать для создания широкополосных ЛБВ-усилителей.

В данной работе исследованы модификации лестничной ЗС, связанные с усложнением формы щелей в пластине или формы волновода таким

¹ Работа удостоена премии на 20-м Конкурсе молодых ученых имени Ивана Анисимкина.

образом, чтобы частота щелевого резонанса была ниже частоты отсечки волновода. Особенностью подобных ЗС является проявление свойств дважды отрицательного метаматериала (эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости отрицательны) [5–10]. В таких структурах основная пространственная гармоника является обратной, в то время как на +1-й гармонике имеет место нормальная дисперсия и обеспечивается синхронизм пучка с волной в достаточно широкой полосе частот при умеренных напряжениях электронного пучка.

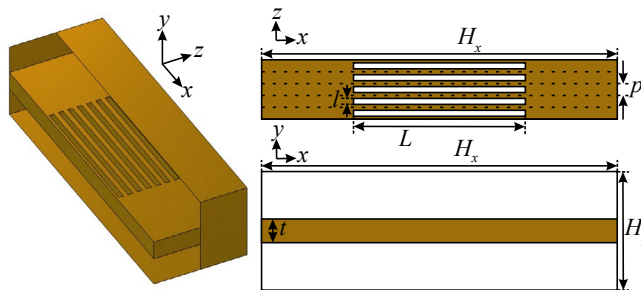


Рис. 1. Схема простейшей лестничной ЗС с прямоугольными щелями: $H_x \times H_y$ — размеры волновода, t — толщина пластины, p — период, $L \times l$ — размеры щели.

1. ЛЕСТНИЧНАЯ ЗАМЕДЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

Схема простейшей лестничной ЗС показана на рис. 1. Она представляет собой вставленную в прямоугольный волновод с поперечным сечением $H_x \times H_y$ металлическую пластину толщиной t , в которой с периодом p вырезаны прямоугольные щели размером $L \times l$.

На рис. 2 представлена дисперсионная диаграмма основной моды ЗС, рассчитанная в пакете численного моделирования COMSOL Multiphysics.

Нижняя частота отсечки соответствует критической частоте прямоугольного волновода и определяется его шириной H_x :

$$f_{кр} = c/(2H_x), \tag{1}$$

где c — скорость света в вакууме. Верхняя частота отсечки соответствует частоте щелевого резонанса, которая определяется длиной щели L :

$$f_0 = c/(2L). \tag{2}$$

При выбранных размерах (табл. 1) рабочие частоты лежат в W-диапазоне, $f_{кр} \approx 50$ ГГц, $f_0 \approx 103$ ГГц. Область нормальной дисперсии соответствует сдвигам фазы на период структуры $0 < \varphi < \pi$, т.е. основная гармоника является прямой. На рис. 2 также изображена линия пучка при ускоряющем напряжении 20 кВ.

Существенным недостатком данной ЗС является сильная дисперсия основной гармоники. Приемлемое замедление волны, обеспечивающее синхронизм при нерелятивистских напряжениях, наблюдается в узком частотном диапазоне вблизи верхней отсечки. Такая структура является недостаточно широкополосной для создания ЛБВ-усилителей. Однако она может быть использована для разработки низковольтных генераторов на основе лампы обратной волны (ЛОВ), когда синхронизм реализуется на -1 -й гармонике. Подобные приборы были реализованы еще в 1950 годах [11].

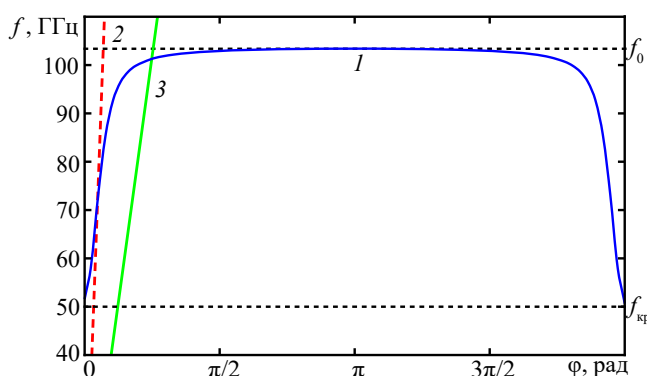


Рис. 2. Дисперсионная характеристика основной моды ЗС с прямоугольными щелями W-диапазона (1), линия скорости света (2) и линия пучка при напряжении 20 кВ (3).

Таблица 1. Геометрические параметры ЗС с прямоугольными щелями W-диапазона

Геометрический параметр	Значение, мм
$H_x \times H_y$	3.00×1.80
t	0.20
p	0.10
$L \times l$	1.45×0.05

В настоящее время такие ЗС используются в узкополосных усилителях типа клистронов с распределенным взаимодействием [12].

2. ЛЕСТНИЧНАЯ ЗС С ЩЕЛЯМИ В ФОРМЕ РАЗОМКНУТЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КОЛЕЦ

Если модифицировать геометрию лестничной ЗС таким образом, чтобы частота щелевого резонанса была ниже частоты отсечки волновода, $f_0 < f_{кр}$, то вид дисперсионной характеристики качественно изменится: основная гармоника ста-

нет обратной, а нормальная дисперсия будет иметь место для +1-й пространственной гармоники. Простейший способ достичь условия $f_0 < f_{кр}$ состоит в увеличении длины щели так, чтобы она стала больше ширины волновода, $L > H_x$ (см. формулы,). Это возможно, если придать щели более сложную форму, например, в виде разомкнутого прямоугольного кольца. Пример трансформации прямоугольной щели в разомкнутое кольцо при увеличении L показан на рис. 3. Суммарная длина щели определяется параметрами кольца: $L = w + 2s + 2q$.

На рис. 4 представлены результаты численного моделирования дисперсионных характеристик ЗС при постепенном увеличении L , как показано на рис. 3. Расчеты проводились в пакете COMSOL. Размеры, соответствующие кривым 1–6, указаны в табл. 2.

Частота отсечки волновода $f_{кр} \approx 150$ ГГц. Кривая 1 соответствует случаю прямоугольной щели, $L < H_x$. После трансформации в кольцо, когда суммарная длина становится равной ширине волновода, $L \approx H_x$, дисперсионная характеристика практически вырождается в прямую (кривая 2). При $L > H_x$, когда $f_0 < f_{кр}$, характер дисперсии меняется (кривые 3–6): основная пространственная гармоника ($0 < \varphi < \pi$) становится обратной, а +1-я гармоника ($\pi < \varphi < 2\pi$) — прямой. Таким образом, появляется возможность реализовать усиление на +1-й гармонике при достаточно низких рабочих напряжениях (5...15 кВ). Полоса пропускания ЗС с ростом L смещается в область более низких частот, а ширина полосы меняется слабо и составляет примерно 10...15 ГГц.

Замедляющие системы с щелями в форме разомкнутых прямоугольных колец исследовались ранее в ряде работ (см., например, [5–7]) для создания ЛОВ-генератора с релятивистским электронным пучком. Щели рассматривались как кольцевые резонаторы (так называемые, complementary splitting resonators (CSSR)), которые часто выступают

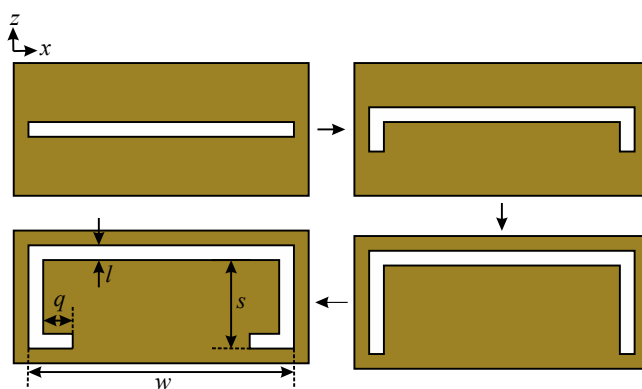


Рис. 3. Пример деформации прямоугольной щели в разомкнутое кольцо при увеличении длины щели L . Суммарная длина щели определяется как $L = w + 2s + 2q$ (w, s, q — характерные размеры прямоугольного кольца, l — толщина щели).

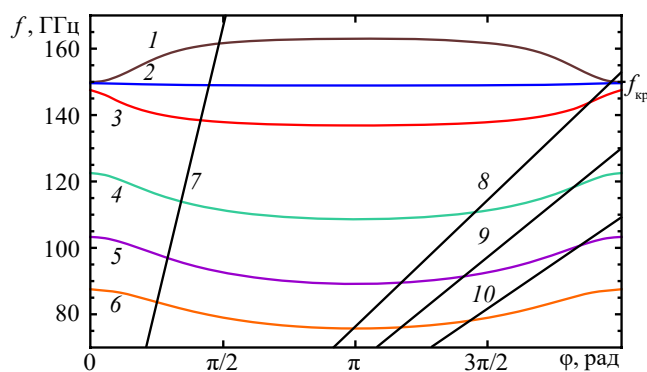


Рис. 4. Дисперсионные характеристики основной моды ЗС с щелями в форме разомкнутых прямоугольных колец при различной длине щели L : 1 — вырожденный случай, когда щель прямоугольная, $H_x > L = 0.9$; кривая 2 — $H_x \approx L = 1.0$; 3 — $H_x < L = 1.1$; 4 — $H_x < L = 1.4$; 5 — $H_x < L = 1.7$; 6 — $H_x < L = 2.0$ (подробнее см. табл. 2); 7 — линия скорости света; 8, 9 и 10 — линии пучка при напряжениях 14, 10 и 7 кВ соответственно.

Таблица 2. Геометрические параметры ЗС с щелями в форме разомкнутого прямоугольного кольца

Геометрический параметр	Значение, мм					
	1	2	3	4	5	6
$H_x \times H_y$	1.00 × 1.00					
t	0.20					
p	0.45					
l	0.05					
w	0.90					
s	—	0.05	0.10	0.25	0.30	0.30
q	—	—	—	—	0.10	0.25
L	0.90	1.00	1.10	1.40	1.70	2.00

Примечание: w, s, q — размеры кольца (см. рис. 3).

в качестве строительных блоков при создании метаматериалов [13]. Метаматериалы представляют собой среды, которые обладают необычными электродинамическими свойствами, обусловленными искусственно созданной периодической структурой из резонансных элементов определенной формы [9, 13]. Аналогия между метаматериалами и периодическими электродинамическими структурами, используемыми в приборах вакуумной СВЧ-электроники, не раз отмечалась в литературе (см., например, [9, 14]). Так, CSSR-структуры, разработанные в [5–7], проявляют свойства левой среды, эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемость которой отрицательны.

3. ЛЕСТНИЧНАЯ ЗС С ШЕЛЯМИ ГАНТЕЛЕОБРАЗНОЙ ФОРМЫ

С точки зрения расширения возможностей управления дисперсией интерес представляет разработка лестничных ЗС с щелями более сложной формы, резонансная частота f_0 которых определяется несколькими геометрическими параметрами. В рамках этого подхода в данной работе предлагается ЗС с щелями гантелеобразной формы (рис. 5). Данную систему можно рассматривать как модификацию ЗС с I -образными щелями, которая была предложена в работе [10] для разработки широкополосной ЛБВ на 220 ГГц.

Гантелеобразная щель представляет собой резонатор, электрическое поле которого сосредоточено в узком зазоре размером $w \times l$, а магнитное поле — в широких «ушах» размером $a \times b$ (см. рис. 5). Для частоты щелевого резонанса запишем следующую формулу:

$$f_0 = 1 / (2\pi \sqrt{L_0 C}), \quad (3)$$

где $L_0 = \mu_0 ab / t$, $C = \epsilon_0 t (\alpha + k)$ — индуктивность и емкость щели соответственно, $\alpha = w / 2l$. В формуле для емкости C последнее слагаемое учитывает влияние краевых эффектов [15]; значение коэффициента k подбирается таким образом, чтобы обеспечить соответствие с численными результатами. Таким образом, у щели есть четыре геометрических параметра, существенно влияющих на частоту f_0 , при определенном соотношении между которыми можно достичь условия $f_0 < f_{кр}$. В табл. 3 указаны размеры ЗС, при которых $f_0 \approx 75$ ГГц, $f_{кр} \approx 150$ ГГц. При $k = 0.82$ значения f_0 , рассчитанные по формуле, хорошо согласуются с результатами численного моделирования в программном пакете COMSOL при изменении параметров a , b , w и l в широком диапазоне.

Результаты расчета дисперсионной характеристики ЗС в COMSOL представлены на рис. 6. Видно, что +1-я гармоника является прямой, причем коэффициент замедления для нее достаточно

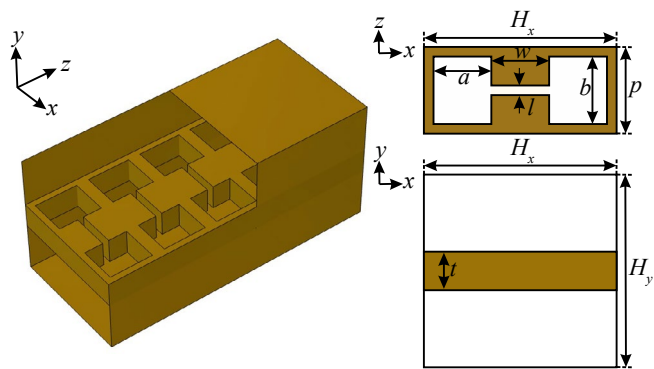


Рис. 5. Схема лестничной ЗС с гантелеобразными щелями: $a \times b$ — размеры широкого «уха», $w \times l$ — размеры узкого зазора.

Таблица 3. Геометрические параметры ЗС с гантелеобразными щелями W-диапазона

Геометрический параметр	Значение, мм
$H_x \times H_y$	1.00 × 1.00
t	0.20
p	0.45
$a \times b$	0.30 × 0.35
$w \times l$	0.30 × 0.05

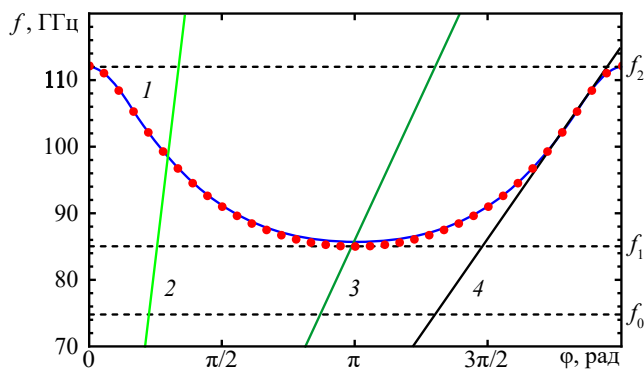


Рис. 6. Дисперсионная характеристика основной моды ЗС с гантелеобразными щелями W-диапазона: точки — результаты численного моделирования, кривая 1 — теоретическая зависимость при $f_{пл} = 82$ ГГц, 2 — линия скорости света, 3 и 4 — линии пучка при ускоряющих напряжениях 18 и 7.8 кВ соответственно, f_1 и f_2 — нижняя и верхняя частота отсечки соответственно.

слабо зависит от частоты, так что при ускоряющем напряжении пучка около 8 кВ обеспечивается синхронизм в широкой полосе частот.

Как уже отмечалось, при $f_0 < f_{кр}$ ЗС начинает проявлять свойства левой среды. Дисперсионную характеристику ЗС можно рассчитать теоретически, основываясь на теории Друде–Лоренца [5,6,9,13]. Эффективная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды зависят от частоты f следующим образом:

$$\mu_{эф}(f) = 1 - f_{кр}^2 / f^2, \quad \epsilon_{эф}(f) = 1 - f_{пл}^2 / (f^2 - f_0^2). \quad (4)$$

Здесь $f_{пл}$ — так называемая плазменная частота метаматериала. Видно, что $\mu_{эф}(f) < 0$ при $f < f_{кр}$, а $\epsilon_{эф}(f) < 0$ при $f_0 < f < \sqrt{f_0^2 + f_{пл}^2}$.

С учетом периодичности структуры можно записать следующую формулу для сдвига фаз на период структуры φ :

$$\varphi(f) = 2 \arcsin \left(\pi p f \sqrt{\epsilon_{эф} \mu_{эф}} / c \right). \quad (5)$$

Результаты расчета дисперсионной характеристики по формуле (5) (см. рис. 6, кривая 1), хорошо согласуются с результатами компьютерного моделирования, если принять $f_{пл} \approx 82$ ГГц.

Отметим, что плазменная частота $f_{пл}$ наиболее существенно зависит от толщины зазора l . Увеличение l от нескольких десятков до сотни микрон приводит к возрастанию плазменной частоты $f_{пл}$ почти в два раза. При этом полоса пропускания ЗС расширяется и смещается в область более высоких частот. Так, при $l = 10$ мкм полоса пропускания ЗС лежит в диапазоне 47...61 ГГц, а при $l = 100$ мкм — в диапазоне 106...143 ГГц.

4. ЛЕСТНИЧНАЯ ЗС В ВОЛНОВОДЕ С ПАЗАМИ

Альтернативным способом достижения условия $f_0 < f_{кр}$ в лестничных ЗС является повышение критической частоты волновода. Такая ситуация наблюдается, например, в волноводе, нагруженном продольными пазами [3,16]. Схема лестничной ЗС в волноводе с продольными пазами сечением $g \times h$ показана на рис. 7, а основные размеры приведены в табл. 4. Если щели в пластине отсутствуют, то ЗС вырождается в два однородных вдоль оси z изолированных Т-образных волновода, расположенных сверху и снизу пластины (см. рис. 7).

Расчеты частоты отсечки такого волновода были проведены в пакете COMSOL в двумерной постановке. В отсутствие паза частота отсечки $f_{кр}$ прямоугольного волновода равна 85.7 ГГц. Расчеты показали, что при увеличении глубины паза h частота отсечки монотонно возрастает, однако при

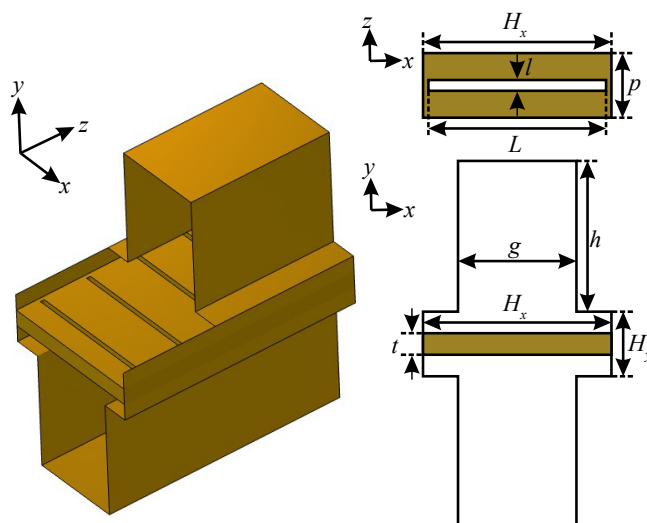


Рис. 7. Схема лестничной ЗС в волноводе с пазами: $g \times h$ — размеры паза.

Таблица 4. Геометрические параметры ЗС в волноводе с пазами W-диапазона

Геометрический параметр	Значение, мм
$H_x \times H_y$	1.75 × 0.60
t	0.20
p	0.6
$L \times l$	1.65 × 0.10
$g \times h$	1.10 × 1.40

$h > 1$ мм меняется слабо (рис. 8а). Зависимость частоты отсечки от ширины паза g (рис. 8б) имеет явно выраженный максимум, когда g несколько превышает половину ширины волновода (при выбранных размерах это имеет место при $g \approx 1100$ мкм). Были выбраны такие размеры пазов (см. табл. 4), при которых $f_{кр}$ повышается примерно до 112 ГГц, что превышает частоту $f_0 = 90.8$ ГГц.

Результаты расчета дисперсионной характеристики ЗС представлены на рис. 9. Видно, что широкополосное усиление возможно на +1-й пространственной гармонике при ускоряющих напряжениях порядка 13 кВ. Отметим, что полоса пропускания основной моды находится в области частот, в которой эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости отрицательны. Нижняя граница полосы пропускания близка к частоте f_0 , а верхняя граница, как и для описанных выше метаматериальных ЗС, определяется формулой $f_2 = \sqrt{f_0^2 + f_{пл}^2} \approx 108.9$ ГГц, где плазменная частота $f_{пл} \approx 60$ ГГц.

Как и в случае ЗС с гантелеобразными щелями, плазменная частота растет при увеличении про-

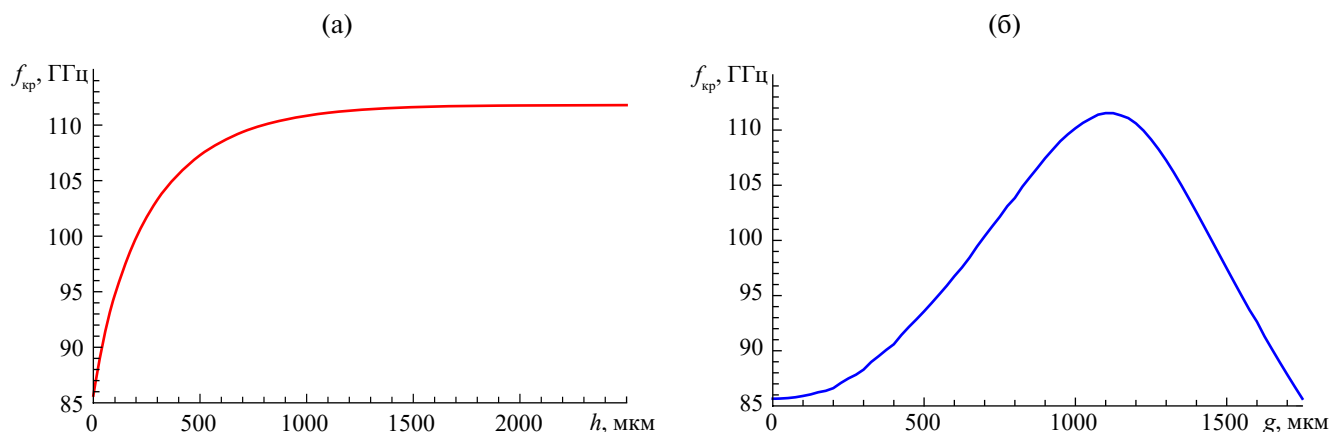


Рис. 8. Зависимость критической частоты Т-образного волновода $f_{кр}$ от глубины паза h при $g = 1.1$ мм (а) и от ширины паза g при $h = 1.4$ мм (б).

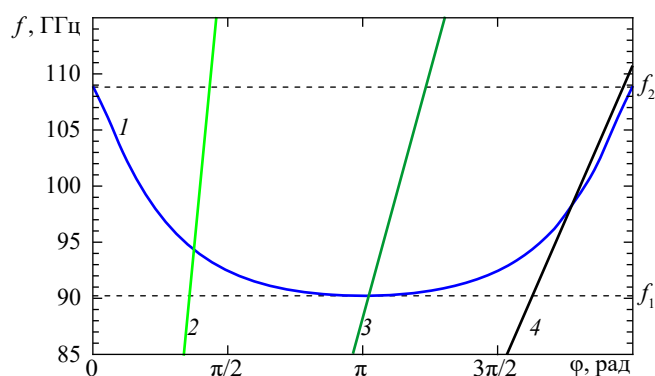


Рис. 9. Дисперсия основной моды ЗС в волноводе с пазами, разработанной для W-диапазона (1), линия скорости света (2) и линии пучка при ускоряющих напряжениях 35 (3) и 12.7 кВ (4).

дольного размера щели l . Соответственно, при этом полоса пропускания расширяется. Однако верхняя граничная частота f_2 растет только до тех пор, пока не сравняется с частотой отсечки волновода $f_{кр} \approx 112$ ГГц. Действительно, как следует из формул, при $f > f_{кр}$ эффективная магнитная проницаемость становится положительной и ЗС перестает демонстрировать свойства дважды отрицательного метаматериала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, представлены результаты анализа дисперсионных характеристик ЗС W-диапазона, которые представляют собой модификации лестничной ЗС. Повышение частоты щелевого резонанса или понижение критической частоты волновода приводит к тому, что ЗС начинает проявлять свойства дважды отрицательного метаматериала. При этом в широкой полосе частот возможен синхронизм с попутной электромагнитной

волной при напряжениях пучка порядка 8...13 кВ. Использование аналогии с дважды отрицательным метаматериалом позволяет получить простые оценочные выражения для дисперсионной характеристики, что облегчает проектирование ЗС.

Отметим, что ЗС, представленные в данной работе, могут быть изготовлены при помощи технологии прецизионной лазерной резки импульсами наносекундной или пикосекундной длительности [17,18].

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-12-00181).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paoloni C. // IEEE Commun. Magaz. 2021. V. 59. № 5. P. 102. doi: 10.1109/MCOM.001.2000326
2. Григорьев А.Д. Терагерцевая электроника. М.: Физматлит, 2020.
3. Альтицулер Ю.Г., Татаренко А.С. Лампы малой мощности с обратной волной. М.: Сов. радио, 1963.
4. Гершензон Е.М., Голант М.Б., Негурев А.А., Савельев К.С. Лампы обратной волны миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн / Под ред. Н.Д. Девяткова. М.: Радио и связь, 1985.
5. Duan Z., Shapiro M.A., Schamiloglu E. et al. // IEEE Trans. 2019. V. ED-66. № 1. P. 207. doi: 10.1109/TED.2018.2878242
6. Hummelt J.S., Lewis S.M., Shapiro M.A., Temkin R.J. // IEEE Trans. 2014. V. PS-42. № 4. P. 930. doi: 10.1109/TPS.2014.2309597
7. Hummelt J. S., Lu X., Xu H. et al. // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 117. № 23. P. 237701. doi: 10.1103/PhysRevLett.117.237701
8. Lu X., Stephens J.C., Mastovsky I. et al. // Phys. Plasmas. 2018. V. 25. № 2. P. 023102. doi: 10.1063/1.5016545

9. High Power Microwave Sources and Technologies Using Metamaterials / Ed. J.W. Luginsland et al. N.Y.: Wiley-IEEE Press, 2021.
10. Jiang S., Tang X., Huang S. et al. // IEEE Trans. 2023. V. ED-70. № 3. P. 1306. doi: 10.1109/TED.2022.3233814
11. Karp A. // Proc. IRE. 1957. V. 45. № 4. P. 496. doi: 10.1109/JRPROC.1957.278439
12. Berry D., Deng H., Dobbs R. et al. // IEEE Trans. 2014. V. ED-61. № 6. P. 1830. doi: 10.1109/TED.2014.2302741
13. Вендик И.Б., Вендик О.Г. // ЖТФ. 2013. Т. 83. № 1. С. 3.
14. Yurt S.C., Elfrgani A., Fuks M.I. et al. // IEEE Trans. 2016. V. PS-44. № 8. P. 1280. doi: 10.1109/TPS.2016.2535305
15. Catalan-Izquierdo S., Bueno-Barrachina J.-M., Cañas-Peñuelas C.-S., Cavallé-Sesé F. // Renew. Energies & Power Quality J. 2009. V. 1. № 7. P. 613. doi: 10.24084/repqj07.451
16. Butcher P.N. // Proc. IEE. 1957. V. 104. Pt. B. № 14. P. 169. doi: 10.1049/pi-b-1.1957.0132
17. Starodubov A.V., Galushka V.V., Ryskin N.M. et al. // Proc. 2023 24th Int. Vacuum Electronics Conf. (IVEC). Chengdu 25-28 Apr. N.Y.: IEEE, 2023. Paper No. 10157320. doi: 10.1109/IVEC56627.2023.10157320
18. Торгашов Р.А., Ножкин Д.А., Стародубов А.В., Рыскин Н.М. // РЭ. 2023. Т. 68. № 10. С. 992. doi: 10.31857/S0033849423100182

METAMATERIAL-INSPIRED SLOW-WAVE STRUCTURES FOR W-BAND TRAVELING-WAVE TUBES

A. A. Rostuntsova^{a, b, *}, E. E. Kolesnichenko^{a, b}, N. M. Ryskin^{a, b}

^a *Saratov Branch Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics RAS,
38 Zelenaya St., Saratov, 410019 Russia*

^b *Saratov State University,
83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012 Russia*

**E-mail: rostuncova@mail.ru*

Received April 26, 2023, revised May 22, 2024, accepted May 25, 2024

Electromagnetic parameters of the ladder-type slow-wave structures (SWS) formed by a metal plate with periodically arranged slots of a certain shape placed in a waveguide are studied. Modifications of the ladder-type SWS associated with the complication of the slot shape or the waveguide shape are proposed in such a way that the frequency of the slot resonance is lower than the cutoff frequency of the waveguide, and the SWS exhibits the properties of a double-negative metamaterial. It is shown that the fundamental spatial harmonic is backward, while the +1st harmonic acquires normal dispersion and the beam-wave synchronism is possible in a sufficiently wide frequency band. SWS with dumbbell-shaped slots and SWS in a groove-loaded waveguide are designed for W-band traveling-wave tube (75...110 GHz) with a relative bandwidth of about 25% and operating voltages of 8...13 kV. In such structures, there is the possibility of interaction of a slow wave with two sheet electron beams propagating from above and below the plate.

Keywords: slow-wave structure, metamaterial, traveling-wave tube, millimeter band

УДК 538.915

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАГНИТНЫХ И ЭЛЕКТРОННЫХ СВОЙСТВ 2D ФАЗ Теллуридов Хрома

© 2024 г. А. И. Карцев^{a,b,*}, А. А. Сафронов^c^aВычислительный центр ДВО РАН,

ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск, 680000 Российская Федерация

^bМосковский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,

ул. 2-я Бауманская, 5, стр.1, Москва, 105005 Российская Федерация

^cМИРЭА – Российский технологический университет,

просп. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

*E-mail: karec1@gmail.com

Поступила в редакцию 12.06.2023 г.

После доработки 06.05.2024 г.

Принята к публикации 24.05.2024 г.

Проведено первопринципное моделирование двух различных квазидвумерных фаз на основе объемных фаз Cr_2Te_3 и CrTe_3 . В рамках метода функционала плотности и метода проекционных плоских волн произведена структурная релаксация полученных 2D-соединений и их объемных прототипов. Исследована магнитная анизотропия в различных кристаллографических плоскостях квазидвумерных структур и соответствующих объемных материалов. Обнаружено увеличение магнитной анизотропии при переходе от объемных фаз к квазидвумерным фазам $\text{Cr}_2\text{Te}_3/\text{CrTe}_3$. Построена карта зарядовой плотности и найдена плотность электронных состояний для 2D-материалов Cr_2Te_3 и CrTe_3 .

