

ISSN 0033-8494

Том 69, Номер 11

Ноябрь 2024

# РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА



НАУКА

— 1727 —

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 69, номер 11, 2024

---

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

- Метод дискретных источников для задачи подповерхностного радиозондирования  
сверхширокополосными импульсами двумерных диэлектрических тел  
*К. В. Музалевский* 1039
- Электродинамические модели намагниченных графеновых дифракционных решеток,  
основанные на решении интегральных уравнений  
для плазмонных анизотропных структур  
*А. М. Лерер* 1053
- Взаимосвязь энергии, спектра и длительности сверхкороткого  
электромагнитного импульса с его временной формой  
*В. Г. Усыченко, Л. Н. Сорокин* 1060
- 

## ПРИМЕНЕНИЕ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ В БИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ

- Использование иттербиевых комплексов порфиринов в тераностике рака  
*И. П. Шилов, В. Д. Румянцева, А. С. Горшкова, А. В. Иванов* 1067
- 

## НАНОЭЛЕКТРОНИКА

- О влиянии кислородной бомбардировки на структурообразование пленок оксида гафния  
*В. А. Лузанов* 1076
- 

## ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

- Параксиальная модель во внешней задаче теории формирования  
интенсивных электронных пучков  
*Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой* 1079
- 

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

- Диагностика сильноточного нераспыляющего магнетронного разряда в водороде  
*А. В. Казиев, Д. В. Колодко, Н. С. Сазонов, М. М. Харьков, А. В. Тумаркин* 1095
- 

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

- Особенности дифракции лазерного пучка на периодических  
фазовых решетках с прямоугольной формой рельефа  
*В. А. Комоцкий* 1099

Анализ коэффициента шума приемного тракта на основе смесителя  
с управлением по току

*А. С. Коротков, Т. Д. Чан*

1110

---

### **СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОФИЗИКА**

Компенсация шума движения морского электронного датчика  
электрического поля

*В. Г. Максименко*

1121

---

### **ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ**

Система Лоренца как нелинейно связанные радиофизические  
RC-фильтры первого порядка

*В. И. Пономаренко, М. Д. Прохоров*

1126

---

### **ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ**

Вклад емкостных и индуцированных токов в полные токи  
на металлические электроды и теорема Шокли-Рамо

*С. Г. Дмитриев*

1132

---

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.87

### МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОДПОВЕРХНОСТНОГО РАДИОЗОНДИРОВАНИЯ СВЕРХШИРОКОПОЛОСНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ ДВУМЕРНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

© 2024 г. К. В. Музалевский

*Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН,  
ул. Академгородок, 50, стр. 38, Красноярск, 660036 Российская Федерация*

*E-mail: rsdkm@ksc.krasn.ru*

Поступила в редакцию 29.03.2024 г.

После доработки 14.04.2024 г.

Принята к публикации 25.04.2024 г.

Исследован модифицированный метод дискретных источников (МДИ) для решения задачи дифракции сверхширокополосного (СШП) электромагнитного импульса на подповерхностном диэлектрическом цилиндрическом теле с произвольной формой поперечного сечения (круговой, эллиптической и каплевидной). Диэлектрически-однородные полупространство и подповерхностный цилиндр возбуждались из воздушной среды нитевидным импульсным источником стороннего электрического тока. Показано, что импульсные поля, рассчитанные МДИ с заданной точностью совпадают с результатами численных расчетов методом конечных разностей. Установлено, что увеличение среднего показателя преломления (вещающей среды и заполняющей цилиндр) примерно в два раза требует во столько же раз увеличения взаимного числа ДИ и точек коллокации для сохранения одинаковой точности решения. В случае монохроматического возбуждения показано, что при уменьшении  $K$  с 0.99 до 0.2, а также при увеличении частоты тока с 300 до 900 МГц, взаимное число ДИ и точек коллокации необходимо увеличить примерно в три раза для сохранения одинаковой точности решения.

*Ключевые слова:* сверхширокополосные электромагнитные импульсы, метод дискретных источников, функция Грина

**DOI:** 10.31857/S0033849424110016, **EDN:** HOTFGK

#### ВВЕДЕНИЕ

Круг граничных задач электродинамики, решаемых аналитическими методами, ограничен. За последние 50 лет широкое распространение получили численные и численно-аналитические методы, одним из представителей которых является метод дискретных источников (МДИ) [1]. Разработка данного метода восходит к способу устранения особенностей ядер в интегральных уравнениях (ИУ) граничных задач электродинамики [2, с. 23–26]. Оказалось возможным удовлетворить граничным условиям задачи при построении дискретного аналога ИУ, используя линейную комбинацию полей вспомогательных или дискретных источников (ДИ), размещаемых на дополнительной поверхности, не совпадающей с физической поверхностью тела [3, с. 65–68].

В качестве ДИ наиболее часто выбирают нитевидные источники тока [4–8] для двумерных задач, и ортогонально ориентированные диполи [9–13]

электрического или магнитного типа (в зависимости от природы сторонних возбуждающих токов) – для трехмерных задач, реже применяются метагармонические функции [4]. В свободном пространстве поля этих источников описываются либо функциями Ханкеля первого (второго) рода, либо полем точечного диполя или в случае слоистых сред соответствующими функциями Грина задачи [1, 4, 13, 14]. Известные комплексные амплитуды ДИ отыскиваются из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в большинстве случаев получаемой при точечном (метод коллокаций) удовлетворении граничным условиям задачи на поверхности тел.

В случае гладких идеально проводящих или импедансных тел ДИ располагают внутри тела на замкнутой дополнительной поверхности, подобной поверхности тела [9]. На основе анализа взаимного расположения ДИ, локализации сингулярностей дифрагированного волнового поля, аналитически продолженного вглубь рассеивателя, показано, что при охвате дополнительной поверхностью

«достаточного» множества локальных сингулярностей [15–20] существует «псевдорешение» задачи, минимизирующее норму невязки граничного условия. Отметим, что за счет размещения ДИ на дополнительной поверхности в комплексной плоскости [20] также удается учесть локальные особенности поля (подобный подход аналогичен использованию полей кольцевых токов в вещественном пространстве [4]).

В случае возбуждения диэлектрически однородных тел для описания поля внутри тела требуется вторая дополнительная поверхность с размещенными на ней ДИ. В большинстве случаев данная дополнительная поверхность охватывает тело с внешней стороны [7, 8, 21–23] и используются ДИ той же природы, что и для описания поля вне рассеивателя (с особенностью в точке источника). Вместе с тем ранее было указано [4, с. 30], что удобней строить систему ДИ для описания поля внутри рассеивателя на основе целых функций (с особыми точками на бесконечности). Кроме того, опираясь на свойство полноты системы из суммы полей электрических и магнитных волн [24, с. 191], могут быть построены полные системы ДИ [4], располагаемые на любых произвольных поверхностях и кривых (необязательно замкнутых и охватывающих все сингулярности поля, рассеянного телом). Данные идеи нашли конкретное воплощение в последних работах [25, 26], в которых для акустического [25] и электромагнитного (двумерный диэлектрический цилиндр, расположенный в безграничном пространстве) [26] случаев при описании поля внутри цилиндрического тела в качестве ДИ (расположенных внутри тела) используется функция Бесселя нулевого порядка, а в качестве дополнительной поверхности может быть использована либо замкнутая направляющая, либо криволинейный отрезок.

Несмотря на ранее полученные результаты [27–34], все еще слабо изучена проблема применимости МДИ для моделирования процессов дифракции импульсных волн на телах во временной области, в частности, дифракции сверхширокополосных (СШП) электромагнитных импульсных полей на заглубленных телах для приложений подповерхностного радиозондирования. Рассеяние импульсных волн изучалось в основном в двумерной постановке задачи на круговых импедансных [27–29], диэлектрических [30] и идеально проводящих [30, 31] цилиндрах, размещенных в однородном [30] и слоистом [27–29] диэлектрическом полупространстве. Сторонними источниками поля выступали нити электрического, магнитного тока [27–29, 31] и плоская волна [30]. Вмещающие и заполняющие цилиндр среды представляли собой талые и мерзлые почвофрунты [27–29], среды нефтегазового коллектора [31], обладающие частотной дисперсией комплексной диэлектрической проницаемости (КДП), а также диэлектрики без потерь [30].

Общим подходом [27–31] являлось использование преобразования Фурье для построения полей во временной области на основе найденных спектральных амплитуд ДИ. Однако в указанных работах практически не изучены вопросы сходимости МДИ в зависимости от формы цилиндров и их оптических размеров, геометрии расположения ДИ, частоты стороннего источника поля, вариации КДП вмещающего полупространства и среды, заполняющей зондируемые тела. В отличие от исследований [27–29, 31], в данной работе рассеивающий цилиндр является диэлектрическим и заполнен средой с произвольной КДП, а в отличие от [30], поле внутри цилиндра описывается суперпозицией полей ДИ (функция Бесселя нулевого порядка), которые расположены на вспомогательной поверхности внутри цилиндра. В отличие от исследований [25, 26], в данной работе диэлектрическое цилиндрическое тело с произвольной направляющей возбуждается импульсным источником стороннего тока и располагается в диэлектрическом полупространстве.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ МДИ

### 1.1. Постановка задачи

В декартовой системе координат ось  $Oy$  направлена вертикально вверх по отношению к границе  $y = h$ , лежащей на плоскости  $XZ$ . Граница  $y = h$  разделяет два однородных полупространства с относительными КДП:

$$\varepsilon(y) = \begin{cases} \varepsilon_1 = 1, & y > h, \\ \varepsilon_2(\omega), & y \leq h, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\omega = 2\pi f$  ( $f$  – частота электромагнитного поля). Рассматриваются среды с относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . В нижнем полупространстве ( $y < h$ ) расположен прямой цилиндр с замкнутой криволинейной направляющей  $\gamma$ , однородно заполненный средой с КДП, равной  $\varepsilon_3(\omega)$  (рис. 1). Пространство возбуждается точечным импульсным источником электрического тока с объемной плотностью

$$\vec{j}_0^i(\vec{r}, \vec{r}_0, t) = I_0(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{e}_z,$$

где  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  – дельта-функция Дирака,  $\vec{r}(x, y)$  и  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$  – радиус-вектор точки пространства и расположения источника,  $I_0(t)$  – временная форма амплитуды тока,  $\vec{e}_z$  – единичный орт в направлении оси  $Oz$ . Нитевидный источник стороннего тока расположен в верхнем полупространстве  $y_0 > h$ . В соответствии с МДИ поле, рассеянное цилиндром, будет строиться в виде интерференции полей от  $N$  вспомогательных ДИ электрического тока

$$\vec{j}_n^i(\vec{r}, \vec{r}_n, t) = I_n(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \vec{e}_z$$

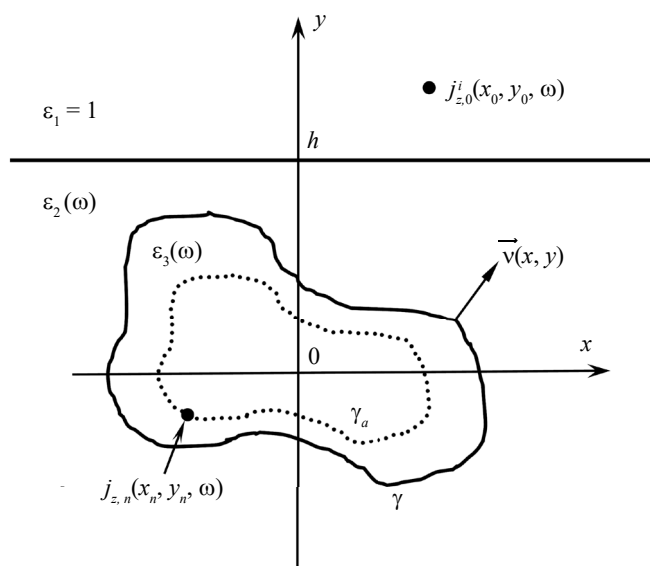


Рис. 1. Геометрия задачи.

той же природы, что и  $\vec{j}_0^i$ . Здесь  $\vec{r}_n = (x_n, y_n)$  и  $I_n(t)$  – радиус-вектор точки и временные формы амплитуды тока  $n$ -го источника,  $n = 1, \dots, N$ . Необходимо найти временные формы компонент напряженностей электромагнитного поля в верхнем полупространстве.

1.2. Поле нитевидного ДИ в неоднородной среде

Сначала найдем выражения полей ДИ (функции Грина задачи) для неоднородного пространства с плоской границей раздела  $y = h$ . В рассматриваемом случае двумерной задачи ( $\partial/\partial z \equiv 0$ ) векторы напряженностей электромагнитного поля (возбуждаемые нитью тока и рассеянные/дифракционные поля от цилиндра) будут иметь только три отличные от нуля составляющие ( $E_z, H_x, H_y$ ). Электромагнитные поля будем искать в виде спектральных комплексных амплитуд  $\psi(\omega)$ , связанных с процессами во времени  $\psi(t)$  преобразованием Фурье

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

здесь  $t$  – время,  $i$  – мнимая единица, преобразование между значениями плотности стороннего тока во временной и частотной области, также осуществлялось на основе данного выражения. Искомые комплексные амплитуды векторов напряженности электромагнитного поля ( $\vec{E}, \vec{H}$ ) выразим через скалярную компоненту электродинамического потенциала электрических токов  $\vec{A}(\vec{r}, \omega) = A_z(\vec{r}, \omega) \vec{e}_z$  [31, 32]:

$$E_z = i\omega\mu_0 A_z, H_x = \frac{\partial}{\partial y} A_z, H_y = -\frac{\partial}{\partial x} A_z, \quad (2)$$

где  $\mu_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  Ом $\times$ с/м – магнитная проницаемость вакуума. Скалярная компонента

потенциала  $A_z(\vec{r}, \omega)$  должна удовлетворять волновым уравнениям Гельмгольца [35, 36]:

$$\nabla_{x,y}^2 A_z(\vec{r}, \omega) + k_{1,2}^2(\omega) A_z(\vec{r}, \omega) = -I_{0,n}(\omega) (\vec{r} - \vec{r}_{0,n}), \quad (3)$$

( $k_{1,2}(\omega) = k_0 \sqrt{\varepsilon_{1,2}(\omega)}$  – волновое число верхнего и нижнего полупространства,  $k_0 = \omega/c$  – волновое число свободного пространства), условиям сшивания тангенциальных компонент поля на границе раздела сред  $y = h$ :

$$E_z(y = h - 0) = E_z(y = h + 0),$$

$$H_x(y = h - 0) = H_x(y = h + 0), \quad (4)$$

и условиями излучения Зоммерфельда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 u \right) = 0,$$

где  $u$  – произвольная компонента поля (в свободном пространстве амплитуда поля должна стремиться к нулю при удалении на бесконечность от источника). Пользуясь разложением потенциала  $A_z(\vec{r}, \omega)$  по плоским волнам

$$A_z(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x a(k_x, y) \exp(ik_x x) \quad (5)$$

( $a(k_x, y, \omega)$  – неизвестные спектральные амплитуды плоских волн с волновым числом  $k_x$ ), условиями (4) и условиями в точке источника [37, с. 271]

$$\frac{\partial}{\partial y} a(k_x, y, \omega) \Big|_{y=y_{0,n}+0} - \frac{\partial}{\partial y} a(k_x, y, \omega) \Big|_{y=y_{0,n}-0} =$$

$$= I_{0,n}(\omega) \exp(-ik_x x_{0,n}),$$

$$a(k_x, y = y_{0,n} - 0, \omega) = a(k_x, y = y_{0,n} + 0, \omega), \quad (6)$$

приходим к следующим выражениям для электродинамических потенциалов:

1) в случае стороннего источника тока, расположенного в верхнем полупространстве  $y_0 > h$ , имеем

$$A_z^0(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) = I_0(\omega) F_{0,>,<}(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega);$$

$$F_{0,>,<}(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_1 R_0) +$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{w_1} R_{h,12} \exp(ik_x(x - x_0) +$$

$$+ iw_1(y + y_0 - 2h)), y \geq h;$$

$$F_{0,<}(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{w_1} T_{h,12} \exp(ik_x(x - x_0) +$$

$$+ iw_1(y_0 - h) + iw_2(h - y)), y \leq h; \quad (7)$$

2) для ДИ, расположенных в нижнем полупространстве  $y_n < h$ , –

$$A_z^0(\vec{r}, \vec{r}_n, \omega) = I_n(\omega) F_{n,>,<}(\vec{r}, \vec{r}_n, \omega);$$



$$\begin{aligned}
 F_{n,>}(\vec{r}, \vec{r}_n, \omega) &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{w_2} T_{h,21} \exp(ik_x(x - x_n) + \\
 &+ iw_1(y - h) + iw_2(h - y_n)), y \geq h; \\
 F_{n,<}(\vec{r}, \vec{r}_n, \omega) &= F_{n,<}^i(\vec{r}, \vec{r}_n, \omega) + F_{n,<}^r(\vec{r}, \vec{r}_n, \omega), \\
 F_{n,<}^i(\vec{r}, \vec{r}_n, \omega) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_2, R_n), \quad (8) \\
 F_{n,<}^r(\vec{r}, \vec{r}_n, \omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{w_2} R_{h,21} \exp(ik_x(x - x_n) + \\
 &+ iw_2(2h - y - y_n)), y \leq h,
 \end{aligned}$$

Здесь  $R_{0,n} = \sqrt{(x - x_{0,n})^2 + (y - y_{0,n})^2}$ ;  $H_0^{(1)}(\omega)$  – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка,  $R_{h,12} = (w_1 - w_2)/(w_1 + w_2)$ ,  $R_{h,21} = -R_{h,12}$  и  $T_{h,12} = 2w_2/(w_1 + w_2)$ ,  $T_{h,21} = 2w_1/(w_1 + w_2)$  – коэффициенты отражения и прохождения плоской волны на границе  $y = h$ ;  $w_{1,2} = \sqrt{k_{1,2}^2 - k_x^2}$  – поперечное волновое число в среде 1 и 2. Полученные решения удовлетворяют условию излучения на бесконечности при  $\text{Im } w_{1,2} > 0$ .

1.3. Нахождение неизвестных спектральных амплитуд ДИ

и поля в верхнем полупространстве

Далее при расчете электромагнитного поля, рассеянного диэлектрическим цилиндром, разместим две группы ДИ (в одних и тех же точках) внутри цилиндра на дополнительной направляющей  $\gamma_a = K\gamma$ , ( $K < 1$  – коэффициент подобия). В соответствии с классическим подходом МДИ электродинамический потенциал в нижнем полупространстве  $y \leq h$  вне цилиндра (в области  $\vec{r} \geq \vec{r}_\gamma$ , где  $\vec{r}_\gamma$  – радиус-вектор точки  $\in \gamma$ ) будет представляться в виде суперпозиции (8):

$$A_z^1(\vec{r}, \omega) = \sum_{n=1}^N I_n(\omega) F_{n,<}(\vec{r}, \vec{r}_n, \omega). \quad (9a)$$

Электродинамический потенциал внутри цилиндра  $\vec{r} \leq \vec{r}_\gamma$  будет представляться [25, 26] в виде

$$\left\{ \begin{aligned}
 b_m(\omega) &= -F_{0,<}(\vec{r}_m, \vec{r}_0, \omega), \tilde{b}_m(\omega) = -F_{0,<}(\vec{r}_m, \vec{r}_0, \omega) i \{v_x k_x - v_y w_2\}, \\
 D_{mn}(\omega) &= -\frac{i}{4} J_0(k_3 R_{mn}), \tilde{D}_{mn}(\omega) = -\frac{i}{4} k_3 J_0(k_3 R_{mn}) \frac{v_x(x_m - x_n) + v_x(y_m - y_n)}{R_{mn}}, \\
 \tilde{A}_{mn}(\omega) &= \dot{F}_{n,<}^i(\vec{r}_m, \vec{r}_n, \omega) k_2 \frac{v_x(x_m - x_n) + v_x(y_m - y_n)}{R_{mn}} + \\
 F_{n,<}^r(\vec{r}_m, \vec{r}_n, \omega) & i \{v_x k_x - v_y w_2\}, A_{mn}(\omega) = F_{n,<}(\vec{r}_m, \vec{r}_n, \omega),
 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

где  $R_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$ , « $\dot{\cdot}$ » – обозначает производную по полному аргументу функции,  $m = 1, \dots, M$ .

суперпозиции функции Бесселя нулевого порядка  $J_0(k_3 R_n)$ :

$$A_z^2(\vec{r}, \omega) = \sum_{n=1}^N P_n(\omega) J_0(k_3 R_n). \quad (9b)$$

Комплексные амплитуды ДИ  $I_n(\omega)$ ,  $P_n(\omega)$  на каждой из частот в спектре стороннего тока определим из СЛАУ, полученной при удовлетворении граничным условиям тангенциальных составляющих спектральных амплитуд напряженностей электрического  $E$  и магнитного  $H$  поля соответственно

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \times \vec{E} \Big|_{\vec{r}_\gamma - 0} &= \vec{v} \times \vec{E} \Big|_{\vec{r}_\gamma + 0}, \\
 \vec{v} \times \vec{H} \Big|_{\vec{r}_\gamma - 0} &= \vec{v} \times \vec{H} \Big|_{\vec{r}_\gamma + 0}
 \end{aligned}$$

на направляющей цилиндра  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
 A_z^0(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) + A_z^2(\vec{r}, \omega) \Big|_{\vec{r}_\gamma - 0} &= [A_z^0(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) + A_z^1(\vec{r}, \omega)] \Big|_{\vec{r}_\gamma + 0} \\
 \frac{\partial}{\partial \vec{v}} [A_z^0(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) + A_z^2(\vec{r}, \omega)] \Big|_{\vec{r}_\gamma - 0} &= \\
 = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} [A_z^0(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) + A_z^1(\vec{r}, \omega)] \Big|_{\vec{r}_\gamma + 0}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

где  $\vec{v}$  – внешняя нормаль к  $\gamma$  (направлена в среду  $\epsilon_2$ ),

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}$$

– производная по направлению, записанная в декартовой системе координат.