Ключевые слова: 2D-магнетик, теория функционала плотности, магнитная анизотропия, плотность электронных состояний

DOI: 10.31857/S0033849424100085, EDN: HPXJGV

ВВЕДЕНИЕ

Новые технологии предъявляют постоянно растущие требования к устройствам, отвечающим за запись и обработку информации [1]. Вектор развития данного технологического направления ориентирован на миниатюризацию элементной базы, лежащей в основе работы таких устройств, а также на повышение качества, надежности и долговечности модулей, отвечающих за хранение данных [2–4]. К сожалению, физические возможности увеличения плотности расположения полупроводниковых элементов в микросхемах на текущий момент почти исчерпаны [5–7]. Соответствующие кардинальные изменения принципов работы компонентной базы диктуют запрос на поиск новых материалов, которые позволят еще уменьшить размеры и повысить надежность работы таких устройств. Одним из вариантов решения данной проблемы является создание элементной базы следующего поколения на основе двумерных магнетиков [8]. Для этого необходимо исследовать новые двумерные магнитные системы и отобрать наиболее перспективные среди них, т.е. обладающие необходимыми электронными и магнитными свойствами [9, 10]. В данной работе осуществляется первопринципное

исследование и сравнительный анализ двух таких, перспективных на наш взгляд, двумерных магнетиков Cr_2Te_3 и CrTe_3 и их объемных прототипов. Квазидвумерные халькогениды переходных магнитных металлов сочетают в себе как уникальные электронные, так и магнитные свойства. Так, в [11] продемонстрировано применение устройства на основе родственного материала Co_2Te_3 , работа которого базируется на флексомагнетоэлектрическом эффекте с рекордными характеристиками. Это позволяет высказать предположение, что изучаемые нами соединения могут оказаться перспективными для использования в качестве основы для создания элементов микро- и наноэлектроники. Исследуемые двумерные теллуриды хрома Cr_2Te_3 и CrTe_3 совсем недавно были успешно синтезированы [11–14].

1. МЕТОДЫ

В качестве структурной основы были использованы объемные фазы теллуридов хрома. При этом Cr_2Te_3 обладает гексагональной структурой, в то время как кристалл CrTe_3 имеет моноклинную ячейку. Соответствующие первоначальные cif-файлы, содержащие кристаллографическую

информацию об объемных фазах теллурида хрома были взяты на электронном ресурсе «The Materials Projects» (<https://materialsproject.org>). Расчеты параметров равновесных кристаллографических структур осуществляли методом теории функционала плотности (ТФП) [15] с учетом коллинеарного магнетизма при помощи коммерческого программного пакета VASP [16]. В рамках данного пакета квантово-механических расчетов применяется метод проекционных присоединенных волн. При этом примененный обменно-корреляционный потенциал рассматривался в обобщенном градиентном приближении [17] с учетом поправки Хаббарда $U = 2.65$ эВ [18]. Были использованы следующие основные численные параметры: параметр обрезания энергии ENCUT = 450, критерии сходимости по энергии/силе EDIFF = 10^{-8} эВ/EDIFFG = 10^{-7} эВ/Å, $8 \times 8 \times 8$ k -сетка в обратном пространстве. Начальный

магнитный момент Cr был выбран равным 3 μ_B , в то время как начальным магнитным моментом Te в расчетах пренебрегли. При проведении структурной релаксации спин-орбитальное взаимодействие не учитывалось. Структурную релаксацию квазидвумерных образцов проводили с использованием упомянутых численных параметров, кроме значений k -сетки, которые составили $8 \times 8 \times 1$. Во время проведения процедуры релаксации для сохранения псевдовакуумного пространства значение объема моделируемой ячейки было фиксировано, что позволило найти равновесное положение атомов внутри слоя материала, с сохранением его квазидвумерной природы. Методом ТФП в рамках формализма неколлинеарного магнетизма, уже с учетом спин-орбитального взаимодействия была найдена магнитная анизотропия объемных и двумерных образцов Cr_2Te_3 и CrTe_3 . Вычисления проводили как в плоскостях двумерных магнетиков,

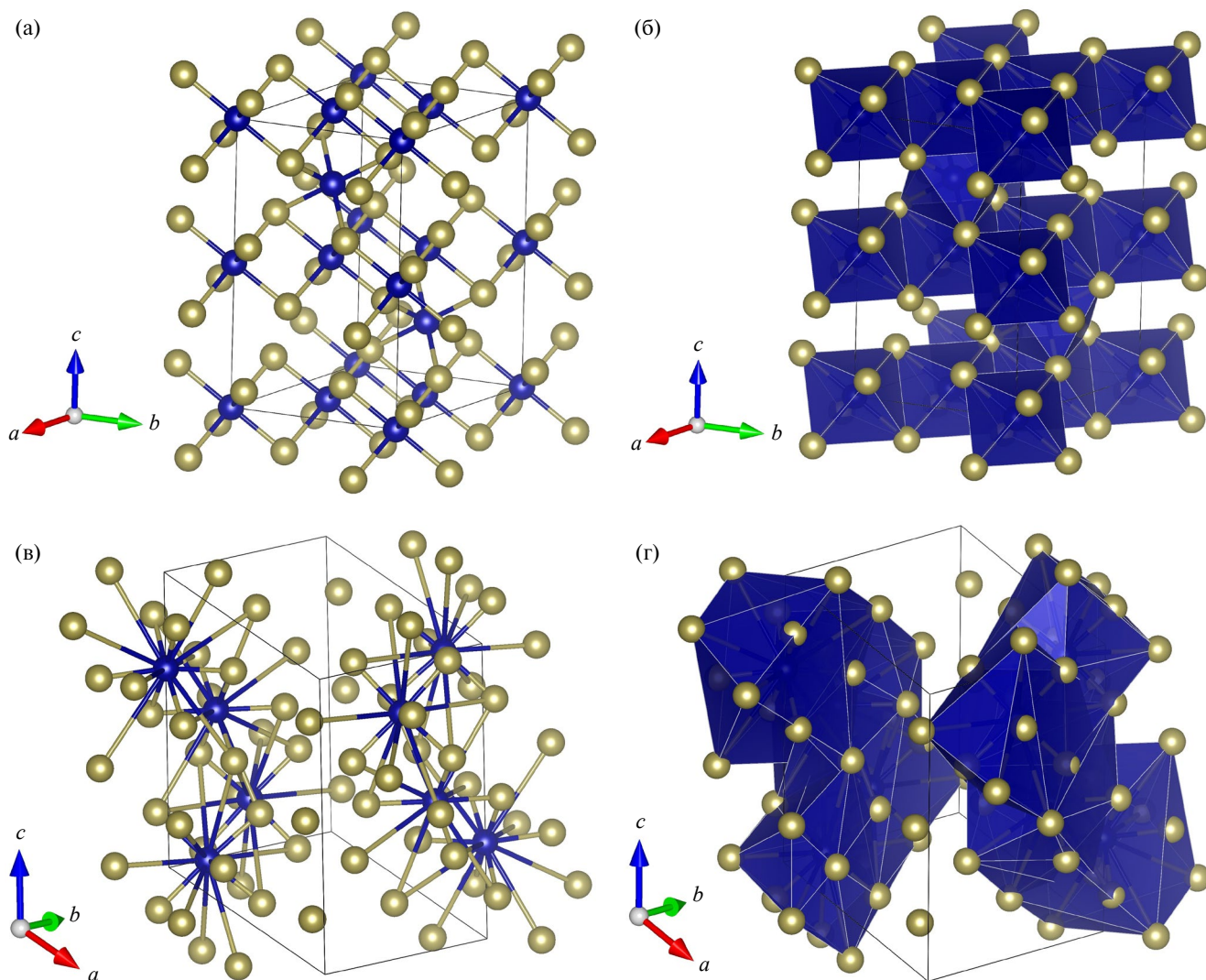


Рис. 1. Равновесные структуры: объемные Cr_2Te_3 (а) и CrTe_3 (в) и в модели Cr-центрированного многогранника – Cr_2Te_3 (б), CrTe_3 (г). Атомы Cr указаны синим, а атомы Te – золотым.

так и в плоскостях, перпендикулярных к ним. Все визуализации в данной работе произведены в программном пакете VESTA [19].

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ СТРУКТУР

На рис. 1 представлены объемная и многогранная кристаллографические модели изучаемых равновесных структур.

Для моделирования двумерной структуры Cr_2Te_3 был использован слой атомов на основе плоскости отсечения $1\bar{1}0$ (рис. 2а), после чего расстояние между сформированными слоями было увеличено до 25 Å для создания так называемого псевдовакуумного пространства, позволяющего исключить взаимодействия между периодическими образцами

квазидвумерного материала в рамках трехмерных периодических граничных условий.

Двумерная структура CrTe_3 была смоделирована на основе визуального анализа его объемного прототипа. В кристаллографических плоскостях (100) хорошо заметны слои (рис. 2б), образующие ван-дер-ваальсову щель, где расстояние между ближайшими плоскостями атомов Te составляет ~ 3 Å. Это позволяет предположить приоритетное расслоение образца вдоль упомянутых плоскостей, что и было показано в экспериментальной работе по жидкостному расслоению объемных образцов CrTe_3 [20]. Расстояние между ближайшими атомами в сформированных 2D-слоях было увеличено до 20 Å. Отрелаксированные ячейки двумерных образцов Cr_2Te_3 и CrTe_3 показаны на рис. 2в и 2г соответственно.

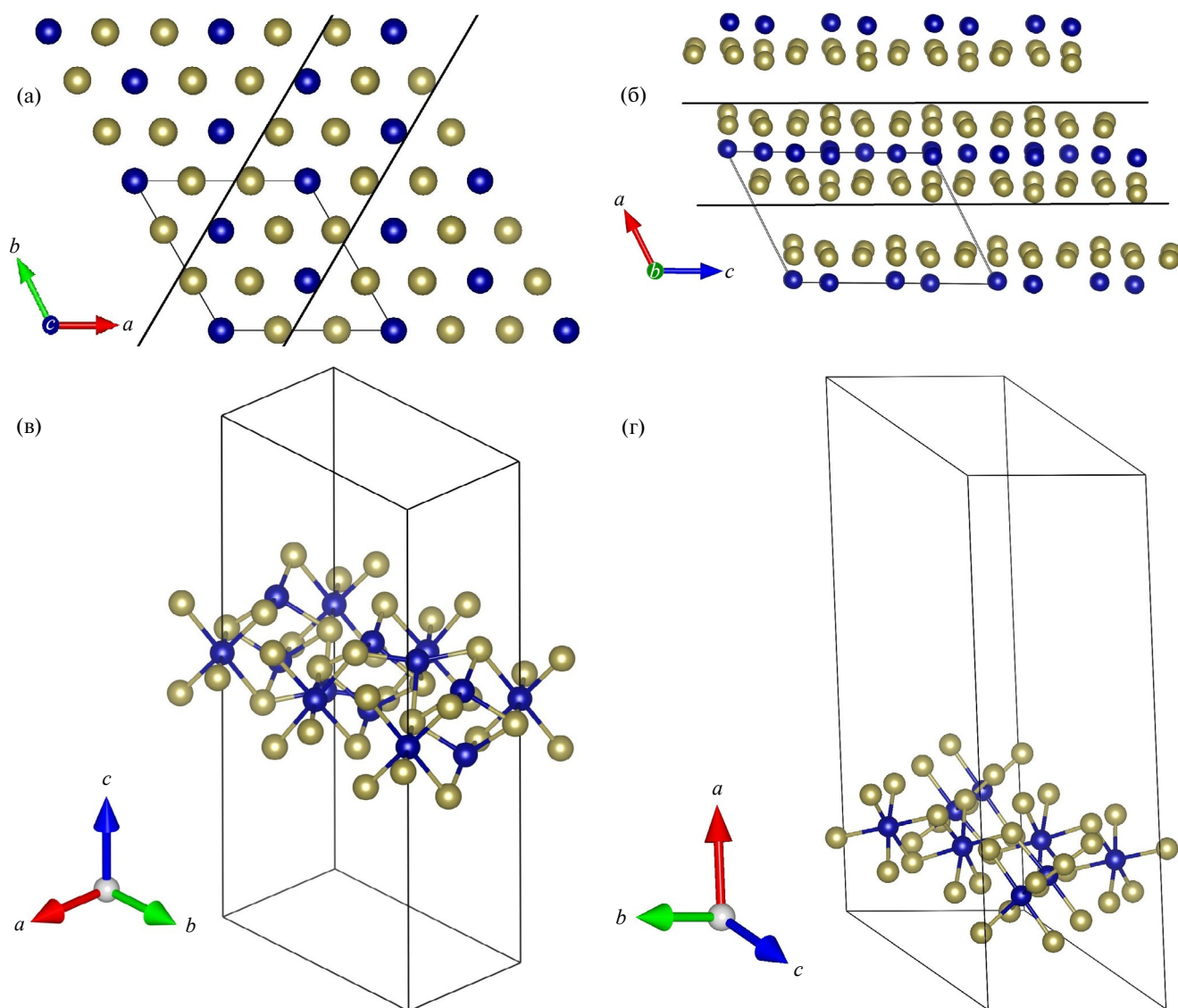


Рис. 2. Плоскость $1\bar{1}0$ в объемной структуре Cr_2Te_3 (а); отрелаксированная 2D-структура Cr_2Te_3 (в); двумерные слои объемного теллурида хрома в кристаллографических плоскостях (100) (б); выделенная и отрелаксированная ячейка двумерного CrTe_3 (г).

3. ЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА

Были исследованы электронные свойства изучаемых структур. Вычислено распределение электронной плотности для двумерных образцов теллурида хрома. На рис. 3 изображены трехмерные изоповерхности $0.03 \text{ e}/\text{\AA}^3$ (e – элементарный заряд) в модели суперячейки для двух слоев материала, разделенных псевдовакуумным пространством. Направленный характер распределения зарядовой плотности вдоль оси Cr–Te свидетельствует о присутствии значительного ковалентного вклада в химические связи данных соединений.

Была найдена также плотность электронных состояний (ПЭС). На рис. 4 показана ПЭС для Cr_2Te_3 и CrTe_3 для случая ферромагнитного упорядочения. За нулевой уровень принята энергия Ферми. Полученные ПЭС указывают на металлическую природу данных соединений. При этом основной вклад в электронные состояния в районе уровня Ферми вносят электроны со спином вверх. Также отметим, что данные состояния преимущественно образованы p - и d -орбиталями атомов Te и Cr соответственно, что указывает на природу химической связи, соответствующей pd -гибридации.

4. АНИЗОТРОПИЯ

Нами была вычислена полная энергия системы E , приходящаяся на одну формульную единицу, как функция $\cos(\theta)$, где θ – угол между направлением магнитных моментов Cr и выбранным направлением в кристалле в исследуемой плоскости. Расчет проводился как для собственных плоскостей монослоя двумерных образцов, так и в плоскостях, которые им перпендикулярны. В целях сравнительного анализа в тех же плоскостях были выполнены аналогичные вычисления для объемных материалов. Для фаз Cr_2Te_3 исследования магнитной анизотропии проводились в плоскостях $(1\bar{1}0)$ и (110) (рис. 5а и 5б). Угол θ был отложен от вектора \bar{c} . Кристаллографические плоскости и вектор \bar{c} указаны по отношению к объемному образцу. Для CrTe_3 исследования проводили в плоскостях (100) и $(10\bar{3})$ (см. рис. 5в и 5г). Угол θ был отложен от вектора \bar{b} .

Как видно из характера зависимости магнитной анизотропии от направления спинов, представленной на рис. 5а, в соединении Cr_2Te_3 , в отличие от CrTe_3 , происходит поворот оси легкого намагничивания на угол порядка 90° . Необходимо также отметить асимметричный характер зависимости внутривоскостной магнитной анизотропии для монослоя Cr_2Te_3 , что связано со значительным понижением симметрии по отношению

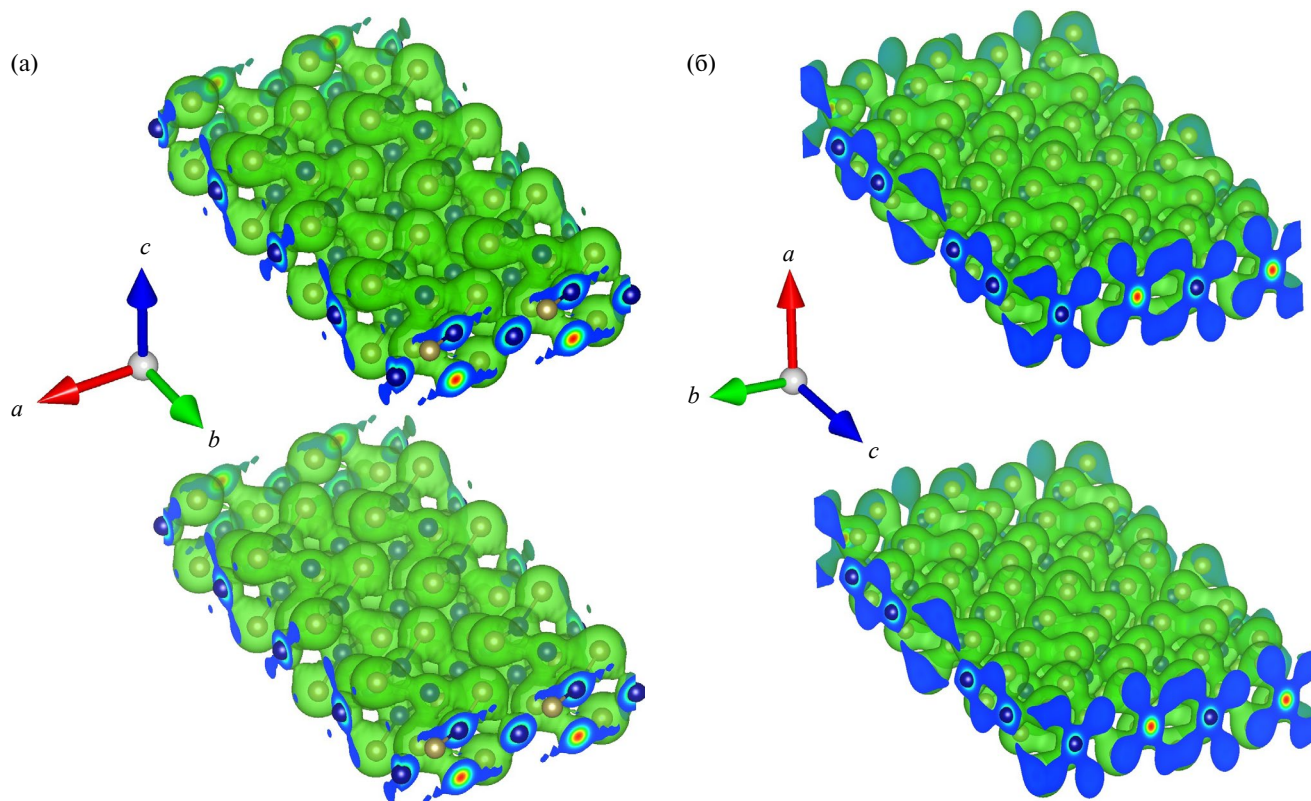


Рис. 3. Трехмерная изоповерхность $0.03 \text{ e}/\text{\AA}^3$ (e – элементарный заряд) распределения зарядовой плотности для квазидвумерных структур Cr_2Te_3 (а) и CrTe_3 (б).

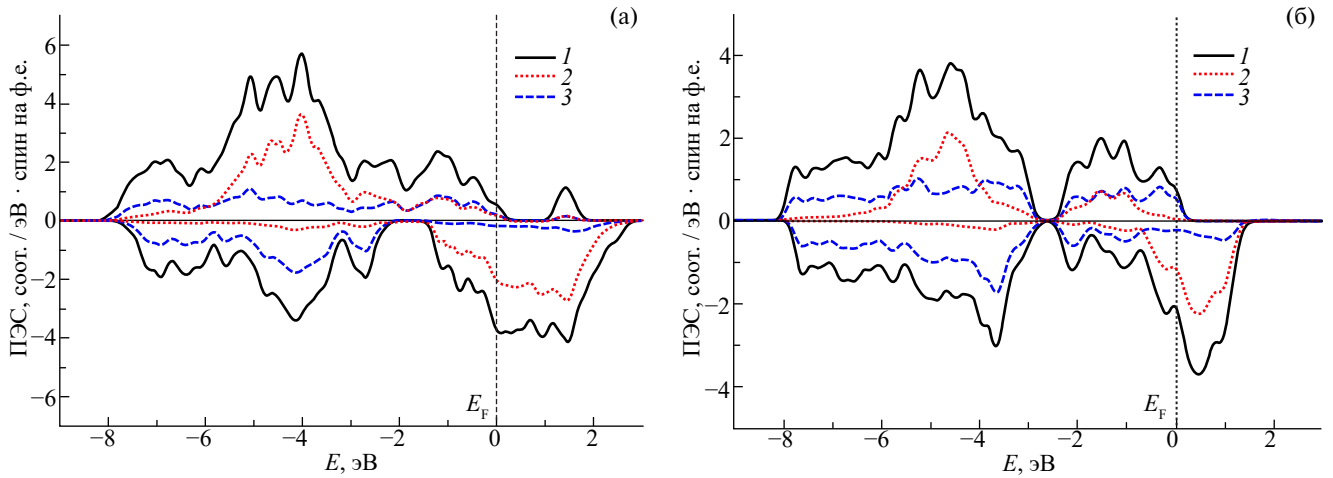


Рис. 4. Плотность электронных состояний для Sr_2Te_3 (а) и SrTe_3 (б), приходящаяся на одну формульную единицу: 1 – полная плотность электронных состояний, 2 и 3 – вклад d/p -электронов Sr и Te соответственно; E_F – энергия Ферми. Верхняя полуплоскость ПЭС (положительные значения) соответствует состояниям со спином-вверх, нижняя полуплоскость (отрицательные значения) – состояниям со спином-вниз.

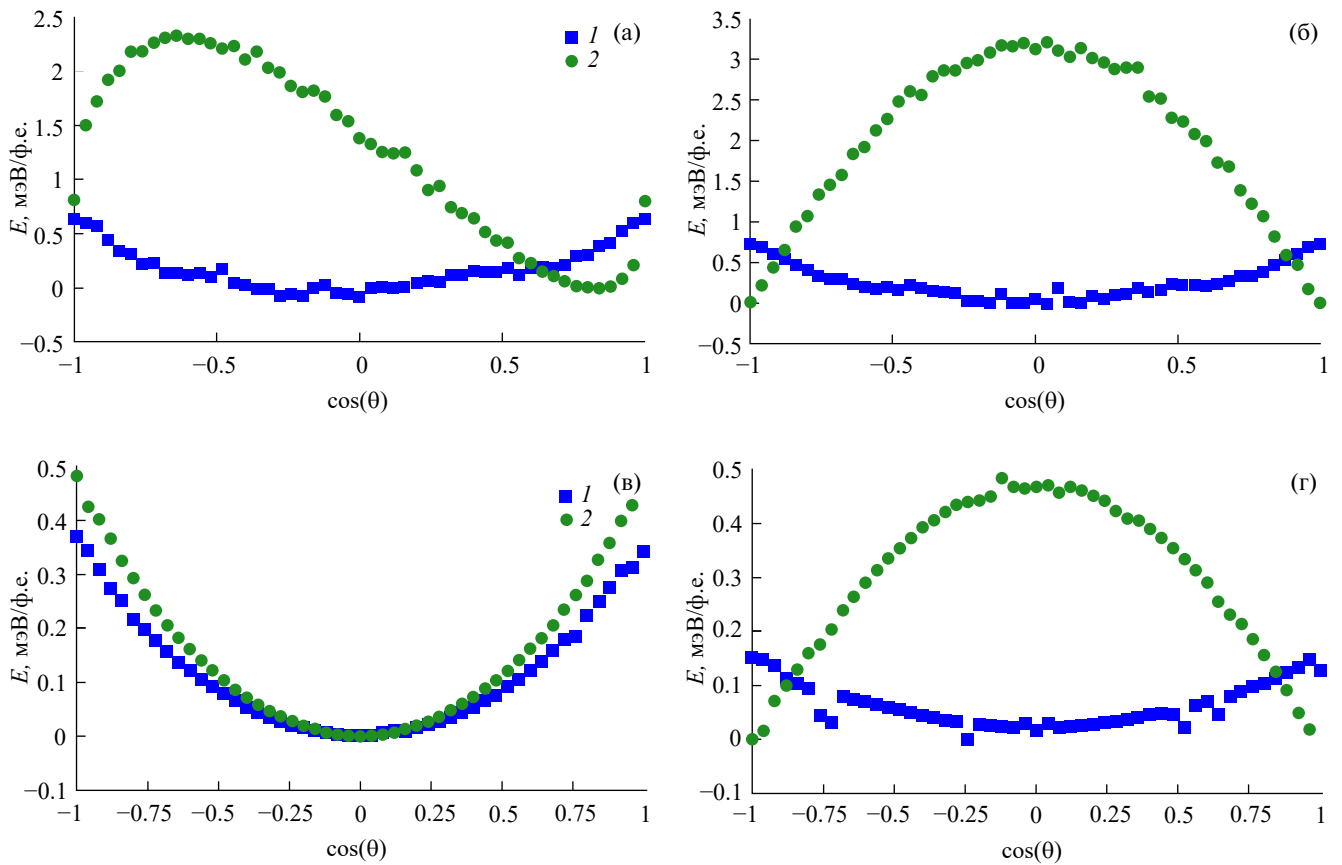


Рис. 5. Магнитная анизотропия: объемного (1) и квазидвумерного (2) образцов Sr_2Te_3 в плоскости $(1\bar{1}0)$ (а) и (110) (б), объемного (1) и двумерного (2) образцов SrTe_3 в плоскости (100) (в) и $(1,0,3)$ (г). За нулевой уровень энергии была выбрана минимальная энергия системы на 1 ф.е. Угол θ для Sr_2Te_3 откладывался от вектора \vec{c} , для Sr_2Te_3 – от вектора \vec{b} ; $\cos(\theta)$ изменялся с шагом 0.04.

к его объемному прототипу. При понижении размерности в обоих образцах происходит увеличение магнитной анизотропии. Полученное теоретическое значение магнитной анизотропии ~ 0.7 мЭВ на формульную единицу (ф.е.) для объемной фазы Cr_2Te_3 (объем элементарной ячейки 485 \AA^3) хорошо согласуется с данными эксперимента

$$K = 8.71 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \approx 0.66 \text{ мЭВ} / \text{Cr}_2\text{Te}_3 \quad [21].$$

В двумерном соединении Cr_2Te_3 наблюдается рост магнитной анизотропии в 4 раза в плоскости монослоя образца и в 4.7 раза в перпендикулярной к ней плоскости по сравнению с объемным материалом (см. рис. 5а, 5б), что ранее также было подтверждено экспериментально [22]. Из рис. 5в, 5г видим увеличение магнитной анизотропии в двумерном соединении CrTe_3 в 1.4 раза в плоскости монослоя образца и в 3 раза в перпендикулярной к ней плоскости. Наши результаты исследования магнитной анизотропии для CrTe_3 хорошо согласуются с результатами независимых теоретических расчетов [23].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Было проведено первопринципное исследование квазидвумерных фаз Cr_2Te_3 и CrTe_3 . Оба квазидвумерных соединения демонстрируют смешанный тип химической связи, соответствующий *pd*-гибридизации. Показано значительное увеличение магнитной анизотропии при переходе к материалам с пониженной размерностью. Изученные двумерные соединения демонстрируют наличие значений магнитной анизотропии порядка нескольких миллиэлектронвольт на формульную единицу. При этом магнитная анизотропия двумерного образца Cr_2Te_3 выше в 2.5 раза, что делает его перспективной основой для изготовления элементной базы спинтроники и микроэлектроники. Полученные нами новые результаты расчетов профилей магнитной анизотропии в различных кристаллографических плоскостях фаз $\text{Cr}_2\text{Te}_3/\text{CrTe}_3$ позволяют объяснить экспериментальные данные по усилению магнитной анизотропии при понижении размерности данных систем.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-23-01189). Результаты получены с использованием вычислительных ресурсов ЦКП “Центр данных ДВО РАН” (г. Хабаровск) и оборудования “Дальневосточный вычислительный ресурс” ИАПУ ДВО РАН. (<https://www.cc.dvo.ru>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhang P., Xue S., Wang J. // *Materials & Design*. 2020. V. 192. P. 108726. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.108726>

2. Zhang Z., Wang Z., Shi T. et al. // *InfoMat*. 2020. V. 2. №. 2. P. 261. <https://doi.org/10.1002/inf2.12077>
3. Frazier A.B., Warrington R.O., Friedrich C. et al. // *IEEE Trans.* 1995. V. ID-42. № 5. P. 423. <https://doi.org/10.1109/41.464603>
4. Charles Jr H. K. // *Johns Hopkins APL Technical Digest*. 2005. V. 26. №. 4. P. 402.
5. Rohrer H.R. // *Jap. J. Appl. Phys.* 1993. V. 32. № 3. P. 1335.
6. Keyes R.W. // *IBM J. Research and Development*. 1988. V. 32. № 1. P. 84.
7. Гуляев Ю.В., Сандомирский В.Б., Суханов А.А., Ткач Ю.Я. // *Успехи физ. наук*. 1984. Т. 144. № 3. С. 475.
8. Gong C., Zhang X. // *Science*. 2019. V. 363. № 6428. P. 4450. <https://www.science.org/doi/10.1126/science.aav4450>
9. Kartsev A., Malkovsky S., Chibisov A. // *Nanomaterials*. 2021. V. 11. № 11. P. 2967. <https://doi.org/10.3390/nano11112967B>
10. Билык В.Р., Брехов К.А., Агранат М.Б., Мишина Е.Д. // *Russ. Technol. J.* 2023. Т. 11. № 3. С. 38. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-3-38-4>
11. Negedu S. D., Kartsev A.I., Palit M. et al. // *J. Phys. Chem. C*. 2022. V. 126. № 30. P. 12545. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.2c02102>
12. Xiong Z., Hu C., Luo X. // *Nano Lett.* 2021. V. 21. № 24. P. 10486.
13. Li R., Nie J.-H., Xianet J.-J. et al. // *ACS Nano*. 2022. V. 16. № 3. P. 4348.
14. Yao J., Wang H., Yuan B. et al. // *Adv. Mater.* 2022. V. 34. № 23. P. 2200236.
15. Medvedev M.G., Bushmarinov I.S., Sun J. et al. // *Science*. 2017. V. 355. № 6320. P. 49. <https://www.science.org/doi/10.1126/science.aah5975>
16. Hafner J. // *J. Computational Chem.* 2008. V. 29. № 13. P. 2044. <https://doi.org/10.1002/jcc.21057>
17. Perdew J.P., Ernzerhof M., Burke K. // *J. Chem. Phys.* 1996. V. 105. № 22. P. 9982.
18. Kartsev A. A., Augustin M., Evans R.F.L. et al. // *npj Computational Mater.* 2020. V. 6. № 1. P. 150. <https://www.nature.com/articles/s41524-020-00416-1>
19. Momma K, Izumi F. // *J. Appl. Crystallography*. 2008. V. 41. № 3. P. 653. <https://doi.org/10.1107/S0021889808012016>
20. Synnatschke K., Badlyan N., Wrzesińska A. et al. // *Ultrasonics Sonochemistry*. 2023. V. 98. P. 106528.
21. Pramanik T., Anupam R., Rik D. et al. // *J. Magn. Mater.* 2017. V. 437. P. 72.
22. Bian M., Kamenskii N., Han M. et al. // *Mater. Research Lett.* 2021. V. 9. № 5. P. 205.
23. Debbichi M., Debbichi L., Lebègue S. // *Phys. Lett. A*. 2020. V. 384. № 27. P. 126684.