Удовлетворяя граничным условиям (10) в  $M$  точках коллокации на направляющей цилиндра, была получена СЛАУ ( $M \geq N$ ):

$$\begin{cases} A(\omega) I(\omega) + D(\omega) P(\omega) = b(\omega), \\ \tilde{A}(\omega) I(\omega) + \tilde{D}(\omega) P(\omega) = \tilde{b}(\omega). \end{cases} \quad (11)$$

Элементы матриц СЛАУ имеют следующий вид:

Спектральные компоненты полного электродинамического потенциала (прямая волна от источника тока, отраженная волна от границы раздела,

рассеянная волна цилиндром и прошедшая в верхнее полупространство) вычислялись на основе выражения

$$A_z(\vec{r}, \omega) = I_0(\omega) F_{0,>}(\vec{r}, \vec{r}_0, \omega) + \sum_{n=1}^N I_n(\omega) F_{n,>}(\vec{r}, \vec{r}_n, \omega). \quad (13)$$

Подставляя (13) в (2) и далее пользуясь преобразованием Фурье, вычисляли временную форму импульса для соответствующих компонент электромагнитного поля.

## 2. ДЕТАЛИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ И ТЕСТИРОВАНИЯ МДИ

### 2.1. Выбор временной формы источника тока, подповерхностных тел зондирования и методов тестирования МДИ

В качестве подповерхностных тел зондирования выберем цилиндры с эллиптической, круговой и каплевидной формой направляющих (рис. 2). Уравнения направляющих цилиндров и внешних нормалей к ним приведены в табл. 1.

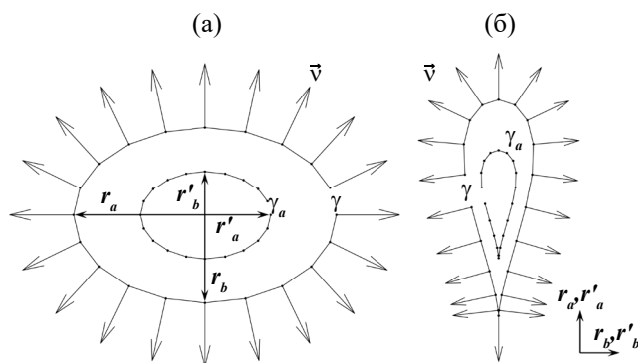


Рис. 2. Формы направляющих цилиндрических подповерхностных тел зондирования: а – цилиндр, б – капля.

Дискретные источники были расположены равномерно на дополнительной направляющей  $\gamma_a$ , подобной направляющей цилиндра  $\gamma$ :  $r'_a = Kr_a, r'_b = Kr_b$ . В случае каплевидной образующей центры  $(x_c, y_c)$  дополнительной  $\gamma_a$  и основной  $\gamma$  направляющих выравнились (см. рис. 2 и табл. 1). В данной работе  $r_a$  – полуось цилиндра с каплевидной направляющей была ориентирована вдоль оси  $Oy$ , в связи с этим к формулам, приведенным в табл. 1, применялась операция вращения

Таблица 1. Основные уравнения для подповерхностных тел зондирования эллиптической и каплевидной форм

Уравнения	Эллипс [38]	Каплевидная [39, с. 148–150]
Направляющей*	$x = r_a \cos t,$ $y = r_b \sin t$ $\xi = \frac{x^2}{r_a^2} + \frac{y^2}{r_b^2} - 1 = 0$	$x = r_a (1 + \sin t),$ $y = r_b \cos t (1 + \sin t)$ $\xi = r_a^4 y^2 - r_b^2 x^3 (2r_a - x) = 0$
Нормалей	$v_x = \frac{r_b \cos t}{\sqrt{r_b^2 \cos^2 t + r_a^2 \sin^2 t}}$ $v_y = \frac{r_a \sin t}{\sqrt{r_b^2 \cos^2 t + r_a^2 \sin^2 t}}$	$v_x = \frac{2r_b^2 x^2 (2x - 3r_a)}{2\sqrt{r_a^8 y^2 + r_b^4 x^4 (2x - 3r_a)^2}}$ $v_y = \frac{2r_a^2 y}{2\sqrt{r_a^8 y^2 + r_b^4 x^4 (2x - 3r_a)^2}}$
Длины	$l_\gamma \approx \pi(r_a + r_b)(1 + \delta^2/4)$ $\delta = (r_a - r_b)/(r_a + r_b)$	$l_\gamma = \int_0^{2\pi} dt \sqrt{\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2}$
Центра	$x_c = y_c = 0$	$x_c = 2 \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x dt \sqrt{\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2}}{l_\gamma}, y_c = 0$

\*Уравнения даны в параметрическом и каноническом виде. Здесь переменная  $t \in [0, 2\pi]$ . Внешняя нормаль к направляющей рассчитывалась как нормаль  $\vec{v} = \frac{\text{grad} \xi}{|\text{grad} \xi|}$  к линии уровня  $\xi$  с использованием канонического представления, « $\dot{\cdot}$ » – обозначена производная по  $t$ .



$x' = x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0, y' = -x \sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0,$   
 где  $x', y'$  – новые координаты,  $\varphi_0 \equiv -90^\circ$ .

Предполагая, что должно выполняться условие одинаковой плотности покрытия направляющих  $\gamma$  и  $\gamma_a$  точками коллокации и ДИ, а также исходя из прямо пропорциональной связи между длиной волны вспомогательной образующей  $l_{\gamma_a}$  и образующей цилиндра  $l_\gamma$  (см. табл. 1) с величиной коэффициента подобия  $K$ , далее зададим  $N \equiv KM$ . В результате СЛАУ (11) является переопределенной, псевдорешение которой находили методом преобразований вращения [40, 41]. В частотной области относительную погрешность решения задачи будем оценивать по точности выполнения граничных условий на направляющей цилиндра  $\gamma$  с использованием нормы невязки:

$$\Phi = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \left| 1 - \left[ I_0(\omega) F_{0,<}(\vec{r}_q, \vec{r}_0, \omega) + A_z^{s1}(\vec{r}_{\gamma_q}, \omega) \right] / A_z^{s2}(\vec{r}_{\gamma_q}, \omega) \right|, \quad (14)$$

где  $\vec{r}_{\gamma_q}$  – радиус-вектор для точек  $q = 1, \dots, Q$  на направляющей цилиндра, которые не совпадают с местами размещения точек коллокации. Для всех оценок, приведенных ниже,  $Q$  полагалось равным 50. Во временной области рассчитанные МДИ временные формы полей будут сопоставляться с соответствующими значениями, вычисленными на основе метода сеток/конечных разностей (МКР) [42, 43]. Формулы для нахождения полей ( $E_z, H_x, H_y$ ) МКР по итерационной схеме имеют вид

$$\begin{aligned} E_z^{k+1}(l, p) &= E_z^k(l, p) \left( 1 - \frac{\sigma(l, p) Z_0 \Delta h}{\varepsilon(l, p)} \right) - \\ &- \frac{Z_0 \Delta h}{\varepsilon(l, p)} + j^k(l, p) + \frac{Z_0}{2\varepsilon(l, p)} \left\{ H_y^k(l+1, p) - \right. \\ &- H_y^k(l-1, p) - H_x^k(l, p+1) + H_x^k(l, p-1) \left. \right\}, \\ H_x^{k+1}(l, p) &= H_x^{k-1}(l, p) - \frac{1}{2Z_0} \left\{ E_z^k(l, p+1) - E_z^k(l, p-1) \right\}, \\ H_y^{k+1}(l, p) &= H_y^{k-1}(l, p) + \\ &+ \frac{1}{2Z_0} \left\{ E_z^k(l+1, p) - E_z^k(l-1, p) \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $k$  – отсчет шага по времени длительностью  $\Delta t = \alpha \Delta h / c$  [нс],  $\alpha < 1$  – эмпирический параметр в нашем случае задавался равным 0.4;  $l, p$  – отсчеты по декартовым координатам  $x$  и  $y$  с шагом  $\Delta h$  [м], который задавали равным  $\Delta h = \lambda_0 / 40$  ( $\lambda_0$  – средняя длина волны в спектре амплитуды стороннего источника тока),  $Z_0 = 120\pi$  [Ом] – импеданс свободного пространства,  $\varepsilon, \sigma$  – действительная часть КДП и проводимость полупространства, содержащего цилиндр,  $j^k(l_0 = x_0 / \Delta h, p_0 = y_0 / \Delta h)$  – плотность стороннего электрического источника тока,  $j^k(l_0, p_0) = I_0(k \Delta t) / \Delta h^2$  ( $k = 1, \dots, K, l = 1, \dots, L, p = 1, \dots, P$ , где  $K, L, P$  – количество отсчетов по времени и пространственным координатам соответственно). Временную форму амплитуды источника стороннего тока  $I_0(t)$  зададим в виде суммы двух разнополярных гауссовых импульсов (рис. 3а):

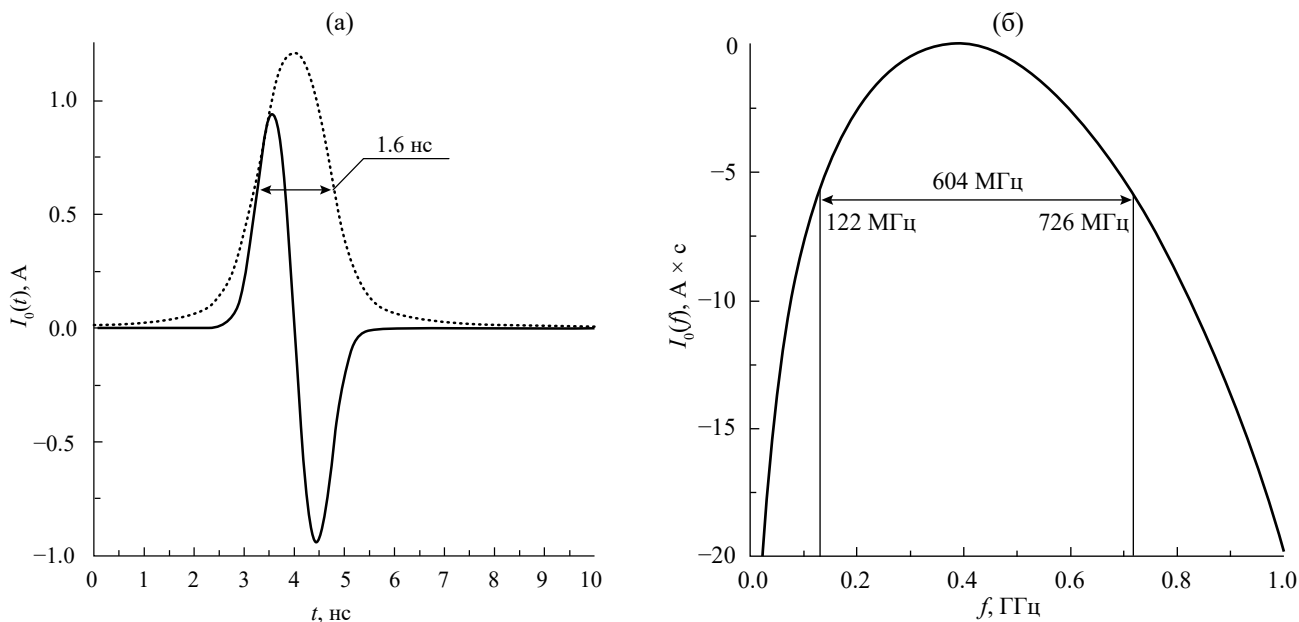


Рис. 3. Временная форма (а) и спектр (б) амплитуды импульсного точечного источника электрического тока: а – форма импульса (сплошная кривая) и его огибающая (пунктирная).

$$I_0(t) = \exp\left(q\left[\frac{t-(t_0-\Delta\tau)}{\Delta\tau}\right]^2\right) - \exp\left(q\left[\frac{t-(t_0+\Delta\tau)}{\Delta\tau}\right]^2\right), \quad (16)$$

где  $q \equiv \lg 0.5$ ,  $t_0$  – смещение импульса по временной шкале (задавалось равным 4 нс),  $\Delta\tau$  – четверть длительности импульса по уровню половины амплитуды (задавалась равной 0.4 нс). Спектральная амплитуда  $I_0(f)$  стороннего источника тока  $I_0(t)$  (рис. 3б) имеет следующее аналитическое представление:

$$I_0(f) = -2i \frac{\Delta\sqrt{\pi}}{\sqrt{q}} \sin(2\pi f d) \exp(2\pi i f_0 t) \exp\left(-\left(\pi f \Delta / \sqrt{q}\right)^2\right). \quad (17)$$

2.2. Материальные среды

В качестве материальных сред, заполняющих полупространство и цилиндр, были выбраны талая и мерзлая почва, лед, несоленая вода. В ходе численных экспериментов были использованы оценки средних значений диэлектрической проницаемости и проводимости данных сред, приведенные

**Таблица 2.** Действительная часть относительной диэлектрической проницаемости и проводимость используемых материальных сред

Среда	$\epsilon'$	$\sigma^*$ , Ом/м
Воздух	1.0	0.0
Талая почва [45]	15.8	0.147
Мерзлая почва [45]	5.9	0.033
Лед [44]	3.2	0.002
Несоленая вода [44]	81.8	0.186

\*Проводимость оценивалась из мнимой части  $\epsilon''$  КДП на основе равенства  $\sigma = \epsilon''\omega\epsilon_0$  ( $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ , с/(Ом×м) – диэлектрическая проницаемость вакуума).

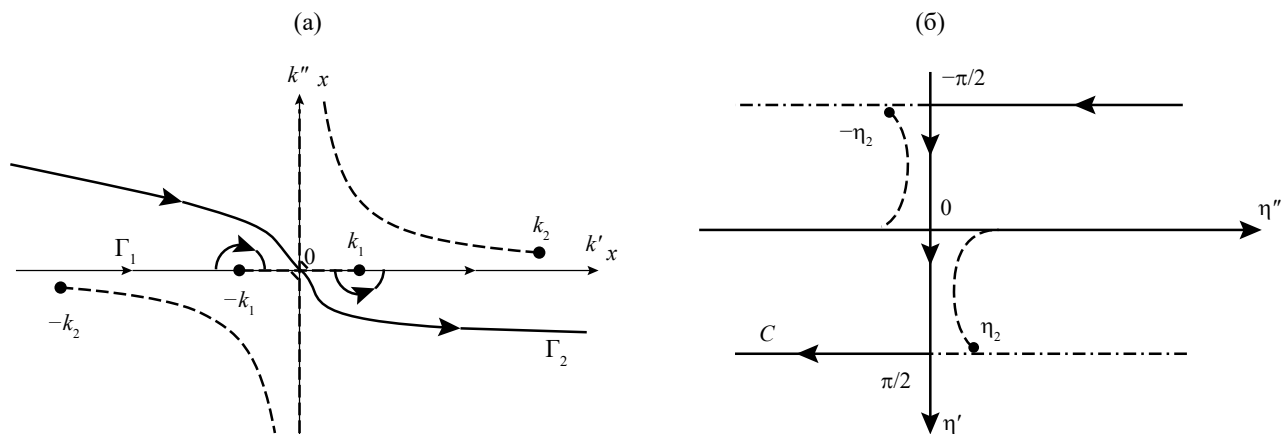
в [44, с. 124, 125, 127–129; 45] в мегагерцовом диапазоне частот 100...1000 МГц (табл. 2).

2.3. Способ численного интегрирования выражений (7)–(8)

В силу выбранной  $\exp(-i\omega t)$  временной зависимости комплексных спектральных амплитуд электродинамических потенциалов, условие излучения на бесконечности выполняется при  $\text{Im } w_{1,2} > 0$  (свяжем положительный знак мнимой части квадратного корня с верхним листом римановой поверхности, по которой должен проходить путь интегрирования). Разрезы, соединяющие двухлиственную риманову поверхность, могут быть определены [36, с. 137] из уравнения

$$\text{Im}\sqrt{k_{1,2}^2 - k_x^2} = 0.$$

Линии этих разрезов выходят из точек ветвления  $k_x = \pm k_{1,2}$  (рис. 4а штриховые линии). В связи с тем, что все используемые среды имеют не нулевую мнимую часть, на вещественной оси  $k_x$  не будут располагаться полюсы функций  $T_{h,12}(k_x)$ ,  $R_{h,12}(k_x)$  и точки ветвления квадратного корня  $w_2$  (за исключением  $w_1$ ). В результате интегралы (7), (8) могут быть рассчитаны по пути интегрирования  $\Gamma_1$  [36, с. 116], который обходит полуокружностями точки ветвления  $k_x = \pm k_1$ , или по контуру  $\Gamma_2$  [46, с. 225–229; 47, 48], который не пересекает разрезы. Однако численное интегрирование по пути  $\Gamma_{1,2}$  чрезвычайно медленно сходится [49]. В данной работе воспользуемся выражением волнового числа  $k_x$  в цилиндрических координатах  $k_x = k_1 \sin \eta$ , где  $\eta = \eta' + i\eta''$  – комплексный угол,  $\eta'$ ,  $\eta''$  – действительная и мнимая части соответственно для представления (7), (8) по угловому спектру неоднородных плоских волн [46, с. 213–217]. В результате подобной замены переменных контур интегрирования  $\Gamma_1$  (см. рис. 4а) преобразуется (см.



**Рис. 4.** Контурсы интегрирования интегралов (7) и (8) в плоскости комплексного переменного  $k_x$  (а) и  $\eta$  (б).

рис. 4б, контур  $C$  и аналитически описывается следующим выражением:

$$-\pi/2 + i\infty < \eta < \pi/2 - i\infty.$$

Точки ветвления  $\eta_2 = \pm \arcsin \sqrt{\varepsilon_2}$  квадратного корня  $w_2$ , а также линии разрезов  $\text{Im} \sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2 \eta} = 0$  указаны на рис. 4б (см. штриховые линии, при  $\eta' \rightarrow 0, \eta'' \rightarrow \pm i\infty$ ). Контур интегрирования  $C$  не пересекает линии разреза, а функции  $T_{h,12}(\eta)$  и  $R_{h,12}(\eta)$  не имеют полюсов на плоскости  $\eta$  в области контура  $C$  (проверено в ходе численного решения уравнения  $\sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2 \eta} + \cos \eta = 0$ , для различных сред на частотах 300...900 МГц). Окончательно на основе алгебраических преобразований вычисление (7) (8) сводилось отдельно к интегрированию по действительной  $[0, \pi/2]$  и мнимой оси  $[0, i\infty]$ . Численное интегрирование выполнялось с использованием квадратурных формул Гаусса с 48 и 144 узлами соответственно, что обеспечивало абсолютную погрешность вычисления интегралов  $< 10^{-6}$  (вне зависимости от материальных сред и частот). Все вычисления проводили с использованием программ, написанных на языке Fortran 2008 (компилятор GNU Fortran) и библиотеки НИВЦ МГУ [41].

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

#### 3.1. Точность выполнения граничного условия на направляющей цилиндра в зависимости от коэффициента подобия $K$

На фиксированных частотах была исследована сходимость решения граничной задачи, на основе оценки (14) выполнения граничного условия (10), для трех форм направляющих цилиндров (круг, эллипс, каплевидная) в зависимости от числа точек коллокации  $M$  и положения ДИ, определяемых коэффициентом подобия  $0.1 \leq K \leq 0.99$ . Зондируемое полупространство и цилиндр заполняли мерзлой и талой почвой соответственно. Центр цилиндров размещали на глубине  $h = 1$  м от границы воздух–почва. Нитевидный источник стороннего тока располагали в точке ( $x_0 = 0$  м,  $y_0 = h + 1$  м). Геометрические параметры цилиндров приведены в табл. 3.

Таблица 3. Геометрические параметры цилиндров

Форма направляющей	Полуоси	
	$r_a$	$r_b$
Круг	0.5	0.5
Эллипс	0.8	0.2
Каплевидная	0.6	0.4

Результаты расчетов показывают, что положения минимумов функции  $\Phi(K)$  определяются следующими параметрами: формой направляющих цилиндров, коэффициентом подобия  $K$ , взаимным количеством точек коллокации и ДИ, а также частотой в спектре тока (рис. 5). Для всех видов направляющих цилиндров при увеличении количества точек коллокации  $M$  область минимальных значений  $\Phi(K)$  увеличивается с  $K \sim 0.95...0.99$  до  $K \sim 0.35...0.99$ . По мере уменьшения осевой симметрии (направляющие в виде круга, эллипса, капли) область минимальных значений  $\Phi(K)$  уменьшается с  $K \sim 0.4$  (круговая) до  $K \sim 0.7$  (каплевидная) при фиксированном количестве точек коллокации  $M$  (см. рис. 5).