COMPARATIVE ANALYSIS OF MAGNETIC AND ELECTRONIC PROPERTIES OF 2D PHASES OF CHROMIUM TELLURIDES**A. I. Kartsev^{a,b,*}, A. A. Safronov^c**

^a*Computing Center of Far Eastern Branch of RAS,
Kim You Chen Str., 65, Khabarovsk, 680000 Russian Federation*

^b*Bauman Moscow State Technical University,
2-nd Baumanskaya Str., 5, build.1, Moscow, 105005 Russian Federation*

^c*MIREA – Russian Technological University,
prosp. Vernadskogo, 78, Moscow, 119454 Russian Federation*

**E-mail: karec1@gmail.com*

Received June 12, 2023, revised May 06, 2024, accepted May 24, 2024

The first-principle modeling of two different quasi-two-dimensional phases based on the volume phases Cr_2Te_3 and CrTe_3 is carried out. Structural relaxation of the obtained 2D compounds and their volumetric prototypes was performed within the framework of the density functional method and the projection plane wave method. Magnetic anisotropy in various crystallographic planes of quasi-two-dimensional structures and corresponding bulk materials has been studied. An increase in magnetic anisotropy was found during the transition from bulk phases to quasi-two-dimensional phases of $\text{Cr}_2\text{Te}_3/\text{CrTe}_3$. A charge density map is constructed and the density of electronic states is found for 2D Cr_2Te_3 and CrTe_3 materials.

Keywords: 2D magnet, density functional theory, magnetic anisotropy, density of electronic states

УДК 537.525

О ДОПИРОВАННЫХ ЖЕЛЕЗОМ АЛМАЗОПОДОБНЫХ ПЛЕНКАХ, ПОЛУЧЕННЫХ В РАЗРЯДЕ С ПОЛЫМ КАТОДОМ

© 2024 г. И. А. Сорокин^{a,b,*}, Д. В. Колодко^{a,b}

^aФрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190 Российская Федерация

^bНациональный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Каширское шос., 31, Москва, 115409 Российская Федерация

*E-mail: iasorokin@mail.ru

Поступила в редакцию 12.12.2023 г.

После доработки 12.12.2023 г.

Принята к публикации 11.01.2024 г.

Представлены результаты измерения вольт-амперных характеристик допированных железом алмазоподобных пленок, полученных комбинированным методом физического распыления железного катода и плазмохимического осаждения в разряде с полым катодом. Показан нелинейный характер поперечной проводимости пленки, а также отмечено значительное влияние амплитудного значения напряжения развертки на амплитудное значение тока и форму вольт-амперной характеристики.

Ключевые слова: алмазоподобный углерод, плазмохимическое осаждение, разряд с полым катодом, тонкая пленка, нелинейная вольт-амперная характеристика, электропроводность

DOI: 10.31857/S0033849424100099, EDN: HPSZRU

1. МЕТОДИКА НАНЕСЕНИЯ ПЛЕНОК И ХАРАКТЕРИЗАЦИИ DLC(Fe)

Нанесение допированных железом алмазоподобных пленок осуществлялось в соответствии с ранее разработанной методикой нанесения, включающей в себя плазмохимическое осаждение алмазоподобной пленки из газовой фазы с помощью разряда с полым катодом (РПК) на смеси реакционного газа (пропана) и плазмообразующего газа (аргона) с параллельным физическим распылением поверхности железного катода [1].

Эксперименты проводили на вакуумном стенде объемом 5 л, откачиваемом до предельного остаточного давления 10^{-3} Па пластинчато-роторным форвакуумным и диффузионным насосами с криолоушкой. Предельное остаточное давление и парциальное давление реакционного газа (пропана) измеряли ионизационным вакуумметром ПМИ-2, давление рабочей смеси газов (пропана и аргона) — емкостным датчиком Thyracont VCC200VF4.

Напуск рабочего газа осуществляли с помощью двух регуляторов расхода газа РРГ-12.

Электродная система РПК состоит из цилиндрического железного катода (внутренний диаметр 18 мм, длина 35 мм, толщина стенки 1 мм), установленного на подвижном вводе Вильсона, который обеспечивает возможность изменения расстояния между катодом и подложкой, и анода — стенки вакуумной камеры. Подложка, на которую происходит осаждение DLC(Fe), расположена напротив катода РПК на неподвижном вводе под плавающим потенциалом, и в процессе нанесения находится на фиксированном расстоянии 40 мм. На рис. 1а представлена схема нанесения DLC(Fe) в РПК.

Пленки DLC(Fe) были синтезированы на подложке в наиболее стабильном режиме работы РПК: напряжение разряда составляло 500 В, ток 200 мА. Общее давление рабочей смеси газов (пропана и аргона) составляло 65 Па; количество металлической примеси в DLC определялось

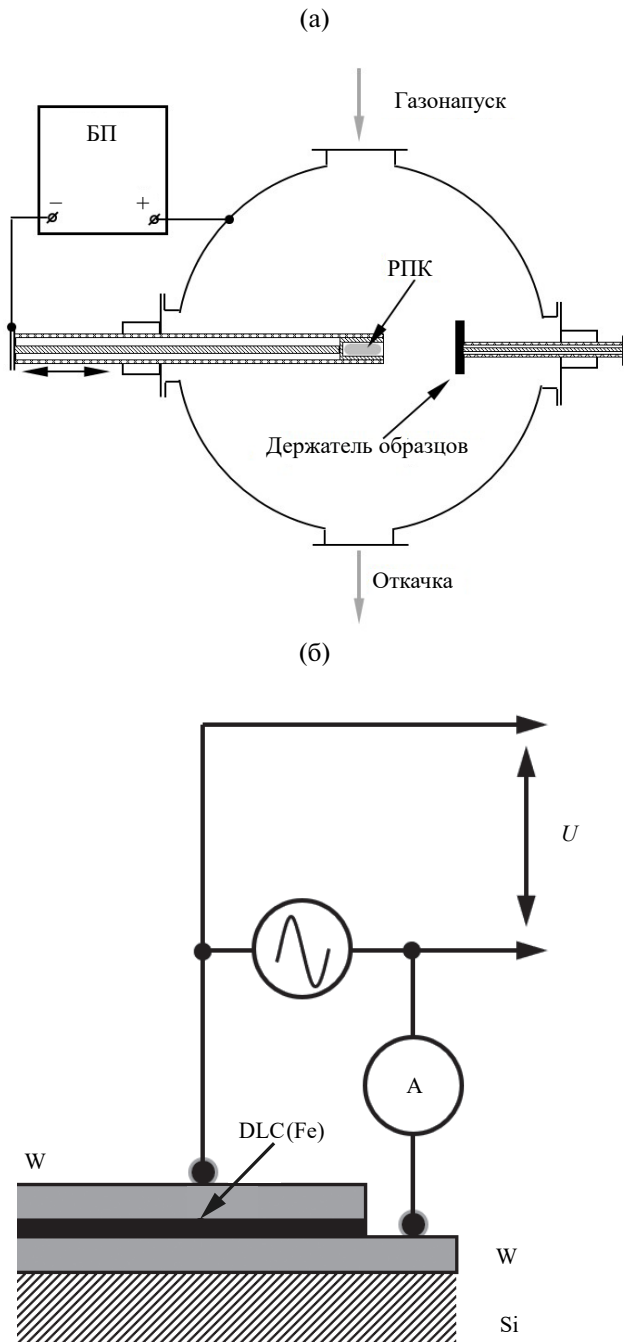


Рис. 1. Схема эксперимента (а) и измерения проводимости (б) алмазоподобной пленки: БП — блок питания, А — пикоамперметр.

значением парциального давления пропана, которое варьировалось в пределах от 0.03 до 0.1 Па, при этом доля железа в пленке составляла от 40 до 1 ат. % соответственно. Малая доля пропана в газовой смеси не влияла на рабочие параметры РПК во всем используемом диапазоне.

В качестве подложек были использованы пластины Si(100). Для исследования электрических свойств получаемых пленок на поверхность крем-

ния предварительно был нанесен слой вольфрама толщиной 500 нм методом физического распыления в разряде с полым катодом [2]; после осаждения DLC для обеспечения верхнего электрического контакта наносились площадки вольфрамовой пленки диаметром 3 мм толщиной более 200 нм. Вольт-амперные характеристики (ВАХ) полученных пленок DLC(Fe) исследовались двухзондовым методом. На вольфрамовые контактные площадки подавалась пилообразная развертка генератором Tektronix AFG3252; напряжение развертки измерялось 16-битным аналого-цифровым преобразователем в составе модуля ввода-вывода ICP-DAS ET-7026, а ток в цепи исследуемой пленки — пикоамперметром Keithley 6485 (А на рис. 1). Частота развертки составляла 10 мГц, амплитудное значение напряжения от 1 до 10 В. ВАХ измеряли при комнатной температуре. На рис. 1б представлена схема измерения поперечной проводимости DLC(Fe).

2. ВОЛЬТ-АМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ DLC(Fe)

Нелинейность зависимости тока, проходящего через пленку DLC(Fe), от прикладываемого напряжения наблюдается при концентрации металлической примеси от 10 до 40 ат.%. Необходимо отметить, что увеличение доли металлической примеси снижает напряжение пробоя пленки и, как следствие, безопасный для целостности DLC диапазон развертки сужается. Значение напряженности электрического поля в пленке, при котором происходит необратимое изменение проводимости (пробой) в работе оценивается $\sim 10^8$ В/м.

На рис. 2 представлен пример временных зависимостей тока для различных значений амплитудного значения напряжения развертки, $U_m = 1.0, 5.0, 7.5, 10$ В.

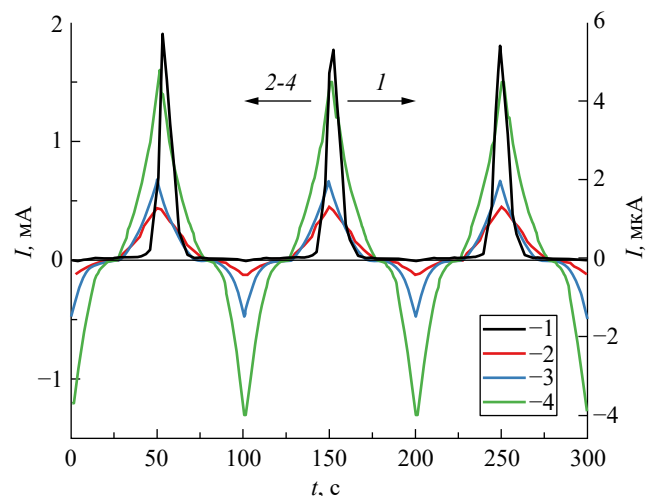


Рис. 2. Зависимость тока в цепи DLC(Fe) при различных значениях амплитуды напряжения развертки: $U_m = 1$ (1), 5 (2), 7.5 (3) и 10 В (4).

По мере увеличения напряжения развертки наблюдается изменение как величины тока, проходящего через пленку, так и формы ВАХ. При низком значении амплитудного значения напряжения развертки $U_m = 1$ В характеристика асимметрична относительно нуля. По мере увеличения U_m зависимость от полярности прикладываемого напряжения становится менее выраженной, при этом амплитудное значение тока увеличивается пропорционально U_m . На рис. 3 представлены ВАХ пленки DLC(Fe).

При переходе напряжения развертки через ноль наблюдается нелинейность зависимости тока через DLC(Fe) от прикладываемого напряжения, характерная для наноструктур на основе DLC [3, 4]. Для более толстых (от 100 нм) пленок DLC(Fe) при постоянной развертке напряжения было обнару-

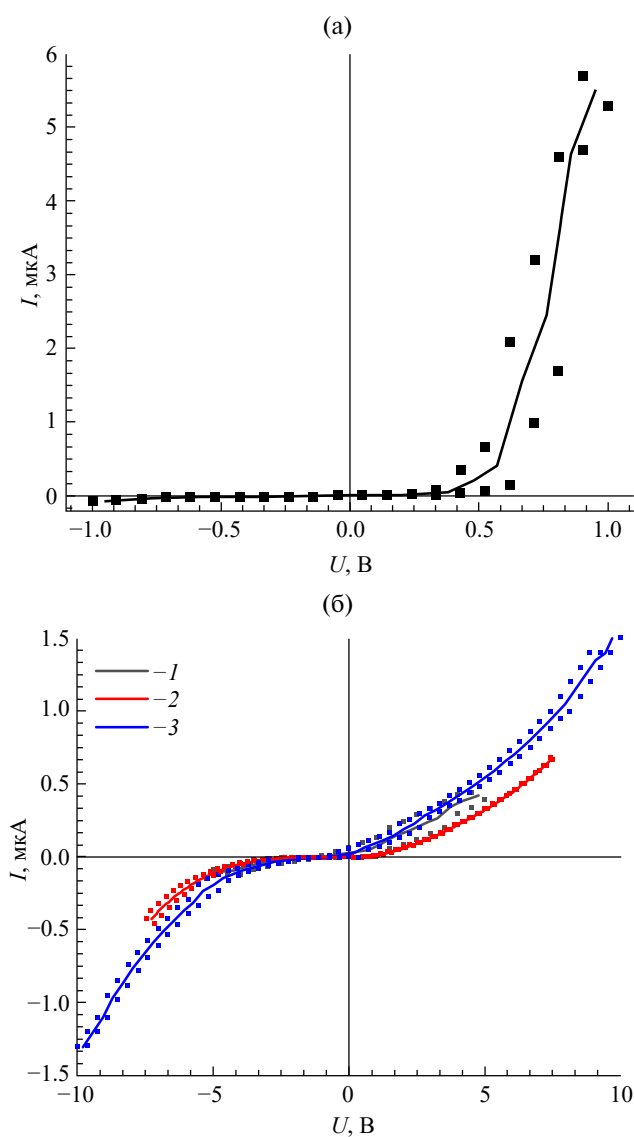


Рис. 3. Вольт-амперные характеристики тонкой пленки DLC(Fe) для различных значений амплитуды напряжения развертки: а) $U_m = 1$ В (сплошная кривая), б) $U_m = 5$ (1), 7,5 (2) и 10 В (3).

жено, что в течение длительного периода времени (до 30 мин) происходит плавное увеличение тока до стационарного значения (см. рис. 4).

Возможно, данный эффект может быть связан с перестройкой внутренней структуры нанокompозита и миграцией областей различной проводимости под действием внешнего электрического поля.

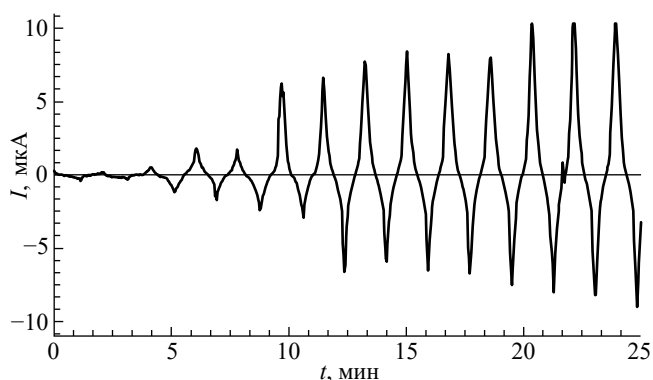


Рис. 4. Динамика тока в цепи DLC(Fe) толщиной 200 нм при постоянной развертке напряжения, $U_m = 1$ В.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что вольт-амперная характеристика допированных железом алмазоподобных пленок, полученных комбинированным методом физического распыления железного катода и плазмохимического осаждения в разряде с полым катодом, имеет нелинейный характер при концентрации металлической примеси от 10 до 40 ат.%. Для пленок толщиной ~ 50 нм показано, что при напряжении развертки до 1 В наблюдается асимметричная ВАХ. При толщине аналогичных пленок более 100 нм обнаружен эффект постепенного увеличения проводимости, время которого может достигать 30 мин при непрерывной развертке ВАХ с частотой 10 мГц, что может свидетельствовать о постепенном формировании токового канала в DLC(Fe).

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00276).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сорокин И.А., Колодко Д.В., Краснобаев К.И. // РЭ. 2020. Т.65. №3. С.288.
2. Sorokin I.A., Kolodko D.V. // Vacuum. 2023. V. 207. Article No. 111570.
3. Vedenev A. S., Luzanov V. A., Rylkov V. V. // Semiconductors. 2019. V. 53. № 14. P. 1970.
4. Николаев С.Н., Веденев А.С., Лузанов В.А. и др. // РЭ. 2021. Т. 66. № 10. С. 1024.

ON IRON-DOPED DIAMOND-LIKE FILMS PRODUCED IN A HOLLOW CATHODE DISCHARGE

I. A. Sorokin^{a,b,*}, D. V. Kolodko^{a,b}

^a*Fryazino Branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,
Vvedenskii Squar. 1, Fryazino, Moscow Region, 141190 Russian Federation*

^b*National Research Nuclear University MEPhI,
Kashirskoe Shosse, 31, Moscow, 115409 Russian Federation*

**E-mail: iasorokin@mail.ru*

Received December 12, 2023, revised December 12, 2023, accepted January 11, 2024

The paper presents the results of measuring the current-voltage characteristics of iron-doped diamond-like films obtained by a combined method of physical sputtering of an iron cathode and plasma-chemical deposition in a hollow-cathode discharge. The nonlinear nature of the transverse conductivity of the film and a significant influence of the amplitude value of the sweep voltage on the amplitude value of the current and the shape of the current-voltage characteristic were shown.

Keywords: diamond-like carbon, plasma-chemical deposition, hollow-cathode discharge, thin film, nonlinear current-voltage characteristic, electrical conductivity

УДК 539.23;621.793.18

ПОЛУЧЕНИЕ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛЕНОК ОКСИДА ГАФНИЯ МЕТОДОМ МАГНЕТРОННОГО РАСПЫЛЕНИЯ

© 2024 г. В. А. Лузанов

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190 Российская Федерация
E-mail: valery@luzanov.ru*

Поступила в редакцию 07.07.2024 г.

После доработки 15.07.2024 г.

Принята к публикации 25.07.2024 г.

Методом магнетронного распыления получены пленки оксида гафния, содержащие нецентросимметричную орторомбическую фазу, способную к спонтанной поляризации. Показано, что наличие бомбардировки отрицательными ионами кислорода способствует формированию орторомбической фазы.

Ключевые слова: пленки оксида гафния, сегнетоэлектрики, орторомбическая фаза

DOI: 10.31857/S0033849424100106, **EDN:** HPSBDR

В последние годы создание пленок оксида гафния (HfO_2) методом магнетронного распыления стало важной темой в микроэлектронике, особенно для разработки высокопроизводительных полевых транзисторов с металлическим затвором. Оксид гафния привлекает внимание благодаря своей высокой диэлектрической проницаемости и широкой запрещенной зоне, что делает его отличным кандидатом для использования в качестве диэлектрика в интегральных микросхемах. Недавнее открытие сегнетоэлектричества в простых оксидах на основе HfO_2 возродило интерес к сегнетоэлектрической памяти [1–5]. HfO_2 уже используется в технологической линейке кремниевого производства, что облегчает интеграцию новых сегнетоэлектрических структур в существующие производственные процессы. Кроме того, использование HfO_2 вместо традиционных перовскитных структур может снизить экологический ущерб и стоимость производства, так как HfO_2 более доступен и менее токсичен. Исследования сегнетоэлектрических пленок HfO_2 открывают новые направления для разработки устройств с улучшенными характеристиками, такими как низкое энергопотребление и высокая скорость переключения. В целом, ис-

следование сегнетоэлектрических пленок оксида гафния является ключевым для достижения прогресса в области нанoeлектроники и разработки нового поколения электронных компонентов. Это направление обещает значительные технологические прорывы в ближайшем будущем.

Спустя десять лет после первого обнаружения сегнетоэлектричества в поликристаллических пленках HfO_2 , интерес к этому материалу значительно возрос, и сегнетоэлектрические оксиды вновь стали ключевыми в индустрии памяти. Прилагаются значительные усилия для изучения и контроля сегнетоэлектрических свойств тонких пленок HfO_2 , поскольку именно от свойств зависит перспектива их использования в энергонезависимой сегнетоэлектрической памяти. Было установлено, что легирование HfO_2 различными элементами, такими как лантан, может стабилизировать нецентросимметричную орторомбическую фазу HfO_2 , способную к спонтанной поляризации.

В настоящее время для получения пленок оксида гафния используется ряд ключевых технологий, каждая из которых имеет свои особенности и применения.

Атомно-слоевое осаждение (atomic layer deposition — ALD): этот метод позволяет создавать высококачественные тонкие пленки с точным контролем толщины и состава [6]. Метод ALD основан на чередовании химических реакций газобразных прекурсоров с поверхностью подложки, что приводит к формированию слоя атом за атомом. Это обеспечивает равномерное покрытие даже сложных структур с высоким аспектным соотношением.

Плазма-стимулированное ALD: этот вариант ALD использует плазму для активации реакций осаждения, что позволяет проводить процесс при более низких температурах и с большей скоростью. Плазма-стимулированное ALD также может улучшить качество пленок за счет уменьшения дефектов и увеличения плотности материала [7].

Ионное травление: этот метод используется для модификации поверхности пленок и может приводить к генерации кислородных вакансий, которые играют важную роль в формировании сегнетоэлектрических свойств [8].

Добавление легирующих элементов, таких как лантан (La), может значительно улучшить сегнетоэлектрические свойства HfO_2 . Легирование позволяет стабилизировать нецентросимметричную орторомбическую фазу HfO_2 , которая необходима для достижения сегнетоэлектрического эффекта. Отжиг легированных пленок HfO_2 часто приводит к их кристаллизации в орторомбическую фазу, что улучшает сегнетоэлектрические свойства. Он может проводиться как в традиционных печах, так и с использованием быстрого термического отжига.

Для получения пленок оксида гафния мы использовали метод магнетронного распыления оксидной мишени в кислородосодержащей атмосфере. Метод магнетронного распыления обладает рядом преимуществ:

- покрытия, полученные этим методом, отличаются высокой равномерностью;
- пленки имеют низкую пористость, что важно для их электрических свойств;
- пленки обладают высокой адгезией к подложке, что обеспечивает их долговечность и надежность;
- метод позволяет наносить покрытия сложного состава, что расширяет их применение;
- метод подходит для нанесения покрытий на крупные подложки;
- метод осаждения относительно недорогой, что делает его доступным для широкого использования;
- метод позволяет работать при низких температурах подложки, что снижает риск повреждения материалов.

В данной работе для напыления пленок HfO_2 мы использовали лабораторную вакуумную установку, оборудованную, кроме стандартного магнетрона, оригинальным магнетронным распылительным устройством [9], которое обеспечивает более однородное распыление используемой мишени, а также повышенный уровень ионной бомбардировки растущей пленки отрицательными ионами кислорода. Как известно [10], при использовании метода реактивного магнетронного распыления для получения оксидных пленок подложка во время напыления испытывает бомбардировку отрицательными ионами кислорода. При этом интенсивность такой бомбардировки меняется в зависимости от места расположения подложки относительно распыляемой мишени. Это обусловлено тем, что максимальная плотность ионов кислорода в плазме находится в области, где векторы магнитного и электрического полей перпендикулярны друг другу.

Перед началом процесса напыления камера откачивалась до предельного давления в 10^{-6} мбар, чтобы исключить присутствие загрязняющих газов и паров, которые могут негативно повлиять на качество пленки. После достижения необходимого вакуума в камеру напускали газы до рабочего давления в 3×10^{-3} мбар, используя смесь аргона с кислородом в соотношении 10:1. Аргон служит ионизирующим газом, который при взаимодействии с мишенью из оксида гафния позволяет осаждать материал на подложку. Кислород добавляется для компенсации его потери в процессе распыления, что критически важно для сохранения стехиометрии оксида гафния. Для зажигания разряда на мишени использовался высокочастотный блок питания на частоте 13.56 МГц. Подводимая мощность в 100 Вт обеспечивала достаточную энергию для осаждения пленки со скоростью около 0.2 мкм/ч.

Анализ структуры пленок оксида гафния проводили с использованием модернизированного рентгеновского дифрактометра ДРОН-3, работающего по схеме Брегга—Брентано. Используемое рентгеновское излучение имело длину волны $\lambda = 0.15406$ нм. Для выделения из спектра излучения линии $\text{K}\alpha 1$ применялся кварцевый монохроматор.

Для идентификации рефлексов на полученных дифрактограммах использовалась открытая кристаллографическая база данных COD-Inorg REV214414.

Для выявления влияния кислородной бомбардировки на структуру получаемых пленок оксида гафния напыление проводилось с использованием стандартного магнетрона и оригинального магнетронного распылительного устройства.

На рис. 1 приведена дифрактограмма пленки оксида гафния, полученной с использованием штатного магнетрона.

Все наблюдаемые дифракционные линии можно отнести к моноклинной фазе HfO_2 .

На рис. 2 приведена дифрактограмма пленки оксида гафния, выращенной с использованием оригинального магнетронного распылительного устройства при аналогичных технологических параметрах.

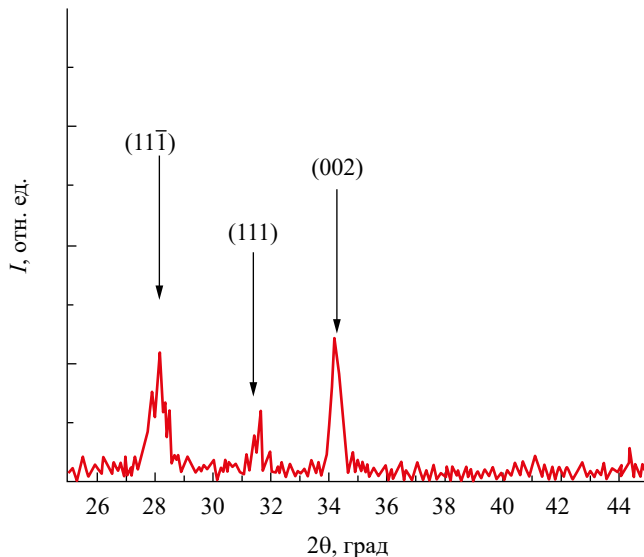


Рис. 1. Рентгеновская дифрактограмма пленки HfO_2 , осажденной при использовании стандартного планарного магнетрона.

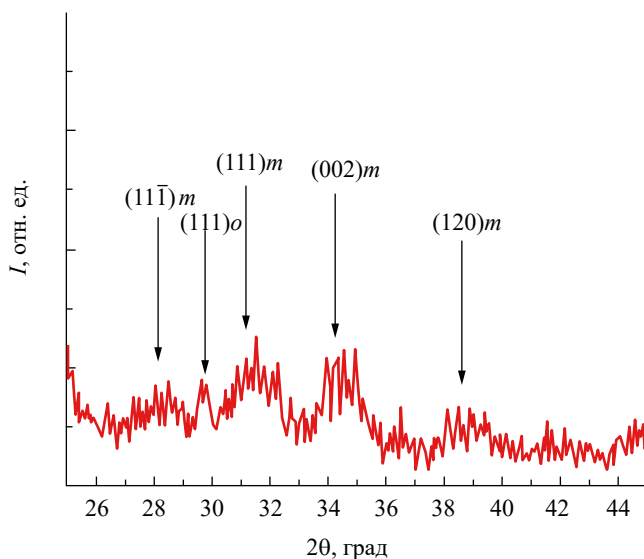


Рис. 2. Рентгеновская дифрактограмма пленки HfO_2 , осажденной при использовании оригинального магнетронного распылительного устройства: стрелками отмечены моноклинные фазы (*m*) и орторомбическая (*o*).

Видно, что на дифрактограмме, приведенной на рис. 2, присутствуют рефлексы как от моноклинной, так и орторомбической фаз оксида гафния. Стрелками показаны индексы Миллера плоскостей отражения. Соотношение интенсивностей пиков, соответствующее величинам, приведенным в базе данных, указывает на то, что в полученных пленках отсутствует какая-либо преимущественная ориентация. Значительная ширина линий свидетельствует о мелкозернистой структуре полученных пленок.

Средний размер областей когерентного рассеяния рассчитывали по формуле Шеррера. В первом случае средний размер областей когерентного рассеяния, обычно коррелирующего со средним размером зерна в пленке, составил 10 нм. Во втором случае он вдвое меньше.

Таким образом, получено еще одно подтверждение, что бомбардировка растущей пленки отрицательными ионами кислорода приводит к деформации кристаллической решетки. В результате уменьшается средний размер зерна и появляются условия для образования орторомбической фазы, способной к спонтанной поляризации.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schenk T., Pešić M., Slesazek S. et al. // Reports on Progress in Physics. 2020. V. 83. № 8. P. 086501.
2. Kim Min-Kyu, Kim Ik-Jyae, Lee Jang-Sik // Sci. Adv. 2021. V. 7. № 3. P. 1.
3. Mikolajick T., Schroeder U., Slesazek S. // IEEE Trans. 2020. V. ED-67. № 4. P. 1434.
4. Park J. Y., Yang K., Lee D. H. et al. // J. Appl. Phys. 2020. V. 128. № 24. P. 240904.
5. Mikolajick T., Slesazek S., Park M. H., Schroeder U. // MRS Bull. 2018. V. 43. № 5. P. 340.
6. Перевалов Т. В., Гриценко В. А., Гутаковский А. К., Просвири И. П. // Письма в ЖЭТФ. 2019. Т. 109. № 2. С. 112.
7. Горшков Д. В., Закиров, Е. Р., Сидоров Г. Ю. и др. // Изв. вузов. Физика. 2023. Т. 66. № 6. С. 111.
8. Соколов А. А., Овчинников А. А., Лысенков К. М. и др. // ЖТФ. 2010. Т. 80. № 7. С. 131.
9. Лузанов В. А. Магнетронное распылительное устройство. Патент РФ на изобретение № 2761900. Опубл. офиц. бюл. «Изобретения. Полезные модели». № 35 от 13.12. 2021.
10. Лузанов В. А., Алексеев С. Г., Ползикова Н. И. // РЭ. 2018. Т. 63. № 9. С. 1015.