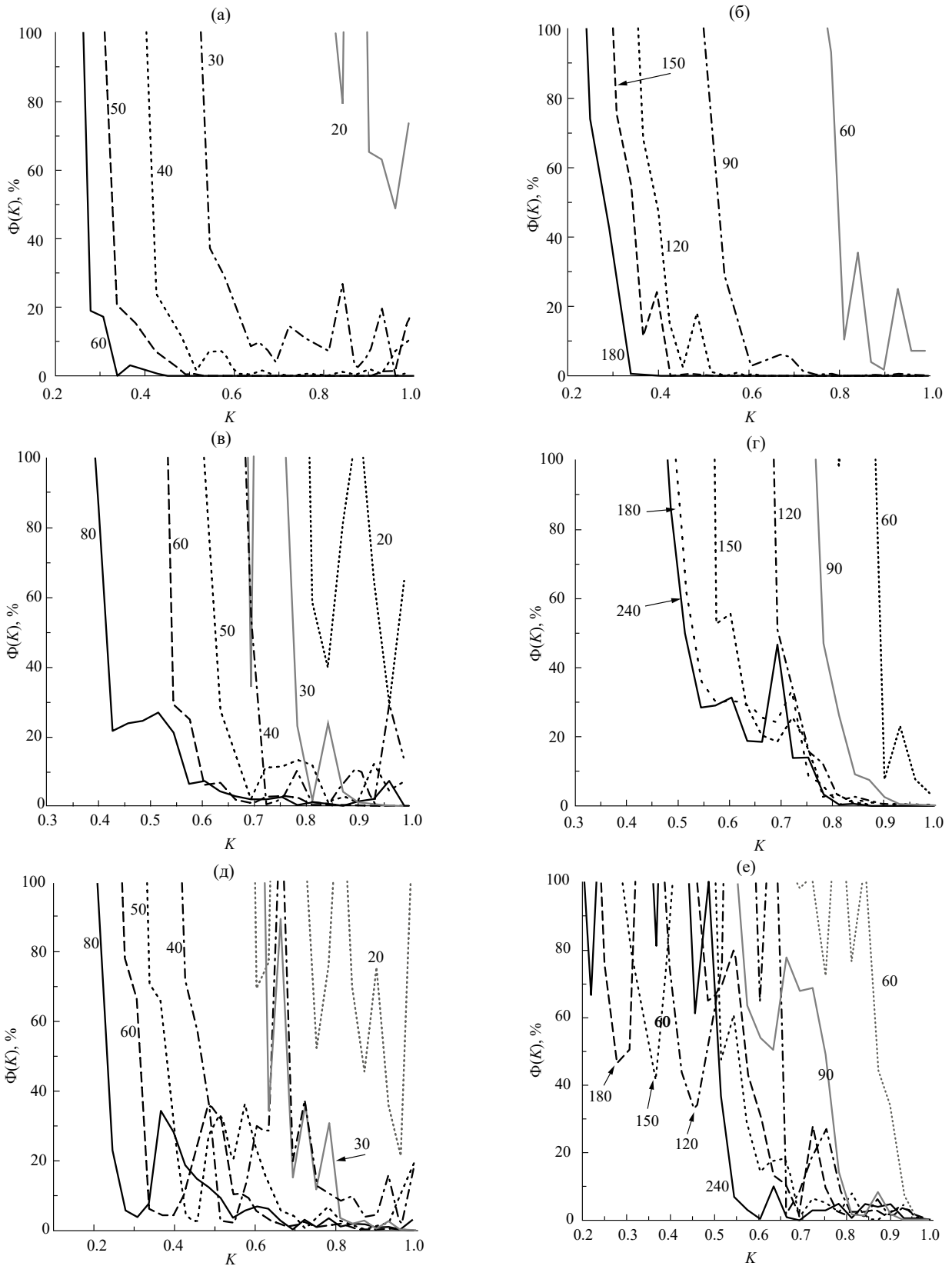
Из рис. 5 видно, что при увеличении частоты в три раза, с 300 до 900 МГц, для достижения примерно равной погрешности требуется во столько же раз увеличить взаимное количество точек коллокации и ДИ. Данное поведение можно объяснить необходимостью сохранить плотность покрытия точками  $g$  и  $g_a$  при увеличивающейся оптической длине направляющих цилиндров. С целью уменьшения взаимного количества точек коллокации и ДИ, минимизации размерности СЛАУ и увеличения скорости его решения может быть рекомендован выбор коэффициента подобия в диапазоне  $K \sim 0.8...0.99$ .

#### 3.2. Влияние КДП сред на точность выполнения граничного условия

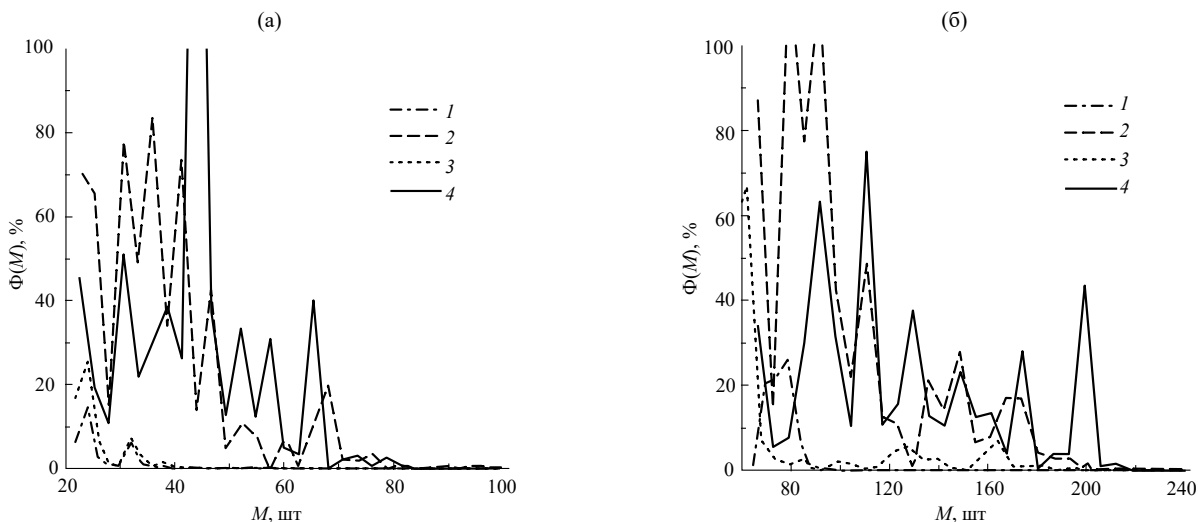
Рассмотрим цилиндр с направляющей в виде эллипса (параметры геометрии см. в табл. 3), коэффициент подобия зададим равным  $K = 0.9$ . В этом случае при моделировании найдено, что на точность выполнения граничных условий существенное влияние оказывают КДП сред, окружающей и заполняющей цилиндр (рис. 6).

При фиксированной среде полупространства выбор оптически более плотной среды заполнения цилиндра требует взаимного увеличения количества точек коллокаций и ДИ при сохранении точности выполнения граничных условий. Смена сред, заполняющих полупространство–цилиндр, в рассмотренных двух случаях: 1) мерзлая почва–талая почва и мерзлая почва–вода, 2) талая почва–лед и талая почва–вода (см. рис. 6), приводит примерно к двукратному росту  $M$  при сохранении равной точности выполнения граничных условий.

Подобные закономерности могут быть также объяснены необходимостью сохранения плотности точек коллокации и ДИ на направляющих при увеличении оптического размера цилиндра. Действительно, при смене среды заполнения цилиндра с талой почвы на воду и со льда на воду, погруженного в мерзлую и талую почву соответственно, средний показатель преломления сред возрастает также примерно в два раза 1.8 и 2.2 соответственно. Увеличение частоты монохроматического



**Рис. 5.** Точность выполнения граничного условия на направляющей цилиндра с круговой (а) и (б), эллиптической (в) и (г) и каплевидной (д) и (е) формами в зависимости от коэффициента подобия  $K$ , числа точек коллокации  $M$  (цифры на кривых) и частоты монохроматического источника тока  $f=300$  МГц (а, в, д) и  $f=900$  МГц (б, г, е). Материальные среды, заполняющие полупространство и цилиндр: мерзлая и талая почва соответственно.



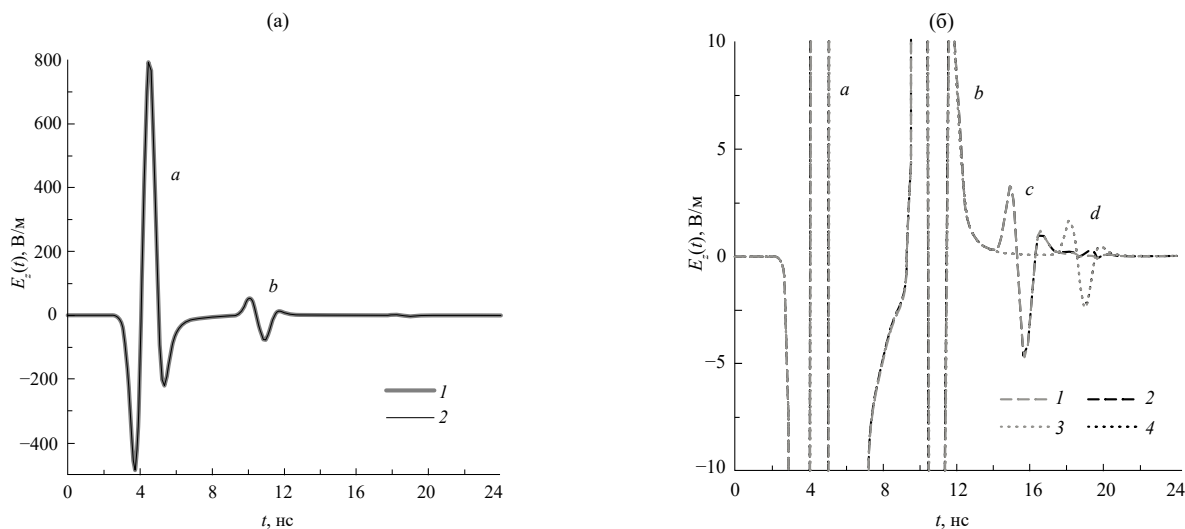
**Рис. 6.** Точность выполнения граничного условия на направляющей цилиндра с эллиптической формой при фиксированном коэффициенте подобия  $K = 0.9$  в зависимости от числа точек коллокации  $M$  и частоты монохроматического источника тока  $f = 300$  МГц (а) и  $f = 900$  МГц (б). Материальные среды, заполняющие полупространство и цилиндр: 1 – мерзлая почва–таялая почва, 2 – мерзлая почва–вода, 3 – таялая почва–лед, 4 – таялая почва–вода.

источника тока в три раза, требует увеличения примерно в три раза  $M$ , для сохранения точности выполнения граничных условия (объясняется аналогично, см. разд. 3.1). Для всех рассмотренных случаев при различной глубине погружения цилиндров  $0.25 \text{ м} < h \leq 1 \text{ м}$  не обнаружено существенного влияния границы воздух–полупространство на точность выполнения граничного условия. Для дальнейших оценок будем выбирать  $M$  таким, чтобы средняя погрешность выполнения граничных условий в частотном диапазоне импульсного источника стороннего тока (см. рис. 3б) не превышала 2...5%.

### 3.3. Оценка точности модифицированного МДИ во временной области

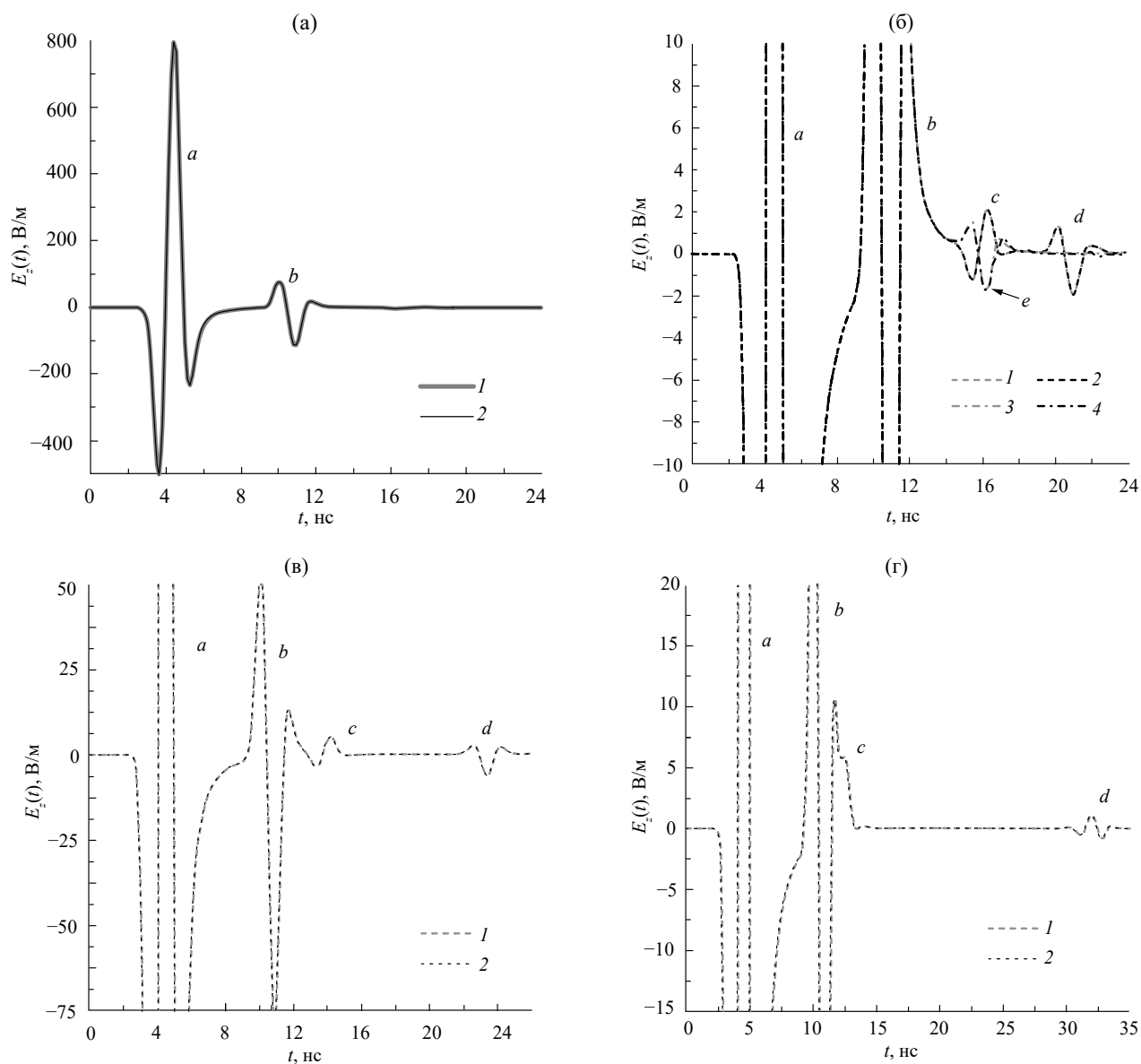
Для каждой частоты в спектре импульса стороннего источника тока решено СЛАУ (11), найдены амплитуды ДИ и в точке наблюдения ( $x_r = 0.1 \text{ м}$ ,  $y_r = h + 1 \text{ м}$ ) на основе формул (2), (8) и преобразования Фурье рассчитана временная зависимость напряженности электрического поля  $E_z(t)$ .

*Приведем примеры.* 1. Рассмотрим зондирование подповерхностного прямого кругового цилиндра различного радиуса, заполненного водой и размещенного в мерзлой почве на различных глубинах  $h$ .



**Рис. 7.** Временные формы напряженности электрического поля  $E_z(t)$ , рассчитанные МКР (1, 3) и МДИ (2, 4) в точке приема ( $x_r = 0.1 \text{ м}$ ,  $y_r = d + 1 \text{ м}$ ) при возбуждении нитевидным источником тока ( $x_0 = 0 \text{ м}$ ,  $y_0 = d + 1 \text{ м}$ ), полупространства мерзлой почвы и подповерхностного кругового цилиндра, заполненного водой, при  $r_a = 0.2 \text{ м}$ ,  $d = 0.5 \text{ м}$  (кривые 1 и 2);  $r_a = 0.5 \text{ м}$ ,  $d = 1.0 \text{ м}$  (кривые 3 и 4).





**Рис. 8.** Временные формы импульса напряженности электрического поля при зондировании цилиндра с эллиптической направляющей, рассчитанные МКР (1, 3) и МДИ (2, 4). Точка приема ( $x_r = 0.1$  м,  $y_r = d + 1$  м), точка расположения источника тока ( $x_0 = 0$  м,  $y_0 = d + 1$  м): а, б – талая почва–лед (кривые 1 и 2), талая почва–вода (кривые 3 и 4),  $r_a = 0.8$  м,  $r_b = 0.2$  м,  $d = 0.4$  м; в) мерзлая почва–лед,  $r_a = 0.8$  м,  $r_b = 0.4$  м,  $d = 0.6$  м; г) мерзлая почва–лед,  $r_a = 0.4$  м,  $r_b = 0.8$  м,  $d = 0.9$  м).

Временные формы импульсов напряженности электрического поля  $E_z(t)$ , рассчитанные МКР и МДИ в пределах заданной точности (2...5%) совпадают между собой (рис. 7). Здесь и далее в тексте и на рисунках а и б означают импульс прямой и отраженной от границы воздух–полупространство волн соответственно. Временная задержка между импульсами а и б (см. рис. 7а), равная 6.7 нс, совпадает с расчетным временем задержки зондирующего импульса, отраженного от границы воздух–мерзлая почва (импульс б, см. рис. 7а), с учетом геометрии размещения источника тока и точки приема. Рассчитанные двумя различными

способами временные формы импульсов с и d (см. рис. 7б), рассеянные назад диэлектрическим цилиндром (преимущественно отражение от верхней границы цилиндра), хорошо согласуются между собой, а время запаздывание между ними 3.3 нс соответствует дополнительному пути, проходимоу импульсом d при смещении цилиндра вниз на 0.5 м (с учетом увеличения радиуса цилиндра с 0.2 до 0.5 м).

2. Теперь рассмотрим подповерхностный цилиндр с эллиптической направляющей. Для различных комбинаций длин полуосей эллипса и материалов сред, заполняющих полупространство и подповерхностный цилиндр, наблюдается хорошее



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

согласие временных форм импульсов, рассчитанных МКР и МДИ, в пределах указанной погрешности (рис. 8). При размещении цилиндра, заполненного льдом, в талой почве (см. рис. 8б, кривые 1, 2) наблюдаются два разнополярных импульса  $c$  и  $d$ , отраженных от верхней (таялая почва—лед) и нижней (лед—таялая почва) границы вытянутого вдоль оси  $Ox$  цилиндра. Временная задержка в 4.8 нс между этими импульсами соответствует двойному расстоянию ( $4r_b$ ), проходимому импульсом  $d$  во льду внутри цилиндра. В случае заполнения цилиндра водой (см. рис. 8б, кривые 3, 4) наблюдается лишь один импульс  $e$ , отраженный от верхней границы эллипса (между талой почвой и водой). Аналогично объясняется характер поведения временных задержек импульсов  $c$  и  $d$  (см. рис. 8в, 8г) в случае цилиндра, заполненного льдом, размещенного в полупространстве мерзлой почвы.

3. И, наконец, рассмотрим каплевидную форму направляющей цилиндра, заполненного водой и размещенного в полупространстве мерзлой почвы (см. рис. 9). Аналогично предыдущим случаям наблюдается хорошее совпадение между временными формами импульсов напряженности электрического поля в точке приема, рассчитанных МКР и МДИ. Временная задержка между импульсами  $b$  и  $c$ , равная примерно 3.3 нс, соответствует расчетному времени задержки зондирующего импульса, отраженного от верхней границы цилиндра.

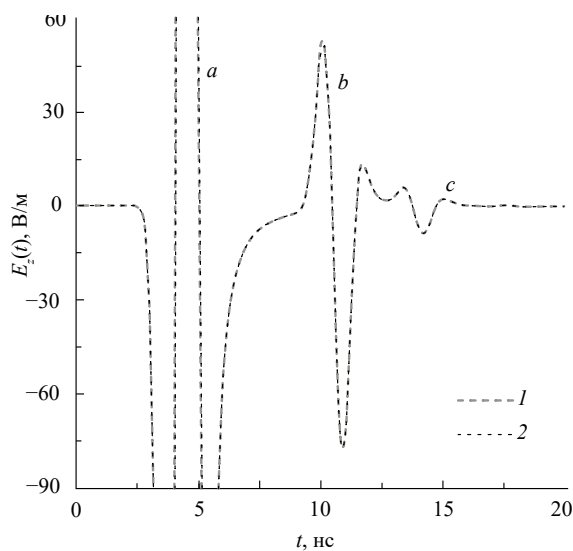


Рис. 9. Временные формы импульса напряженности электрического поля при зондировании цилиндра с каплевидной направляющей, рассчитанные МКР (1) и МДИ (2); материальные среды, заполняющие полупространство и цилиндр: мерзлая почва—вода при  $r_a = 0.3$  м,  $r_b = 0.15$  м,  $d = 0.47$  м (расстояние от границы воздух—полупространство до ближайшей части цилиндра 0.21 м).

Таким образом, рассмотрена модификация МДИ для решения задачи о подповерхностном зондировании СШП-импульсами диэлектрического цилиндрического тела с круговой, эллиптической и каплевидной формами направляющих, размещенного в диэлектрическом полупространстве. В отличие от широко распространенного подхода [27–31], в данной работе используется идея [4, 25, 26] о возможности описания полей дифракции с использованием ДИ, размещенных лишь внутри цилиндрического тела на замкнутой кривой. Для описания поля внутри тела в качестве полей ДИ используется фундаментальное решение уравнения Бесселя в виде функции Бесселя нулевого порядка [25, 26]. Импульсные поля, рассчитанные модифицированным МДИ, в пределах заданной погрешности совпадают с расчетами на основе МКР для различных сред полупространства и заполнения цилиндра в виде льда, мерзлой и талой почвы, воды. При этом, в отличие от МКР, МДИ может быть использован для моделирования импульсных полей в средах с произвольной частотной дисперсией КДП. В данной работе на частоте 900 МГц максимальные поперечные оптические размеры цилиндров (в свободном пространстве) составляли около  $2k_0r \gg 30$ , вопрос о расхождении метода при больших размерах тел зондирования специально не исследовался.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках научной тематики государственного задания ИФ СО РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кюркчан А. Г., Смирнова Н. И., Клеев А. И. Методы решения задач дифракции, основанные на использовании априорной аналитической информации. М.: Физматлит, 2022.
2. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.
3. Кунрадзе В. Д. // Успехи матем. наук. 1967. Т. 22. № 2. С. 59.
4. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1992.
5. Zaridze R. S., Jobava R., Bit-Banik G. et al. // J. Electromagnetic Waves and Appl. 1998. V. 12. № 11. P. 1491.
6. Anastassiou H. T., Kaklamani D. I., Economou D. P. et al. // IEEE Trans. 2002. V. AP-50. № 1. P. 59.
7. Leviatan Y., Sheaffer G. S. // IEEE Trans. 1987. V. MTT-35. № 1. P. 48.
8. Mastorakis E., Papakanellos P. J., Anastassiou H. T. et al. // Mathematics. 2022. V. 10. № 17. Article No. 3211.

9. *Беличенко В. П., Гошин Г. Г., Дмитриенко А. Г. и др.* Математические методы в граничных задачах электродинамики. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1990.
10. *Tavzarashvili K., Bijaton A., Zaridze R. et al.* // Proc. Intern. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (Cat. No.00EX413), Kharkov, 2000. V. 2. P. 679.
11. *Shubitidze F., Anastassiou H. T., Kaklamani D. I.* // IEEE Trans. 2004. V. AP-52. № 1. P. 302.
12. *Bouzidi A., Aguilu T.* // Progress in Electromagnetics Research, B. 2014. V. 61. P. 121.
13. *Еремин Ю. А., Свешников А. Г.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2021. Т. 61. № 4. С. 580.
14. *Еремин Ю. А., Свешников А. Г.* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 2. С. 269.
15. *Апельцин В. Ф., Кюркчан А. Г.* Аналитические свойства волновых полей. М.: Изд-во МГУ. 1990.
16. *Кюркчан А. Г., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. № 12. С. 1285.
17. *Кюркчан А. Г., Минаев С. А., Соловейчик А. Л.* // РЭ. 2001. Т. 46. № 6. С. 666.
18. *Анютин А. П., Кюркчан А. Г., Минаев С. А.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 8. С. 955.
19. *Kyurkchan A. G., Smirnova N. I.* Mathematical Modeling in Diffraction Theory (Ch. 1). Elsevier. 2016. P. 1.
20. *Негорожина Е. С.* Моделирование характеристик рассеяния идеально проводящих и импедансных тел на основе метода вспомогательных токов. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2015. 112 с.
21. *Shubitidze F., O'Neill K., Haider S. A. et al.* // IEEE Trans. 2002. V. GRS-40. № 4. P. 928.
22. *Iatropoulos V. G., Anastasiadou M. T., Anastassiou H. T.* // Appl. Sci. 2020. V. 10. № 7: Article No. 2309.
23. *Kouroumplakis M.* Method of Auxiliary Sources in Electromagnetic Problems of Scattering, Mode Analysis, and Shielding: Theory and Applications: Doctoral thesis. Athens: National Technical Univ., 2022. 111 p.
24. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957.
25. *Eremin Y. A., Fikioris G., Tsitsas N. L. et al.* // J. Comp. Appl. Mathem. 2021. V. 386. № 113231. P. 1.
26. *Eremin Y. A., Tsitsas N. L., Kouroumplakis M. et al.* // J. Comp. Appl. Mathem. 2023. V. 417. № 114556. P. 1.
27. *Музалевский К. В.* // Тез. док. 31-й науч. конф. студентов, аспирантов. Барнаул: АлтГУ, 2004. С. 34.
28. *Комаров С. А., Музалевский К. В.* // Изв. Алтайск. гос. ун-та. 2005. Т. 35. № 1. С. 113.
29. *Komarov S. A., Mironov V. L., Muzalevsky K. V.* // Proc. IEEE Intern. Geosci. Remote Sensing Symp. (IGARSS'05). Seoul, Korea, 2005. V. 7. P. 4600.
30. *Малакишинов Н. П., Скобелев С. П.* // Радиотехника. 2007. № 10. С. 75.
31. *Энов М. И., Миронов В. Л., Музалевский К. В.* Сверхширокополосное электромагнитное зондирование нефтегазового коллектора. Новосибирск, 2011.
32. *Jobava R., Zaridze R., Karkashadze D. et al.* // Proc. Trans Black Sea Region Symp. on Appl. Electromagnetism. 1996, Metsovo, P. DISC\_4.
33. *Bit-Babik G. G., Jobava R. G., Zaridze R. S. et al.* // Proc. III Intern. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory. (IEEE Cat. No.98EX163). 1998. Tbilisi. P. 11.
34. *Tabatadze V., Drobakhin O., Karaçuha K.* // J. Electrical Engineering. 2023. V. 74. № 3. P. 188.
35. *Марков Г. Т., Петров Б. М., Грудинская Г. П.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Сов. радио, 1979.
36. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1967.
37. *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
38. *Бронштйн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1964.
39. *Lawrence J. D.* A Catalog of Special Plane Curves. New York: Dover, 1972.
40. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
41. *Арушанян О. Б., Волченкова Н. И.* // Вычислительные методы и программирование. 2002. Т. 3. № 4. С. 1.
42. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. М.: Физматлит, 1959. Т. 2.
43. *Yee K. S.* // IEEE Trans. 1966. V. AP-14. № 3. P. 302.
44. *Ulaby F. T., Long D. G., Blackwell W. et al.* Microwave Radar and Radiometric Remote Sensing. Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 2014.
45. *Mironov V. L., Karavayskiy A. Y., Lukin Y. I., Molostov I. P.* // Int. J. Remote Sensing. 2020. V. 41. № 10. P. 3845.
46. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР. 1957.
47. *Boix R. R., Mesa F., Medina F.* // IEEE Trans. 2007. V. MTT-55. № 2. P. 268.
48. *He X., Gong S., Liu Q.* // Microwave and Optical Technol. Lett. 2005. V. 45. № 1. P. 85.
49. *Lambot S., Slob E., Vereecken H.* // Geophys. Research Lett. 2007. V. 34. № L21405. P. 1.

**METHOD OF AUXILIARY SOURCES  
FOR THE PROBLEM OF SUBSURFACE SENSING  
OF TWO-DIMENSIONAL DIELECTRIC BODIES  
BY ULTRA-WIDEBAND ELECTROMAGNETIC IMPULSES**

**K. V. Muzalevskiy**

*Kirensky Institute of Physics Federal Research Center KSC SB RAS,  
Akademgorodok, 50, bld. 38, Krasnoyarsk, 660036 Russian Federation  
E-mail: rsdkm@ksc.krasn.ru*

Received March 29, 2024, revised April 14, 2024, accepted April 25, 2024

The modified method of auxiliary source (MMAS) is investigated for solving the diffraction problem of an ultra-wideband (UWB) electromagnetic impulse on a subsurface dielectric cylinder with an arbitrary cross-sectional shape (circular, elliptical, and drop-shaped). A dielectrically homogeneous half-space and a subsurface cylinder were excited by impulse electrical current source. It is shown that the fields calculated in time domain using the MMAS coincide with the results obtained from finite-difference method within a specified accuracy. It has been established that doubling the refractive index (the average value for the host medium and the filled cylinder) necessitates a similar twofold increase in the number discrete source (DS) and collocation points to maintain the accuracy of the solution. In the case of monochromatic excitation, it is shown that when  $K$  is reduced from 0.99 to 0.2, and also when the current frequency is increased from 300 MHz to 900 MHz, the mutual number of DS and collocation points must be increased approximately three times to maintain the same solution accuracy.

*Keywords:* Ultra-wideband electromagnetic impulses, method of auxiliary source, Green's function

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.371.334:537.874.6

### ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАМАГНИЧЕННЫХ ГРАФЕНОВЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК, ОСНОВАННЫЕ НА РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПЛАЗМОННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУР

© 2024 г. А. М. Лерер

*Южный федеральный университет,  
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону, 344090 Российская Федерация  
E-mail: lerer@sfedu.ru*

Поступила в редакцию 09.01.2024 г.

После доработки 09.01.2024 г.

Принята к публикации 25.01.2024 г.

Двумя методами решена краевая задача о дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционной решетке из графеновых полосок при наличии магнитного поля. При решении полученных интегральных и парных сумматорных уравнений использован метод Галеркина с базисом в виде полиномов Лежандра и Гегенбауэра. В результате получены системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с быстрой внутренней сходимостью. Все матричные элементы СЛАУ выражаются в явном виде.

*Ключевые слова:* дифракционная решетка, графен, магнитное поле, интегральные уравнения, метод Галеркина, плазмонный резонанс

**DOI:** 10.31857/S0033849424110027, **EDN:** НОМНВУ

#### ВВЕДЕНИЕ

В традиционных плазмонных материалах, таких как Au, Ag, Cu, AZO и др., поверхностные плазмонные поляритоны (ППП) существуют в видимом и ближнем ИК-диапазонах. Графен поддерживает ППП в гораздо более низком спектральном диапазоне, от терагерцовых (ТГц) до средних ИК-частот. Поэтому частота плазмонных резонансов в графене близка к циклотронной частоте в намагниченной плазме. Экспериментальные подтверждения существования циклотронного резонанса в графене приведены в работах [1, 2]. Изменением величины магнитного поля можно регулировать частоту плазмонного резонанса [2–7], поворачивать плоскость поляризации [5, 8], создавать устройства на эффекте Фарадея [5]. Одна из распространенных конструкций графеновых метаповерхностей – дифракционные решетки (ДР) (см. обзор [9]). В большинстве теоретических работ по графеновым ДР используются стандартные коммерческие программы электродинамического моделирования, основанные на решениях волнового уравнения методами конечных элементов в частотной и временной областях, а также конечного интегрирования. Несомненное достоинство этой группы методов – универсальность.

Недостатки – высокие требования к компьютеру, большое время счета, необходимость дискретизации не только рассеивателя, но и окружающего пространства, трудности при расчете объекта, содержащего мелкомасштабные элементы. Кроме того, возникают проблемы при переходе к открытому пространству с удовлетворением условия излучения. Эти проблемы отсутствуют при решении интегральных и интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ).

В работе [10] решение задачи дифракции электромагнитной волны сведено к решению парных сумматорных уравнений (ПСУ) относительно плотности тока на графеновых полосках. Эта же задача может быть решена методом объемных интегро-дифференциальных уравнений (ОИДУ) относительно напряженности электрического поля в полосках [11] и др. Метод ОИДУ описан в [12]. Предполагается [10, 11], что графен описывается скалярной поверхностной проводимостью. В магнитном поле проводимость графена – тензор.

Цель работы – модификация двух типов интегральных уравнений для расчета анизотропных диэлектрических и графеновых дифракционных решеток.



### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объект исследования тот же, что и в работе [10] – дифракционная решетка образована прямоугольными графеновыми, металлическими и диэлектрическими полосками (пленками). Число полосок в трехмерной элементарной ячейке  $M$  – произвольное; полоски могут лежать как на поверхности, так и в глубине многослойного диэлектрика, у которого произвольное число слоев  $N$ . Диэлектрик с номером  $N$  – полубесконечная подложка. Диэлектрики могут иметь потери. Потери описываются мнимой частью показателя преломления. В разработанных программах создана база данных для частотной зависимости комплексного показателя преломления для более десяти плазмонных материалов (Au, Ag, Cu, AZO и др. в оптическом диапазоне). Ось  $z$  перпендикулярна границам раздела сред, периоды по осям  $x, y - d_x d_y$ . В отличие от [10] в данной работе ДР находится в магнитном поле, направленном по оси  $z$ .

Пусть графен находится в магнитном поле, нормальном к поверхности. Графен лежит в плоскости  $z = 0$ . Граничные условия на графене следующие:

- непрерывны тангенциальные составляющие напряженности электрического поля  $\vec{E}_{tg}$ ,
- $\vec{E}_{tg} = \sigma \vec{j}$ ,  $\vec{j}$  – плотность поверхностного тока.

Элементы матрицы проводимости  $\sigma$  определяются по формуле из работы [13]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= -\frac{2D}{\pi} i \frac{\omega + i/\tau}{\omega_B^2 - (\omega + i/\tau)^2}, \\ \sigma_{xy} &= -\frac{2D}{\pi} \frac{\omega_B}{\omega_B^2 - (\omega + i/\tau)^2}, \sigma_{yx} = -\sigma_{xy}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$D = \frac{2\sigma_0 E_F}{\hbar}$$

( $\sigma_0 = 6.08 \times 10^{-5}$  См,  $E_F$  – энергия Ферми),

$$\omega_B = \frac{eBv_F^2}{E_F}$$

( $B$  – магнитная индукция,  $v_F$  – скорость Ферми),  $\tau$  – время релаксации.

Формулы (1) должны быть справедливы и при  $B = 0$ . На рис. 1 приведено сравнение результатов расчета по формуле (1) при  $B = 0$  и по интегральной формуле Кубо–Хансена [14]. Как видно, погрешность (1) менее 5% вплоть до 25 ТГц.

### 2. ПАРНЫЕ СУММАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть графеновые полоски лежат в плоскости  $z = 0$ . Их поверхность в пределах элементарной

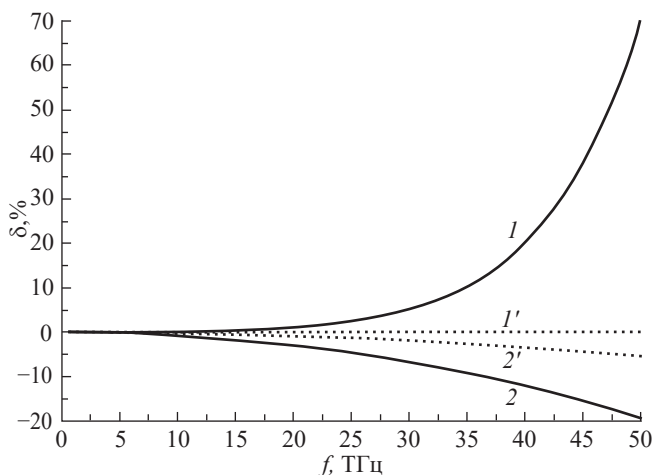


Рис. 1. Частотные зависимости относительной погрешности результатов расчета проводимости  $\sigma$  по формуле Кубо [14] и приближенной формуле (1) при  $B = 0$ : реальная (1, 1') и мнимая части  $\sigma$  (2, 2') при  $E_F = 0.25$  (1, 2) и 0.45 эВ (1', 2');  $\tau = 1$  пс.

ячейки обозначим через  $S$ . Пусть заданы плотности токов  $\vec{J}$  на полосках. Тогда нетрудно найти электромагнитное поле, создаваемое этими токами. В частности, по формулам из [10, 11] получаем

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, 0) &= \\ &= -iZ_0 \frac{4}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_{mn}(0, 0) \vec{j}_{mn} \exp[i(\alpha_m x + \beta_n y)], \\ \vec{j}_{mn} &= \int_S \vec{J}(x', y') [-i(\alpha_m x' + \beta_n y')] ds, \\ \mathbf{G}(\bar{x}, \bar{y}, z, z') &= \\ &= \frac{4}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_{mn}(z, z') \exp[i(\alpha_m \bar{x} + \beta_n \bar{y})] \end{aligned}$$

– тензорная функция Грина,  $\bar{x} = x - x', \bar{y} = y - y'$ ,  $\alpha_m = \frac{2m\pi}{d_x} + k_x, \beta_n = \frac{2n\pi}{d_y} + k_y, k_x, k_y$  – компоненты волнового вектора  $\vec{k}$ ,  $\mathbf{g}_{mn}(z, z')$  см. [10, 11],  $Z_0$  – волновое сопротивление вакуума.

Используя граничные условия на графеновых полосках – непрерывность касательного электрического поля и

$$\vec{J}(x, z) = \sigma [\vec{E}(x, y, 0) + \vec{E}^{внеш}(x, y, 0)]$$

(в это уравнение входят касательные компоненты поля), получим первую пару уравнений, где  $\vec{E}^{внеш}(x, y, z)$  – внешнее поле. Для нахождения  $\vec{E}^{внеш}(x, y, z)$  решаем задачу о падении плоской волны на исследуемую многослойную структуру без решетки:

$$\begin{aligned} & \vec{E}^{\text{внеш}}(x, y, 0) - \\ & - iZ_0 \frac{4}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_{mn}(0, 0) \vec{J}_{mn} \exp[i(\alpha_m x + \beta_n y)] = \\ & = \sigma^{-1} \vec{J}(x, y), x, y \in S. \end{aligned} \quad (2)$$

Вторая пара уравнений следует из отсутствия тока вне  $S$ :

$$\frac{4}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{j}_{mn} \exp[i(\alpha_m x + \beta_n y)] = 0, x, y \notin S. \quad (3)$$

Так как решение для двумерно-периодических решеток принципиально не отличается от решения для одномерно-периодических решеток, то для уменьшения количества выкладок рассмотрим решение для одномерно-периодических решеток. Ленты шириной  $2l$  расположены вдоль оси  $y$ . В этом случае в ряде по  $n$  остается только нулевой член.

Эти уравнения решаем методом Галеркина [10]:

$$j_x(x) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j^{(1)} B_j^{(3/2)}(x), j_y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j^{(2)} B_j^{(1/2)}(x),$$

где

$$B_j^{(v)}(x) = Z_j^{(v)} (l^2 - x^2)^{v-1/2} C_j^v \left( \frac{x}{l} \right), \quad (4)$$

$C_j^v$  – полиномы Гегенбауэра.

Для идеально проводящей полоски получаем

$$B_j^{(1/2)}(x) = Z_j^{(1/2)} (l^2 - x^2)^{-1/2} T_j \left( \frac{x}{l} \right),$$

$$B_j^{(3/2)}(x) = Z_j^{(3/2)} (l^2 - x^2)^{1/2} U_j \left( \frac{x}{l} \right),$$

где  $T_j, U_j$  – полиномы Чебышева.

Коэффициенты  $Z_j^{(v)}$  в (4) выберем так, чтобы

$$\begin{aligned} \tilde{B}_j^{(v)}(\alpha_m) &= \int_{-l}^l Z_j^{(v)} (l^2 - x^2)^{v-1/2} C_j^v \left( \frac{x}{l} \right) \exp(-i\alpha_m x) dx = \\ &= \frac{J_{j+v}(\alpha_m l)}{(\alpha_m l)^v}. \end{aligned} \quad (5)$$

Основная трудность при применении метода Галеркина в данном случае – нахождение интегралов в правой части (2), (3). Нужно найти интегралы

$$P_{j,j'}^{(v',v)} = \int_{-l}^l B_{j'}^{(v')*}(x) B_j^{(v)}(x) dx.$$

Используем равенство Парсеваля и (5):

$$P_{j,j'}^{(v',v)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{j+v}(\alpha l) J_{j'+v'}(\alpha l)}{(\alpha l)^v (\alpha l)^{v'}} d\alpha.$$

Если  $j, j'$  разной четности, то  $P_{j,j'}^{(v',v)} = 0$ . В противном случае [15] имеем

$$\begin{aligned} P_{j,j'}^{(v',v)} &= \frac{1}{\pi l} \frac{1}{2^{v'+v}} \Gamma(v'+v) \frac{\Gamma\left(\frac{j+j'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+j'+1}{2} + v'+v\right)} \times \\ & \times \frac{1}{\Gamma\left(\frac{j-j'+1}{2} + v\right) \Gamma\left(\frac{j'-j+1}{2} + v'\right)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Получить частные случаи из (6) легко: пусть

$$P_{j',j}^{(1/2,1/2)} = \frac{1}{\pi l} \frac{1}{2j+1} \delta_{jj'},$$

Введем обозначение  $u = \frac{j+j'+1}{2}$ . Тогда получим

$$P_{j,j'}^{(3/2,3/2)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi l} \frac{1}{2^2} \frac{1}{(2+u)(1+u)u}, j = j'; \\ \frac{1}{\pi l} \frac{1}{8} \frac{1}{(2+u)(1+u)u}, j+2 = j'; \\ 0, |j-j'| > 2. \end{cases}$$

$$P_{j,j'}^{(1/2,3/2)} = \frac{1}{\pi l} \frac{1}{4} \frac{1}{(1+u)u} \sigma_{j,j'},$$

где  $\sigma_{jj} = 1$  при  $j' = j$  или  $j = j' - 2$ , в остальных случаях  $\sigma_{jj} = 0$ .

Таким образом, все матричные элементы системы линейных алгебраических уравнений, полученной при решении (2), (3) методом Галеркина, выражаются в явном виде. СЛАУ имеют быструю внутреннюю сходимость – для достижения погрешности по внутреннейходимости менее 1% достаточно решать СЛАУ 10...20-го порядка. Время счета одной частотной точки менее 0.1 с.