PRODUCTION OF FERROELECTRIC HAFNIUM OXIDE FILMS BY MAGNETRON SPUTTERING

V. A. Luzanov

*Fryazino Branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,
Vvedenskii Squar. 1, Fryazino, Moscow Region, 141190 Russian Federation*

E-mail: valery@luzanov.ru

Received July 7, 2024, revised July 15, 2024, accepted July 25, 2024

Hafnium oxide films containing a non-centrosymmetric orthorhombic phase capable of spontaneous polarization were obtained by magnetron sputtering. It was shown that the presence of bombardment with negative oxygen ions promotes the formation of the orthorhombic phase.

Keywords: hafnium oxide films, ferroelectrics, orthorhombic phase

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

УДК 537.533

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

© 2024 г. Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой*

ВЭИ — филиал ФГУП «РФЯЦ — ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина»,
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 18.04.2023 г.

После доработки 18.11.2023 г.

Принята к публикации 11.01.2024 г.

Выполнен анализ и проведена интерпретация точных решений, которые описывают немонотонные и осцилляционные режимы плотного электронного пучка с тремя компонентами скорости, зависящего от времени и двух декартовых координат.

Ключевые слова: точные решения, нестационарные потоки, двумерные уравнения, пространственные траектории

DOI: 10.31857/S0033849424100118, EDN: HPRAQO

ВВЕДЕНИЕ

Классические одномерные стационарные решения в отсутствие магнитного поля [1–4] или при его наличии [5–9] способствовали пониманию явления термоэмиссии. Точные решения с разделением переменных в сферических координатах [10, 11] использованы для расчета электронно-оптической системы гиротрона [12–14]. Релятивистские потоки с одной компонентой скорости в декартовых или сферических координатах, описанные в работах [15–17] («парапотенциальные потоки» в [18]), положены в основу некоторых моделей сильноточных релятивистских диодов с магнитной самоизоляции [19, 20]. Основная функция точных решений в настоящее время — служить эталонами при тестировании приближенных [21–23] и численных [24–28] алгоритмов в задачах расчета интенсивных электронных пучков, причем в работах [21–23] оценивается точность геометризованных моделей и параксиального приближения.

Наиболее полные наборы точных решений рассматриваемой системы уравнений в частных производных могут быть построены на основе исследования групповых свойств и использовании понятия инвариантного решения [29]. Итогом

подобного подхода в приложении к уравнениям плотного электронного пучка являются таблицы точных решений, приведенные в работе [30] и монографиях [31, 32], которые сопровождаются ссылками на ранее полученные в свободном поиске результаты. Большая часть публикаций по этой теме посвящена стационарным потокам, в то время как число исследований течений, зависящих от времени, относительно невелико [33–38].

Одномерные разлеты релятивистских сгустков рассмотрены в работе [33], двумерные релятивистские решения аperiодического характера — в [34]. В работе [35] исследованы двумерные нерелятивистские потенциальные потоки на плоскости при наличии z -компоненты однородного магнитного поля. Рассмотрение основано на уравнении четвертого порядка для действия (потенциала обобщенного импульса) — исключительно громоздком соотношении, к которому могут быть сведены простые исходные уравнения пучка¹. По этой при-

¹ Уравнение для действия в нестационарном случае в векторной записи содержит 10 слагаемых [35]; в более простом случае $\partial/\partial t = H_z = 0$ в декартовых координатах число членов равно 24.

чине, по-видимому, второе из двух приведенных решений оказалось неверным.

Первое из них соответствовало плоскому потоку с действием W вида

$$W = \frac{1}{4}f(t)(x^2 + y^2) + \alpha(t)x + \beta(t)y + \gamma(t)(x^2 - y^2) + \delta(t)xy. \quad (1)$$

Зависящие от времени интенсивности квадратурных полей связаны с функцией f соотношением (коэффициент перед интегралом в квадратной скобке скорректирован)

$$\gamma^2 + \delta^2 = \exp(-s) \left[C - \frac{1}{8} \int F \exp(s) dt \right], \quad (2)$$

$$s = \int f dt, \quad F = f'' + 2ff'^2 + \frac{1}{2}f^3 + \frac{1}{2}H_z f^2,$$

$$C = \text{const.}$$

Автор [35] считает, что при периодической функции $f(t)$ периодическим (но, заметим, необязательно ограниченным) будет и интеграл, причем при достаточно большом значении C правая часть окажется положительной. Параметры любого найденного потенциального потока должны удовлетворять соотношению (2), но для конструктивного построения и анализа решений оно оказывается бесполезным.

Работа с точными решениями включает три этапа. На первом выявляется функциональный вид решения, позволяющий перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Второй состоит в попытке получить решение этих уравнений в элементарных или специальных функциях, особенно удобных для проблемы тестирования. Интерпретация построенных таким образом решений составляет третий этап исследования, проясняющий одновременно возможность постановки соответствующих тестовых задач.

Цель работы — интерпретация подобного рода решений уравнений нестационарного нерелятивистского пучка, зависящих от двух декартовых координат при трех отличных от нуля компонентах скорости. Предварительному анализу этих решений посвящена работа [39]. При более подробном рассмотрении предпочтение отдается осциллирующим режимам или хотя бы немонотонным зависимостям параметров потока от времени, причем распорядиться произвольными постоянными и функциями необходимо так, чтобы избежать образования виртуального катода.

Нестационарный нерелятивистский пучок во внешнем квазистационарном магнитном поле описывается следующей системой уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v} = \nabla\varphi + \bar{v} \times \bar{H}, \quad \nabla\bar{H} = 0, \quad (3)$$

$$\text{rot } \bar{H} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\bar{v}) = 0, \quad \Delta\varphi = \rho.$$

Здесь \bar{v} , \bar{H} — векторы скорости и напряженности магнитного поля; φ , ρ — потенциал электрического поля \bar{E} и плотность пространственного заряда. В декартовых x , y и цилиндрических R , ψ координатах для компонент скорости примем обозначения $\{u, v\}$ и $\{v_R, v_\psi\}$, w — для z -компоненты. Уравнения (3) и все последующие соотношения записаны в нормировках, исключающих физические константы используемой системы единиц; $\rho > 0$ и $\bar{E} = \nabla\varphi$, символы со звездочкой — характерные величины задачи; η , ϵ_0 , μ_0 — удельный заряд электрона, диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума

$$\bar{r} = \frac{r}{L_*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V_*}, \quad \bar{t} = \frac{t}{(L_*/V_*)},$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{(-V_*^2/\eta)}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{(\epsilon_0 V_*^2/\eta L_*^2)},$$

$$\bar{H} = \frac{H}{(V_*/\eta\mu_0 L_*)}$$

1. РЕШЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Решение I. Параметры потока и соответствующая система обыкновенных уравнений описываются формулами

$$u = xI_1(t), \quad v = xI_2(t), \quad \varphi = x^2I_4(t), \quad \rho = I_5(t); \quad (4)$$

$$I_1' + I_1^2 = 2I_4 + I_2H_z, \quad I_2' + I_1I_2 = -I_1H_z,$$

$$I_5' + I_1I_5 = 0, \quad 2I_4 = I_5.$$

Решение определено выражениями

$$U = A \cos \omega t + B \sin \omega t + U_0, \quad (5)$$

$$U_0 = (\rho_0 + \omega V_0)/\omega^2, \quad \omega = H_z,$$

$$I_1 = \frac{U'}{U}, \quad I_2 = \frac{V_0}{U} - H_z, \quad I_4 = \frac{\rho_0}{2U},$$

$$I_5 = \frac{\rho_0}{U}, \quad \xi = \frac{x}{U},$$

$$w = W(\xi) \exp \left[vy + \frac{v\xi}{\omega} (\rho_0 t - U') \right].$$

По умолчанию не поясняемые символы (A , B , v в (5)), а также символы с индексом нуль являются константами.

На рис. 1 представлены характеристики потока для двух наборов констант; при этом

$$U = \cos \omega t + U_0, \quad (6)$$

$$\bar{w} = \exp \left[-y - \frac{1}{U} \left(\frac{\rho_0}{\omega} t + \sin \omega t \right) \right].$$

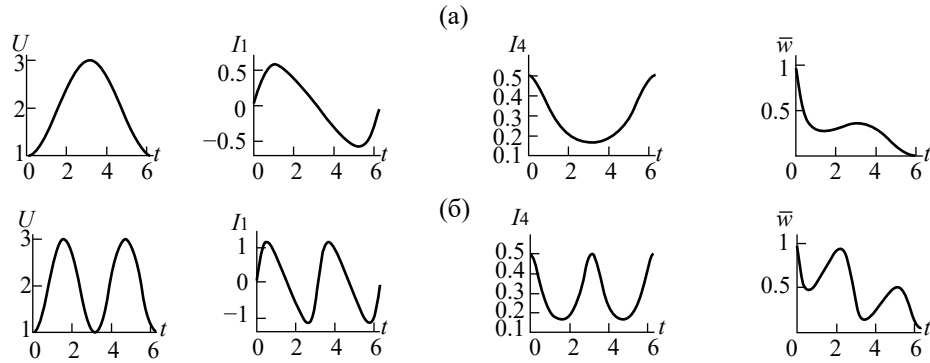


Рис. 1. Параметры потока для решения I при $A = 1, B = 0, \rho_0 = 1, W = 1, v = -1$: а) $V_0 = 1, \omega = 1$; б) $V_0 = 3.5, \omega = 2$.

Как видно из формул (5), функции I_2, I_5 с точностью до постоянного множителя и сдвига в первом случае совпадают с функцией I_4 . Решение описывает поток в плоском диоде $x = 0, x = 1$ с потенциалами электродов $\Phi_0 = 0, \Phi_1 = I_4(t)$, в котором на бриллюэновское движение со скоростью v наложено x -перемещение частиц, имеющее осцилляционный характер с частотой, определяемой магнитным полем. Обычная бриллюэновская зависимость $v = -H_z x$ дополнена зависящим от времени периодическим фрагментом.

В момент времени $t = 0$ пространство между плоскостями заполнено зарядом с плотностью $I_5(0)$. В дальнейшем при уменьшении Φ_1 плоскость $x = 1$ поглощает частицы, причем скорость поглощения ($I_1 > 0$) проходит через максимум и обращается в нуль при минимальном значении Φ_1 . Затем при возрастании Φ_1 реализуется симметричный процесс инжекции заряда ($I_1 < 0$).

Движение в плоскости (x, y) разворачивается в z -направлении со скоростью w из (5) по экспоненте, зависящей от y и содержащей функцию $U(t)$, причем эта зависимость может быть усложнена за счет произвольного множителя $W(\xi)$.

Решение II. Решение определено соотношениями с произвольной функцией $h(t)$:

$$\begin{aligned} u &= xI_1(t), \quad v = xI_2(t), \\ \Phi &= \frac{1}{2} \frac{h''}{h} z^2 + x^2 I_4(t), \\ \rho &= I_5(t); \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} I_1' + I_1^2 &= 2I_4 + I_2 H_z, \quad I_2' + I_1 I_2 = -I_1 H_z, \\ I_5' + \left(I_1 + \frac{h'}{h} \right) I_5 &= 0, \\ 2I_4 &= I_5 - \frac{h''}{h}. \end{aligned}$$

Уравнения (7) и третье уравнение движения могут быть трансформированы к виду

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{U'}{U}, \quad I_2 = \frac{V_0}{U} - H_z, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{hU}, \\ U'' + \left(H_z^2 + \frac{h''}{h} \right) U &= \frac{\rho_0}{h} + V_0 H_z, \\ w &= \frac{h'}{h} z + \frac{1}{h} W(\xi), \quad \xi = \frac{x}{U}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $W(\xi)$ — произвольная функция.

При $h = U$ для функции $U(t)$ получаем уравнение с первым интегралом

$$U'^2 = \rho_0 \ln U + V_0 H_z U - \frac{1}{2} H_z^2 U^2 + C = C - G(U). \tag{9}$$

Уравнение типа (9) описывает движение в потенциальной яме «частицы» с координатой U и «интегралом энергии»

$$U'^2 + G(U) = C. \tag{10}$$

Амплитуду колебаний при несимметричных «стенках» определяют два корня U_1, U_2 уравнения

$$u(\) = \dots \tag{11}$$

Период колебаний описывается выражением

$$T = 2 \int_{U_1}^{U_2} \frac{dU}{\sqrt{u - (\)}}. \tag{12}$$

Частицы, находившиеся в начале периода в плоскости $u = 1_0$, совершают осцилляционное движение в диапазоне $U_1 x_0 < x < U_2 x_0$. Формулы (8) для параметров потока принимают вид

$$\begin{aligned} I_u &= \frac{U'}{U} \text{ и } I = \frac{V_0}{U} - H_z, \quad I = \frac{\rho_0}{U^2} \\ u_4 &? \frac{1}{4} \left(5 \frac{V_0 H_z}{U} \frac{z}{z} \right), \end{aligned} \tag{13}$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{U''}{U} z^2 \text{ и } w = I_1 z + \frac{1}{h} W(\xi), \quad \xi = \frac{x}{U}$$

На рис. 2а приведены функции U, I_1, I_2, I_4, I_5 . Период колебаний решения близок к π : $T = 3.268$, $U_1 = 1, U_2 = 1.516$. Плоскости $x = x_* = \text{const}$ не являются эквипотенциальными:

$$\varphi_* = \frac{1}{2} \frac{U''}{U} z^2 + I_4 x_*^2. \quad (14)$$

При $t = 0$ область $x_1 < x < x_2$ заполнена зарядом максимальной плотности ρ_0 . При увеличении t плоскость $x = x_1$ начинает эмитировать, а $x = x_2$ поглощать частицы со скоростью, проходящей через максимум и обращающейся в нуль при $t = T/2$. Во втором полупериоде они меняются ролями. При $W = 0$ движение по второй координате в плоскости (x, z) определено тем же законом, что и в x -направлении. Произвольная функция $W(\xi)$ приводит к усложнению картины. Компонента v по y , имеющая вид бриллюэновской зависимости (5), но с другой функцией $U(t)$, осуществляет развертку в y -направлении. Заряды перемещаются в поле $\varphi(t, x, z)$, эквипотенциали-эллипсы ($t = 0$) которого трансформируются в гиперболы ($t = T/2$, рис. 2б).

Увеличение магнитного поля в два раза при сохранении осцилляционного режима требует изменения параметров ρ_0, V_0 : $\rho_0 = 15, V_0 = 1.75$. Качественная картина решения при этом не меняется, период колебаний уменьшается примерно в два раза $T = 1.708$ при $U_1 = 1, U_2 = 1.433$.

Решение III. Решение имеет вид

$$u = xI_1(t), \quad v = xI_2(t), \quad \varphi = \frac{1}{2} a^2 z^2 + x^2 I_4(t), \quad (15)$$

$$\rho = I_5(t);$$

$$I_1' + I_1^2 = 2I_4 + I_2 H_z, \quad I_2' + I_1 I_2 = -I_1 H_z, \\ I_5' + (I_1 + a) I_5 = 0, \quad 2I_4 = I_5 - a^2$$

и выражается через элементарные функции

$$U = \bar{\rho}_0 \exp(-at) + A \cos \omega t + B \sin \omega t + \bar{V}_0, \quad \omega^2 = a^2 + H_z^2, \quad (16) \\ I_1 = \frac{U'}{U}, \quad I_2 = -H_z + \frac{V_0}{U}, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{U} \exp(-at),$$

$$I_4 = \frac{1}{2} (I_5 - a^2),$$

$$w = az + \exp(-at) W(\xi), \quad \xi = x/U;$$

$$\bar{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{a^2 + \omega^2}, \quad \bar{V}_0 = \frac{V_0 H_z}{\omega^2}.$$

На рис. 3а, 3б представлен пример поведения параметров электронного потока. Решение описывает перемещение зарядов между неэквипотенциальными плоскостями $x = 0$ и $x = x_*$ с потенциалами $\varphi_0 = a^2 z^2 / 2$ и $\varphi_* = \varphi_0 + x_*^2 I_4(t)$. В плоскости $x = x_*$ режим поглощения частиц многократно меняется на режим инжекции. Криволинейные траектории в плоскости (x, y) с двумерным электрическим полем $\varphi(t, x, z)$ определяются z -компонентой скорости с произвольной функцией $W(\xi)$. Развертку в y -направлении выполняет скорость v , единожды (рис. 3а) или многократно (рис. 3б) проходящая через нуль.

При $a < 0$ и $t \rightarrow \infty$ плотность ρ стремится к постоянному значению, которое соответствует следующему стационарному состоянию пучка при $W = W_0 \xi$:

$$u = -ax, \quad v = -H_z x, \quad w = az + W_0 x, \quad (17)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} a^2 z^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2, \quad \rho = 2a^2 + H_z^2.$$

Течение (17) является немонотонноэнергетическим с полной энергией

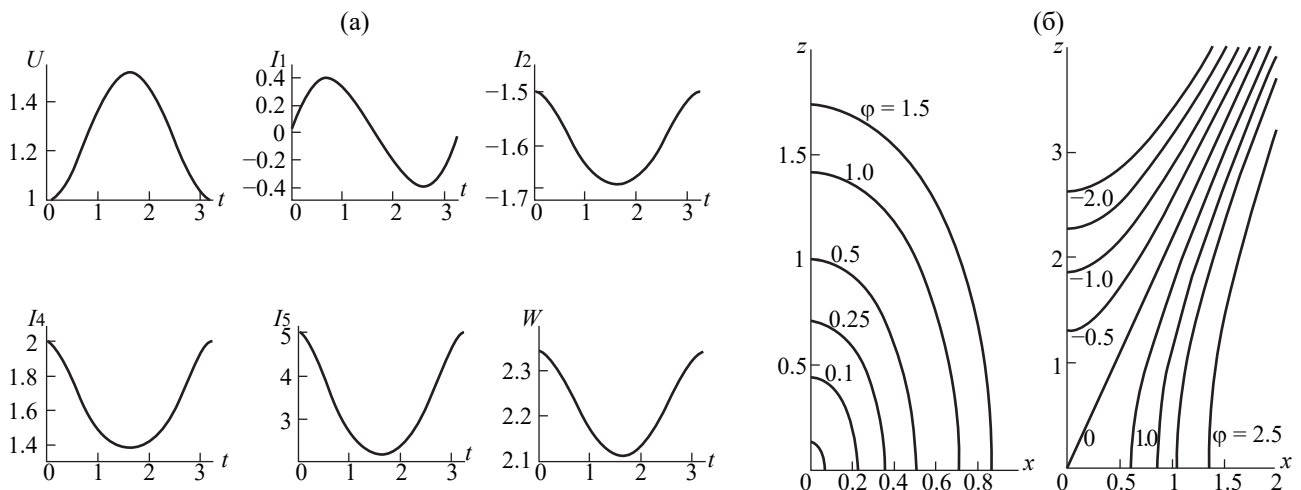


Рис. 2. Решение II при $H_z = 2, V_0 = 0.5, \rho_0 = 5, C = 1$: а) параметры потока в пределах периода; б) эквипотенциали $\varphi = \text{const}$ при $t = 0$ (слева), $t = T/2$ (справа).

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \bar{v}^2 - \Phi = \frac{1}{2} W_0 x (2az + W_0 x) \quad (18)$$

и эллиптическими эквипотенциалами в плоскости (x, z) , рис. 3в. Пространственные траектории проецируются на плоскость (x, y) прямыми, на плоскость (\bar{x}, \bar{z}) , повернутую относительно (x, z) на угол α , — гиперболами (см. рис. 3в):

$$y - y_0 = \frac{H_z}{a} x, \quad \frac{W_0}{2a} x^2 + xz = \text{const}; \quad (19)$$

$$\frac{2\bar{x}^2}{d + W_0/2a} + \frac{2\bar{z}^2}{d - W_0/2a} = \text{const},$$

$$d = \sqrt{(W_0/2a)^2 + 1}, \quad \text{tg} 2\alpha = \frac{1}{(W_0/2a)}.$$

Решение IV. Для электростатического потока $H_z = 0$ имеем

$$u = \frac{f'}{f} x + I_1(t), \quad v = V(\xi), \quad \xi = \frac{x}{f} - \int \frac{I_1}{f} dt, \quad (20)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \frac{f''}{f} x^2 + \frac{\Psi'}{f} x, \quad \rho = I_5(t), \quad w = W(\xi);$$

$$I_1' + \frac{f'}{f} I_1 = \frac{\Psi'}{f}, \quad I_5' + \frac{f'}{f} I_5 = 0, \quad I_5 = \frac{f''}{f},$$

где $\Psi(t), V(\xi), W(\xi)$ — произвольные функции.

Решение уравнений (20) определено формулами

$$I_1 = \frac{\Psi}{f}, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{f}, \quad f = \frac{1}{2} \rho_0 t^2 + f_1 t + f_0, \quad (21)$$

$$\xi = \frac{x}{f} - \int \frac{\Psi}{f^2} dt,$$

описывающими одномерное течение между плоскостями $x = 0$ и $x = x$ с потенциалами $\Phi(t, 0) = 0$ и $\Phi(t, x_*)$ и с плотностью зарядов, уменьшающейся по времени. Численный пример (рис. 4) построен для случая

$$\Psi = 2 + \sin \omega t, \quad u(t, x_*) = \frac{f'}{f} x_* + \frac{2 + \sin \omega t}{f}, \quad (22)$$

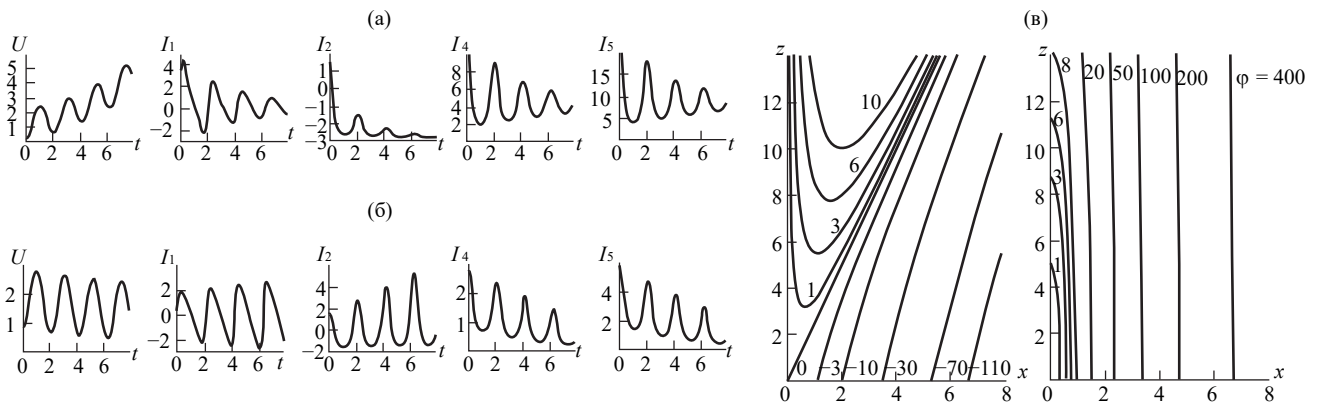


Рис. 3. Решение III, параметры потока: а) $a = -0.2, H_z = 3, V_0 = 1, \rho_0 = 8$; б) $a = 0.2, H_z = 3, V_0 = 4, \rho_0 = 8$; в) траектории (слева) и эквипотенциалы (справа) стационарного потока в пределе $t \rightarrow \infty$ при $a = -0.2$.

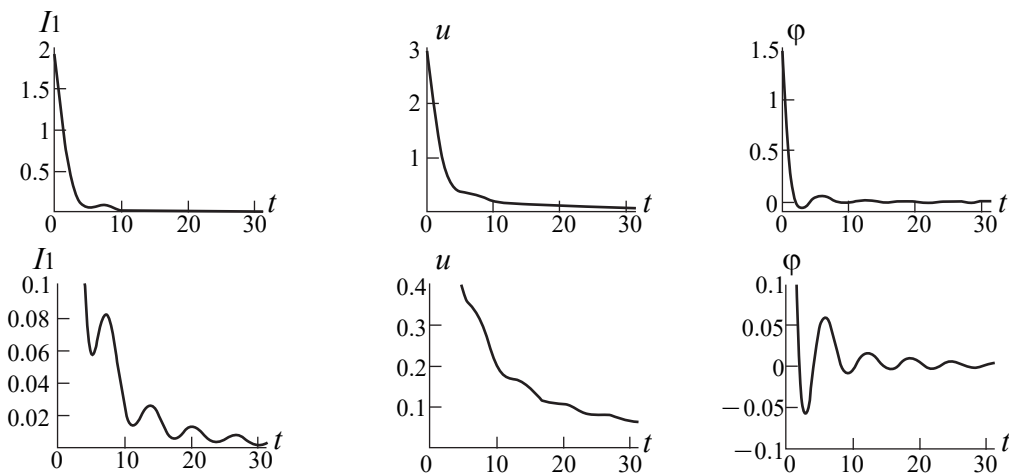


Рис. 4. Параметры потока для решения IV при $\psi = 2 + \sin \omega t$.

$$\varphi(t, x_*) = \frac{1}{2} \frac{f''}{f} x_*^2 + \frac{\omega \cos \omega t}{f} x_*.$$

Начальная скорость инжекции пучка достаточна, чтобы сохранилось ее положительное значение при падении $\varphi(t, x_*)$ вплоть до осцилляций вблизи $\varphi = 0$ с уменьшающейся амплитудой.

Решение V. Для параметров потока и соответствующих уравнений получаем

$$u = \frac{f'}{f} x + I_1(t), \quad v = V(\xi), \quad w = \frac{h'}{h} z + \frac{1}{h} W(\xi), \quad (23)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{f''}{f} x^2 + \frac{1}{2} \frac{h''}{h} z^2 + \frac{\Psi'}{f} x, \quad \rho = I_5(t),$$

$$\xi = \frac{x}{f} - \int \frac{I_1}{f} dt;$$

$$I_1' + \frac{f'}{f} I_1 = \frac{\Psi'}{f}, \quad I_5' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} \right) I_5 = 0,$$

$$\frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} = I_5,$$

где $\Psi(t), V(\xi), W(\xi)$ — произвольные функции.

Система из (23) может быть трансформирована к виду

$$I_1 = \frac{\Psi}{f}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{fh}, \quad \frac{f''}{f} + \frac{h''}{h} = \frac{\rho_0}{fh}, \quad (24)$$

$$\xi = \frac{x}{f} - \int \frac{\Psi}{f^2} dt.$$

Ниже рассмотрим две специализации функции $\Psi(t)$:

$$\Psi = f^2 f' \cos f, \quad \xi = \frac{x}{f} - \sin f, \quad (25)$$

$$\frac{\Psi'}{f} = (ff'' + 2f'^2) \cos f - ff'^2 \sin f;$$

$$\Psi = f^2, \quad \xi = \frac{x}{f} - t, \quad \frac{\Psi'}{f} = 2f'.$$

При $h = \exp(\omega t)$ имеем

$$f = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{\rho_0}{2\omega^2} \exp(-\omega t), \quad (26)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{f} \exp(-\omega t).$$

Приведенные на рис. 5а характеристики соответствуют первому варианту функции Ψ из (25); на рис. 5б представлены эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ в моменты $t = 0, \pi/2, \pi$ в плоскости (x, z) , трансформирующиеся от гипербол к эллипсам и при $t = 3\pi/2$ в пределах рисунка становящиеся практически прямыми, параллельными оси z . На неэквипотенциальной плоскости $x = 0$ с $\varphi = \omega^2 z^2/2$ состояние пучка меняется от инжекции к поглощению и снова к инжекции в двумерное поле $\varphi(t, x, z)$ (рис. 5а), z -компонента скорости отвечает за искривление траекторий, в то время как сносная скорость v может быть произвольной функцией ξ . Плотность, не зависящая от вида Ψ , проходит через максимум и стремится к константе $\rho \rightarrow 2\omega^2, \omega < 0$.

При $\Psi = f^2$ и $W(\xi) = W_0 \exp(-\omega \xi)$ функция w определена выражением

$$w = \omega z + \bar{w}, \quad \bar{w} = W_0 \exp(-\omega x/f). \quad (27)$$

Функции $\Psi, \Psi'/f, \xi(t, 1), \bar{w}(t, 1)$ представлены на рис. 5в. Деформация кривых $\bar{w} = \text{const}$ во времени аналогична предыдущему случаю (см. рис. 5б).

Частный случай решения (26), (27) при $A = B = 0, \omega > 0$

$$u = -\omega x + \frac{\rho_0}{2\omega^2} \exp(-\omega t), \quad w = \omega z + \bar{w}, \quad (28)$$

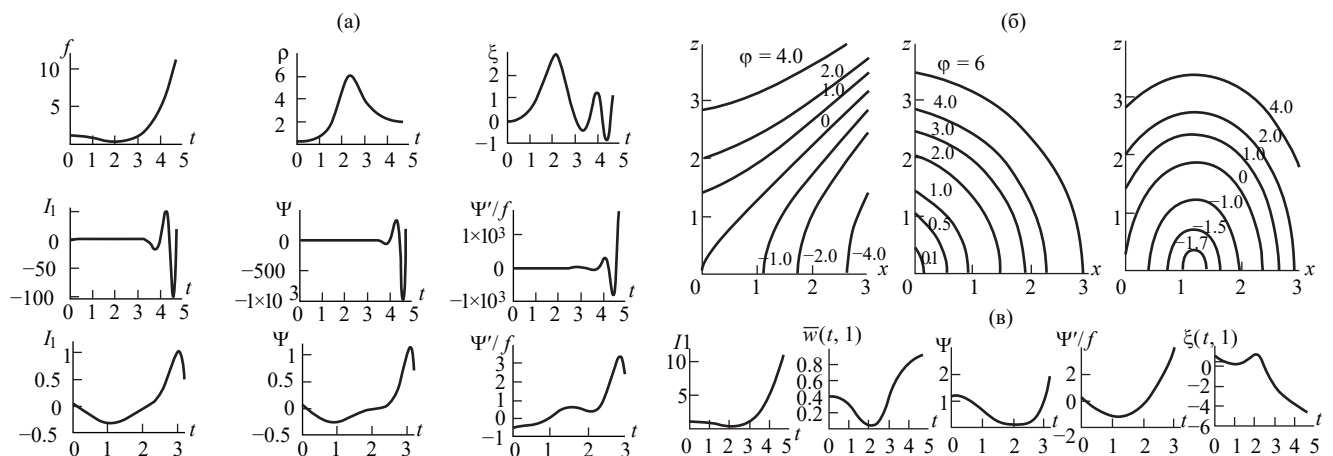


Рис. 5. Решение V при $A = 1, \rho_0 = 0.2, \omega = -1$: а) параметры потока при $\Psi = f^2 f' \cos f$; б) эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ при $t = 0, t = \pi/2, t = \pi$ (слева направо); в) параметры потока при $\Psi = f^2$.