### 3. ОБЪЕМНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим ДР, образованную двумерно-периодическими анизотропными телами объемом  $V$ , расположенными на многослойной подложке. Диэлектрическая проницаемость анизотропных тел имеет вид



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}.$$

Решение дифракции на такой ДР методом объемного интегрального уравнения (ОИДУ) с изотропными слоями приведено в [11]. Нетрудно показать, что для анизотропных тел ОИДУ аналогичное, только с заменой скалярной диэлектрической проницаемости на тензорную:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}^{\text{внеш}}(x, y, z) + \left[ \text{grad div} + k^2 \right] \int_V \mathbf{G}(\vec{x}, \vec{y}, z, z') \boldsymbol{\tau} \vec{E}(x', y', z') dv', x, y, z \in V,$$

где  $\vec{E}(x, y, z)$  – искомая напряженность электрического поля внутри  $V$  в одной элементарной ячейке, функция Грина приведена выше.

Преобразуем это уравнение. Обозначим  $\vec{D} = \boldsymbol{\tau} \vec{E}$ , где  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  – единичная матрица). Тогда получим

$$\boldsymbol{\tau}^{-1} \vec{D}(x, y, z) = \vec{E}^{\text{внеш}}(x, y, z) + \left[ \text{grad div} + k^2 \right] \int_V \mathbf{G}(\vec{x}, \vec{y}, z, z') \vec{D}(x', y', z') dv', x, y, z \in V. \quad (7)$$

Следует отметить, что анизотропная часть находится в левой (свободной) части интегро-диффе-

ренциального уравнения (7), поэтому метод решения и программа для изотропного диэлектрика легко трансформируются в метод и программу для диэлектрика анизотропного. Аналогичное утверждение справедливо и для нелинейного диэлектрика для эффекта самовоздействия.

Решение уравнения (7) методом Галеркина аналогично решению для ДР из изотропных элементов [11, 12]. Базисные функции – полиномы Лежандра по координатам  $x, y$  и сплайны первого порядка по координате  $z$ . Все матричные элементы полученных СЛАУ определяются в явном виде.

Пусть двумерно-периодические анизотропные тела это графеновые полосы, толщина которых равна  $t$ . Величина  $t$  не обязательно равна реальной толщине графена, достаточно потребовать  $kt \ll 1$ . Можно ввести эквивалентную диэлектрическую проницаемость графена

$$\varepsilon_{mn} = 1 + i \frac{Z_0 \sigma_{mn}}{kt},$$

где индексы  $m, n$  принимают значения  $x, y$ . Так как величина  $\varepsilon_{zz}$  практически не влияет на характеристики графеновой ДР, то в программе полагалось  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx}$ .

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2 представлены результаты расчетов коэффициентов отражения и прохождения по мощ-

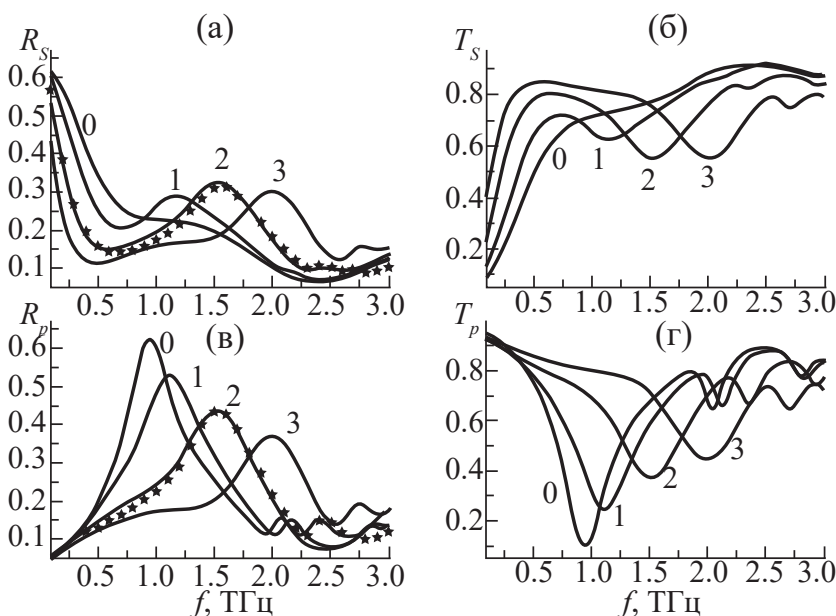


Рис. 2. Частотные зависимости коэффициентов отражения  $R$  (а, в) и прохождения  $T$  (б, г) при  $V = 0, 1, 2$  и  $3$  Тл (цифры на кривых):  $s$ -поляризация (а, б) и  $p$ -поляризация падающей волны (в, г). Характеристики рассчитаны методами ПСУ (сплошные кривые) и ОИДУ (кривые со звездочками).

ности при нормальном падении и плоской волны на дифракционную решетку с параметрами: период 60 мкм, ширина лент 40 мкм, подложка с показателем преломления 1.5, между подложкой и графеновыми лентами диэлектрик толщиной  $h = 40$  мкм с показателем преломления 1.77. Параметры графена:  $E_F = 0.45$  эВ,  $\tau = 1$  пс. Результаты получены методами ПСУ и ОИДУ. Видно хорошее соответствие между результатами расчета разными методами. Метод ПСУ проще, поэтому компьютерная программа быстрее. Например, на компьютере средней производительности для расчета всех кривых, представленных на рис. 2, потребовалось 0.9 с для метода ПСУ и 25 с для метода ОИДУ. Увеличение времени существенное, но не принципиальное.

Как видно из рис. 2, при отсутствии магнитного поля плазмонный резонанс проявляется только при  $p$ -поляризации падающей волны. При этой поляризации ток перпендикулярен лентам. Частота резонанса определяется не только параметрами графена и диэлектрика, но и шириной лент. При приложении магнитного поля даже при  $s$ -поляризации падающей волны появляется компонента напряженности электрического поля и тока, перпендикулярная лентам (рис. 3). Поэтому плазмонный резонанс наблюдается и при  $s$ -поляризации. При повороте плоскости падения на угол  $\varphi$  относительно направления лент плазмонный резонанс наблюдается при обеих поляризациях. При угле  $\varphi = 45^\circ$  и  $B = 0$ , естественно,  $R_s = R_p, T_s = T_p$ , а в магнитном поле (рис. 4)  $R_s \neq R_p, T_s \neq T_p$ .

Таким образом, изменением величины поля подмагничивания можно изменять частоту и глу-

бину плазмонного резонанса. Как хорошо известно, можно изменять величину  $E_F$ , а значит, и положение плазмонного резонанса, подавая на графен электростатическое поле. Простейшая конструкция такой решетки – решетка с проводящей пленкой между подложкой и диэлектрическим слоем, на котором расположены графеновые ленты. Частотные характеристики такой ДР изображены на рис. 5. Плоскость падения перпендикулярна лентам, угол падения  $30^\circ$ . Коэффициент прохождения такой ДР равен  $T \approx 0$ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение краевой задача о дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционной решетке из графеновых полосок при наличии магнитного поля сведено к решению двух типов интегральных уравнений. Первый – парные сумматорные уравнения, в которых неизвестная функция – плотность тока на графеновых полосках. Второй – интегро-дифференциальное уравнение относительно напряженности электрического поля внутри графеновых полосок. Показано, что анизотропия поверхностной проводимости по сравнению с изотропной проводимостью приводит лишь к изменению свободного члена в интегральных уравнениях. При решении полученных интегральных и парных сумматорных уравнений использован базис в виде полиномов Лежандра и Гегенбауэра. Все матричные элементы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученной при решении

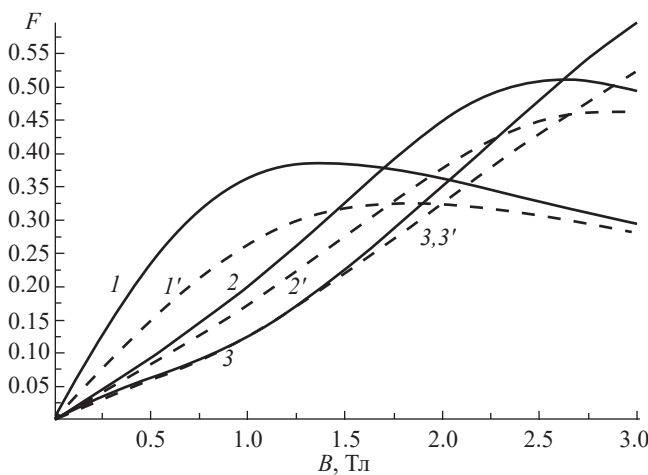


Рис. 3. Соотношение продольной и поперечной компонент напряженности электрического поля на графеновых лентах при  $f = 0.95$  (1), 1.5 (2) и 2 ТГц (3):  $s$ -поляризация падающей волны,  $F = |E_x/E_y|$  (сплошные кривые),  $p$ -поляризация,  $F = |E_y/E_x|$  (штриховые).

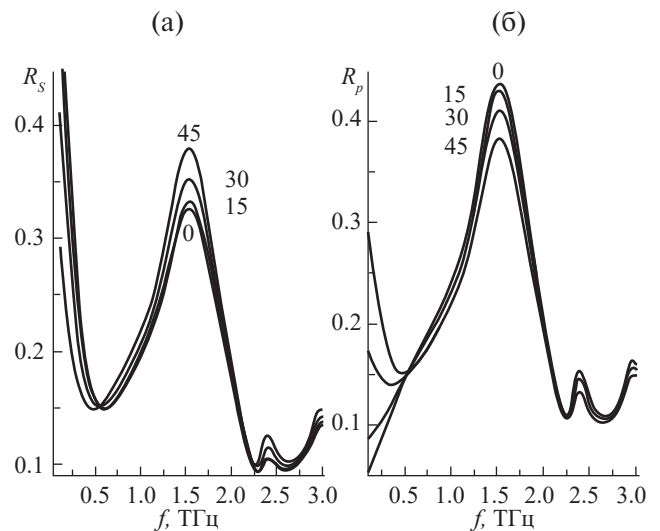
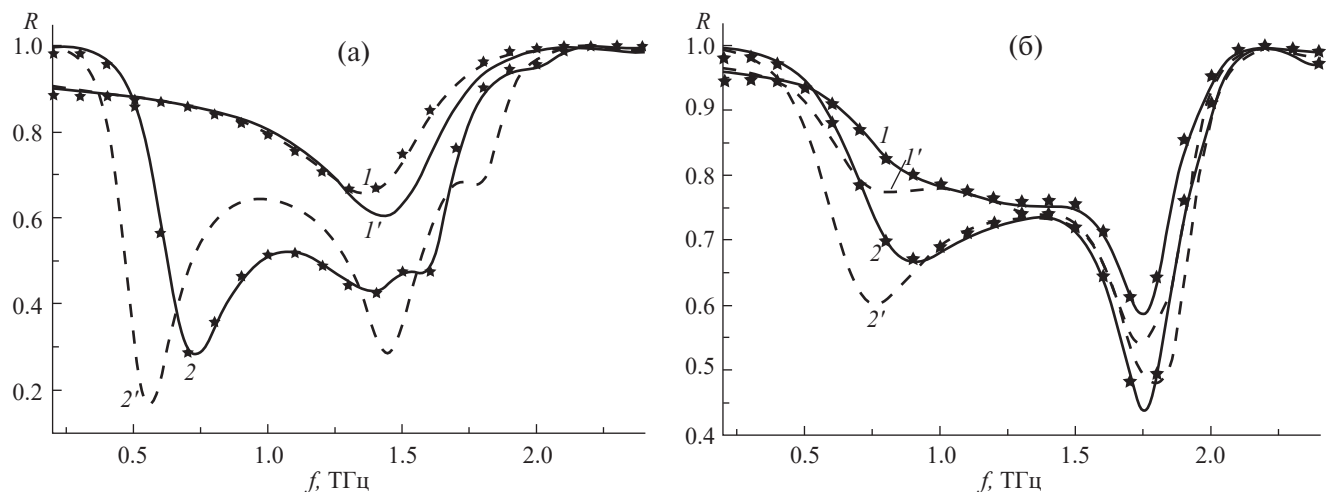


Рис. 4. Частотные зависимости коэффициента отражения при повороте плоскости падения при разных углах поворота,  $\varphi = 0, 15, 30$  и  $45$  град (цифры на кривых); магнитное поле  $B = 2$  Тл:  $s$ -поляризация (а) и  $p$ -поляризация падающей волны (б).



**Рис. 5.** Частотные зависимости коэффициента отражения ДР с золотой пленкой при  $B = 0$  (а) и 2 Тл (б):  $s$ -поляризация ( $1, 1'$ ) и  $p$ -поляризация ( $2, 2'$ ) падающей волны при ширине лент 40 ( $1, 2$ ) и 50 мкм ( $1', 2'$ ). Методы расчета ПСУ (сплошные кривые) и ОИДУ (звездочки).

ПСУ, выражаются в явном виде. СЛАУ имеют быструю внутреннюю сходимость.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен Г. С. Макеевой за сотрудничество и помощь в написании данной работы.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание в сфере научной деятельности (проект № 0852-2020-0032)/(БАЗ0110/20-3-07ИФ)).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tamagnone M., Slipchenko T. M., Moldovan C. et al. // Phys. Rev. B. 2018. V. 97. № 24. P. 241410.
2. Chin M. L., Matschy S., Stawitzki F. et al. // J. Phys. Photonics. 2021. V.3. № 1. P. 01LT01.
3. Kuzmin D. A., Bychkov I. V., Shavrov V. G. et al. // Nanophotonics. 2018. V. 7. № 3. P. 597. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2017-0095>
4. Ningning Wang, Linhui Ding, Weihua Wang // Phys. Rev. B. 2023. V. 108. № 8. P. 085406.
5. Zesen Zhou, Zhilong Gan, Lei Cao // J. Phys. D: Appl. Phys. 2023. V. 56. P. 365104. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/acda45>
6. Liu Jian-Qiang, Zhou Yu-Xiu, Li Li, Wang Pan, Zayats A. V. // Opt. Express. 2015. V. 23. № 10. P. 12525. <https://doi.org/10.1364/OE.23.012524>
7. Lu Yafeng, Wang Chen, Zhao Shiqiang, Wen Yongzheng. // Frontiers Phys. 2021. V. 8. № 622839. <https://doi.org/10.3389/fphy.2020.622839>
8. Padmanabhan P., Boubanga-Tombet S., Fukidome H. et al. // Appl. Phys. Lett. 2020. V. 116. № 22. P. 221107. <https://doi.org/10.1063/5.0006448>
9. Guo T., Argyropoulos C. J. // Appl. Phys. 2023. V.134. № 5. P. 050901. <https://doi.org/10.1063/5.0152664>
10. Лерер А. М., Макеева Г. С., Черепанов В. В. // РЭ. 2021. Т. 66. № 6. С. 543.
11. Лерер А. М., Иванова И. Н., Макеева Г. С., Черепанов В. В. // Оптика и спектроскопия. 2021. Т. 129. № 3. С. 342.
12. Лерер А. М. // РЭ. 2012. Т. 57. № 11. С. 1160.
13. Wang W. H., Apel S. P., Kinaret J. M. // Phys. Rev. B. 2012. V. 86. № 12. P. 125450.
14. Hanson G. W. // J. Appl. Phys. 2008. V. 103. № 6. P. 064302.
15. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.

**ELECTRODYNAMIC MODELS MAGNETIZED  
GRAPHENE DIFFRACTION GRATINGS,  
BASED ON THE SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS  
FOR PLASMONIC ANISOTROPIC STRUCTURES**

**A. M. Lerer**

*Southern Federal University,  
Zorge St., 5, Rostov-on-Don, 344090 Russian Federation  
E-mail: lerer@sfedu.ru*

Received January 09, 2024, revised January 09, 2024, accepted January 25, 2024

Two methods have been used to solve the boundary value problem of diffraction of a plane electromagnetic wave on a diffraction grating of graphene strips in the presence of a magnetic field. In solving the obtained integral and paired adder equations, the Galerkin method was used with a basis in the form of Legendre and Hegenbauer polynomials. As a result, systems of linear algebraic equations with fast internal convergence were obtained. All matrix elements of the system are expressed explicitly.

*Keywords:* diffraction grating, graphene, magnetic field, integral equations, Galerkin method, plasmon resonance

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.868; 621.382

### ВЗАИМОСВЯЗЬ ЭНЕРГИИ, СПЕКТРА И ДЛИТЕЛЬНОСТИ СВЕРХКОРОТКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА С ЕГО ВРЕМЕННОЙ ФОРМОЙ

© 2024 г. В. Г. Усыченко, Л. Н. Сорокин\*

*Государственный научно-исследовательский институт прикладных проблем,  
наб. Обводного канала, 29, Санкт-Петербург, 191167 Российская Федерация*

\*E-mail: sorokinln@mail.ru

Поступила в редакцию 23.04.2023 г.

После доработки 29.08.2023 г.

Принята к публикации 24.11.2023 г.

Двумя способами определены энергия и длительность сверхкороткого электромагнитного импульса, распространяющегося по оси излучения в дальней зоне – по форме напряженности его электрического поля и по энергетическому спектру. В обоих случаях энергия импульса оказывается одинакова, но длительность и пиковая амплитуда различаются на десятки процентов. Дана сравнительная оценка энергии, рассеиваемой в полупроводниковых элементах автоматизированных технических устройств, облучаемых сверхкороткими и прямоугольными сверхвысокочастотными импульсами. Показано, что воздействие СВЧ-импульса является более эффективным на несущих частотах порядка сотен мегагерц и менее.

*Ключевые слова:* сверхкороткий электромагнитный импульс, пиковая амплитуда, энергия, длительность, энергетический спектр, энергия, рассеиваемая в нагрузке

DOI: 10.31857/S0033849424110036, EDN: НОКЕWM

#### ВВЕДЕНИЕ

Распространяющийся в дальней зоне быстро меняющийся во времени сверхкороткий электромагнитный импульс (СКЭМИ) характеризуют [1] временной зависимостью его электрического поля  $E(t)$ , которую обычно определяют с помощью линейного полоскового измерителя поля (ИППЛ). При изменении расстояния  $r$  между антенной излучателя и облучаемым объектом форма  $E(t)$  на оси луча меняется слабо. В этом случае остается практически постоянным произведение  $rE_p$  ( $E_p$  – пиковое значение поля на расстоянии  $r$ ).

При испытании различных технических устройств на устойчивость к электромагнитным воздействиям помимо пикового значения  $E_p$  поля обычно указывают длительность импульса  $\tau$ , строгое определение которой в ГОСТах отсутствует. Поэтому часто приводят ширину пикового импульса на половине  $E_p/2$  его высоты [2–4]. Но такое определение больше подходит для униполярных импульсов, а применительно к знакопеременному СКЭМИ ведет к ошибкам. Иногда приводят значение  $\tau$ , не сообщая о том, каким образом оно определено [5]; иногда приводят длительность фронта импульса, возбуждающего антенну излучателя СКЭМИ [6].

На практике помимо  $E_p$  и  $\tau$  важными информативными параметрами являются энергия, падающая на облучаемый объект, и энергия, рассеиваемая в его нагрузке. Задача становится особенно интересной, если облучается автоматизированное техническое устройство, которое в силу особенностей своего построения и функционирования облучает сверхширокополосной восприимчивостью к электромагнитным полям. В этом случае для оценок нужно знать распределение энергетического спектра падающего СКЭМИ во всем диапазоне частот. Энергия, длительность и спектр непосредственно связаны с временной формой  $E(t)$  электрического поля СКЭМИ в области нахождения устройства.

Цель данной работы – дать строгое определение указанным величинам, установить связи между ними и сопоставить по эффективности результативность воздействия на устройство СКЭМИ и СВЧ-импульса.

#### 1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

В дальней зоне, где находится облучаемый объект, плотность потока энергии (вектор Пойнтинга), переносимой в единицу времени произвольно ме-



нящимся во времени электрическим полем  $E(t)$  электромагнитного импульса, имеет вид

$$\frac{1}{Z_0} E^2(t), \text{ Дж/м}^2\text{с,}$$

где  $Z_0 = 120\pi$  Ом – волновое сопротивление пространства. Энергия, переносимая одним импульсом через площадь  $1 \text{ м}^2$ , равна

$$\frac{1}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt,$$

т.е. пропорциональна

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt.$$

Для упрощения формул далее используем этот интеграл, называя его энергией, измеряемой в единицах  $\text{В}^2\text{с/м}^2$ :

$$\Theta_E = \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt. \quad (1)$$

Разделив энергию (1) на квадрат пиковой амплитуды импульса, получим эффективную длительность СКЭМИ

$$\tau_{\text{эф}} = \frac{1}{E_p^2} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt.$$

Процедуру нахождения  $\Theta_E$  и  $\tau_{\text{эф}}$  продемонстрируем на примере СКЭМИ, одна из форм которого (формы могут быть разнообразными), измеренная с помощью ИППЛ, приведена на рис. 1 (кривая 1). Видно, что по окончании импульса еще некоторое время продолжают пульсации  $e(t)$  поля, вызываемые многочисленными отражениями волн в трактах излучения и приема. На этом же рисунке (кривая 2) продемонстрировано постепенное увеличение энергии импульса

$$\Theta_E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt \approx \int_{t_1}^{t_2+\infty} E^2(t) dt$$

в процессе интегрирования. Реальной будем считать энергию, которая определена в пределах  $t_1 \leq t \leq t_2$ , где  $t_1$  – время начала импульса,  $t_2$  – время окончания импульса, выбираемое в момент, когда в среднем спадающий «хвост»  $E(t)$  опустится ниже среднего значения пульсаций

$$E(t_2) \leq \sqrt{e^2(t_2)}.$$

Обычно интервал интегрирования ( $t_2 - t_1$ ) выбирают близким к длительности переходной характеристики ИППЛ, которая в нашем случае была равна 4.65 нс. При таком выборе влияние пульсаций  $e(t)$  на погрешность измерения минимизируется. Относительная погрешность определяется отношением

$$\delta\Theta_E \approx \left( \overline{e^2(t_2)} + (\Delta E_p)^2 \right) / \int_{t_1}^{t_2} E^2(t) dt, \quad (2)$$

где числитель равен сумме усредненного квадрата пульсаций  $e^2(t_2)$  и квадрата погрешности измерения пиковой амплитуды  $(\Delta E_p)^2$  импульса.