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + z^2) - \frac{\rho_0}{\omega} \exp(-\omega t)$$

в пределе $t \rightarrow \infty$ описывает потенциальный электростатический поток с равнобочными гиперболами $xz = \text{const}$ в качестве траекторий [40]

$$u = -\omega x, \quad w = \omega z, \quad \varphi = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + z^2), \quad \rho = 2\omega^2. \quad (29)$$

Решение VI. Параметры потока и система обыкновенных уравнений определены выражениями

$$v_R = RI_1(t), \quad v_\psi = RI_2(t), \quad (30)$$

$$\varphi = R^2 I_4(t), \quad \rho = I_5(t),$$

$$w = R^v W(\xi) \exp\left(-v \int I_1 dt\right), \quad \xi = \psi - \int I_2 dt;$$

$$I_1' + I_1^2 - I_2^2 = 2I_4 + I_2 H_z, \quad I_2' + 2I_1 I_2 = -I_1 H_z,$$

$$I_5' + 2I_1 I_5 = 0, \quad 4I_4 = I_5.$$

Трансформируем систему (30) следующим образом:

$$I_1 = \frac{U'}{U}, \quad I_2 = -\frac{1}{2}H_z + \frac{V_0}{U^2}, \quad I_5 = \frac{\rho_0}{U^2}, \quad (31)$$

$$U'' - \frac{V_0^2}{U^3} - \frac{\rho_0}{2U} + \frac{1}{4}H_z^2 U = 0.$$

Первый интеграл уравнения для U определен формулой

$$U'^2 = -\frac{V_0^2}{U^2} + \rho_0 \ln U - \frac{1}{4}H_z^2 U^2 + C = C - G(U). \quad (32)$$

С подобной ситуацией мы уже встречались при рассмотрении решения III.

Решение (31) описывает сплошной бриллюэновский поток, радиус траекторий $R = U$ в котором осциллирует во времени. В задачах о транспортировке стационарного пучка z -компонента скорости принимается постоянной. Для решения (31) помимо этого случая ($v = 0, W = \text{const}$) при $v > 0$ возможна сносовая скорость, равная нулю

на оси пучка, зависящая от времени и периодически меняющаяся по азимуту:

$$w = \left(\frac{R}{U}\right)^v W(\xi), \quad \xi = \psi + \frac{1}{2}H_z t - V_0 \int \frac{dt}{U^2}. \quad (33)$$

На рис. 6 приведен пример ($T = 2.166, U_1 = 1, U_2 = 2.246$) решения (31), когда для функции $W(\xi)$ принято выражение

$$W = 2 + \cos \xi. \quad (34)$$

Угловая скорость ω при $V_0 = 0$ постоянна, вариант $V_0 \neq 0$ не приносит качественных изменений за исключением того, что ω зависит от времени подобно потенциалу или плотности.

2. РЕШЕНИЯ С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Решение VII. При произвольных функциях $V(\xi), W(\xi)$ рассмотрим поток с параметрами

$$u = \frac{1}{t} I_1(x), \quad v = V(\xi), \quad w = \frac{c}{t} z + t^{-c} W(\xi), \quad (35)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{c(c-1)}{t^2} z^2 + \frac{1}{t^2} I_4(x), \quad \rho = \frac{1}{t^2} I_5(x),$$

$$\xi = t \exp\left(-\int \frac{dx}{I_1}\right);$$

$$I_1 I_1' - I_1 = I_4', \quad (I_1 I_5)' + (c-2) I_5 = 0,$$

$$I_4'' = I_5 - c(c-1).$$

Решение системы (35) сводится к соотношениям

$$I_1 = \frac{dx}{d\tau} \equiv \dot{x}, \quad I_1 I_5 = J_0 \exp(\alpha\tau), \quad \xi = t \exp(-\tau), \quad (36)$$

$$I_4' = \frac{J_0}{2-c} \exp(\alpha\tau) - c(c-1)x + E_0,$$

$$\ddot{x} - \dot{x} + \beta x = \frac{J_0}{\alpha} \exp(\alpha\tau) + E_0,$$

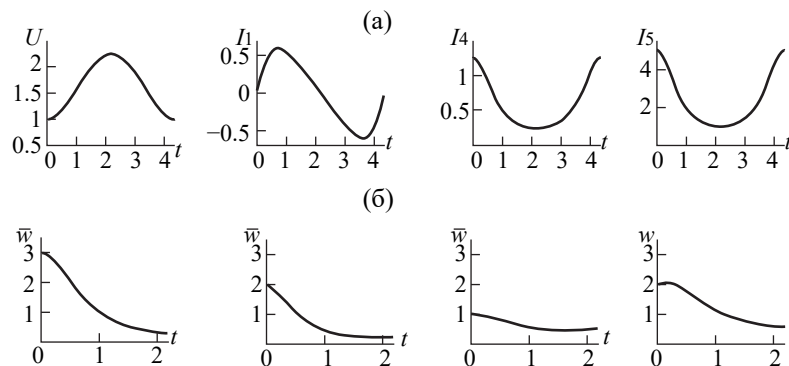


Рис. 6. Решение VI при $H_z = 2, V_0 = 0, \rho_0 = 5, C = 1$: а) параметры потока в пределах периода; б) z -компонента скорости $w = R^2 \bar{w}, \bar{w} = W(\xi) / U^2$ при $\psi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (слева направо).

$$x = \exp(\tau/2)(A \cos \omega \tau + B \sin \omega \tau) + \frac{J_0}{\gamma} \exp(\alpha \tau) + \frac{E_0}{\beta},$$

$$\frac{E_0}{\beta} = -A - \frac{J_0}{\gamma}.$$

$$I_1 = \exp(\tau/2) \times \left[\left(\frac{1}{2} A + B \omega \right) \cos \omega \tau + \left(\frac{1}{2} B - A \omega \right) \sin \omega \tau \right] + \frac{\alpha J_0}{\gamma} \exp(\alpha \tau),$$

$$I_4 = -\frac{1}{2} \beta x^2 + E_0 x + \frac{J_0}{\alpha} \int \exp(-\alpha \tau) \dot{x} d\tau;$$

$$\alpha = 2 - c, \quad \beta = c(c - 1), \quad \gamma = (2 - c)^2 (2 - c^2),$$

$$\omega = \sqrt{\beta - 1/4}.$$

В качестве примера рассмотрим вариант с $B = 0$:

$$x = A \left[\exp(\tau/2) \cos \omega \tau - 1 \right] + \frac{J_0}{\beta} \left[\exp(\alpha \tau) - 1 \right], \quad (37)$$

$$I_1 = A \exp(\tau/2) \left[\frac{1}{2} \cos \omega \tau - \omega \sin \omega \tau \right] + \frac{\alpha J_0}{\gamma} \exp(\alpha \tau),$$

$$\varphi = \frac{1}{t^2} \Phi(x, z), \quad \Phi = \frac{1}{2} \beta z^2 - x^2 + \beta \left(1 + \frac{J_0}{\gamma} \right) x +$$

$$+ \frac{A \exp(\tau/2)}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \omega^2 \right) \tau \cos \omega \tau + \frac{\omega}{2} \tau \sin \omega \tau - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1/4 + \omega^2} \left[\frac{1}{4} \cos \omega \tau + \omega \left(\frac{3}{4} + \omega^2 \right) \sin \omega \tau \right] \right\} +$$

$$+ \frac{J_0}{\gamma \alpha} \exp(\alpha \tau) (\alpha \tau - 1);$$

Пучок инжектируется с плоскости $x = 0$ с переменным потенциалом со скоростью $I_1(0)/t$, $t \geq 1$ (уравнения пучка допускают сдвиг по времени и декартовым координатам) в двумерное затухающее со временем поле, эквипотенциалы которого изображены на рис. 7. Криволинейное движение в плоскости (x, z) определяет z -компонента скорости w с произвольной функцией $W(\xi)$. Развертка плоского движения в y -направлении возможна за счет произвольной сносовой скорости $V(\xi)$. Функция I_5 , через которую выражается плотность, проходит через максимум и стремится к константе.

Решение VIII. Функциональный вид решения и соответствующая система уравнений описываются соотношениями

$$u = t^\beta I_1(\xi), \quad v = t^\alpha I_2(\xi), \quad w = t^\gamma I_3(\xi), \quad (38)$$

$$\varphi = t^{2\alpha} I_4(\xi), \quad \rho = \frac{1}{t^2} I_5(\xi), \quad \xi = y t^{-\alpha-1};$$

$$[I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_1' + \beta I_1 = 0,$$

$$[I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_2' + \alpha I_2 = I_4',$$

$$[I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_3' + \gamma I_3 = 0,$$

$$[I_2 - (\alpha + 1)\xi] I_5' + (I_2' - 2) I_5 = 0,$$

$$I_4'' = I_5.$$

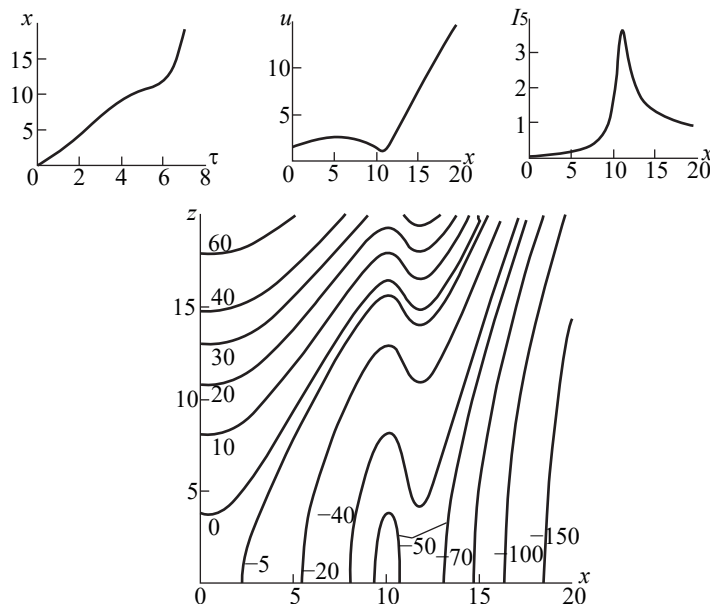


Рис. 7. Параметры потока для решения VII при $A = 2.3$, $B = 0$, $c = 1.3$, $J_0 = 0.1$ и эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$.

Решение системы (38) определено формулами

$$I_2 = \dot{\xi} + (\alpha + 1)\xi, \quad \dot{\xi} \equiv d\xi/d\tau, \quad (39)$$

$$I_1 = U_0 \exp(-\beta\tau),$$

$$I_3 = W_0 \exp(-\gamma\tau), \quad I_5 = \frac{\rho_0}{\xi} \exp[(1 - \alpha)\tau],$$

$$\ddot{\xi} + (2\alpha + 1)\dot{\xi} + \alpha(\alpha + 1)\xi = \frac{\rho_0}{1 - \alpha} \exp[(1 - \alpha)\tau] + E_0,$$

$$\xi = A \exp(-\alpha\tau) + B \exp[-(1 + \alpha)\tau] + \frac{\rho_0}{2(1 - \alpha)} \exp[(1 - \alpha)\tau] + \frac{E_0}{\alpha(\alpha + 1)},$$

$$I_4 = \frac{\rho_0}{1 - \alpha} \exp[(1 - \alpha)\tau] + E_0,$$

$$I_4 = \frac{\rho_0}{1 - \alpha} \left\{ \frac{-\frac{\alpha A}{1 - 2\alpha} \exp[(1 - 2\alpha)\tau] + (1 + \alpha)B}{2\alpha} \exp(-2\alpha\tau) + \frac{\rho_0}{4(1 - \alpha)} \times \exp[2(1 - \alpha)\tau] \right\} + E_0 \left\{ \frac{A \exp(-\alpha\tau) + B \exp[-(1 + \alpha)\tau] + \frac{\rho_0}{2(1 - \alpha)} \exp[(1 - \alpha)\tau]}{1} \right\}.$$

Решение (38) имеет три частных случая, которые необходимо рассмотреть отдельно: $\alpha + 1 = 0$, $\alpha - 1 = 0$, $2\alpha + 1 = 0$. Формула для ρ в (39) справедлива при любых α , в то время как выражение для I_4 при $\alpha = 1$ изменяется:

$$I_4' = \rho_0 \tau. \quad (40)$$

Случай $\alpha + 1 = 0$. Уравнение для ξ , его решение и выражение для I_4 при $\alpha + 1 = 0$ принимают вид

$$\ddot{\xi} - \dot{\xi} = \frac{1}{2} \rho_0 \exp(2\tau), \quad (41)$$

$$\xi = A + B \exp(\tau) + \frac{1}{4} \rho_0 \exp(2\tau),$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \rho_0 \left[\frac{1}{3} B \exp(3\tau) + \frac{1}{8} \rho_0 \exp(4\tau) \right].$$

Случай $\alpha - 1 = 0$. В этом случае имеем

$$\ddot{\xi} + 3\dot{\xi} + 2\xi = \rho_0 \tau, \quad (42)$$

$$\xi = A \exp(-\tau) + B \exp(-2\tau) + \frac{1}{2} \rho_0 \tau - \frac{3}{4} \rho_0,$$

$$I_4 = \rho_0 \left[\frac{1}{4} \rho_0 \tau^2 + A \exp(-\tau)(\tau + 1) + \frac{1}{2} B \exp(-2\tau)(2\tau + 1) \right].$$

Случай $2\alpha + 1 = 0$. Третий специальный случай определен формулами

$$\ddot{\xi} - \frac{1}{4}\dot{\xi} = \frac{2}{3} \rho_0 \exp\left(\frac{3}{2}\tau\right), \quad (43)$$

$$\xi = A \exp\left(\frac{1}{2}\tau\right) + B \exp\left(-\frac{1}{2}\tau\right) + \frac{16}{45} \rho_0 \exp\left(\frac{3}{2}\tau\right),$$

$$I_4 = \rho_0 \left[2A \exp\left(\frac{1}{2}\tau\right) \left(\frac{1}{2}\tau - 1\right) + 2B \exp\left(-\frac{1}{2}\tau\right) \left(\frac{1}{2}\tau + 1\right) + \frac{32}{45} \rho_0 \exp\left(\frac{3}{2}\tau\right) \left(\frac{3}{2}\tau - 1\right) \right].$$

Решение (39) описывает одномерное течение между плоскостями $y = 0$ и $y = 1$ со значениями

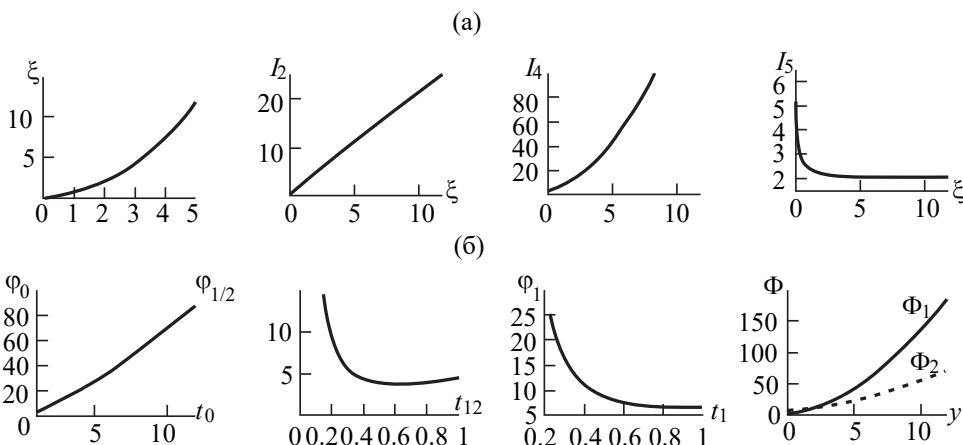


Рис. 8. Решение VIII при $A = 1, B = 0, \rho_0 = 2, \alpha = 2/3$: а) параметры потока, б) потенциал $\varphi(t, y), y_* = 0, 0.5, 1$: $\varphi_0, \varphi_{1/2}, \varphi_1$; $\varphi(t_*, y), t_* = 1, 2$: Φ_1, Φ_2 .

потенциала $\Phi_0 = t^{2\alpha} I_4(0)$, $\Phi_1 = t^{2\alpha} I_4(t^{-\alpha-1})$. В плоскости $y = 0$ инжектируется ток $J_y = t^{\alpha-2} I_2(0) I_5(0)$. На рис. 8а,б представлены параметры потока как функции ξ , потенциал $\Phi_0, \Phi_{1/2}, \Phi_1$ в плоскостях $y = 0, 1/2, 1$ — как функция времени. Зависимость потенциала от координаты демонстрируют функции $\Phi_1 = I_4(y)$, $\Phi_2 = 2^{2\alpha} I_4(2^{-\alpha-1} y)$ при $t = 1, 2$. С течением времени диод освобождается от зарядов. В плоскостях $y = \text{const}$ возможна сносовая скорость с одинаковым законом изменения по τ (экспоненты) и ξ .

Решение IX. Параметры потока и система уравнений для соответствующих функций описываются соотношениями

$$\begin{aligned} u &= \exp(\alpha t) I_1(\xi), \quad v = \exp(\alpha t) I_2(\xi), \\ \xi &= x \exp(-\alpha t), \\ w &= az + \exp(\gamma t) I_3(\xi), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} a^2 z^2 + \exp(2\alpha t) I_4(\xi), \quad \rho = I_5(\xi);$$

$$(I_1 - \alpha \xi) I_1' + \alpha I_1 = I_4' + H_z I_2,$$

$$(I_1 - \alpha \xi) I_2' + \alpha I_2 = -H_z I_1,$$

$$(I_1 - \alpha \xi) I_3' + (a + \gamma) I_3 = 0,$$

$$(I_1 - \alpha \xi) I_5' + (I_1' + a) I_5 = 0,$$

$$I_4'' = I_5 - a^2.$$

Решение уравнений (44) имеет вид

$$I_1 = \dot{\xi} + \alpha \xi, \quad \dot{\xi} \equiv d\xi/d\tau, \quad \omega^2 = a^2 + H_z^2, \quad (45)$$

$$I_2 = -H_z \xi + V_0 \exp(-\alpha \tau),$$

$$I_3 = W_0 \exp[-(a + \gamma)\tau],$$

$$I_5 = \frac{\rho_0}{\dot{\xi}} \exp[-(\alpha + a)\tau],$$

$$\ddot{\xi} + 2\alpha \dot{\xi} + (\alpha^2 + \omega^2)\xi =$$

$$= -\frac{\rho_0}{\alpha + a} \exp[-(\alpha + a)\tau] + H_z V_0 \exp(-\alpha \tau) + E_0,$$

$$\xi = A[\exp(-\alpha \tau) \cos \omega \tau - 1] + B \exp(-\alpha \tau) \sin \omega \tau -$$

$$-\bar{\rho}_0 \left\{ \exp[-(\alpha + a)\tau] - 1 \right\} + \bar{V}_0 [\exp(-\alpha \tau) - 1];$$

$$\bar{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{(\alpha + a)(a^2 + \omega^2)}, \quad \bar{V}_0 = \frac{H_z V_0}{\omega^2},$$

$$\frac{E_0}{\alpha^2 + \omega^2} = \bar{\rho}_0 - A - \bar{V}_0;$$

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{\rho_0}{\alpha + a} \left\{ \exp[-(2\alpha + a)\tau] [(\Omega_1 A - \Omega_2 B) \times \right. \\ &\quad \times \cos \omega \tau + (\Omega_2 A + \Omega_1 B) \sin \omega \tau + \frac{\alpha}{2\alpha + a} \bar{V}_0] \\ &\quad \left. - \frac{\bar{\rho}_0}{2} \exp[-2(\alpha + a)\tau] \right\}; \end{aligned}$$

$$\Omega_1 = \frac{\omega^2 + \alpha(2\alpha + a)}{\omega^2 + (2\alpha + a)^2}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega(\alpha + a)}{\omega^2 + (2\alpha + a)^2}.$$

Решение (44) имеет два специальных случая: $2\alpha + a = 0$ и $\alpha + a = 0$.

Случай $2\alpha + a = 0$. Выражение для I_4 принимает вид

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{\rho_0}{\alpha + a} \left\{ \frac{\omega A + \alpha B}{\omega} \cos \omega \tau - \frac{\alpha A - \omega B}{\omega} \sin \omega \tau - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \bar{V}_0 \tau - \frac{1}{2} \bar{\rho}_0 \exp[-2(\alpha + a)\tau] \right\} - \frac{1}{2} a^2 \xi^2 + E_0 \xi. \end{aligned} \quad (46)$$

Случай $\alpha + a = 0$. Отличные от формул (45) функции описываются выражениями

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + 2\alpha \dot{\xi} + (\alpha^2 + \omega^2)\xi &= \rho_0 \tau + \\ &+ V_0 H_z \exp(-\alpha \tau) + E_0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\xi = A[\exp(-\alpha \tau) \cos \omega \tau - 1] + B \exp(-\alpha \tau) \sin \omega \tau +$$

$$+ \frac{\rho_0}{\alpha^2 + \omega^2} \tau + \bar{V}_0 [\exp(-\alpha \tau) - 1], \quad I_5 = \frac{\rho_0}{\dot{\xi}};$$

$$E_0 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \rho_0 - (\alpha^2 + \omega^2)(A + \bar{V}_0);$$

$$I_4 = \rho_0 \left\{ \tau \exp(-\alpha \tau) (A \cos \omega \tau + B \sin \omega \tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{\exp(-\alpha \tau)}{\alpha^2 + \omega^2} [(\alpha A + \omega B) \cos \omega \tau - (\omega A - \alpha B) \sin \omega \tau] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\alpha^2 + \omega^2} \tau^2 + \bar{V}_0 \exp(-\alpha \tau) (\alpha \tau + 1) - \frac{1}{2} \alpha^2 \xi^2 + E_0 \xi.$$

Решение (45) соответствует инжекции зарядов с плоскости $x = 0$ со скоростью $u = \exp(\alpha t) I_1(0)$ в двумерное поле с потенциалом $\Phi(t, x, z)$. Криволинейное движение в плоскости (x, z) определяет вторая компонента скорости $w(t, x, z)$. Развертка в y -направлении осуществляется за счет $v(t, x)$. На рис. 9а приведен пример расчета характеристик потока в случае $\alpha + a = 0, \alpha > 0$.

Функции от ξ представляют собой начальные распределения параметров по длине при $t = 0$, $\xi = x$. Для получения временных зависимостей выбрано сечение $x = x_*$, координата ξ для которого связана с t соотношением

$$t = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{\xi}{x_*}. \quad (48)$$

Эквипотенциальные поверхности $\varphi = \text{const}$ в плоскости (x, z) при $t = 0$ и $t = 5$ построены на рис. 9б. Эффект, связанный с изменением знака α , демонстрирует рис. 10. Три варианта потоков, соответствующих общему случаю (45) и специальному случаю $2\alpha + a = 0$, приведены на рис. 11а–11в. При $\alpha > 0$ скорость и потенциал экспоненциально растут с выходом плотности на постоянное значение. Для $\alpha < 0$ пространство с течением времени освобождается от зарядов.

Сингулярная стартовая поверхность и поверхности отражения. Обеспечивая равенства $\dot{\xi}(0) = 0$, $\dot{\xi}(0) = \xi(0) = 0$, приходим к асимптотикам $x \sim \tau^2$, $x \sim \tau^3$, соответствующим эмиссии в T - и ρ -режимах. Эти условия могут быть выполнены за счет произвольных постоянных A, B . В рассмотренных примерах константы подбирались так, чтобы исключить образование виртуальных катодов. Существование такой дополнительной особой поверхности может быть полезно при тестировании, так как дает возможность выяснить, насколько близко к ней работают регулярные алгоритмы, учитывая, что поверхности отражения представляют собой реальный физический феномен.

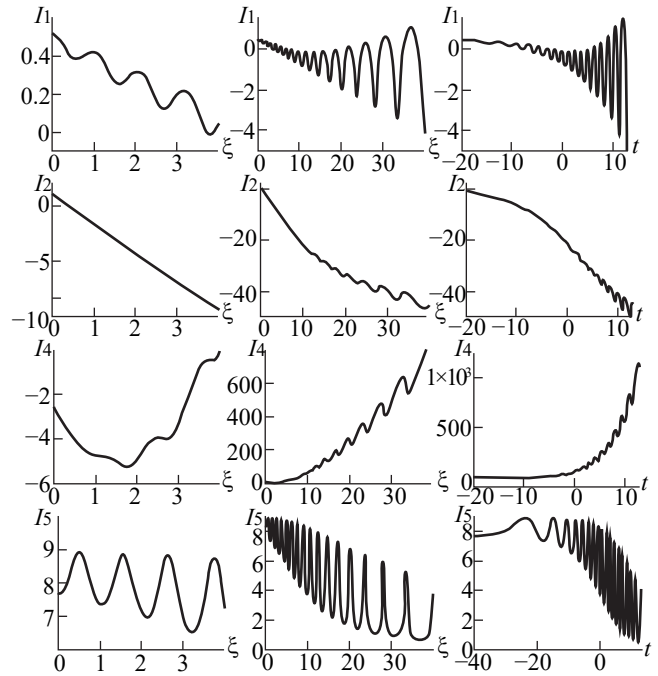


Рис. 10. Параметры потока для решения IX, $\alpha + a = 0$, при $A = 0, B = 0.012, \alpha = -0.125, H_z = 3, V_0 = 1, \rho_0 = 4$.

Виртуальный катод реализуется в потоке, если уравнение $\dot{\xi}(\tau) = 0$ имеет корень, отличный от $\tau = 0$. Свободные константы решения могут обеспечить эту ситуацию.

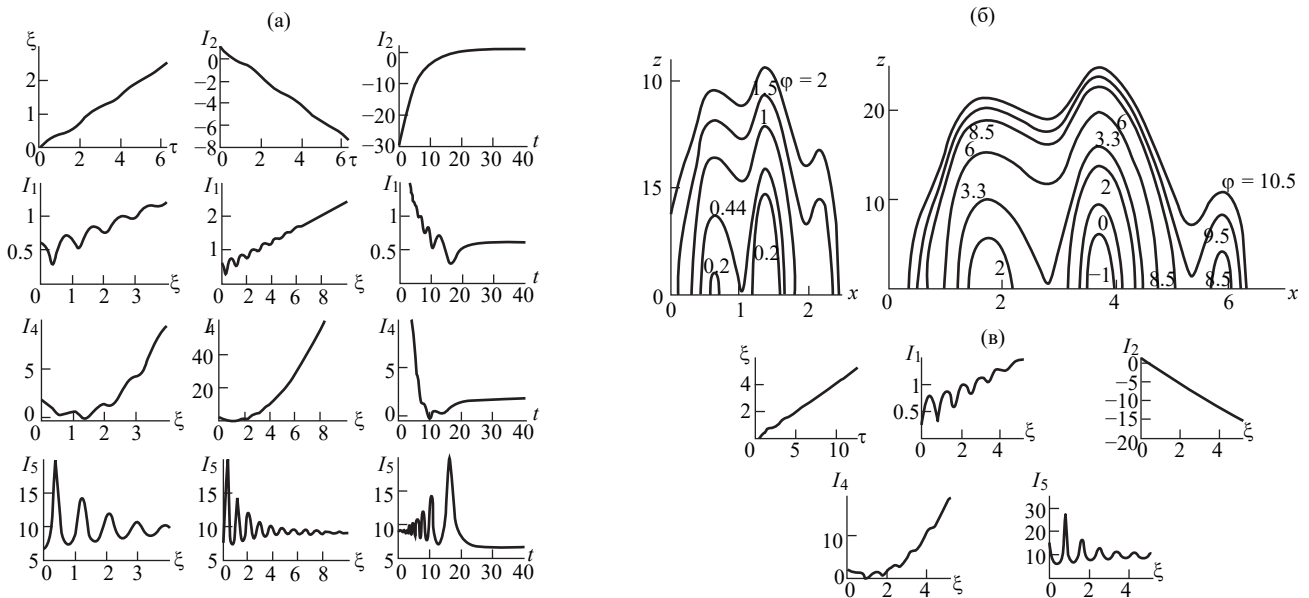


Рис. 9. Решение IX, $\alpha + a = 0$ при $A = 0, B = 0.075, \alpha = 0.2, H_z = 3, V_0 = 1, \rho_0 = 4, x_* = 10$: а) параметры потока, б) эквипотенциалы $\varphi = \text{const}$ при $t = 0$ (слева), $t = 5$ (справа), в) эмиссия в T -режиме при $A = 0, B = -0.124$.

На рис. 9в приведены параметры электронного потока при выполнении условий *T*-режима для эмиссии в *x*-направлении. Видно, что наличие сингулярной стартовой поверхности не сказалось кардинальным образом на осцилляционных характеристиках пучка.

Решение X. Решение определяет стационарный электронный поток более общего вида, чем (17), описываемый формулами

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = az + W(x), \quad (49)$$

$$\Phi = \frac{1}{2}a^2z^2 + \Phi(x), \quad \rho = \rho(x);$$

$$uu' = \Phi' + vH_z, \quad v' = -H_z, \quad (\rho u)' + a\rho = 0,$$

$$\Phi'' = \rho - a^2, \quad uW' + aW = 0;$$

$$u = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}, \quad v = V_0 - H_z x, \quad \rho = \frac{J_0}{u} \exp(-at),$$

$$\Phi = -\frac{1}{2}a^2x^2 + E_0x - \frac{J_0}{a} \int \dot{x} \exp(-at) dt,$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{J_0}{a} \exp(-at) + V_0 H_z + E_0, \quad \omega^2 = a^2 + H_z^2,$$

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t - \bar{J}_0 \exp(-at) + E_0;$$

$$\bar{J}_0 = \frac{J_0}{a(a^2 + \omega^2)}, \quad \bar{E}_0 = \frac{E_0 + V_0 H_z}{\omega^2}.$$

Чтобы избежать образования виртуального катода, параметр *a* должен быть отрицательным и небольшим по модулю для компенсации подавляющего действия экспоненты в выражении для *x*. Конкретизируем общее решение (49) на случай двух режимов: ρ -режим эмиссии с плоскости $x = 0$;

инжекция с ненулевой скоростью с той же поверхности.

Эмиссия в ρ -режиме. Формулы, определяющие этот случай, соответствуют асимптотике $x \sim t^3$:

$$x = \bar{J}_0 \left[\cos \omega t - \exp(\alpha t) + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right] - \quad (50)$$

$$-\frac{J_0}{\alpha \omega^2} (1 - \cos \omega t),$$

$$u = \frac{J_0}{\alpha^2 + \omega^2} \left[\exp(\alpha t) - \cos \omega t - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right],$$

$$W = w_0 \exp(\alpha t),$$

$$\Phi = -\frac{1}{2} \alpha^2 x^2 - \frac{J_0}{\alpha} x -$$

$$-J_0 \bar{J}_0 \left[\frac{1}{2\alpha} \exp(2\alpha t) - \frac{1}{\omega} \exp(\alpha t) \sin \omega t \right];$$

$$y - y_0 = \frac{H_z \bar{J}_0}{\alpha} \times$$

$$\times \left[\frac{\alpha^2}{\omega^2} \left(\cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) + \exp(\alpha t) \right] + \frac{H_z J_0}{\alpha \omega^2} t,$$

$$z = z_0 \exp(-\alpha t) + \frac{w_0}{\alpha} sh(\alpha t); \quad \alpha \equiv |a|.$$

Плоскость $x = 0$ является особой поверхностью, причем плотность тока на ней по *y*-, *z*-направлениям бесконечна, однако ток в полосе любой толщины — конечная величина. Старт частиц происходит по касательной. На рис. 12 представлены функции, определяющие решение, траектории в проекции на плоскости (*x*, *y*), (*x*, *z*) и эквипотенциали.

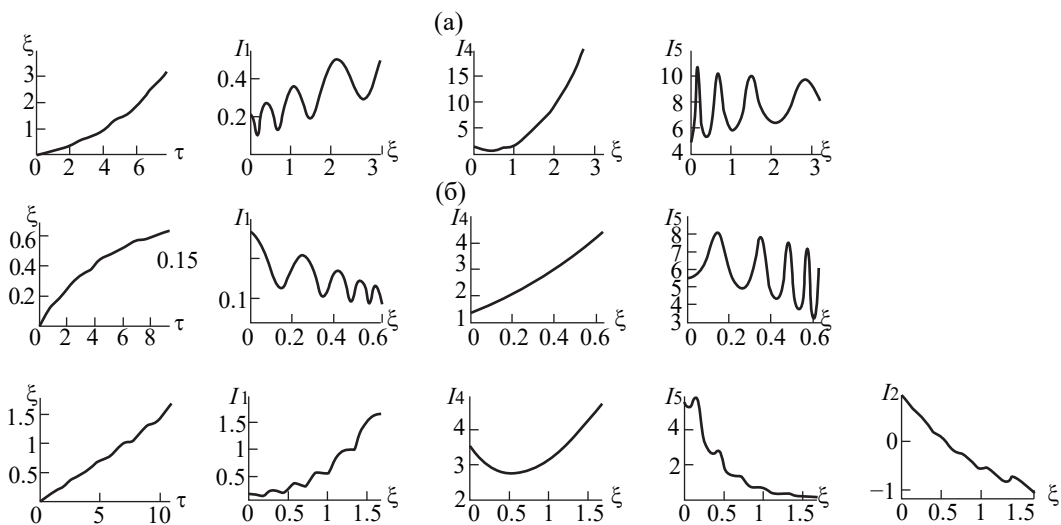


Рис. 11. Решение IX, общий случай, параметры потока: а) $A = 0, B = 0.02, a = -0.125, \alpha = -0.125, H_z = 3, V_0 = 1, \rho_0 = 1$; б) $A = 0, B = 0.01, a = 0.125, \alpha = 0.125, H_z = 3, V_0 = -1, \rho_0 = 1$; в) $A = 0, B = 0.01, a = 0.25, \alpha = -0.125, H_z = 3, V_0 = 1, \rho_0 = 1$.

Инжекция с ненулевой скоростью. Параметры потока описываются соотношениями

$$x = A(\cos \omega t - 1) - \bar{J}_0 [\exp(\alpha t) - 1], \quad (51)$$

$$u = -A\omega \sin \omega t + \frac{J_0}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(\alpha t),$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \alpha^2 (z^2 - x^2) + E_0 x +$$

$$+ \frac{J_0}{\alpha} \left[-A \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} (\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t) - \frac{1}{2} \bar{J}_0 \exp(2\alpha t) \right],$$

$$y - y_0 = -\frac{H_z}{\omega} A \sin \omega t - \frac{H_z J_0}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(\alpha t) +$$

$$+ [(-A + \bar{J}_0) H_z + V_0] t;$$

$$E_0 = (-A + \bar{J}_0) \omega^2 - V_0 H_z.$$

Частицы покидают стартовую плоскость $x = 0$ с наклоном

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\alpha^2 + \omega^2}{J_0} (w_0 - \alpha z). \quad (52)$$

Функции, определяющие решение, и геометрия потока приведены на рис. 13.

Решение XI. Параметры электронного потока и система обыкновенных уравнений для них определены соотношениями

$$u = x^{1-\gamma} I_1(\xi), \quad v = x^\alpha I_2(\xi), \quad w = \frac{c}{t} z + x^\beta I_3(\xi), \quad (53)$$

$$\varphi = \frac{c(c-1)}{2t^2} z^2 + x^{2(1-\gamma)} I_4(\xi),$$

$$\rho = x^{-2\gamma} I_5(\xi), \quad \xi = \frac{x^\gamma}{t};$$

$$\xi(\gamma I_1 - \xi) I_1' = \gamma \xi I_4' + (1-\gamma)(2I_4 - I_1^2),$$

$$\xi(\gamma I_1 - \xi) I_2' + \alpha I_1 I_2 = 0,$$

$$\xi(\gamma I_1 - \xi) I_3' + (\beta I_1 + c \xi) I_3 = 0,$$

$$\xi(\gamma I_1 - \xi) I_5' + [\xi(\gamma I_1' + c) + (1-3\gamma) I_1] I_5 = 0,$$

$$\gamma^2 \xi^2 I_4'' + 3\gamma(1-\gamma) \xi I_4' +$$

$$+ 2(1-\gamma)(1-2\gamma) I_4 + c(c-1) \xi^2 = I_5.$$

В отличие от ранее рассмотренных решений, выражавшихся через элементарные функции или допускавших качественное толкование (решения II, VI), электронный поток вида (53) без ограничения общности может быть исследован только численно. Вместе с тем структура его параметров при $\gamma = 1/3$ позволяет проанализировать вариант эмиссии в ρ -режиме с сингулярной плоскости $x = 0$.

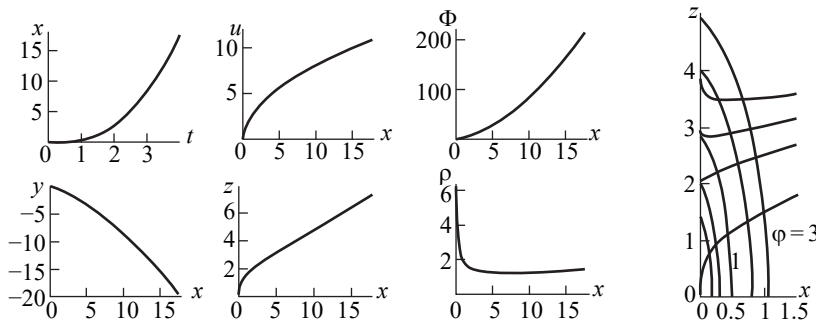


Рис. 12. Решение X, эмиссия в ρ -режиме при $J_0 = 2$, $H_z = 1$, $a = -0.5$, $w_0 = 1$; параметры потока, эквипотенциали $\varphi = \text{const}$ и траектории в плоскости (x, z) .

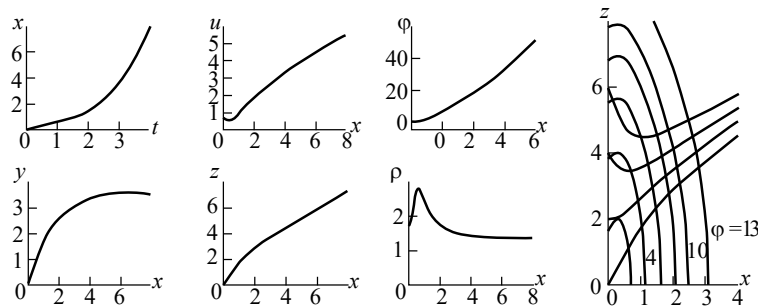


Рис. 13. Решение X, режим инжекции при $A = 0.5$, $B = 0$, $J_0 = 1$, $H_z = 1$; параметры потока, траектории в плоскости (x, y) , эквипотенциали $\varphi = \text{const}$ и траектории в плоскости (x, z) .

Систему (53) в общем случае удается представить в виде одного нелинейного (в отличие от решений VII–IX) уравнения третьего порядка относительно ξ , изменив статус этой величины (искомая функция вместо независимой переменной), и отдельного уравнения первого порядка для I_4 :

$$\xi^\mu \ddot{\xi} + \xi^\mu \left(1 + \frac{5\mu}{2} \frac{\dot{\xi}}{\xi} \right) \ddot{\xi} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \xi^{\mu-1} \dot{\xi}^3 + (54)$$

$$+ \frac{\mu}{2} (\mu + 1) \xi^{\mu-1} \dot{\xi}^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\mu}{2} + 1 \right) \xi^\mu \ddot{\xi} + c(c-1) \xi^\mu \dot{\xi} =$$

$$= \rho_0 \xi^{\mu/2} \exp \left[- \left(c - 1 + \frac{\mu}{2} \right) \tau \right], \quad \gamma = \frac{2}{2 + \mu};$$

$$I_1 = \frac{1}{\gamma} (\dot{\xi} + \xi), \quad I_2 = V_0 \xi^{-\alpha/\gamma} \exp \left(-\frac{\alpha}{\gamma} \tau \right),$$

$$I_3 = W_0 \xi^{-\beta/\gamma} \exp \left[- \left(c + \frac{\beta}{\gamma} \right) \tau \right],$$

$$I_5 = \frac{\rho_0}{\xi} \xi^{3-1/\gamma} \exp \left[- \left(c - 1 + \frac{\mu}{2} \right) \tau \right].$$

Эмиссия в р-режиме. Система (54) в этом случае принимает вид

$$\ddot{\xi} + \left(1 + 10 \frac{\dot{\xi}}{\xi} \right) \ddot{\xi} + 2 \frac{\dot{\xi}^3}{\xi^2} + 10 \frac{\dot{\xi}^2}{\xi} + [6 + c(c-1)] \dot{\xi} = (55)$$

$$= \frac{\rho_0}{\xi^2} \exp [-(c+1)\tau];$$

$$I_1 = 3(\dot{\xi} + \xi), \quad I_2 = V_0 \xi^{-3\alpha} \exp(-3\alpha\tau),$$

$$I_3 = W_0 \xi^{-3\beta} \exp[-(c+3\beta)\tau],$$

$$I_5 = \frac{\rho_0}{\xi} \exp[-(c+1)\tau];$$

$$\xi \dot{I}_4 + 4 \dot{\xi} I_4 = 9(\xi \dot{\xi} \ddot{\xi} + 2 \dot{\xi}^3 + 5 \xi \dot{\xi}^2 + 2 \xi^2 \ddot{\xi}).$$

Для интегрирования уравнений из (55) необходимо построить асимптотики функций ξ , I_4 вблизи $\xi = \tau = 0$. Для первой из них имеем

$$\xi = \xi_1 \tau + \xi_2 \tau^2 + \dots + \xi_6 \tau^6, \quad (56)$$

$$\xi_1^3 = \frac{\rho_0}{2}, \quad \xi_1 \xi_2 = -\frac{\rho_0(6-c)}{8(1+3\xi_1)},$$

$$\xi_1^2 \xi_3 = -\frac{\rho_0(5-3c)}{168} - \xi_1 \xi_2^2 - \frac{13}{21} \xi_1^2 \xi_2,$$

$$\xi_1^2 \xi_4 = -\frac{\rho_0(5-3c)^3}{1008} - \frac{1}{41} [6 + c(c-1)] \xi_1^2 \xi_2 -$$

$$-\frac{19}{42} \xi_1^2 \xi_3 - \frac{38}{21} \xi_1 \xi_2 \xi_3 - \frac{2}{7} \xi_2^3 - \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2^2,$$

$$\xi_1^2 \xi_5 = \frac{\rho_0(1+c)^4}{6960} - \frac{1}{58} [6 + c(c-1)] (\xi_1^2 \xi_3 + \xi_1 \xi_2^2) -$$

$$-\frac{302}{145} \xi_1 \xi_2 \xi_4 -$$

$$-\frac{51}{145} \xi_1^2 \xi_4 - \frac{93}{145} \xi_1 \xi_3^2 - \frac{149}{145} \xi_2^2 \xi_3 - \frac{24}{29} \xi_1 \xi_2 \xi_3 - \frac{21}{145} \xi_2^3,$$

$$\xi_1^2 \xi_6 = -\frac{\rho_0(1+c)^5}{54720} - \frac{1}{228} [6 + c(c-1)] \times$$

$$\times (3\xi_1^2 \xi_4 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_3 + \xi_2^3) - \frac{40}{19} \xi_1 \xi_2 \xi_5 - \frac{65}{228} \xi_1^2 \xi_5 -$$

$$-\frac{30}{19} \xi_1 \xi_3 \xi_4 - \frac{56}{27} \xi_2^2 \xi_4 - \frac{7}{57} \xi_1 \xi_2 \xi_4 -$$

$$-\frac{20}{19} \xi_2 \xi_3^2 - \frac{27}{76} \xi_3^2 - \frac{85}{228} \xi_2^2 \xi_3.$$

Асимптотика функции I_4 определена формулами

$$I_4 = \Phi_0 + \Phi_1 \tau + \dots + \Phi_4 \tau^4, \quad (57)$$

$$\Phi_0 = \frac{9}{2} \xi_1^2, \quad \Phi_1 = 18 \xi_1 \xi_2 + 9 \xi_1^2,$$

$$\xi_1 \Phi_2 = 18 \xi_1 (\xi_1 + 1) \xi_3 + (21 \xi_1 + 12) \xi_2^2 +$$

$$+ \frac{75}{2} \xi_1^2 \xi_2 + 3 \xi_1^3 - 2 \xi_3 \Phi_0 - \frac{3}{2} \xi_2 \Phi_1,$$

$$\xi_1 \Phi_3 = \frac{9}{7} [12(2\xi_1 + 1) \xi_1 \xi_4 + 94 \xi_1 \xi_2 \xi_3 +$$

$$+ 35 \xi_1^2 \xi_3 + 16 \xi_2^3 + 40 \xi_1 \xi_2^2 + 8 \xi_1^2 \xi_2] -$$

$$-\frac{1}{7} (16 \xi_4 \Phi_0 + 13 \xi_3 \Phi_1 + 10 \xi_2 \Phi_2),$$

$$\xi_1 \Phi_4 = \frac{9}{8} [50 \xi_1^2 \xi_5 + 142 \xi_1 \xi_2 \xi_4 + 45 \xi_1^2 \xi_4 + 66 \xi_1 \xi_3^2 +$$

$$+ 94 \xi_2^2 \xi_3 + 110 \xi_1 \xi_2 \xi_3 + 10 \xi_1^2 \xi_3 + 20 \xi_2^3 + 18 \xi_1 \xi_2^2] -$$

$$-\frac{1}{8} (20 \xi_5 \Phi_0 + 17 \xi_4 \Phi_1 + 13 \xi_3 \Phi_2 + 11 \xi_2 \Phi_3).$$

Параметры потока, стартующего с сингулярной плоскости $x = 0$ в двумерное поле $\Phi(t, x, z)$, приведены на рис. 14. В силу смысла переменной ξ при $t = 0$, $\xi = \infty$ пространство освобождается от зарядов, а с ростом t (уменьшение ξ и τ при $x = \text{const}$) функция I_1 , колеблясь, убывает, а плотность растет. При $t \rightarrow \infty$ ($\xi, \tau \rightarrow 0$) на плоскости $x = 0$ устанавливается р-режим с нулевыми компонентами касательной скорости для $\alpha, \beta < 0$.

Частное решение. Система (53) имеет частное решение в элементарных функциях для $\gamma = 1$:

$$u = I_1(\xi), \quad v = x^\alpha I_2(\xi), \quad w = \frac{c}{t} z + x^\beta I_3(\xi), \quad (58)$$

$$\Phi = \frac{c(c-1)}{2t^2} z^2 + I_4(\xi), \quad \rho = \frac{1}{x^2} I_5(\xi), \quad \xi = x/t;$$

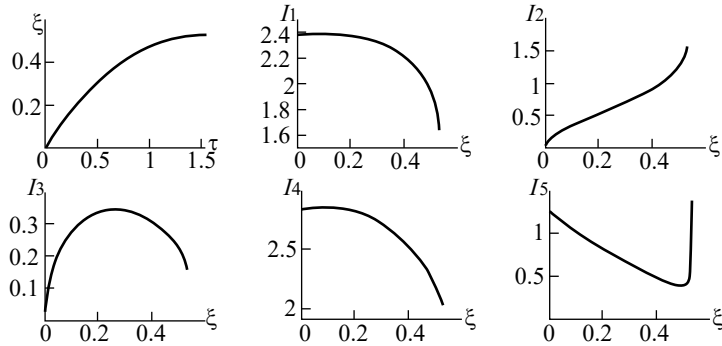


Рис. 14. Решение XI, параметры потока при эмиссии в ρ -режиме: $\gamma = 1/3$, $c = 1.5$.

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \ddot{\xi} + c(c-1)\dot{\xi} &= \rho_0 \exp[-(c-1)\tau], \\ I_1 = \dot{\xi} + \xi, \quad I_2 &= V_0 \xi^{-\alpha} \exp(-\alpha\tau), \\ I_3 &= W_0 \xi^{-\beta} \exp[-(\beta+c)\tau], \\ I_4 &= \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 + \int \dot{\xi}^2 d\tau, \quad I_5 = \frac{\rho_0 \xi^2}{\xi} \exp[-(c-1)\tau]; \\ \xi &= A \exp\left(-\frac{c^2 - 3c + 1}{c-1} \tau\right) + B \exp(-c\tau) + \\ &+ \left[C + \frac{\rho_0}{c(c-1)^2} \tau \right] \exp[-(c-1)\tau]. \end{aligned}$$

Особый случай $c = 1$ определен формулами

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \rho_0 \tau^2 + A\tau + B \exp(-\tau) + C, \quad (59) \\ I_4 &= \frac{1}{3} \rho_0 \tau^3 + \rho_0 \left(A + \frac{1}{2} \rho_0 \right) \tau^2 + A(A + \rho_0) \tau + \\ &+ B[\rho_0 \tau + A + 2\rho_0] \exp(-\tau). \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Точные решения уравнений нестационарного нерелятивистского пучка с пространственными траекториями, зависящие от двух декартовых координат, анализ которых проведен выше, описывают инжекцию с плоскости в неоднородное одномерное или двумерное самосогласованное электрическое поле при возможном наличии z -компоненты однородного магнитного поля. При выборе свободных параметров и функций решения предпочтение отдавалось вариантам с резко немонотонным или осциллирующим режимом пучка без ограничения по длине, наступающего при образовании виртуального катода. Стартовая плоскость могла быть сингулярной поверхностью с особенностью, свойственной эмиссии в ρ - или T -режиме по нормали к ней, но при отличных от нуля касательных компонентах скорости. Реальные термоэмиссионные катоды

не соответствуют последнему условию, что не мешает постановке численных экспериментов с учетом особенности.

Хотя короткие пучки с поверхностью отражения не являлись предметом рассмотрения, однако условия возникновения виртуального катода были сформулированы, поскольку сингулярная поверхность такого рода при тестировании позволяет оценить эффективность регулярных алгоритмов при приближении к ней.

При рассмотрении конкретной физической задачи уровень энергии электронного пучка и характерный линейный размер бывают известны. Эти величины дают возможность оценить представляющее интерес время нестационарного процесса. Приведенные выше результаты изложены в безразмерной манере, а упомянутая физическая информация позволяет вернуться к размерным величинам. Напряженность магнитного поля при этом измеряется в единицах $V/(\eta\mu_0 L)$, где V , L — масштабы скорости и длины; η , μ_0 — удельный заряд электрона и магнитная проницаемость вакуума.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Child C.D. // Phys. Rev. 1911. V. 32. № 5. P. 492.
2. Langmuir I. // Phys. Rev. 1913. V. 2. № 5. P. 450.
3. Langmuir I., Blodgett K.B. // Phys. Rev. 1923. V. 22. № 4. P. 347.
4. Langmuir I., Blodgett K.B. // Phys. Rev. 1924. V. 24. № 1. P. 49.
5. Браудэ С.Я. // ЖЭТФ. 1935. Т. 5. № 7. С. 621.
6. Браудэ С.Я. // ЖТФ. 1940. Т. 10. № 3. С. 217.
7. Браудэ С.Я. // ЖТФ. 1945. Т. 15. № 3. С. 107.
8. Гринберг Г.А., Волькенштейн В.С. // ЖТФ. 1938. Т. 8. № 11. С. 19.
9. Brillouin L. // Phys. Rev. 1945. V. 67. № 7, 8. P. 260.
10. Kirstein P.T. // J. Electr. Contr. 1959. V. 7. № 5. P. 417.
11. Dryden V.W. // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 10. P. 3118.
12. Мануилов В.Н., Цимринг Ш.Е. // РЭ. 1978. Т. 23. № 7. С. 1486.
13. Мануилов В.Н. // РЭ. 1981. Т. 26. № 11. С. 2425.

14. Солуянова Е.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. 36. № 6. С. 596.
15. Данилов В.Н. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 1. С. 3.
16. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1963. № 3. С. 26.
17. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 6. С. 3.
18. Миллер Р. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984.
19. Брейзман Б.Н., Рютов Д.Д., Ступаков Г.В. // Изв. вузов. Физика. 1979. № 10. С. 7.
20. Рудаков Л.И., Бабыкин М.В., Гордеев А.В. и др. Генерация и фокусировка сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Энергоатомиздат, 1990.
21. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
22. Сапронова Т.М., Сыровой В.А. // РЭ. 2024. Т. 69. № 3. С. 260.
23. Сыровой В.А., Свешников В.М., Козырев А.Н. Аналитическое и численное моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2023.
24. Мануилов В.Н., Райский Б.В., Цимринг Ш.Е., Солуянова Е.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1992. Т. 35. № 9/10. С. 846.
25. Свешников В.М. // Прикл. физика. 2004. № 1. С. 55.
26. Свешников В.М. // Прикл. физика. 2006. № 3. С. 49.
27. Свешников В.М. // Вычислит. технологии. 2006. Т. 11. № 5. С. 77.
28. Козырев А. Н., Свешников В. М. // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Вычисл. математика и информатика. 2017. Т. 6. № 2. С. 5.
29. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
30. Сыровой В.А. // РЭ. 2003. Т. 48. № 4. С. 467.
31. Сыровой В.А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
32. Syrovoy V.A. Theory of Intense Beams of Charged Particles. US: Elsevier, 2011.
33. Бегуев О.П. // ЖТФ. 1956. Т. 26. № 7. С. 1483.
34. Вашковский А.В., Сыровой В.А. // РЭ. 1991. Т. 36. № 2. С. 392.
35. Pease M.C. // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. № 1. P. 70.
36. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1964. № 1. С. 3.
37. Сыровой В.А. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 3. С. 56.
38. Сыровой В.А. // РЭ. 2008. Т. 53. № 6. С. 752.
39. Сыровой В.А. // РЭ. 2019. Т. 64. № 6. С. 593.
40. Meltzer B. // Proc. Phys. Soc. 1949. V. 62. № 355B. P. 431.

EXACT SOLUTIONS TO THE EQUATIONS OF 2-D NON-STATIONARY ELECTRON FLOW

T. M. Sapronova, V. A. Syrovoy*

*All-Russian Electrotechnical Institute — branch of the Russian Federal Nuclear Center All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics named after academician E.I. Zababakhin,
Krasnokazarmennaya Str., 12, Moscow, 111250 Russian Federation*

**E-mail: red@cplire.ru*

Received April 18, 2023, revised November 18, 2023, accepted January 11, 2024

Analysis and interpretation of exact solutions for oscillatory modes of 2-D dense electron beam with 3-D trajectories are carried out in the paper.

Keywords: exact solutions, non-stationary flow, 2-D beam equations, 3-D trajectory

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 53.083

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ БЛОХА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРОДОЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ T_1 В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. В. В. Давыдов^{а,*}, А. А. Гольдберг^а, В. И. Дудкин^б, Р. В. Давыдов^{а, б, с}

^аСанкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого,
ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, 195251 Российская Федерация

^бСанкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций
им. проф. М.А. Бонч-Бруевича,
просп. Большевиков, 22, Санкт-Петербург, 193232 Российская Федерация

^сАлферовский университет,
ул. Хлопина, 8, корп. 3, Санкт-Петербург, 194021 Российская Федерация

*E-mail: Davydov_vadim66@mail.ru

Поступила в редакцию 25.10.2023 г.

После доработки 17.11.2023 г.

Принята к публикации 10.01.2024 г.

Рассмотрены особенности определения времен продольной T_1 и поперечной T_2 релаксации в конструкциях ЯМР-релаксометров с проточной и стационарной жидкой средой. Доказано, что полученное соотношение из уравнений Блоха с использованием приближений для определения T_1 по результатам двух измерений амплитуд сигнала ЯМР или резонансных частот имеет ряд ограничений по применению для контроля состояния текущей среды. Проведено исследование соотношения между частотами модуляции магнитного поля для определения T_1 и доказано, что для ряда соотношений между ними невозможно при измерениях определить значение T_1 . Полученные результаты позволяют исключить ошибку при определении состояния среды (соответствует стандарту (отсутствие в ней примесей) или нет) с использованием измеренных значений времен релаксации.

Ключевые слова: ядерно-магнитный резонанс, жидкость, конденсированная среда, модуляционная методика, сигнал ЯМР, ядерно-магнитный расходомер-релаксометр, уравнения Блоха, времена релаксации T_1 и T_2 , частота модуляции, погрешность измерения

DOI: 10.31857/S0033849424100122, EDN: HPQLAU

ВВЕДЕНИЕ

Метод ядерного магнитного резонанса (ЯМР) в современном мире является одним из основных способов исследования жидких сред, так как его применение не вносит необратимых изменений в химический состав и физическую структуру пробы любой среды, что особенно важно при работе с биологическими соединениями, медицинскими суспензиями и смесями из химически нестойких соединений и пр. [1–4]. Для реализации исследований с использованием ЯМР на промышленных и лабораторных приборах используются различные методы и методики регистрации сигнала [2, 3, 5, 6–10]. В большинстве проводимых ЯМР-исследований регистрируется спектр [3, 4, 6, 11–13]. Для этого используются конструкции спектрометров с различной индукцией постоянного магнитного поля. Наиболее востребованными являются

настольные ЯМР-спектрометры с частотой регистрации сигнала ЯМР от 80 МГц до спектрометров высокого разрешения с частотой 1.8 ГГц и выше. В ряде случаев регистрация спектра ЯМР при исследовании конденсированных сред затруднена, особенно в текущей жидкости или при проведении экспресс-контроля в слабых полях. В данной ситуации задачи по исследованию жидких сред, а также определению их состояния решаются на основе измерений продольного T_1 и поперечного T_2 времени релаксации [14–19].

При измерении значений T_1 и T_2 в жидких средах, которые находятся в стационарном состоянии, наибольшее предпочтение отдается импульсным методам [7, 8, 10–13, 20, 21]. Исключение составляют измерения T_1 и T_2 в слабых магнитных полях [22, 23]. При исследовании потоков жидких сред, особенно когда их скорость может изменяться на порядок и больше, импульсные методы

использовать сложно. Поэтому особое место среди методов регистрации сигнала ЯМР занимает модуляционная методика [9, 14–17, 22, 23], которая позволяет регистрировать сигнал ЯМР как в слабом поле, так и от потока жидкости в большом диапазоне изменения его расхода q .

При использовании модуляционной методики сигнал ЯМР регистрируется в форме непериодических затухающих колебаний (биений или, иначе говоря, вигглей — wiggles). В текущей жидкости и слабых полях времена релаксации T_1 и T_2 измеряются с использованием сигналов ЯМР, которые в основном регистрируются на резонансной частоте протонов (^1H). Это связано с тем, что протоны обладают наибольшей чувствительностью к методу ЯМР [2–8, 11–14, 22–26] и содержатся в 99.8% жидких средах и их смесях [18–27]. В редких случаях осуществляется отстройка частоты регистрации сигнала ЯМР на резонансные частоты других ядер (например, лития, фтора, фосфора, бора и пр.). По результатам этой отстройки формируется спектр, с помощью которого можно определить наличие этих ядер в исследуемой среде и их относительные концентрации. В этих случаях концентрация данных ядер в среде и индукция магнитного поля должны обеспечивать при регистрации определенное отношение сигнал/шум (С/Ш). Для стационарных сред в слабых полях $\text{С/Ш} > 1.3$, для текущих сред — $\text{С/Ш} > 2.5$. С учетом таких требований по С/Ш отстройка на резонансные частоты других ядер от резонансной частоты протонов осуществляется в основном в кислотах, щелочах, а также, где точно известно присутствие этих ядер в исследуемой среде, например фтора в зубной пасте. Расход жидкой среды измеряют только с использованием сигналов, регистрируемых на резонансной частоте протонов [5, 8–11, 15, 18, 19].

Одной из проблем, которая возникает при контроле состояния конденсированной среды с использованием сигнала ЯМР, регистрируемого с применением модуляционной методики, является отсутствие универсального метода измерения T_1 в основном для текущей жидкости (в стационарной среде ряд проблем можно решить, используя накопление сигнала ЯМР). Используемые соотношения не позволяют в ряде случаев определить время релаксации T_1 при наличии регистрируемого сигнала ЯМР, например, при определенном соотношении между частотами модуляции f_m магнитного поля H_0 . При других соотношениях между значениями f_m значения T_1 для конденсированных сред с использованием этих же соотношений успешно определяются, так как измеренные значения T_1 совпадают с результатами измерений T_1 на промышленном ЯМР-релаксметре Minispec mq 60M, что подтверждает достоверность проводимых измерений. Наличие отмеченного нами феномена

существенно ограничивает возможности применения ЯМР-расходомеров-релаксметров для проведения исследований потоков жидких сред и решения ряда технических задач.