Нормированный интеграл

$$E_p^{-2} \int_{t_1}^{t_2} E^2(t) dt,$$

в точке  $t_2$  дает значение эффективной длительности СКЭМИ, которую, зная  $\Theta_E$ , можно также найти делением:

$$\tau_{\text{эф}} = \Theta_E / E_p^2.$$

Отсюда следует, что погрешности определения энергии  $\Theta_E$  и эффективной длительности  $\tau_{\text{эф}}$  одинаковы. В частности, у импульса, изображенного на рис. 1, при пиковой амплитуде  $E_p = 10^4 \text{ В/м}$  энергия  $\Theta_E \approx 0.02 \text{ В}^2\text{с/м}^2$ , длительность  $\tau_{\text{эф}} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ с}$ .

Поскольку пиковая амплитуда больше амплитуды СКЭМИ, усредненной по его форме, то его значение эффективной длительности занижено. Оценим ошибки, к которым это ведет.

Использование  $\tau_{\text{эф}}$  ставит в соответствие реальному СКЭМИ эквивалентный ему по энергии однополярный прямоугольный видеоимпульс, амплитуда которого равна пиковому значению  $E_p$ . Энергетический спектр прямоугольного импульса описывается [7] формулой

$$S_{E_p}^2(f) = E_p^2 \tau_{\text{эф}} \eta(\pi f \tau_{\text{эф}}), \quad (3)$$

в которой  $E_p^2 \tau_{\text{эф}} = \Theta_E$  – полная энергия импульса, а функция

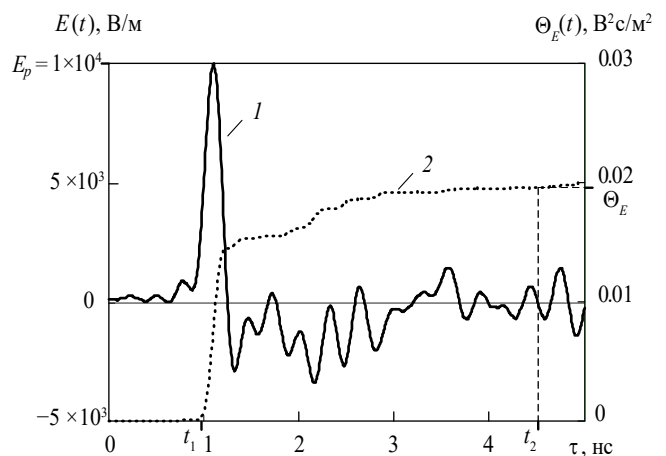


Рис. 1. Временная форма СКЭМИ (кривая 1) и зависимость энергии СКЭМИ от времени (кривая 2).



$$\eta(\pi f_M \tau_{эф}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi f_M \tau_{эф}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

(где  $x = \pi f_M \tau_{эф}$ ) определяет относительную долю энергии в полосе частот от 0 до  $f_M$ .

Энергетический спектр СКЭМИ с параметрами  $E_p = 10^4$  В/м и  $\tau_{эф} \approx 2 \cdot 10^{-10}$  с изображен кривой 1 на рис. 2 в пределах от 0 до  $f_M = 2/\tau_{эф}$ .

Если положить  $f_M \tau_{эф} = 1$ , то 90% всей энергии импульса сосредоточено в диапазоне частот

$$\Delta f_1 = [0 \leq f \leq 1/\tau_{эф}] = 1/\tau_{эф}. \quad (4)$$

Выше говорилось, что эффективная длительность  $\tau_{эф}$  СКЭМИ находится из опыта, погрешность которого точно неизвестна. Если она меньше 10%, то в первом приближении величину

$$E_p^2 \tau_{эф}^2 = E_p^2 \tau_{эф} / \Delta f_1 = \Theta_E / \Delta f_1$$

можно также рассматривать как энергетический спектр прямоугольного импульса, приведенный к диапазону частот  $\Delta f_1$ , в котором содержится 90% его энергии. На рис. 2 пунктирной линией 2 представлен равномерно распределенный по этому диапазону энергетический спектр прямоугольного импульса  $\Theta_E / \Delta f_1 = 4 \cdot 10^{-12}$  (В<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>)/Гц<sup>2</sup>, длительность которого  $\tau_{эф}$ .

Таким образом, зная форму СКЭМИ и пиковое значение его амплитуды, мы определили его эффективную длительность  $\tau_{эф}$  и энергетический спектр, усредненный в диапазоне частот  $f \leq 1/\tau_{эф}$ .

Применяя равенство Парсеваля [7] к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt,$$

получим энергию СКЭМИ, выраженную непосредственно через его собственный энергетический спектр

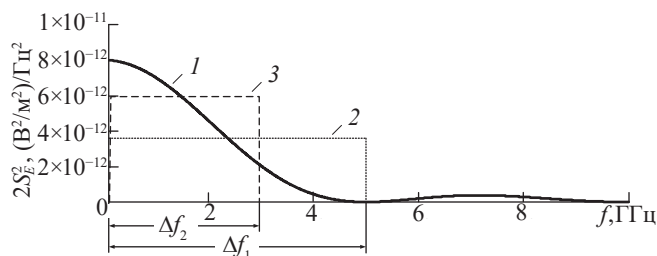


Рис. 2. Энергетические спектры: 1 – спектр прямоугольного видеоимпульса; 2 – спектр прямоугольного видеоимпульса, приведенный к диапазону частот  $\Delta f_1$ ; 3 – усредненный спектр СКЭМИ, форма которого приведена на рис. 3.

$$\Theta_E = \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = E_p^2 \tau_{эф} = \int_0^{\infty} 2S_E^2(f) df. \quad (5)$$

Здесь  $2S_E^2(f)$  – квадрат модуля спектра напряженности электрического поля СКЭМИ

$$\dot{S}_E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \exp(-j\omega t) dt,$$

выраженный через физическую частоту  $f \geq 0$ . На рис. 3 (кривая 1) изображен рассчитанный энергетический спектр импульса, форма которого приведена на рис. 1. Сравнение его с зависимостью 1 на рис. 2 показывает, что по виду он существенно отличается от спектра прямоугольного видеоимпульса.

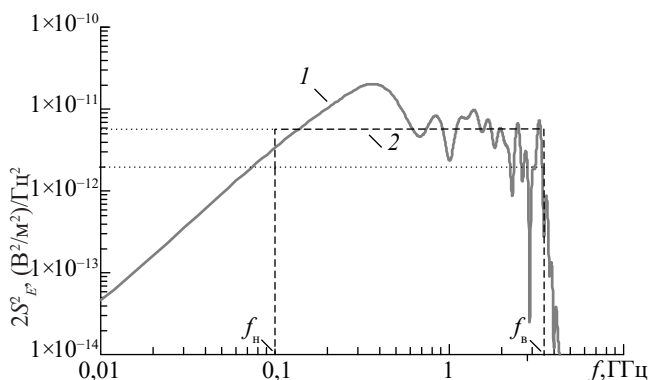


Рис. 3. Энергетический спектр измеренного СКЭМИ: 1 – расчетный; 2 – усредненный в диапазоне частот  $\Delta f_2$ .

Известно [7], что спектр любого импульса на нулевой частоте равен площади импульса. У электромагнитного импульса, распространяющегося через свободное пространство, площадь

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = 0,$$

поэтому спектр СКЭМИ будет снижаться с уменьшением частоты и на нулевой частоте должен быть равен нулю. На рис. 3 спектр снижается, начиная с частоты  $f \approx 200$  МГц, но в действительности стремится не к нулю, а плавно переходит к насыщению, связанному (2) с погрешностью измерений формы импульса  $E(t)$  и наличием пульсаций  $e(t)$ , влияющих на точность нахождения энергии  $\Theta_E$ .

Многообразие форм СКЭМИ ведет к разнообразию их спектров. Для практики полезно иметь простые соотношения, позволяющие быстро оценивать

значения параметров в пределах порядка. Для этого можно использовать усредненные величины.

У энергетического спектра любого СКЭМИ можно выделить диапазон частот  $\Delta f_2 = f_b - f_n$  ( $f_b$  и  $f_n$  – верхняя и нижняя частоты), в котором находится подавляющая часть энергии

$$\Delta \Theta_E = \int_{f_n}^{f_b} 2S_E^2(f) df,$$

а ее относительное количество равно

$$\Delta \Theta_E / \Theta_E = \int_{f_n}^{f_b} 2S_E^2(f) df / \int_0^{\infty} 2S_E^2(f) df.$$

Например, из рис. 3 видно, что на частотах  $f_b > 3.5$  ГГц спектр практически обрывается, а на частотах  $f_n < 0.1$  ГГц быстро снижается. Пренебрежение энергией низких частот в наихудшем случае дает ошибку  $f_n/f_b < 3\%$ . Таким образом, в рассматриваемом примере подавляющее количество энергии сосредоточено в диапазоне частот  $\Delta f_2 = f_b - f_n \approx 3.4$  ГГц.

Если отношение  $\Delta \Theta_E / \Theta_E$  близко к 100%, то среднюю по диапазону  $\Delta f_2$  плотность спектральной энергии СКЭМИ можно с погрешностью порядка нескольких процентов найти из равенства

$$\overline{2S_E^2(f)} \approx \frac{\Theta_E}{\Delta f_2} \approx \frac{E_p^2 \tau_{эф}}{\Delta f_2}. \quad (6)$$

Подставив численные значения найденных выше величин, получим

$$\overline{2S_E^2(f)} \approx 5.9 \cdot 10^{-12} \text{ (В}^2/\text{м}^2\text{)/Гц}^2.$$

На рис. 2 и 3 этот усредненный спектр представлен штриховой линией. На рис. 2 площади прямоугольников 2 и 3 практически равны, следовательно, равны энергии импульсов, определенные как по форме СКЭМИ, так и по его спектру. При этом ширина усредненного спектра прямоугольного импульса и ширина спектра реального СКЭМИ соотносятся как  $\Delta f_1/\Delta f_2 \approx 1.47$ . Во столько же раз меняется и отношение значений энергетических спектров, представленных на рис. 2 пунктирной и штриховой линиями соответственно.

Поскольку в диапазоне частот  $\Delta f_2 \approx 3.4$  ГГц сосредоточена подавляющая часть спектра, то по аналогии с (4) можно ввести эквивалентную длительность СКЭМИ  $\tau_{эКВ} = 1/\Delta f_2 \approx 2.95 \cdot 10^{-10}$  с. При этом энергия падающего на объект СКЭМИ принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta_E &= \int_0^{\infty} 2S_E^2(f) df \approx \int_{f_n}^{f_b} 2S_E^2(f) df \approx \\ &\approx \overline{2S_E^2(f)} \Delta f_2 = \overline{2S_E^2(f)} \Delta f_2^2 / \Delta f_2 = E_{эКВ}^2 \tau_{эКВ}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $E_{эКВ}^2 = \overline{2S_E^2(f)} \Delta f_2^2$  – квадрат эквивалентной амплитуды электрического поля СКЭМИ, усредненный в пределах эквивалентной длительности  $\tau_{эКВ} = 1/\Delta f_2$ ;  $E_{эКВ} = \sqrt{\overline{2S_E^2(f)} \Delta f_2^2}$  – амплитуда этого поля. Из равенства формул (7) и (5) вытекает равенство

$$E_{эКВ}^2 \tau_{эКВ} \approx E_p^2 \tau_{эф}, \quad (8)$$

из которого следует определение эквивалентной амплитуды СКЭМИ

$$E_{эКВ} \approx \sqrt{\tau_{эф}/\tau_{эКВ}} E_p,$$

характеризуемого эквивалентной длительностью  $\tau_{эф}$ . В нашем примере  $E_{эКВ} \approx 0.82 E_p$ ,  $\tau_{эКВ} = 1.48 \tau_{эф}$ .

Вид функции  $E_{эКВ}(t)$ , описывающей развитие во времени процесса, обладающего энергией  $E_{эКВ}^2 \tau_{эКВ}$  и спектром, отмеченным штриховой линией 3 на рис. 2, нам точно не известен. Возможно, это СВЧ-импульс с прямоугольной формой огибающей, несущая частота которого за время длительности  $\tau_{эф}$  с огромной скоростью перестраивается по какому-то нелинейному закону в диапазоне частот  $\Delta f_2 = (0.1 \dots 3.5)$  ГГц.

Таким образом, зная форму СКЭМИ и его пиковую амплитуду  $E_p$ , можно определить энергию  $\Theta_E$  и эффективную длительность импульса  $\tau_{эф}$ . Зная же энергетический спектр СКЭМИ, можно найти энергию  $\Theta_E$ , эквивалентную длительность  $\tau_{эКВ}$  и эквивалентную пиковую амплитуду  $E_{эКВ}$ . Энергия в обоих случаях одинаковая, но расчетные амплитуды и длительности импульсов, их усредненные энергетические спектры и протяженности этих спектров в приведенном примере различаются в полтора раза.

## 2. ЭНЕРГИЯ, РАССЕИВАЕМАЯ В НАГРУЗКЕ СВЧ-ИМПУЛЬСОМ И СКЭМИ

Из формулы Фрииса для идеальной радиопередачи [8, разд. 9–11] вытекает достаточно точное для практики выражение, которое связывает вектор Пойнтинга импульсного узкополосного квазигармонического колебания с мощностью  $P_r(t)$ , рассеиваемой этим импульсом в нагрузке приемника:

$$\frac{E^2(t)}{Z_0} = \frac{P_r(t)}{A_r},$$

где

$$A_r = \frac{\bar{\lambda}^2 G_r(\bar{f})}{4\pi}$$

– эффективная поглощающая площадь приемной антенны, идеально согласованной со своей нагрузкой;  $\bar{\lambda} = c/\bar{f}$  – средняя длина волны колебания ( $c$  – скорость света,  $\bar{f}$  – средняя несущая частота колебания);  $G_r(\bar{f})$  – коэффициент усиления при-

емной антенны на частоте  $\bar{f}$ . Подставив  $A_r$ , получим мощность, рассеиваемую в нагрузке узкополосным СВЧ-колебанием:

$$P_r(t) = \frac{c^2 G_r(\bar{f}) E^2(t)}{4\pi Z_0 \bar{f}^2}.$$

Видно, что мощность уменьшается при увеличении квадрата средней частоты.

Если в нагрузку поступает не вся мощность, падающая на антенну, а часть ее теряется, то можно ввести коэффициент экранирования  $\beta^2(\bar{f})$ , учитывающий все виды ослабления волны на ее пути к нагрузке. При необходимости зависимость  $\beta^2(\bar{f})$  можно определить, тестируя работоспособность устройства при его облучении СВЧ-импульсами разных несущих частот, как это сделано, например, в работе [9]. Найдем рассеиваемую в нагрузке энергию импульса:

$$\Theta_r = \int_{-\infty}^{\infty} P_r(t) dt = \frac{c^2 G_r(\bar{f})}{4\pi Z_0 \beta^2(\bar{f}) \bar{f}^2} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt. \quad (9)$$

Предположим, что вместо излучателя СВЧ-импульсов используется излучатель сверхширокополосных СКЭМИ. Объектом воздействия является не узкополосный приемник, а устройство, у которого нет специализированных приемных антенн [10]. Таковым может быть робот, автоматизированное, цифровое или любое другое техническое устройство, содержащее полупроводниковые приборы, в которых рассеивается падающая энергия СКЭМИ. В роли антенны выступают по-разному направленные, изогнутые, скрученные металлические поверхности, проводники, шлейфы и полосковые линии, которые, будучи связанными с портами полупроводникового прибора (ПП), образуют сверхширокополосный рецептор. Величина коэффициента усиления такого рецептора в среднем порядка единицы в диапазоне частот [9] примерно от сотен мегагерц до 10 ГГц. Используя равенство Парсевала, получим рассеиваемую в ПП энергию импульса

$$\Theta_r = \frac{c^2}{4\pi Z_0} \int_0^{\infty} \frac{G_r(f)}{\beta^2(f) f^2} 2S_E^2(f) df,$$

выраженную через спектр СКЭМИ. В этой формуле коэффициент усиления сверхширокополосного рецептора  $G_r(f)$  и коэффициент экранирования  $\beta^2(f)$ , трансформируя спектр  $2S_E^2(f)$  падающего на устройство СКЭМИ, влияют на количество энергии  $\Theta_r$ , поглощаемой в ПП.

При сверхширокополосном спектре СКЭМИ энергия  $\Theta_r$  зависит не только от коэффициентов  $G_r(f)$  и  $\beta^2(f)$ , но и от множителя  $f^2$ , свидетельствующего о преимущественном вкладе низкочастотных составляющих спектра. Чтобы оценить степень влияния этого множителя, вернемся к нижней  $f_n \approx 100$  МГц и верхней  $f_b \approx 3.5$  ГГц граничным частотам, между которыми находится подавляющая

часть энергии рассмотренного в разд.1 спектра СКЭМИ. Положим, что в пределах этих частот спектр СКЭМИ, коэффициент усиления рецептора и коэффициент экранирования близки к своим средним значениям:  $2S_E^2(f)$ ,  $G_r(f)$  и  $\beta^2(f)$  соответственно. Вынеся эти величины за пределы интеграла, интегрируя в пределах от  $f_n$  до  $f_b$ , полагая  $f_b \gg f_n$ , получим [10] энергию

$$\Theta_r \approx \frac{c^2 \overline{G_r(f)}}{4\pi Z_0 \overline{\beta^2(f)}} 2\overline{S_E^2(f)} \int_{f_n}^{f_b} \frac{1}{f^2} df \approx \frac{c^2 \overline{G_r(f)}}{4\pi Z_0 \overline{\beta^2(f)}} \frac{2\overline{S_E^2(f)}}{f_n}. \quad (10)$$

Видно, что рассеиваемая в ПП энергия возрастает при расширении спектра СКЭМИ в область низких частот.

Полагая, что энергия падающих на объект СКЭМИ и СВЧ-импульса одинакова, сравним энергию (10) с энергией (9), рассеиваемой прямоугольным СВЧ-импульсом, у которого амплитуда  $E_m$ , несущая частота  $f_0$  и длительность  $\tau_0$ .

Заменим в формуле (9)  $E^2(t)$  на  $E_m^2/2$ , полагая коэффициенты усиления рецепторов и коэффициенты экранирования в формулах (9) и (10) одинаковыми. Тогда, опуская общие коэффициенты, получим

$$\frac{2\overline{S_E^2(f)}}{f_n} = \frac{E_m^2 \tau_0}{2f_0^2}. \quad (11)$$

Умножив и разделив левую часть этого выражения на квадрат полосы пропускания  $\Delta f_2^2$  усредненного спектра СКЭМИ, используя (8), найдем

$$\frac{2\overline{S_E^2(f)} \Delta f_2^2}{f_n \Delta f_2^2} \approx \frac{E_{\text{ЭКВ}}^2 \tau_{\text{ЭКВ}}}{f_n \Delta f_2}.$$

После подстановки правой части полученного выражения в левую часть формулы (11), получим

$$\frac{E_{\text{ЭКВ}}^2 \tau_{\text{ЭКВ}}}{f_n \Delta f_2} \approx \frac{E_m^2 \tau_0}{2f_0^2}. \quad (12)$$

Если энергии падающих импульсов  $E_{\text{ЭКВ}}^2 \tau_{\text{ЭКВ}} = E_m^2 \tau_0/2$  одинаковы, то из (12) следует

$$f_0^2 \approx f_n \Delta f_2. \quad (13)$$

Для оценок воспользуемся результатами предыдущего раздела. Подставив  $f_n = 1 \cdot 10^8$  Гц,  $\Delta f_2 = 3.4 \cdot 10^9$  Гц, получим для несущей частоты СВЧ-импульса  $f_0 \approx 5.8 \cdot 10^8$  Гц. Таким образом, при равенстве энергий СКЭМИ и СВЧ-импульса, падающих на устройство со сверхширокополосной электромагнитной восприимчивостью, энергия, рассеиваемая в ПП этими импульсами, при несущей частоте  $f_0 = 580$  МГц будет одинакова; при

$f_0 < 580$  МГц рассеиваемая СВЧ-импульсом энергия будет больше, чем у СКЭМИ. При несущих частотах  $f_0 > 580$  МГц СВЧ-импульс по эффективности проигрывает СКЭМИ. Из (13) также следует, что в рамках принятых допущений уменьшение произведения  $f_n \Delta f_2$  ведет к снижению несущей частоты  $f_0$ , и при сохранении соотношения  $f_n \ll \Delta f_2$  зона преимущества СВЧ-импульса сокращается.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для определения энергии СКЭМИ, распространяющегося по оси излучения, наиболее просто использовать эффективную длительность  $\tau_{эф}$ , которую легко найти, зная пиковую напряженность падающего электрического поля. Для практических оценок этого достаточно. Но эквивалентная длительность  $\tau_{экв}$ , выводимая из энергетического спектра СКЭМИ, является более точной и более информативной, так как без спектра СКЭМИ можно только грубо (с погрешностью в десятки процентов) оценить энергию, рассеиваемую импульсом в полупроводниковых элементах технических устройств, обладающих сверхширокополосной электромагнитной восприимчивостью. Это важно при оценке их стойкости к различным видам электромагнитных воздействий.