Цель данной работы — подробное исследования причин возникновения данного феномена и поиск путей его решения при реализации различных исследований текущих сред и контроле параметров потоков.

1. МОДУЛЯЦИОННАЯ МЕТОДИКА ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ СИГНАЛОВ ЯМР ОТ ТЕКУЩЕЙ И СТАЦИОНАРНОЙ ЖИДКИХ СРЕД

В теории ЯМР движения компонент вектора намагниченности при регистрации сигнала с использованием различных методов и методик описывается феноменологическими уравнениями Блоха [27–29]. Для описания сигналов поглощения $v(t)$ и дисперсии $u(t)$, что особенно актуально при использовании модуляционной методики для регистрации сигнала ЯМР, осуществляется переход во вращательную систему координат по методу Вагнесса [27, 29]. Необходимо также отметить, что особенностью использования модуляционной методики в отличие от других методов является то, что сигнал ЯМР регистрируется на резонансной частоте протонов или других ядер. В этом случае значение отстройки частоты регистрации сигнала ЯМР от частоты резонанса $\Delta\omega$ в уравнениях Блоха равно нулю. С учетом этой особенности система уравнений Блоха во вращательной системе координат принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{T_2} + \gamma H_m \sin(\omega_m t) v(t) &= 0, \\ \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{T_2} - \gamma H_m \sin(\omega_m t) u(t) + \gamma H_1 M_z(t) &= 0, \quad (1) \\ \frac{dM_z(t)}{dt} + \frac{M_z(t)}{T_1} - \frac{\chi_0(H_0 + H_m \sin(\omega_m t))}{T_1} - \gamma H_1 v(t) &= 0, \end{aligned}$$

где ω_m — частота модуляции поля H_0 ; H_m — амплитуда поля модуляции H_0 ; H_1 — амплитуда радиочастотного поля, которое формируется в катушке регистрации сигнала ЯМР (частота данного при регистрации сигнала ЯМР совпадает с частотой $\omega_0 = \gamma H_0$), χ_0 — статическая магнитная восприимчивость, t — текущее время.

На рис. 1 и 2 представлены структурные схемы лабораторных макетов ЯМР-релаксметра (конденсированная среда находится в стационарном состоянии, регистрация сигнала осуществляется в слабом поле с индукцией $B_0 < 100$ мТл) и ЯМР-расходомера-релаксметра. На схемах обозначены магнитные поля и их направления при

регистрации сигнала ЯМР с использованием модуляционной методики [1, 9, 17, 22, 23].

конденсированной среды (в двух состояниях) регистрируются в форме неперiodических затухающих колебаний (рис. 3 и 4).

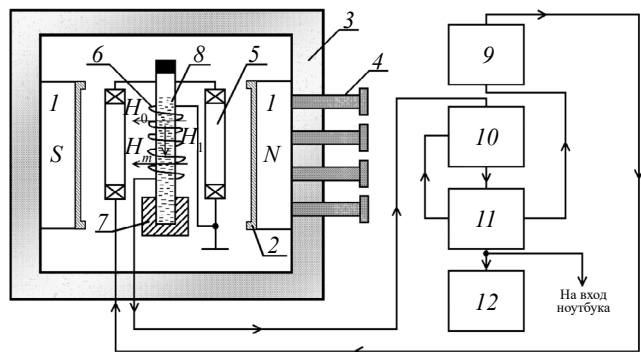


Рис. 1. Структурная схема малогабаритного мобильного ЯМР-релаксометра: 1 – постоянный магнит, 2 – специальные шимы, 3 – нейтраль для размещения и корректировки положения магнитов, 4 – регулировочные винты, 5 – катушка модуляции, 6 – катушка регистрации сигнала ЯМР, 7 – «танк» для контейнера с исследуемой средой, 8 – емкость с исследуемой средой, 9 – генератор модуляции магнитного поля, 10 – схема регистрации, включающая генератор слабых колебаний, 11 – блок обработки и управления, 12 – устройство индикации.

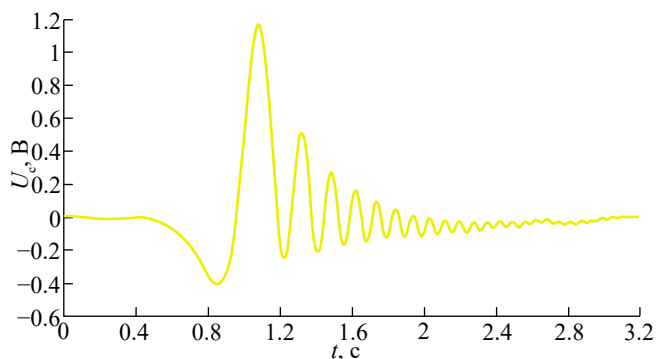


Рис. 3. Сигнал ЯМР от водопроводной воды при температуре $T = 289.4$ К, регистрируемый в малогабаритном ЯМР-релаксометре.

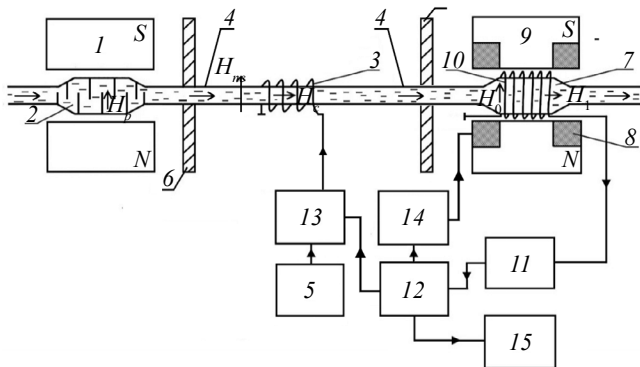


Рис. 2. Структурная схема ЯМР-расходомера-релаксометра: 1 – магнит-поляризатор; 2 – объем-поляризатор; 3 – катушка нутации; 4 – соединительный участок трубопровода; 5 – радиочастотный генератор; 6 – магнитный экран; 7 – сосуд-поляризатор; 8 – катушки модуляции поля H_0 ; 9 – электромагнит; 10 – катушка регистрации сигнала ЯМР; 11 – устройство регистрации сигнала ЯМР; 12 – устройство обработки и управления; 13 – электронный ключ; 14 – низкочастотный генератор; 15 – устройство индикации.

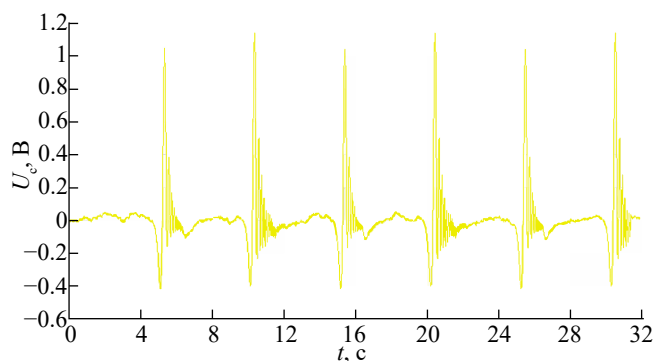


Рис. 4. Сигнал ЯМР от текущей жидкой среды (водный раствор $(H_2O + H_3BO_3)$ с нитрид-плутониевым наполнителем) при температуре $T = 333.1$ К.

Сравнение двух конструкций систем регистрации сигнала ЯМР (см. рис. 1 и 2) показывает сходство в конструкциях их магнитных систем, совпадение по направлению применяемых магнитных полей, а также идентичное расположение относительно магнитных полей катушек регистрации сигнала ЯМР (см. 6 на рис. 1 и 10 на рис. 2) с конденсированной средой и пр. Сигналы ЯМР от

Отличия в регистрации сигналов ЯМР для двух состояний среды состоят в том, что сегмент намагниченной текущей жидкости, от которого происходит регистрация сигнала ЯМР, находится в катушке регистрации 10 (см. рис. 2) определенное время t_p . При этом должно выполняться соотношение $t_p > 1/f_m$. Для увеличения t_p трубопровод в зоне катушки регистрации 10 расширяют в 2...2.5 раза (сосуд-анализатор 7). Это приводит к тому, что значение H_0 уменьшается, компенсировать это уменьшение можно только увеличением размера магнитной системы (увеличить размер полюсов магнита и пр.). Это приведет к увеличению веса всей измерительной конструкции прибора. Поэтому размеры магнитных систем в проточных ЯМР-расходомерах-релаксометрах намного больше, чем в стационарных ЯМР-релаксометрах. Необходимо отметить, что значение t_p зависит от

расхода текущей конденсированной среды q и изменяется в пределах двух порядков (условия эксплуатации расходомеров различных типов [15, 19, 24]). Поэтому преобразование Фурье для решения системы (1) применить крайне сложно.

Измерения времен релаксации T_1 и T_2 в этих устройствах реализовано следующим образом. Время T_2 определяется по спаду огибающей, построенной по вершинам пиков зарегистрированного сигнала ЯМР (см. рис. 3). Число пиков и характер изменения амплитуды определяются однородностью магнитного поля в зоне размещения катушки регистрации (см. 6 на рис. 1 или 10 на рис. 2).

Проблемы возникают при измерении времени продольной релаксации T_1 . Классический вариант измерения T_1 с использованием частотных измерений метода Джулотто [27, 30] в конструкции малогабаритного ЯМР-релаксометра и проточно-го ЯМР-расходомера-релаксометра реализовать сложно. В слабом магнитном поле H_0 (см. рис. 1) резонансные частоты при изменении частоты модуляции магнитного поля H_0 отличаются друг от друга на доли герца. Регистрация этих частот требует высокой точности настройки резонанса, которая может быть достигнута только в лабораторных условиях измерений. В случае использования прибора в полевых условиях реализовать такой режим измерения крайне сложно. Кроме того, формула для определения T_1 в методе Джулотто [30] была получена из уравнений Блоха без учета особенностей регистрации сигнала ЯМР в слабом магнитном поле с использованием модуляционной методики [1]. Также при ее выводе не учитывались особенности регистрации сигнала ЯМР в текущей жидкости, которые связаны с временем нахождения жидкости в катушке регистрации t_p и частотой модуляции f_m , поэтому была выведена следующая формула:

$$M = M_0 [1 - (1 - \exp(-\tau/T_1)) / (1 + \exp(-\tau/T_1))], \quad (2)$$

где M_0 – намагниченность исследуемой среды до воздействия поля модуляции, M – намагниченность исследуемой среды, при которой регистрируется сигнал ЯМР.

Соотношение (2) было получено из (1) с учетом фактора термического равновесия для различных частот модуляции поля H_0 , когда величина намагниченности после внешнего воздействия не успевает восстановиться, для случая равенства двух времен релаксации T_1 и T_2 . Кроме того, было сделано предположение, что амплитуда регистрируемого сигнала ЯМР максимальна. В катушку регистрации поступает намагниченная жидкость с максимальным значением намагниченности M в направлении оси oZ (M_z), которое совпадает с направлением магнитного поля в магните-поляризаторе 1 (см. рис. 2). Остальные компоненты намагниченности M_x и M_y затухают в неоднородных магнитных полях между катушками 3 и 10 (см. рис. 2). Это позволяет считать, что в уравнениях (1) $dM_z/dt = 0$.

Как и в частотном методе Джулотто, для определения T_1 с использованием соотношения (2) необходимо измерить амплитуды сигнала ЯМР U_c на двух частотах модуляции $f_m = 1/\tau$ и через соотношение двух амплитуд U_c , которые пропорциональны M , определить T_1 . На разработанных экспериментальных установках (см. рис. 1 и 2) была выполнена проверка соотношения (2) для водного раствора ($H_2O + H_3BO_3$) с нитрид-плутониевым наполнителем (этот раствор используется в химии, биологии с другими наполнителями и системах охлаждения) для различных температур T . Дополнительно было исследовано изменение значения T_2 этого раствора. Результаты измерений значений T_1 и T_2 были сравнены с результатами измерений, полученных на промышленном ЯМР-релаксометре Minispec mq 20M (BRUKER), данные представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты измерения времен релаксации T_1 и T_2 водного раствора ($H_2O + H_3BO_3$) с наполнителем из нитрида плутония при различных температурах T

T, K	Малогабаритный ЯМР-релаксометр и ЯМР-расходомер-релаксометр		Промышленный ЯМР-релаксометр Minispec mq 20M	
	T_1, c	T_2, c	T_1, c	T_2, c
288.1	1.029 ± 0.009	0.655 ± 0.006	1.0284 ± 0.0031	0.6536 ± 0.0018
293.2	1.064 ± 0.009	0.661 ± 0.006	1.0627 ± 0.0032	0.6585 ± 0.0018
303.2	1.139 ± 0.010	0.675 ± 0.006	1.1402 ± 0.0034	0.6731 ± 0.0019
317.6	1.213 ± 0.011	0.684 ± 0.006	1.2118 ± 0.0036	0.6824 ± 0.0020
323.2	1.252 ± 0.011	0.694 ± 0.006	1.2514 ± 0.0037	0.6951 ± 0.0021
333.5	1.343 ± 0.012	0.716 ± 0.006	1.3443 ± 0.0040	0.7143 ± 0.0021
338.6	1.387 ± 0.012	0.730 ± 0.007	1.3869 ± 0.0041	0.7284 ± 0.0022
343.4	1.445 ± 0.013	0.746 ± 0.007	1.4443 ± 0.0043	0.7474 ± 0.0022
348.2	1.621 ± 0.014	0.766 ± 0.007	1.6225 ± 0.0048	0.7646 ± 0.0023

Измерения T_1 выполнялись на двух частотах f_m , которые отличались между собой минимум на порядок. Анализ полученных результатов показал, что они совпадают в пределах погрешности измерений.

Вместе с тем экспериментально было установлено, что соотношение (2) не позволяет определить значение T_1 для случая, когда разница между частотами модуляции поля H_0 меньше чем на порядок. Установленный феномен для соотношения (2) необходимо исследовать более подробно.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 5 и 6 представлены сигналы ЯМР от водного раствора с ионами фтора (сигнал ЯМР регистрируется на резонансной частоте фтора ^{19}F).

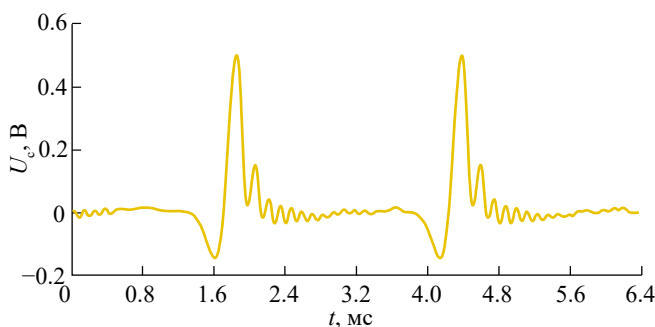


Рис. 5. Сигнал ЯМР от водного раствора с ионами фтора при температуре $T = 294.8 \text{ К}$, $f_m = 393.0 \text{ Гц}$.

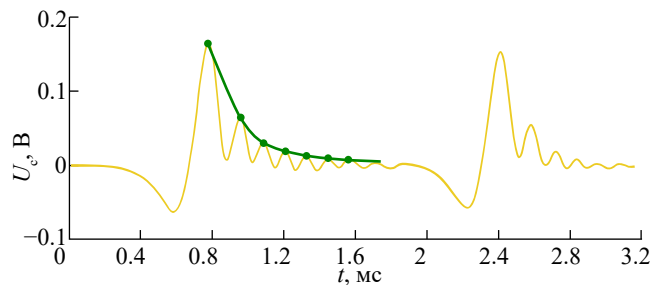


Рис. 6. Сигнал ЯМР от водного раствора с ионами фтора при температуре $T = 294.8 \text{ К}$, $f_m = 702.0 \text{ Гц}$.

Зеленой линией на рис. 6 показана огибающая по спаду пиков в зарегистрированном сигнале ЯМР (с ее использованием измеряется T_2). Отношение между частотами модуляции, при которых регистрируется сигнал ЯМР (см. рис. 5 и 6), составляет менее двух раз. При увеличении частоты f_m амплитуда регистрируемого сигнала уменьшается более чем в 2 раза. Проведенные измерения значений T_2 по двум сигналам показали, что

эти значения совпадают в пределах погрешности измерения с измерениями, выполненными с использованием промышленного ЯМР-релаксометра Minispec mq 20M. Однако, используя (2), определить значения T_1 невозможно. Докажем математически, что это так и рассмотрим соотношение (2) более подробно. Выполним в соотношении (2) некоторые преобразования. Приведем дробь в правой части к общему знаменателю. После преобразования получается следующее соотношение:

$$M = M_0 \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{T_1})}{1 + \exp(-\frac{\tau}{T_1})} \right) = \tag{3}$$

$$= M_0 \frac{2 \exp(-\frac{\tau}{T_1})}{1 + \exp(-\frac{\tau}{T_1})} = M_0 \frac{2}{1 + \exp(\frac{\tau}{T_1})}$$

Далее введем дополнительные обозначения и подставим A_1 и A_2 в (3):

$$A_1 = M_0 \frac{2}{1 + \exp(\frac{\tau_1}{T_1})}, \quad A_2 = M_0 \frac{2}{1 + \exp(\frac{\tau_2}{T_1})},$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1 + \exp(\frac{\tau_2}{T_1})}{1 + \exp(\frac{\tau_1}{T_1})}$$

После подстановки и умножения на знаменатель правой части получается следующее соотношение:

$$\frac{A_1}{A_2} + \frac{A_1}{A_2} \exp(\frac{\tau_1}{T_1}) = 1 + \exp(\frac{\tau_2}{T_1}). \tag{4}$$

Введем дополнительные обозначения для преобразования (4):

$$k = \frac{A_1}{A_2}, \quad \exp(\frac{1}{T_1}) = x, \quad x > 0.$$

В итоге (4) преобразуется в уравнение вида $f(x) = 0$, где функция $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = kx^{\tau_1} - x^{\tau_2} + k - 1. \tag{5}$$

Далее рассмотрим случай, когда $\tau_2 < \tau_1$. Так как $k > 0$, график функции $f(x)$ не имеет горизонтальной асимптоты:

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Далее необходимо определить промежутки возрастания и убывания функции, для этого найдем ее критические точки, т.е. вычислим $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = k\tau_1 x^{\tau_1-1} - \tau_2 x^{\tau_2-1} = 0,$$

$$x_0 = \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1}\right)^{\frac{1}{\tau_1-\tau_2}} - \text{критическая точка.}$$

С учетом ранее установленного условия имеем $x_0 > 0$. Рассмотрим два промежутка для x :

$$1) x \in (0; x_0] : f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$$

убывает на этом промежутке,

$$2) x \in [x_0; +\infty) : f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$$

возрастает на этом промежутке.

Полученный результат показывает, что точка x_0 является минимумом (единственным экстремумом). Число решений уравнения $f(x) = 0$ зависит от значения $f(0)$. Оно может быть нулем. Может быть одно численное решение или два. Для определения числа решений ищут экстремумы.

В общем случае, для всех вещественных C уравнение $f(x) = C$ имеет не более двух вещественных решений. Если уравнение имеет два различных вещественных решения, то они расположены по разные стороны от точки минимума, существование второго корня зависит от значения $f(0)$ (так как корни должны быть положительными, что следует из условий). Подставим критическую точку x_0 в (5). В итоге получается следующее соотношение:

$$f(x_0) = k \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1}\right)^{\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}} - \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}} + k - 1. \quad (6)$$

Для уравнения (6) возможны три случая:

$f(x_0) > 0 \Rightarrow$ уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений;

$f(x_0) = 0 \Rightarrow$ уравнение $f(x) = 0$ имеет одно решение;

$f(x_0) < 0 \Rightarrow$ уравнение $f(x) = 0$ имеет одно или два решения. Число решений зависит от значения $f(0)$.

Рассмотрим случай 1:

$$k \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1}\right)^{\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}} - \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}} + k - 1 > 0,$$

$$k \left(\left(\frac{\tau_2}{k\tau_1} \right)^{\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}} + 1 \right) > \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}} + 1.$$

Сделаем степени отношений в скобках с каждой стороны одинаковыми и введем дополнительные обозначения:

$$k \left(\left(\frac{k\tau_1}{\tau_2} \right)^{\frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}} + 1 \right) > \left(\frac{k\tau_1}{\tau_2} \right)^{\frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}} + 1,$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = l, \quad \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{l}{1-l}, \quad \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{1}{1-l}.$$

После этого (6) примет следующий вид:

$$k \left((kl)^{\frac{l}{1-l}} + 1 \right) > (kl)^{\frac{l}{1-l}} + 1. \quad (7)$$

Рассмотрим ряд численных примеров с различными значениями k и l .

Пример 1.

$$\tau_1 = 300 <: A, \quad \tau_2 = 200 <: A \Rightarrow l = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{3}{2}.$$

После подстановки этих значений в (7) получается следующее неравенство:

$$k \left(\left(k \frac{3}{2} \right)^{-3} + 1 \right) > \left(k \frac{3}{2} \right)^{-2} + 1.$$

После преобразования перенесем все слагаемые в правую часть и получим следующую функцию:

$$g(k) = 27k^3 - 27k^2 - 4.$$

Неравенство теперь представлено в виде

$$g(k) > 0.$$

Дополнительно рассмотрим производную от $g(k)$:

$$g'(k) = 81k^2 - 54k = 27k \cdot (3k - 2)$$

Для определения наличия корня уравнения построим графики $g(k)$ и $g'(k)$ (рис. 7а и 7б).

Анализ зависимостей, представленных на рис. 7, показывает, что $k = 0$ – точка локального максимума, $k = \frac{2}{3}$ – точка локального минимума, $g(0) = -4$.

В этом случае $g(k) = 0$ имеет одно решение, которое находится в интервале $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Преобразуем $g(k)$ в следующий вид:

$$g(k) = 27k^3 - 27k^2 - 4 = 27\left(k^3 - k^2 - \frac{4}{27}\right).$$

Для этого уравнения значение корня k_0 можно найти с использованием формулы Кардано:

$$k_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{a}{3},$$

$$345 a = -1, p = -\frac{1}{3}, q = -\frac{4}{27} - \frac{2}{27} = -\frac{2}{9}.$$

$$k_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{9} + \sqrt{\frac{1}{81} - \frac{1}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9} - \sqrt{\frac{1}{81} - \frac{1}{729}}} + \frac{1}{3} = \sqrt[3]{\frac{1}{9} + \frac{1}{27}\sqrt{8}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9} - \frac{1}{27}\sqrt{8}} + \frac{1}{3} \approx 1,118.$$

С учетом определенного интервала для k можно сделать вывод, что решений нет.

Проведенные эксперименты показали, что изменение частоты модуляции, (например, увеличение) может в случае регистрации сигнала ЯМР от различных типов ядер приводить как к увеличению амплитуды сигнала ЯМР на одних ядрах, так и к ее уменьшению на других ядрах, поэтому необходимо рассмотреть два разных варианта:

первый вариант: $A_1 = 1.14$ В, $A_2 = 0.89$ В. В этом случае $k = 1.281 > k_0$, что означает отсутствие решений в уравнении $f(x) = 0$;

второй вариант: $A_1 = 0.89$ В, $A_2 = 1.14$ В. В этом случае $k = 0.781 < k_0$, что означает наличие у уравнения $f(x) = 0$ по крайней мере одного решения. В качестве $f(x)$ рассматривается следующая функция:

$$f\left(\exp\left(\frac{1}{T_1}\right)\right) = k \exp\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right) - \exp\left(\frac{\tau_2}{T_1}\right) + k - 1,$$

$$\tau_1 = 300 \text{ мкс}, \tau_2 = 200 \text{ мкс}, k = \frac{89}{114}.$$

После подстановки всех значений и ввода дополнительного обозначения $\exp\left(\frac{200}{T_1}\right) = t$ получается следующее уравнение:

$$F(t) = 89t^{\frac{3}{2}} - 114t - 25 = 0. \tag{8}$$

Можно (8) трансформировать в следующее уравнение:

$$F_1(t) = 7921t^3 - 12996t^2 - 5700t - 625 = 0. \tag{9}$$

На рис. 8 представлены результаты исследования двух функций (8) и (9).

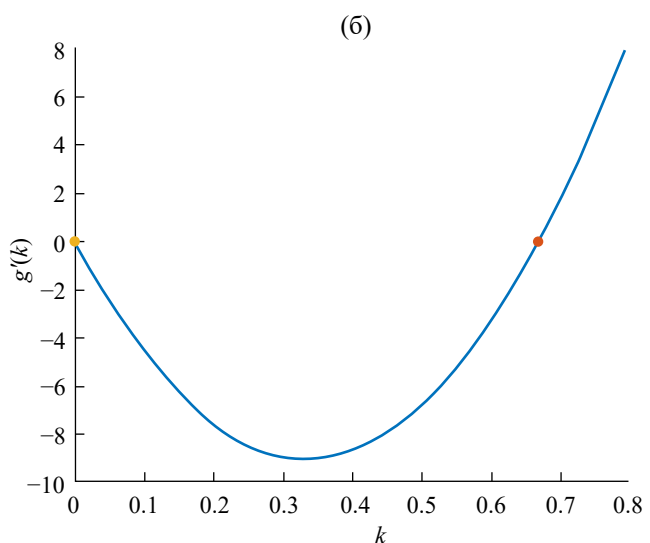
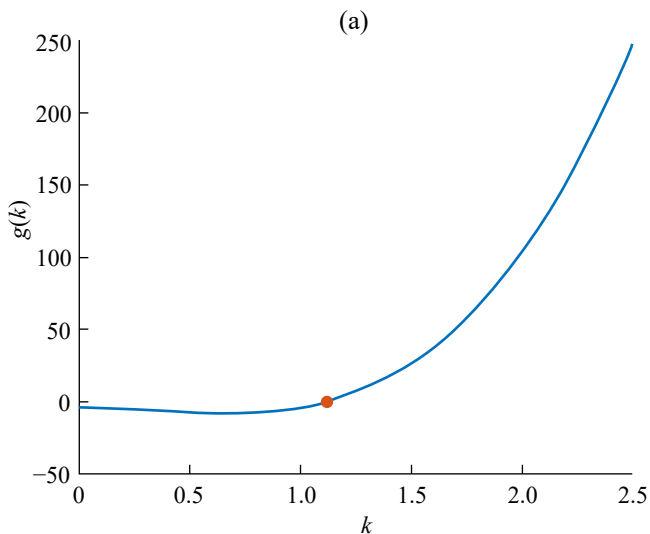


Рис. 7. Зависимость изменения $g(k)$ (а) и $g'(k)$ (б) от k на интервале существования возможного решения.

Для нахождения T_1 вернемся к исходным обозначениям и получим значение для $T_1 = 286$ мкс для корня уравнения (9), который соответствует $t = 2.017$. Допустимый интервал значений. Полученный результат показывает, что решение не подходит под ограничение, т.е. изначальное уравнение не имеет корней. Для рассмотрения других вариантов преобразуем выражение (7)

$$k((2k)^{-2} + 1) > (2k)^{-1} + 1,$$

$$4k^2 - 4k - 1 > 0,$$

$$(2k - 1)^2 - 2 > 0, k > 0.$$

Рассмотрим два случая:

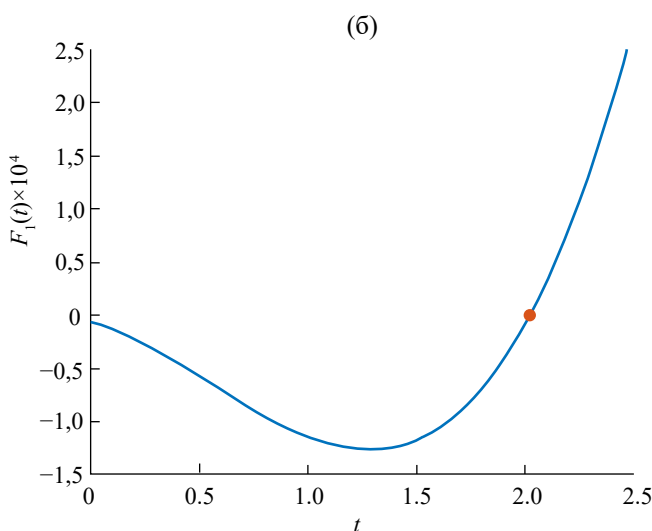
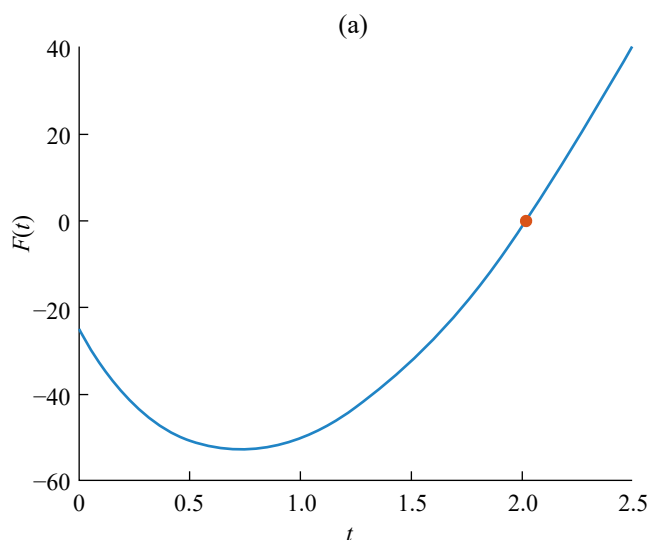


Рис. 8. Зависимость изменения функций $F(t)$ (а) и $F_1(t)$ (б) от t .

$$2k - 1 > \sqrt{2},$$

$$2k - 1 \langle -\sqrt{2}, k \rangle 0 \Rightarrow k \in \emptyset,$$

$$k > \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1.207.$$

С учетом ранее определенных значений амплитуд $A_1 = 1.14$ В, $A_2 = 0.89$ В зарегистрированных сигналов ЯМР для двух частот модуляции был получен $k = 1.195 < k_0 = 1/207$. Это означает, что уравнение имеет одно или два решения. Рассмотрим (5) с учетом ряда преобразований:

$$f\left(\exp\left(\frac{1}{T_1}\right)\right) = k \exp\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right) - \exp\left(\frac{\tau_2}{T_1}\right) + k - 1.$$

Для случая $\tau_1 = 2\tau_2$ при $k = 104/87$ получим следующее соотношение:

$$\frac{104}{87} \exp\left(\frac{2\tau_2}{T_1}\right) - \exp\left(\frac{2\tau_2}{T_1}\right) + \frac{104}{87} - 1 = 0.$$

В результате преобразования $e^{\frac{\tau_2}{T_1}} = t$ получается следующее уравнение:

$$F_2(t) = 104t^2 - 87t + 17 = 0.$$

На рис. 9 представлен график $F_2(t)$ в интервале возможного нахождения решения.