Показано также, что по сравнению с СВЧ-импульсом воздействие СКЭМИ является более эффективным применительно к роботизированным устройствам, у которых нет специализированных приемных антенн.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-29-06010). Исследования по данной тематике проводились также в рамках бюджетной НИР FFZF-2022–0003.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сахаров К. Ю. Излучатели сверхкоротких электромагнитных импульсов и методы измерений их параметров. М.: Моск. гос. ин-т электроники и математики, 2006.
2. Блудов С. Б., Гадецкий Н. П., Кравцов К. А. и др. // Физика плазмы. 1994. Т. 20 № 7. С. 712.
3. Camp M., Garber H., Nitsch D. // IEEE Int. Symp. on EMC, Minneapolis, 19–23 Aug., 2002. P. 87.
4. Зиновьев С. В., Евдокимов А. Н., Сахаров К. Ю. и др. // Мед. физика. 2015. № 3. С. 62.
5. Сахаров К. Ю., Туркин В. А., Михеев О. В., Сухов А. В. // Сб. докл. VIII Всерос. науч.-техн. конф. «Электромагнитная совместимость». Москва, 23–24 мая 2019 г. М.: Тестприбор, 2019. С. 91.
6. Сахаров К. Ю., Михеев О. В., Туркин В. А. и др. // Технологии ЭМС. 2006. № 2. С. 44.
7. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986.
8. Мейнке Х., Гундлах Ф. Радиотехнический справочник. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1960. Т. 1.
9. Hoad R., Carter N., Herke D., Watkins S. // IEEE Trans. 2004. V. EMC-46. № 3. P. 390.
10. Усыченко В. Г., Сорокин Л. Н., Усыченко А. С. // РЭ. 2020. Т. 65. № 12. С. 1234.

## INTERRELATION OF ENERGY, SPECTRUM AND DURATION OF AN ULTRASHORT ELECTROMAGNETIC PULSE WITH ITS TEMPORARY FORM

**V. G. Ushchenko, L. N. Sorokin\***

*Federal State Unitary Enterprise "State Research Institute of Applied Problems",  
Obvodny Canal Embankment, 29, St. Petersburg, 191167 Russia  
\*E-mail: sorokinln@mail.ru*

Received April 23, 2023; revised August 29, 2023; accepted November 24, 2024

An ultrashort electromagnetic pulse energy and duration propagating along the radiation axis in the far zone are determined in two ways: by the shape of its electric field strength and by the energy spectrum. In both cases, the pulse energy is the same and the duration as well as peak amplitude differ by tens of percent. A comparative assessment is given for the energy dissipated in semiconductor elements of automated technical means irradiated by ultrashort and rectangular microwave frequency pulses. It is shown that the impact of a microwave pulse is better effective at carrier frequencies of the order of hundreds of megahertz and less.

*Keywords:* ultrashort electromagnetic pulse (USEMP), peak amplitude, energy, duration, energy spectrum, energy dissipated in the load



## ПРИМЕНЕНИЕ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ В БИОЛОГИИ И МЕДИЦИНЕ

УДК 535.36;547.979.733;616-006

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИТТЕРБИЕВЫХ КОМПЛЕКСОВ ПОРФИРИНОВ В ТЕРАНОСТИКЕ РАКА

© 2024 г. И. П. Шилов<sup>a, \*</sup>, В. Д. Румянцев<sup>a, b</sup>, А. С. Горшкова<sup>a</sup>, А. В. Иванов<sup>c, \*</sup>

<sup>a</sup>Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190 Российская Федерация

<sup>b</sup>МИРЭА – Российский технологический университет,  
пр. Вернадского, 78, Москва, 119454 Российская Федерация

<sup>c</sup>Национальный медицинский исследовательский центр онкологии им. Н. Н. Блохина,  
Каширское шоссе, 23, Москва, 115522 Российская Федерация

\*E-mail: laserlab@ms.ire.rssi.ru

Поступила в редакцию 28.09.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 25.01.2024 г.

Разработаны основы новых методик тераностики рака на базе наноразмерных Yb-комплексов порфиринов. Полученные данные свидетельствуют о перспективности применения синтезированных наночастиц на основе Yb-комплексов порфиринов для разработки чувствительных люминесцентных методов диагностики и тераностики опухолей визуально и эндоскопически доступной локализации. Показано, что лазерный фототермолиз на длине волны 750...800 нм в сочетании с ближней ИК-люминесцентной диагностикой (в спектральном диапазоне 900...1100 нм) является пионерской разработкой в области медицинской биофотоники. Предсказано, что синтезированная структура типа лексанполимерная матрица + Yb-порфириновый комплекс + FeO<sub>x</sub> может быть востребована для целей магнитолюминесцентной тераностики новообразований. Установлено, что люминесцентная диагностика опухолей в сочетании с фотодинамической терапией в полосе поглощения порфирина (длина волны 635 нм при оптической экспозиционной дозе ~300 Дж/см<sup>2</sup>) с использованием фармацевтической композиции типа «Флюороскан» может применяться при злокачественных новообразованиях кожи и слизистых оболочек.

*Ключевые слова:* тераностика, фотодинамическая терапия, иттербиевые комплексы порфиринов, люминесцентная диагностика, злокачественные новообразования

DOI: 10.31857/S0033849424110041, EDN: HOJMUZ

#### ВВЕДЕНИЕ

Лечение больных со злокачественными опухолями остается актуальной, не решенной до конца проблемой, что диктует необходимость дальнейшего научного поиска более эффективных методов диагностики и терапии данных новообразований. В настоящее время в онкологии возникло новое направление – тераностика, которое предполагает использование медицинских препаратов, совмещающих в себе диагностическую и терапевтическую функции, что обуславливает возможность ее применения для персонализированного лечения пациентов [1, 2].

Тераностика направлена на устранение ряда принципиальных недостатков традиционных методов визуализации и диагностики, назначения плана лечения, его проведения и мониторинга результатов. Следует также отметить, что действие вводимых лекарств не является адресным: они

разносятся кровотоком по всему организму, и поэтому их приходится вводить неоправданно много по сравнению с дозой, действительно необходимой для лечения пораженной ткани/органа. В результате велика вероятность побочных эффектов и сильно завышается стоимость лечения [3].

Наноконструкции для тераностики рака, состоящие из наночастиц и инкапсулированных в них наночастиц, имеют очень большие перспективы в онкологии. Важным для наномедицины и, в частности, для нанотераностики событием стало открытие эффекта «усиленного проникновения и удержания» коллоидных частиц в активно растущих опухолях (enhanced permeation and retention, EPR) [4]. До настоящего времени эффект EPR является основой почти всех методик «пассивной» доставки лекарств. Одним из недостатков эффекта EPR с точки зрения применения в наномедицине является трудность удаления наночастиц, уже



освободивших лекарство, из опухоли, для того чтобы освободить место новым носителям с лекарством [5]. Поиск новых полимерных конъюгатов привел к открытию и последующему активному использованию наноносителей на основе полимерных мицелл [6]. Такие полимерные мицеллы имеют уникальную структуру «ядро–оболочка» [7, 8], в которой внутренняя часть может служить наноконтейнером для лекарственных средств, в том числе гидрофобных. Внешняя оболочка мицеллы образована гидрофильными полимерами, такими, например, как полиэтиленгликоль.

Как было показано в [9], для целей тераностики весьма перспективны иттербиевые комплексы порфиринов (ИКП). Введение иона иттербия в центр порфириновой матрицы приводит к резкому снижению фотохимической активности при сохранении свойственной большинству порфиринов тропности к злокачественным опухолям [10]. Ионы иттербия, введенные в соответствующие производные порфирина, в значительной степени снижают квантовый выход генерации синглетного кислорода, а при возбуждении  $\pi$ -электронной системы порфирина наблюдается люминесценция, обусловленная переходами  $4f$ -электронов  $Yb^{3+}$ :  $4F^{5/2} \rightarrow 2F^{7/2}$  [11].

Иттербиевые комплексы порфиринов характеризуются люминесцентным сигналом повышенной интенсивности в ближнем инфракрасном (БИК) спектральном диапазоне 900...1100 нм, в так называемом «окне прозрачности биотканей». ИКП обладают высоким коэффициентом экстинкции  $\sim 10^5 \text{ M}^{-1}\text{cm}^{-1}$ , временем жизни люминесценции до 10 мкс и квантовым выходом люминесценции вплоть до 1% [12]. Кроме того, некоторые из них относятся к природным порфиринам и, следовательно, малотоксичны.

Разработанные ИКП могут быть использованы в качестве одного из основных компонентов создаваемых наноконструкций для тераностики рака.

Целью данной работы является разработка основ новых методик люминесцентной диагностики (ЛД) и тераностики рака с использованием наноразмерных ИКП, а именно: а) люминесцентная диагностика опухолей в БИК-диапазоне в сочетании с плазмонно-резонансной фототермотерапией; б) люминесцентная диагностика опухолей в спектральном БИК-диапазоне в сочетании с локальной ферромагнитной гипертермией; в) люминесцентная диагностика опухолей в БИК-диапазоне в сочетании с фотодинамической терапией в полосе поглощения порфирина.

## 1. МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ

Исследования проводили на 30 мышах-самках (питомника «Столбовая» РАН). В качестве модели солидной злокачественной подкожной опухоли была выбрана трансплантируемая эпидермоидная

карцинома легкого Льюис (LLC), штамм которой был получен из банка опухолевых штаммов ФГБУ «НМИЦ онкологии им. Н. Н. Блохина» Минздрава России. Для микроволновой термографии зоны злокачественного роста использовался специально созданный (по техническому заданию НМИЦ онкологии им. Н. Н. Блохина к ООО «Фирма РЭС») многоканальный аппаратно-программный комплекс (МАПК) для неинвазивного выявления температурных аномалий внутренних тканей лабораторных животных на глубине нескольких сантиметров [13]. МАПК производит измерение температуры внутренних тканей путем измерения собственного электромагнитного излучения лабораторных животных в микроволновом диапазоне, рабочий диапазон частот приемного канала от 3150 до 3800 МГц. Мощность излучения, поступающая в антенну, определяется термодинамической температурой, параметрами среды и диаграммой направленности антенны. МАПК оснащен приемными антеннами радиодатчиков, позволяющими использовать его в помещениях без специальной экранировки.

Изучение спектральных и временных характеристик люминесценции синтезированных ИКП проводили на экспериментальном измерительном стробоскопическом стенде для исследования люминесценции и кинетики спектров нефототоксичных фотосенсибилизаторов, разработанном в ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН [14].

Размер наночастиц в суспензии определяли методом динамического рассеяния света на лазерном корреляционном спектрометре «Курс-3», позволяющем проводить измерения в диапазоне 0.5...10<sup>4</sup> нм.

Синтез иттербиевых комплексов диметилового эфира протопорфирина IX (Yb-ПП) и тетраметилового эфира гематопорфирина IX (Yb-ТМЭ ГП) в виде ацетилацетонатных комплексов проводили в соответствии с методом, описанным в [15].

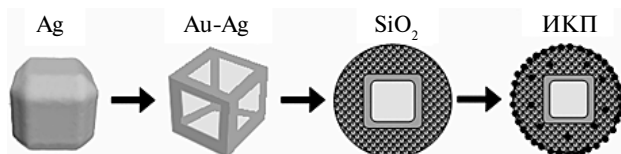
Иттербиевый комплекс дикалиевой соли 2,4-диметоксигематопорфирина IX для тераностики (Yb-ДМГП), использующей плазмонно-резонансную фототермотерапию, был синтезирован в соответствии с методикой, предложенной в [16]. Исследование биораспределения и фармакокинетики наноконструкта в органах и тканях животных проводили на макетном лазерно-волоконном флуориметре (ЛВФ).

Лазерно-волоконный флуориметр разработан в ФИРЭ им. В. А. Котельникова РАН [17] и состоит из полупроводникового лазера на длине волны 405 нм (область регистрируемой люминесценции 900...1100 нм); блока модуляции и оцифровки, включающего аналогово-цифровой преобразователь; ноутбука; блока регистрации и обработки сигнала люминесценции, включающего систему интерференционных фильтров, фотодиодный модуль с предусилителем, систему линз; многожильного высокоапертурного волоконно-оптического зонда.

## 2. ТЕРАНОСТИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛЮМИНЕСЦЕНТНОЙ ДИАГНОСТИКИ В СОЧЕТАНИИ С ПЛАЗМОННО-РЕЗОНАНСНОЙ ФОТОТЕРАПИЕЙ

Иттербиевый комплекс дикалиевой соли 2,4-диметоксигематопорфирина IX впервые был использован для функционализации композитных наночастиц (КНЧ) с целью привнесения в них новых свойств и функций. КНЧ были разработаны группой исследователей под руководством профессора Н. Г. Хлебцова (ФГБУ Институт биохимии и физиологии растений и микроорганизмов РАН, г. Саратов) и состояли из золото-серебряных наноклеток, покрытых мезопористой оболочкой из двуокиси кремния [18]. Такие наноструктуры с введенными в них ИКП обладают рядом важных свойств, включая легко настраиваемый плазмонный резонанс наноклеток (650...950 нм) и удобство функционализации пористой оболочки двуокиси кремния.

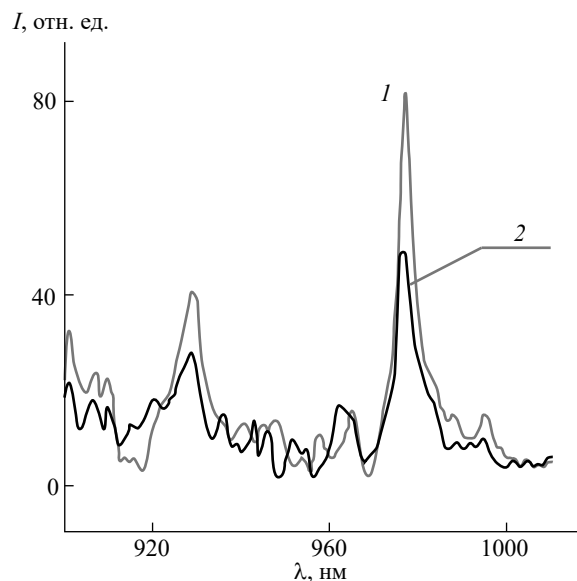
Общую схему синтеза композитных наночастиц осуществляли в три этапа (рис. 1). На первом этапе синтезируются серебряные нанокубики размером 30...60 нм, которые используются далее как шаблоны для получения золото-серебряных наноклеток. На втором этапе на Au-Ag-наноклетках формируется пористая нано-оболочка из двуокиси кремния контролируемой толщины (около 40 нм). На третьем этапе полученные частицы функционализируются молекулами ИКП и стабилизируются гуммиарабиком [18].



**Рис. 1.** Схема синтеза композитных multifunctionальных наночастиц на основе золото-серебряных наноклеток, покрытых двуокисью кремния и функционализированных ИКП.

Представленная методика тераностики может быть охарактеризована как БИК-люминесцентная диагностика в сочетании с плазмонно-резонансной фототерапией. Наличие ИК-люминесценции в спектральной области 900...1060 нм (рис. 2), соответствующей окну прозрачности биотканей, позволяет оценивать люминесценцию образцов тканей с повышенной чувствительностью.

Данные наноконпозиты позволяют после проведения процедуры ЛД новообразований осуществлять сразу и плазмонно-резонансную фототерапию, которая является одной из относительно



**Рис. 2.** Спектры ИК-люминесценции наноконпозита (1) и свободного водного раствора ИКП (2).

новых и многообещающих методик лечения опухолей. Она базируется на лазерном нагреве металлических наночастиц, главным образом золотых и диэлектрик-золотых, серебряно-золотых наноконпозитов в области их плазмонного резонанса. Локальный нагрев коллоидных золотых наночастиц диаметром ~20 нм вблизи поверхности злокачественных опухолевых клеток вызывает гибель последних при облучении импульсным зеленым лазером (~20 нс) с высокой пиковой мощностью. Как было показано в [18], в дополнение к длинноволновому плазмонному резонансу вблизи 750...800 нм (лазерный фототермолиз) разработанные наноконпозиты имеют и пики поглощения вблизи 405 нм, а также ИК-люминесценцию в области 900...1100 нм, что присуще ИКП и используется для ЛД новообразований (см. рис. 2).

Были исследованы токсичность, биораспределение и фармакокинетика субстанции ИКП для здоровых мышей и мышей с привитой карциномой Эрлиха. Оказалось, что разработанные наноконпозиты имеют хороший контраст накопления в опухоли по сравнению со здоровой соседней тканью. На рис. 3 представлены сравнительные результаты по биораспределению свободного препарата ИКП и композитных наночастиц, функционализированных ИКП. Видно, что биораспределение обоих препаратов имеет сходный характер с хорошим контрастом накопления в опухоли. Отметим, что для более ранних временных интервалов доминирует накопление препарата ИКП в печени и селезенке в согласии с имеющимися данными по биораспределению и токсичности наночастиц [19].

Размеры наноконпозитов играют ключевую роль в их доставке и накоплении в опухоли. Размер

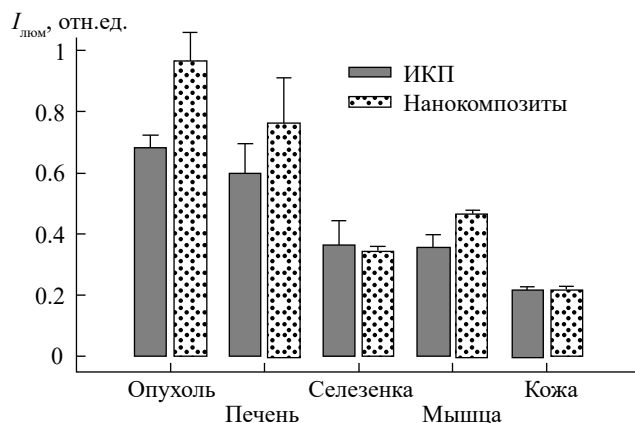


Рис. 3. Биораспределение нанокompозита и свободного водного раствора ИКП в органах мышей с привитой карциномой Эрлиха.

данного нанокompозита составил 100...150 нм, что близко к порам эндотелиального слоя новообразованных сосудов опухоли (свыше 200 нм). Таким образом, и здесь работает эффект EPR. Вследствие этого разработанные нанокompозиты обладают повышенной селективностью накопления в опухоли.

### 3. ЛЮМИНЕСЦЕНТНАЯ ДИАГНОСТИКА ОПУХОЛЕЙ В СОЧЕТАНИИ С ЛОКАЛЬНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ГИПЕРТЕРМИЕЙ

Для тераностики опухолей глубокой тканевой локализации проведен синтез наночастиц, содержащих ядро оксидов железа и лексан-полимерную оболочку (ЛПМ), включающую ИКП [20]. При этом предполагалось, что наночастицы  $FeO_x$  в накопившей их опухолевой ткани будут ответственны за проведение процедуры локальной ферромагнитной гипертермии в радиочастотном диапазоне, где практически отсутствует поглощение самих биотканей. Полученные данные свидетельствуют о перспективности применения синтезированных наночастиц со структурой ЛПМ+ИКП+ $FeO_x$  для тераностики, позиционированной нами как магнито-люминесцентная тераностика (МЛТ).

Следует отметить, что к настоящему времени весьма развиты и продолжают совершенствоваться методы, использующие магнитные наночастицы (МНЧ) и греющие радиочастотные электромагнитные поля (ЭМП). В их число выходит и магнитная гипертермия (МГТ), при этом частота ЭМП составляет 200...1000 кГц. В последнее время развитие получили также и нетепловые механизмы магнитной тераностики (механизм магнитомеханической актуации), использующие негреющие ЭМП (1...1000 Гц) [3]. Использование МНЧ позволяет локально повысить интенсивность воздействия и снизить частоту и величину необходимой

индукции переменного ЭМП, а следовательно, уменьшить вероятность нежелательных побочных эффектов со стороны поля.

В большинстве биомедицинских приложений в качестве материала магнитного ядра используют магнетит  $Fe_3O_4$  ( $J_s \approx 80 \text{ A} \times \text{м}^2/\text{кг}$  — намагниченность насыщения магнетита), имеющий существенно меньшую токсичность, чем чистые магнитные металлы и многие магнитные сплавы. Структурная схема синтезированного нами нанокompозита ЛПМ+ИКП+ $FeO_x$  для МЛТ представлена на рис. 4.

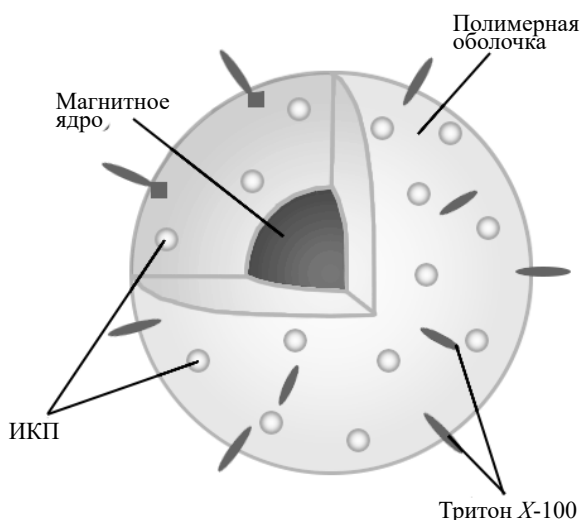


Рис. 4. Структурная схема нанокompозита ЛПМ + ИКП +  $FeO_x$  (ИКП – Yb-ПП).