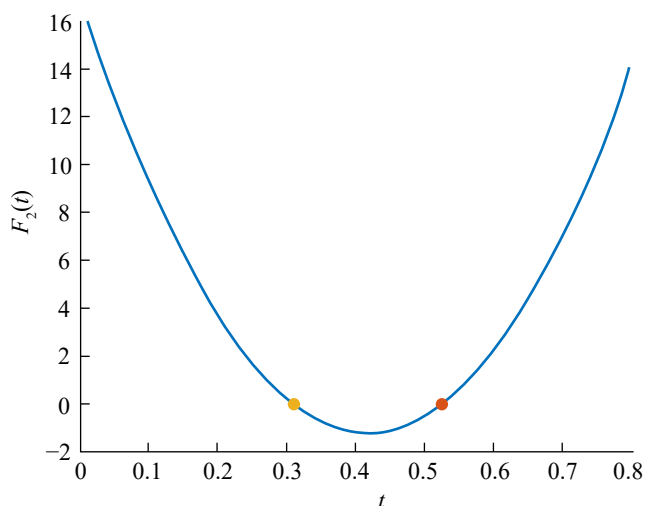


Рис. 9. Зависимость изменения функций $F_2(t)$ от t .

Соотношение $F_2(t)$ обладает двумя корнями: $t_1 = 0.525$, $t_2 = 0.311$. С учетом ранее выполненных обозначений получаются два значения T_1 . Эти значения меньше нуля:

$$T_1 = \frac{\tau_2}{\ln(0.525)} < 0,$$

$$T_1 = \frac{\tau_2}{\ln(0.311)} < 0.$$

Это позволяет сделать вывод, что полученное решение не подходит под ограничения и означает, что первое уравнение не имеет решений.

Рассмотрим еще один случай, когда частоты модуляции поля H_0 больше 200 Гц:

третий вариант:

$$\tau_1 = 0.0025 \text{ с}, \tau_2 = 0.0014 \text{ с} \Rightarrow l = \frac{\tau_1}{\tau_2} \approx 1.786,$$

$$A_1 = 1.04 \text{ В}, A_2 = 0.87 \text{ В} \Rightarrow k = \frac{A_1}{A_2} = \frac{104}{87} \approx 1.195 < k_0.$$

В этом случае $f(x) = 0$ имеет одно или два решения. Преобразуем (5) с учетом начальных данных в следующее соотношение:

$$f\left(\exp\left(\frac{1}{T_1}\right)\right) = k \exp\left(\frac{\tau_1}{T_1}\right) - \exp\left(\frac{\tau_2}{T_1}\right) + k - 1.$$

Для значений частот модуляции τ_1 и τ_2 , преобразовав данное уравнение, получим соотношение

$$F_3(t) = 104t^{25} - 87t^{14} + 17 = 0.$$

Уравнение $F_3(t)$ имеет один корень, который равен $t = -0.875$. Это решение не подходит под ограничения, т.е. первое уравнение не имеет решений. На рис. 10 для контроля рассуждений представлен график функции $F_3(t)$, который наглядно это подтверждает (нет пересечения с осью $F_3 = 0$). Остальные возможные варианты решения (2) при рассмотрении при определенных соотношениях между частотами также показывают отсутствие решений.

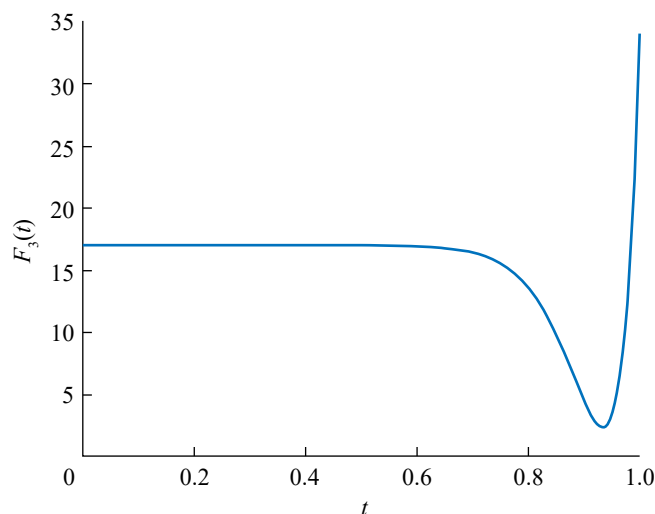


Рис. 10. Зависимость изменения функции $F_3(t)$ от t .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ данных результатов показал, что при использовании уравнения (2) для определения времени продольной релаксации T_1 есть ряд особенностей. Установлено, что эти особенности одинаковы

как для текущей, так и для стационарной жидкой среды, за исключением двух моментов, которые связаны с временем нахождения текущей среды в катушке регистрации сигнала ЯМР. В одном случае особенность связана с тем, что в катушке регистрации, жидкость под воздействием поля модуляции при регистрации сигнала ЯМР должна находиться больше одного периода $T_m = 1/f_m$. С учетом того, что скорость текущей среды может изменяться на порядок и более, это обстоятельство играет ключевую роль во многих исследованиях. Вторая особенность связана с изменением температуры потока жидкости. В стационарных исследованиях значение T конденсированной среды регулируется в необходимом диапазоне. В текущей среде, особенно в системах охлаждения, изменения T могут быть существенными и сложно контролируемы. Эти особенности должны быть учтены при выводе нового соотношения для определения T_1 из уравнений Блоха.

Кроме того, результаты проведенного анализа соотношения (2) показывают, что для получения значения T_1 из соотношения (2) необходимо частоту модуляции f_m изменять минимум в 5 раз при проведении измерения амплитуд U_c сигналов ЯМР. Дополнительно установлено, что разница между амплитудами регистрируемых сигналов ЯМР при двух изменениях частоты модуляции f_m зависит от того, на какой резонансной частоте ядер регистрируются сигналы ЯМР от конденсированной среды.

Проведенные нами исследования позволили установить, что соотношение (2) не является универсальной формулой для определения значения T_1 с использованием сигналов ЯМР, регистрируемых с применением модуляционной методики. Установленные нами ограничения на использование (2) при исследованиях жидких сред (особенно в потоках) на лабораторных установках, используя ручной режим настройки аппаратуры с подбором параметров магнитных полей и значений q в эксперименте под каждую конкретную среду, в ряде случаев можно «обойти» и провести измерения T_1 . При этом затрачиваются большие временные ресурсы и др. В промышленных приборах такое реализовать невозможно, так как необходима автоматическая подстройка, чтобы обеспечить измерения T_1 с использованием соотношения (2). Поэтому необходимо получить новое соотношение для определения T_1 из решения уравнения (1) без приближений, которое не требует определения ограничений на его использование при проведении измерений. Это будет являться следующей нашей научной задачей.

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давыдов В.В., Дудкин В.И., Карсеев А.Ю. // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. № 7. С. 103
2. Жерновой А.И., Комлев А.А., Дьяченко С.В. // ЖТФ. 2016. Т. 86. № 2. С. 146.
3. Gizatullin B., Gafurov M., Vakhin A. et al. // Energy and Fuels. 2019. V. 33. № 11. P. 10923.
4. Marusina M.Y., Karaseva E.A. // Asian Pacific J. Cancer Prevention. 2018. V. 19. № 10. P. 2771.
5. Марусина М.Я., Базаров Б.А., Галайдин П.А. и др. // Измерительная техника. 2014. №4. С.62.
6. Gizatullin B., Gafurov M., Rodionov A. et al. // Energy and Fuels. 2018. V. 32. P. 11261.
7. Марусина М.Я., Базаров Б.А., Галайдин П.А. и др. // Измерительная техника. 2014. №5. С.68.
8. O'Neill K.T., Brancato L., Stanwix P.L. et al. // Chem. Engineer. Sci. 2019. V. 202. P. 222.
9. Давыдов В.В. // Оптика и спектроскопия. 2016. Т. 121. № 1. С. 20.
10. Deng F., Xiao L., Wang M. et al. // Appl. Magnetic Resonance. 2016. V. 47. № 10. P. 1239.
11. Kashaev R.S., Kien N.C., Tung T.V., Kozelkov O.V. // J. Appl. Spectroscopy. 2019. V. 86. № 5. P. 890.
12. Sadovnikova M.A., Murzakhanov F.F., Mamin G.V., Gafurov M.R. // Energies. 2012. V. 15. № 17. P. 6204.
13. Gizatullin B., Gafurov M., Murzakhanov M. et al. // Langmuir. 2021. V. 37. № 22. P. 6783.
14. Жерновой А.И., Дьяченко С.В. // ЖТФ. 2015. Т. 85. № 4. С. 118.
15. Davydov R., Davydov V., Myazin N., Dudkin V. // Energies. 2022. V. 15. № 5. P. 1748.
16. Дьяченко С.В., Жерновой А.И., // ЖТФ. 2016. Т. 86. № 12. С. 78.
17. Давыдов В.В., Величко Е.Н., Дудкин В.И., Карсеев А.Ю. // Метрология. 2014. №2. С.32.
18. Кашаев Р.С., Козелкова В.О., Овсеенко Г.А. и др. // Измерительная техника. 2023. № 5. С. 52
19. Deng F., Xiong C., Chen S. // Petroleum Exploration and Development. 2020. V. 47. P. 855.
20. Eremina R., Gippius A., Gafurov M. // Appl. Magnetic Resonance. 2023. V. 54. № 4-5. P. 435.
21. Giulotto L., Lanzi G., Tosca L. // J. Chem. Phys. 1956. V. 24. № 3. P. 632.
22. Давыдов В.В., Дудкин В.И., Карсеев А.Ю. // ПТЭ. 2015. № 6. С. 83.
23. Давыдов В.В., Дудкин В.И., Николаев Д.И. и др. // РЭ. 2021. Т. 66. № 10. С. 1017.
24. Zargar M., Johns M.L., Aljindan L.M. et al. // SPE Production & Operation, 2021. V. 36. № 2. P. 423.
25. Fouilloux P., Assifaoui A., Rachocki A. et al. // Int. J. Biological Macromolecules. 2023. V. 253. Pt. 1. Article No. 126307.
26. Cao G., Gao S., Xiong B. // Sci. Reports. 2023. V. 13. № 1. P. 4558.
27. Leshe A. Nuclear Induction. Berlin: Verlag Wissenschaften, 1963.
28. Abragam A. The Principles of Nuclear Magnetism. Oxford: Oxford Clarendon Press, 1961.
29. Jacobssohn B.A., Wangsness R.K. // Phys. Rev. 1948. V. 73. № 9. P. 942.
30. Chiarotti G., Cristiani G., Giulotto L., Lanzi G. // Il Nuovo Cimento. 1954. V. 12. № 4. P. 519.

FEATURES OF PHENOMENOLOGICAL BLOCH EQUATIONS SOLUTION FOR DETERMINING THE LONGITUDINAL RELAXATION TIME T_1 IN A LIQUID FLOW

V. V. Davydov^{a,*}, A. A. Gol'dberg^a, V. I. Dudkin^b, R. V. Davydov^{a,b,c}

^a*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,*

Polytechnicheskaya Str., 29, Saint-Petersburg, 195251 Russian Federation

^b*The Bonch-Bruевич Saint-Petersburg State University of Telecommunications,
prosp. Bol'shevikov., 22, Saint-Petersburg, 193232 Russian Federation*

^c*Alferov University*

Khlopina Str., 8, Build., 3, Saint-Petersburg, 194021 Russian Federation

**E-mail: Davydov_vadim66@mail.ru*

Received October 25, 2023, revised November 17, 2023, accepted January 11, 2024

The article considers the features of determining the longitudinal T_1 and transverse T_2 relaxation times in the designs of NMR relaxometers with a flow-through and stationary liquid medium. The advantages of using the modulation technique for recording the NMR signal for flow-through NMR flowmeters-relaxometers and small-sized NMR relaxometers for express control of condensed media in comparison with other methods are noted. It is experimentally proven that the relationship obtained from the Bloch equations using approximations for determining T_1 based on the results of two measurements of the NMR signal amplitudes or resonance frequencies has a number of limitations in its application for monitoring the state of a flowing medium. Based on experimental data, a study was made of the relationship between the magnetic field modulation frequencies for determining T_1 and it was proven that for a number of relationships between them it is impossible to determine the T_1 value during measurements. In this case, the NMR signals from the flowing medium at these modulation frequencies are recorded, and the medium itself has relaxation times T_1 and T_2 . The results we obtained allow us to eliminate the error in determining the state of the medium (whether it complies with the standard (absence of impurities in it) or not) using the measured values of relaxation times. This is extremely important during conducting various experiments, especially using current flows, in which the use of other methods for solving this problem is difficult.

Keywords: nuclear magnetic resonance, liquid, condensed medium, modulation technique, NMR signal, nuclear magnetic flowmeter-relaxometer, Bloch equations, relaxation times T_1 and T_2 , modulation frequency, measurement error



ПАМЯТИ АНДРЕЯ ФЕДОРОВИЧА АЛЕКСАНДРОВА

20 сентября 2024 г. на 90-м году жизни скончался известный российский ученый, доктор физико-математических наук, профессор, лауреат Государственных премий СССР, заслуженный деятель науки Российской Федерации, член редколлегии журнала “Радиотехника и электроника” Андрей Федорович Александров.

А.Ф. Александров родился 30 мая 1935 г. в Москве. В 1953 г. он поступил на физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, с которым была связана вся его дальнейшая жизнь. После окончания аспирантуры университета в 1961 г. Андрей Федорович остался работать на физическом факультете — сначала в должности ассистента, затем доцента, профессора. С 1986 г. 2015 г. А.Ф. Александров руководил кафедрой физической электроники, а в период с 1997 г. по 2013 г. Андрей Федорович возглавлял отделение радиофизики и электроники физического факультета.

В 1965 г. А.Ф. Александров защитил кандидатскую диссертацию на тему “Взаимодействие квазистационарного электрического поля с плоским слоем плазмы”, а в 1975 г. докторскую диссертацию “Физические процессы в сильноточных электроразрядных источниках света”.

Области научных интересов Андрея Федоровича были очень разнообразны и широки: это физика ВЧ-разрядов и плотной излучающей плазмы, физика плазмOIDов и динамических плаз-

менных образований; плазменная электродинамика и плазма-стимулированное горение; физика сильноточных релятивистских пучков и релятивистская СВЧ-электроника; физические основы получения тонких пленок и пленочных структур и их использование; технологии получения новых наноструктурированных материалов и их практическое внедрение.

Андрей Федорович внес существенный вклад в разработку физических основ взаимодействия низкочастотных электромагнитных полей с пространственно-ограниченной плазмой. Его работы по исследованию большого класса излучающих разрядов явились основой нового научного направления — физики плотной излучающей плазмы. На созданном под руководством А.Ф. Александрова уникальном экспериментальном стенде “Фотон” изучен большой класс излучающих разрядов. В результате были созданы источники излучения с рекордными параметрами, которые нашли практическое применение для создания особо мощных лазерных систем для специальных приложений, в том числе в программе лазерного управляемого термоядерного синтеза, в фотохимии и других областях. За эти работы А.Ф. Александров в составе коллектива авторов удостоен в 1981 г. Государственной премии СССР.

А.Ф. Александрову принадлежат важные результаты в области создания приборов сверхмощ-

ной и релятивистской СВЧ-электроники. Так, например, впервые были выявлены физические процессы, ограничивающие длительность генерации в таких устройствах; обоснован переход к пространственно-развитым электродинамическим системам; реализованы различные типы релятивистских СВЧ-генераторов. За эти работы А.Ф. Александрову совместно с А.А. Рухадзе и В.И. Канавцом была присуждена Ломоносовская премия МГУ I степени. В 2010 г. за цикл статей “Электромагнитные свойства плазменных волноводов и резонаторов с учетом временной и пространственной дисперсии” Андрей Федорович вместе с М.В. Кузелевым и А.А. Рухадзе был удостоен премии МАИК “Наука/Интерпериодика” за лучшую публикацию.

А.Ф. Александров активно участвовал в работах в области физических основ технологии получения тонких пленок и пленочных структур для задач микро- и наноэлектроники, материаловедения и медицины. В рамках перспективных направлений развития МГУ под его руководством изготовлен и запущен комплекс уникального технологического оборудования, на котором с использованием различного рода оригинальных плазменных ВЧ- и дугowych источников ионов были синтезированы различные наноструктурированные пленки и сложные тонкопленочные структуры на основе метастабильных форм углерода — карбина и двумерно-упорядоченного линейно-цепочечного углерода, и полимерные структуры с новыми уникальными механическими, физико-химическими и биологическими свойствами.

При непосредственном участии А.Ф. Александрова были созданы углеродные карбиноподобные покрытия для медицинских имплантатов, обладающие уникальной биосовместимостью и тромборезистентностью. Это коронарные стенты с антикальцинозными покрытиями, кардиостимуляторы с повышенным сроком службы, антимикробные ортопедические и стоматологические протезы, имплантаты практически для всех областей медицины.

Характерной чертой научного стиля Андрея Федоровича являлось стремление работать в сотрудничестве и кооперации с другими организациями. Он стоял у истоков процесса интеграции вузовской и академической наук: был инициатором создания в 1987 г. и руководителем первого Научно-учебного центра субмикронной технологии и диагностики материалов электронной техники Минвуза и АН СССР. С 1998 г. он являлся руководителем объединенного учебно-научного центра (ОУНЦ) “Фундаментальные основы высоких технологий и современных методов исследований в физике”, объединяющего пять ведущих вузов страны и восемь институтов РАН. В том же

году совместно с МГТУ им. Н.Э. Баумана был организован ОУНЦ по фотонной энергетике, в котором он также являлся научным руководителем.

Много сил и времени Андрей Федорович уделял преподавательской и просветительской деятельности. Он автор около 300 научных работ, 10 монографий, учебников и учебных пособий. Более десяти лет он читал лекции по курсу общей физики для физиков; им созданы и прочитаны спецкурсы “Основы электродинамики плазмы”, “Взаимодействие электромагнитных волн с плазмой”, “Физика сильноточных релятивистских электронных пучков”, “Введение в физическую электронику” и многие другие. Он является одним из авторов учебника: А.Ф. Александров, Л.С. Богданкевич, А.А. Рухадзе “Основы электродинамики плазмы” (М.: Высшая шк., 1-е изд. 1978, 2-е изд. 1988). В 1991 г. за создание этого учебника авторский коллектив был удостоен Государственной премии СССР. Учебник переведен на английский язык “Principles of Plasma Electrodynamics” (Heidelberg: Springer-Verlag, 1984 г.) и получил высокое признание у зарубежной научной общественности.

Андрей Федорович создал большую научную школу: им подготовлено 26 кандидатов и 8 докторов наук. В 1997 г. успехи А.Ф. Александрова в педагогической и учебно-организационной работе отмечены Ломоносовской премией МГУ за педагогическую деятельность. Он являлся Заслуженным профессором МГУ, Почетным профессором Дагестанского университета и Университета г. Юннань (КНР).

Андрей Федорович вел также большую научно-организационную деятельность. Он являлся членом ряда научных советов АН СССР и РАН, научных советов Минвуза СССР и Миннауки РФ, членом редколлегий нескольких научных журналов, членом экспертного совета ВАК, членом ученых и специализированных советов МГУ, ФИАН, ИОФ РАН.

За большую научную и педагогическую деятельность Андрей Федорович был награжден медалью ордена “За заслуги перед отечеством” I степени, почетными знаками “Отличник народного просвещения”, “Отличник просвещения СССР”, ему было присвоено почетное звание “Заслуженный деятель науки Российской Федерации”. А.Ф. Александров являлся действительным членом (академиком) Российской академии естественных наук (РАЕН).

Редакция и редколлегия журнала, все, близко знавшие Андрея Федоровича, глубоко скорбят о кончине замечательного человека и ученого и выражают соболезнования родным и близким покойного.



ПАМЯТИ ВЛАДИМИРА ГРИГОРЬЕВИЧА ШАВРОВА

2 октября 2024 г. на 93-м году жизни скончался крупный российский ученый в области физики магнитных явлений, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией магнитных явлений в магнитоэлектронике Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, член редколлегии журнала “Радиотехника и электроника” Владимир Григорьевич Шавров.

В. Г. Шавров родился 5 августа 1932 года в г. Томске. После окончания физико-математического факультета Уральского государственного университета в 1955 г. он начал работать в Институте физики металлов АН СССР (г. Свердловск) в Отделе теоретической физики, возглавляемом академиком С.В. Вонсовским. В 1968 г. Владимир Григорьевич перешел на работу в Институт радиотехники и электроники АН СССР (ныне — ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН), где проработал всю оставшуюся жизнь. В 1965 г. он защитил кандидатскую диссертацию, а в 1988 г. — докторскую. С 1997 г. и до последних дней Владимир Григорьевич являлся заведующим лабораторией физики магнитных явлений в микроэлектронике.

В 1970–2024 гг. под руководством В.Г. Шаврова были исследованы новые типы линейных и нелинейных колебательных и волновых процессов в магнетиках, в том числе динамического хаоса, обусловленные взаимодействием спиновой, упругой и электромагнитной подсистем, а также их аномальное поведение вблизи магнитных фазо-

вых переходов. В 1996 г. под его руководством была начата работа по изучению возможности управления размером и формой ферромагнитных сплавов с эффектом памяти формы с помощью магнитного поля или температуры, в том числе на микро- и наноразмерном уровне. Были исследованы возможности создания с их помощью новой технологии трехмерного манипулирования нанообъектами, в частности, углеродными нанотрубками и наночастицами различной природы.

Под руководством Владимира Григорьевича были выполнены работы по созданию высокочувствительных магнитометров и достигнута чувствительность 10^{-9} Э, что является рекордом для магнетометров, работающих без криогенных устройств.

В. Г. Шавров был одним из ведущих специалистов страны в области физики магнитных явлений, в частности, в области магнитных материалов, магнитоупругости и магнитоакустики. Им опубликовано более 1400 научных работ (из них свыше 400 статей в журналах, 12 монографий, 10 обзоров, 15 патентов РФ). В составе коллектива авторов Владимир Григорьевич опубликовал монографии: “Нелинейные колебания в задаче возбуждения гиперзвука” (Сыктывкар, 2021); “Спиновые волны в средах с обменом и диссипацией” (М.: Физматлит, 2021); “Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации” (М.: Физматлит, 2019); “Связанные волны в магнетиках” (М.: Физматлит, 2019); “Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода” (М.: Физматлит,

2018); «Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах» (М.: Физматлит, 2017); «Влияние взаимодействия подсистем на динамические свойства магнетиков» (М.: Физматлит, 2016); «Магнитостатические волны в неоднородных полях» (М.: Физматлит, 2016); «Динамические и кинетические свойства магнетиков» (М.: Наука, 1986); «Волны в многослойных структурах. Ч. 1–3. Методы расчета: прямой, усреднения, матрицы, импеданса, исключения, переотражений, алгоритмический, баланса энергии, конечных разностей» (М.: Физматлит, 2022–2024); «Динамический хаос в системе из двух связанных осцилляторов» (М.: Физматлит, 2025).

Владимир Григорьевич создал большую научную школу: среди его учеников 16 кандидатов и 11 докторов наук. Трудно перечислить всех молодых исследователей, начало научной карьеры которых обязано его благожелательной критике и поддержке. Несмотря на многочисленные трудности, сохранил и преумножил руководимый им научный коллектив, наладил творческое взаимодействие со многими научными центрами в России и за рубежом. На конкурсе Президента РФ в 2006 г. руководимая им научная школа была признана ведущей в стране. За цикл работ по магнитоакустике в 1986 г. Владимиру Григорьевичу была присуждена Госпремия Украинской ССР в области науки и техники, трижды (в 1994, 1997 и 2000 г.) ему присуждалась Государственная научная стипендия.

Владимир Григорьевич вел большую научно-общественную работу. Он являлся членом редколлегий журналов: «Радиотехника и электроника», «Физика металлов и металловедение», «Журнал радиоэлектроники», «Фазовые переходы, межфазные границы и наноматериалы» и «Челя-

бинский физико-математический журнал», членом Ученых и диссертационных советов Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН и Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского, членом бюро магнитной секции Научного совета РАН по физике конденсированного состояния и членом Научного совета РАН по акустике. В. Г. Шавров являлся научным руководителем двух совместных лабораторий ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН с Челябинским государственным университетом и Новгородским государственным университетом им. Ярослава Мудрого.

Владимир Григорьевич много лет руководил созданным в ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН Научно-образовательным центром «Магнитоэлектроника и нанофизика», в котором активно работают более 30 преподавателей, молодых ученых, аспирантов и студентов ведущих вузов, активно работающих при поддержке грантов РФФИ и Министерства образования и науки РФ. Под его руководством проводилась также инновационная работа: были созданы три малых инновационных предприятия, выполняющих НИОКР по грантам Фонда содействию малому бизнесу в научно-технической сфере и других.

Владимир Григорьевич был яркой привлекательной личностью и в то же время скромным и располагающим к себе человеком, у которого были сотни друзей в самых разных концах нашей страны и далеко за ее пределами.

Редакция и редколлегия журнала, все, близко знавшие Владимира Григорьевича, глубоко скорбят о кончине замечательного человека и ученого и выражают соболезнования родным и близким покойного.



ПАМЯТИ АЛЕКСАНДРА СТЕПАНОВИЧА БУГАЕВА

3 октября 2024 г. на 78 году жизни скончался крупный российский ученый в области физики конденсированного состояния и информационных технологий, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН, член редколлегии журнала «Радиотехника и электроника» Александр Степанович Бугаев.

А.С. Бугаев родился 25 августа 1947 г. в Горловке Донецкой области. В 1965 г. он стал студентом Московского физико-технического института (МФТИ), а по окончании его в 1971 г. — аспирантом МФТИ. Руководителем его дипломной работы и кандидатской диссертации был Ю.В. Гуляев, которого Александр Степанович считал своим учителем.

В 1974 г. А.С. Бугаев защитил кандидатскую диссертацию «К теории разогретых акустоэлектронных явлений в полупроводниках», а 1984 г. — докторскую диссертацию «Макроскопическая теория взаимодействия ультразвука с волновыми возбуждениями полупроводников и магнитных диэлектриков». В 1994 г. Александр Степанович был избран членом-корреспондентом, а в 2000 г. — действительным членом РАН.

Почти вся трудовая деятельность Александра Степановича была связана с МФТИ. Он вложил много сил в становление и развитие кафедр твердотельной электроники и радиофизики и кафедры вакуумной электроники. Одновременно являлся научным руководителем Центра открытых систем и высоких технологий. В Центре проводятся науч-

вания в области информатики; студенты и аспиранты обучаются теории и практике разработки больших информационно-аналитических систем.

Александр Степанович также руководил лабораторией волновой электроники Института радиотехники и электроники РАН, где проводятся исследования по физике низкоразмерных систем.

А.С. Бугаев являлся научным руководителем Лаборатории дистанционного зондирования МГТУ им. Н.Э. Баумана, где ведутся работы в области радиолокации гигагерцового диапазона. Результаты этих работ нашли применение в подповерхностной радиолокации, в новых системах безопасности, в неразрушающем контроле диэлектрических композиционных материалов, применяемых в аэрокосмической промышленности; в радиолокации биологических объектов.

Александр Степанович — автор более 250 научных работ, нескольких монографий и патентов на изобретения. Им подготовлены 21 кандидат и 9 докторов наук.

А.С. Бугаев являлся ведущим специалистом в области физики конденсированного состояния, а также информационных технологий и коммуникационных систем. В области акустоэлектроники им были созданы теоретические основы и проведено моделирование разогретых акустоэлектронных явлений в полупроводниках и распространения акустических волн в низкочастотных переменных внешних полях в условиях, близких к резонансным. В рамках квазидинамической

модели пространственно двумерных процессов исследованы явления переноса неравновесной электронно-дырочной плазмы полупроводников акустической волной.

Обширный цикл исследований был выполнен А.С. Бугаевым в области спинволновой электроники и магнитооптики. Была построена теория взаимодействия быстрых упругих волн с магнитостатическими волнами в слоистых структурах; предсказано возникновение связанных магнитоупругих волн и возможность их фильтрации вследствие резонансного взаимодействия ультразвуковых и магнитостатических волн. Развита теория и методики возбуждения гиперзвуковых волн дипольно-обменными магнитостатическими колебаниями; предложены способы усиления магнитостатических и быстрых магнитоупругих волн дрейфом электронов в слоистой структуре феррит-полупроводник.

На основе работ А.С. Бугаева были созданы приборы нового типа: высокочувствительные детекторы акустических и магнитостатических волн; СВЧ-резонаторы, генераторы и модуляторы, линии задержки, преобразователи, полоснопропускающие и заграждающие фильтры; расширители и ограничители динамического диапазона; устройства свертки, преобразования Фурье и корреляционной обработки сигнала.

Александр Степанович внес большой вклад в разработку и производство молекулярно-электронных датчиков движения, в том числе сейсмографов, геофонов и других аналогичных приборов.

А.С. Бугаев вел большую общественно-научную деятельность. Он являлся членом бюро Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН; вице-президентом Всероссийского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова, членом Российской секции Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике (IEEE), главным редактором журнала “Успехи современной радиоэлектроники”. В разные годы Александр Степанович состоял председателем Экспертного совета РФФИ по информационным системам и телекоммуникациям, председателем Экспертного совета ВАК по электронике.

За большие научные достижения А.С. Бугаев был удостоен званий лауреата премии Ленинского комсомола за 1974 г., Государственной премии РФ в области науки и техники за 2003 г., премии Правительства РФ в области науки и техники за 2006 и 2012 гг., премии Правительства РФ 2009 г. в области образования.

Несмотря на многочисленные должности и регалии, в жизни Александр Степанович был очень простым и душевным человеком. Он всегда проявлял внимание к проблемам своих друзей и коллег и помогал им в различных непростых жизненных ситуациях.

Редколлегия и редакция журнала, друзья и коллеги глубоко сожалеют о кончине Александра Степановича Бугаева и выражают соболезнования родным и близким покойного.