Для придания поверхности частиц гидрофильности, а следовательно, меньшей агрегируемости и более длительной циркуляции в организме, в органическую фазу вводили неионогенный детергент Тритон X-100. При образовании частиц гидрофобная часть детергента встраивалась в частицу, а гидрофильная (полиэтиленгликолевая) оставалась на поверхности. Для большей стабилизации иттербиевого комплекса использовали дополнительный комплексобразователь — триоктилфосфинксид (ТОФО). Необходимо отметить, что в отсутствие ТОФО люминесценция от таких композитных наночастиц (КНЧ) практически не наблюдается.

Спектрально-кинетические характеристики (спектры в диапазоне 800...1060 нм и времена жизни люминесценции) получали с помощью измерительного стробоскопического стенда с возбуждением в видимом диапазоне спектра [14].

Проведенная оценка распределения синтезированных частиц ЛПМ+ИКП+ $FeO_x$  по размерам показала, что с увеличением концентрации полимера в реакционном объеме получают частицы большего

диаметра. На рис. 5 представлено распределение КНЧ по размерам в диапазоне 100...300 нм (при концентрации ЛПМ в реакционной смеси ~ 100 мкг/л).

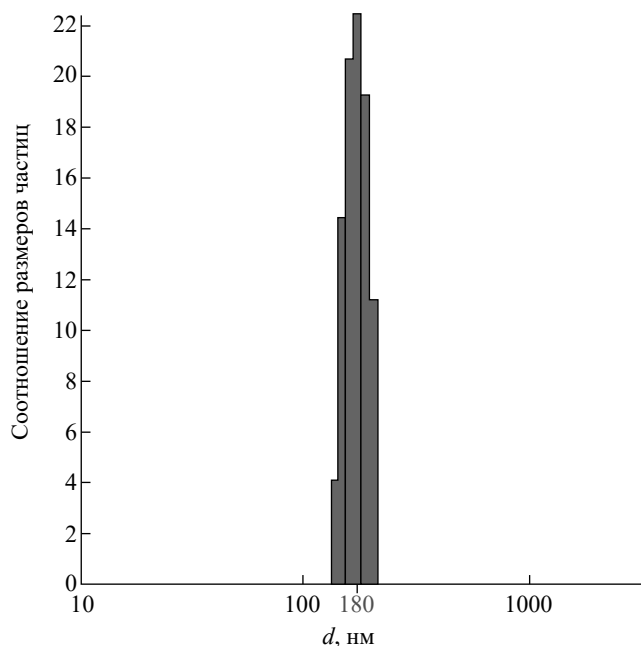


Рис. 5. Распределение композитных наночастиц по размерам (при концентрации ЛПМ в реакционной смеси ~ 100 мкг/л).

Как видно из рис. 5, средний измеренный диаметр синтезированных КНЧ составил ~180 нм. Размер КНЧ в диапазоне 150...200 нм является оптимальным для длительной циркуляции КНЧ в организме и преимущественном накоплении их в опухоли вследствие проникновения через поры эндотелия кровеносных сосудов. Размер КНЧ менее 150 нм приводит к ухудшению люминесцентных свойств нанокompозита (меньшее число в нем инкорпорированных частиц ИКП). Размер КНЧ более 200 нм приводит к существенному (~30%) снижению селективности накопления нанокompозита в опухоли, что резко снижает эффективность МЛТ.

Представленные на рис. 6 спектры эмиссии водных суспензий синтезированных наночастиц в БИК-диапазоне подтверждают, что в них сохраняется типичный для люминесценции  $\text{Yb}^{3+}$  характер: наличие наиболее интенсивной полосы в области 980 нм, обусловленной основным переходом, и появление дополнительных полос в области 925 нм и 1010 нм, обусловленных внутримультитлетными переходами.

Как видно из рис. 6, включение ядра  $\text{FeO}_x$  в наночастицы со средним размером ~20 нм приводит к некоторому снижению интенсивности

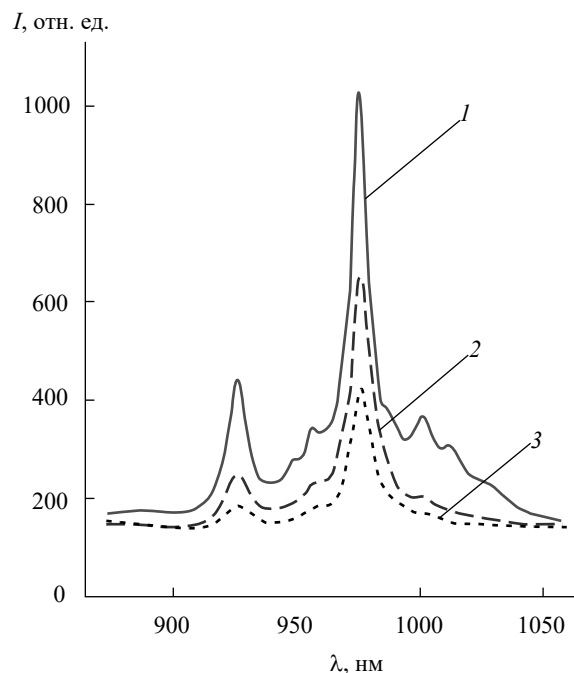


Рис. 6. Эмиссионные спектры в ближней ИК-области спектра ( $\lambda_{\text{возб}} \sim 532$  нм) нано-композитов ЛПМ +  $\text{Yb-TMЭ ГП}$  без МНЧ-ядра (1) и с ядром  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  среднего размера которого  $d \sim 20$  (2) и  $\sim 30$  (3) нм.

люминесценции  $\text{Yb-TMЭ ГП}$  и всей КНЧ в целом, в то время как включение магнетитового ядра с размером 30 нм в КНЧ приводит к более чем двукратному снижению интенсивности люминесценции  $\text{Yb-TMЭ ГП}$  в синтезированных вариантах МНЧ. При этом следует отметить, что основная доля люминесценции приходится на самую мелкодисперсную (надосадочную) фракцию. Это свидетельствует о том, что грубодисперсная суспензия, содержащая «крупные» ядра  $\text{FeO}_x$ , практически не люминесцирует. Некоторое снижение интенсивности люминесценции в случае МНЧ с размером 20 нм может быть компенсировано увеличением терапевтической дозы нанокompозита, что является допустимым для осуществления процедур ЛД опухолей.

Представленные данные свидетельствуют о том, что для получения более качественных люминесцирующих наночастиц с ядром оксидов железа, содержащих ИКП, необходимо использовать более монодисперсную исходную суспензию  $\text{FeO}_x$ . Оптимальными размерами МНЧ в КНЧ на их основе при осуществлении процедур локальной магнитной гипотермии является диапазон  $d = 10...15$  нм. Это связано с эффективностью нагрева МНЧ в радиочастотном магнитном поле.

Исследование биораспределения и фармакокинетики нанокompозита в органах и тканях животных проводили на макетном лазерно-волоконном флуориметре. По истечении определенных промежутков времени в интервале от 0.5 до 72 ч после



введения препарата группы мышей по три особи выводили из опыта, после чего у них для спектрального исследования проводили биопсию органов и тканей: легкого, сердца, печени, селезенки, почек, мышцы, кожи и опухоли.

Средний размер МНЧ составлял  $\sim 10$  нм, а доза субстанции, вводимая мышам внутривенно, составила  $\sim 1$  мг/кг веса, что намного ниже дозы выживаемости и терапевтических доз фотосенсибилизаторов при фотодинамической терапии опухолей. Следует отметить, что используемые в нанокompозите ИКП обладают почти нулевой фотоцитотоксичностью. Исследование фармакокинетики показало, что в первые часы после введения субстанции она локализуется в основном в паренхиматозных органах, прежде всего в селезенке, что полностью согласуется с данными по острой токсичности, когда селезенка является мишенью номер 1 для этого нанокompозита. Но в течение 12 ч препарат уже значительно «вымывается» из этих органов и довольно прочно оседает в опухолевой ткани. На основе спектрофлуорометрических измерений строилась гистограмма распределения интенсивности люминесценции в различных органах и тканях мыши после внутривенного введения препарата (режим *ex vivo*).

На рис. 7 представлена гистограмма распределения интенсивности люминесценции в различных органах и тканях мыши после внутривенного введения препарата. Приведенные результаты показывают значительную селективность накопления КНЧ в опухоли уже через 12 ч после внутривенного введения. Этот результат можно частично объяснить размерным эффектом (размер наночастиц композита не превышает 200 нм), что вполне согласуется с размерами пор сосудистой сети в опухолевой ткани.

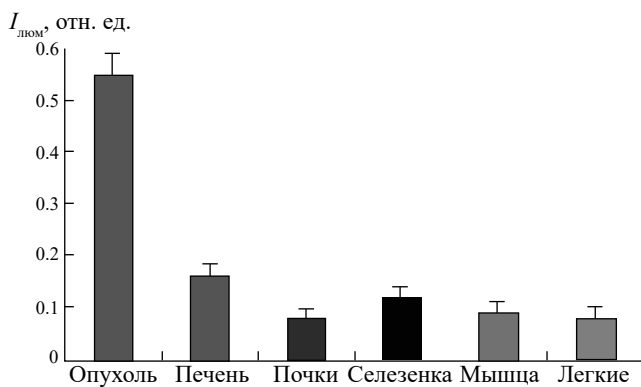


Рис. 7. Гистограмма распределения интенсивности люминесценции в различных органах и тканях мыши после внутривенного введения препарата (режим *ex vivo*, доза 1 мг/кг веса, время накопления 12 ч).

#### 4. ЛЮМИНЕСЦЕНТНАЯ ДИАГНОСТИКА В СОЧЕТАНИИ С ФОТОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРАПИЕЙ

Иттербиевый комплекс дикалиевой соли 2,4-ди( $\alpha$ -метоксиэтил) дейтеропорфирина IX при различных условиях может проявлять как диагностические, так и терапевтические свойства. Дело в том, что при выведении  $Yb^{3+}$  из порфириновой матрицы безметалльная форма порфирина приобретает уже повышенные цитотоксические свойства за счет образования синглетного кислорода  $^1O_2$  после воздействия лазерным излучением на определенной длине волны.

Предложена новая методика тераностики злокачественных новообразований кожи и слизистых оболочек на основе фармацевтической композиции (ФК) «Флюроскан», состоящей из иттербиевого комплекса дикалиевой соли 2,4-ди( $\alpha$ -метоксиэтил)-дейтеро-порфирина IX ( $Yb$ -ДМДП), люминесцирующего в БИК-области спектра (900...1100 нм), и различных гелей, обеспечивающих хорошую проникаемость в кожу и слизистые оболочки.

Проведенные исследования показали, что добиться удаления иона  $Yb^{3+}$  из порфириновой матрицы можно путем обработки субстанции слабыми кислотами (аскорбиновая, лимонная). На рис. 8 представлены результаты обработки раствора ИКП аскорбиновой кислотой.

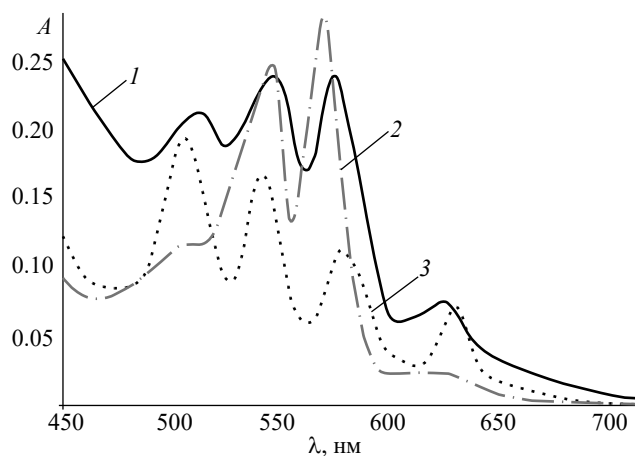


Рис. 8. Электронные спектры поглощения: 1 –  $Yb$ -ДМДП + аскорбиновая кислота, 2 –  $Yb$ -ДМДП, 3 – безметалльный ДМДП.

Полученные данные подтверждают исход  $Yb^{3+}$  из порфириновой матрицы, поскольку обработка кислотами приводит к появлению четырех Q-полос вместо двух в области 500...600 нм. Особенно эффективна обработка аскорбиновой кислотой при концентрации 1% (рН = 4.3). Для сравнения



приведен спектр поглощения безметалльного ДМДП (рис. 8, кривая 3).

При аппликационном введении ФК проводится фотодиагностика с выявлением области патологии, после чего данная область обрабатывается раствором аскорбиновой кислоты. При этом наблюдается интенсивный исход иона  $\text{Yb}^{3+}$  из порфиринового макроцикла, и в ткани остается только безметалльная форма порфиринового комплекса, после чего возможно проведение процедуры фотодинамической терапии (ФДТ) выявленных участков патологии в полосе поглощения ДМДП (на длине волны 635 нм).

Тераностику злокачественных новообразований кожи и слизистых оболочек с использованием данной ФК осуществляют следующим образом. Вначале производится процедура ЛД, при которой обрабатываются гелем ФК подозрительные участки кожи и слизистых оболочек. Вследствие того, что ИКП практически не обладают световой токсичностью, при нанесении этих гелей на кожу и слизистые оболочки не происходит отрицательного воздействия на живой организм в виде появления побочных дерматологических реакций. По истечении 30...40 мин после обработки данным препаратом кожных новообразований и близко расположенных здоровых тканей измеряется диагностический контрастный индекс – отношение интенсивности люминесценции тканей (новообразование/норма), который может составлять от 2.5 до 15.0 в зависимости от типа кожного повреждения и концентрации ИКП в ФК. Далее перед стадией ФДТ проводится обработка патологически измененных участков биоткани насыщенным раствором аскорбиновой кислоты (1 г в 3 мл 0.9% NaCl).

Ее накопление в биоткани проводили в течение 10...15 мин. По истечении данного времени измерялась интегральная интенсивность люминесценции в БИК-диапазоне на различных участках биотканей. При этом интегральная интенсивность БИК-люминесценции падает почти в три раза по сравнению с необработанной аскорбиновой кислотой биотканью, что подтверждает интенсивный исход иона иттербия из порфиринового макроцикла.

Таким образом, в накопленной биотканью ФК в основном присутствует безметалльная форма порфиринового комплекса. На следующем этапе тераностики проводится процедура ФДТ выявленных ранее пораженных участков биоткани посредством обработки их терапевтическим лазером на длине волны 635 нм. При этом экспозиционная доза составляет 100...300 Дж/см<sup>2</sup>.

Для проведения процедуры тераностики были подготовлены три группы мышей линии С57ВL с внутрикожно перевитой аденокарциномой легкого LLC (опухоль Льюиса) по шесть особей в каждой: 1-я группа – контрольная (без проведения ФДТ), 2-я группа – для проведения ФДТ с дозой 300 Дж/см<sup>2</sup>, 3-я группа – для проведения ФДТ

с дозой 100 Дж/см<sup>2</sup>. Размер поверхности опухоли у всех мышей составлял примерно 1 см<sup>2</sup>. Далее после процедуры ЛД в соответствующих группах мышей при одинаковых условиях проводился сеанс ФДТ с заданной дозировкой.

До, во время и после воздействия лазерным излучением регистрировалась термограмма опухолевого узла (рис. 9, 10).

Для термографии зоны злокачественного роста использовали специально созданный МАПК. Усредненная термограмма, характерная для 2-й группы мышей, представлена на рис. 9. Видно, что колебания температуры в зоне роста первичного узла опухоли при воздействии лазерным излучением (см. рис. 9, область А) составили около 5 °С, не достигая 40 °С. После прекращения воздействия лазером (область Б) фоновые температурные флуктуации в опухолевой ткани становятся малоамплитудными (менее 0.5 °С). Данный факт свидетельствует о нарушении ее биоэнергетики

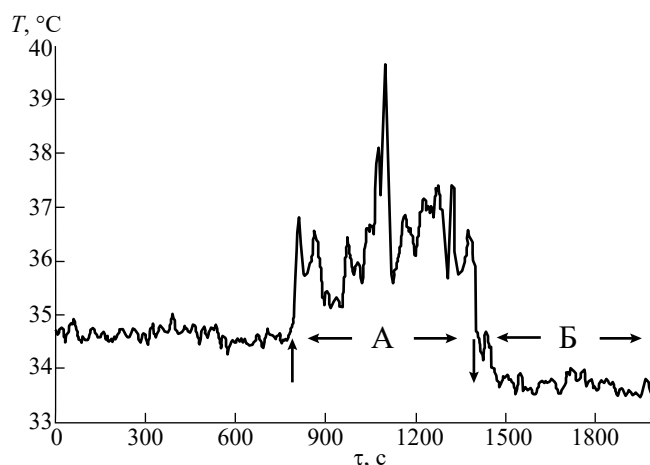


Рис. 9. Усредненная термограмма, характерная для 2-й группы лабораторных мышей (экспозиционная доза 300 Дж/см<sup>2</sup>).

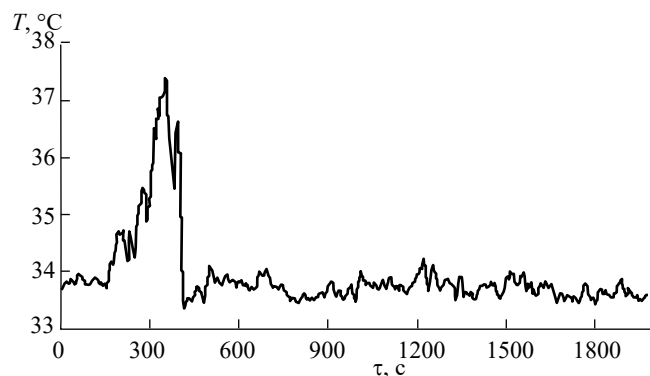


Рис. 10. Фоновая запись термограммы эпидермоидной карциномы легкого Льюис, при воздействии излучением 500 мВт/см<sup>2</sup>; 200 с, экспозиционная доза 100 Дж/см<sup>2</sup>.

и микроциркуляции кровотока вследствие деструктивных изменений, вызванных проведенной ФДТ. Видимо, можно говорить о частичном некрозе опухолевой ткани. Средняя выживаемость 2-й группы мышей оказалась максимальной среди всех групп и составила два месяца. Как видно из рис. 9, терапевтический эффект достигнут целиком благодаря ФДТ, без участия процесса гипертермии, которая осуществляется при температурах выше 42 °С.

Во втором случае был применен щадящий режим ФДТ первичного узла опухоли: плотность мощности 500 мВт/см<sup>2</sup>, время воздействия 200 с, экспозиционная доза 100 Дж/см<sup>2</sup> (см. рис. 10). Вследствие воздействия излучения заданных параметров изменение температуры  $\Delta T$  °С в зоне роста первичного узла опухоли составила 3.5 °С. После прекращения воздействия излучением изменение амплитудно-частотных характеристик фоновых температурных флуктуаций в опухолевой ткани существенно меньше (например, амплитуда флуктуаций температуры около 0.5 °С), чем в предыдущем случае, что свидетельствует о менее выраженных деструктивных изменениях в ткани опухоли, вызванных проведенной ФДТ.

Нам представляется, что в этих двух случаях с разными экспозиционными дозами задействованы разные физиологические механизмы, что необходимо учитывать при проведении ФДТ в клинике.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные данные свидетельствуют о перспективности применения синтезированных наночастиц на основе ИКП для разработки чувствительных люминесцентных методов диагностики опухолей визуально и эндоскопически доступной локализации. Лазерный фототермолиз на длине волны 750...800 нм в сочетании с БИК-люминесцентной диагностикой (в спектральном диапазоне 900...1100 нм) является пионерской разработкой в области медицинской биофотоники.

Синтезированная структура типа ЛПМ+ИКП+FeO<sub>x</sub> может быть востребована для целей МЛТ. Включение ядра FeO<sub>x</sub> в наночастицы позволяет проводить контролируемую локальную высокочастотную гипертермию патологических участков глубокой тканевой локализации, накопивших нанокompозит, хотя и приводит к незначительному уменьшению его диагностического потенциала (к приблизительно двукратному снижению интенсивности люминесценции ИКП). Однако этот недостаток может быть компенсирован некоторым увеличением терапевтической дозы нанокompозита.

Люминесцентная диагностика опухолей в сочетании с фотодинамической терапией в полосе поглощения порфирина может быть весьма перспективна при злокачественных новообразованиях кожи и слизистых оболочек с использованием

ФК типа «Флюроскан». Полученные результаты свидетельствуют о перспективности разработанной методики тераностики на основе использования ближней ИК-люминесцентной диагностики кожных новообразований и слизистых оболочек на базе субстанции типа Yb-ДМДП и проведения фотодинамической терапии в полосе поглощения порфирина. Показано, что терапевтический эффект достигается целиком благодаря ФДТ, без участия процесса гипертермии, которая осуществляется при температурах выше 42 °С. Для целей тераностики на основе данной субстанции разработана фармацевтическая композиция «Флюроскан» в виде геля. «Флюроскан» прошел сертификацию и разрешен к использованию на территории РФ, Республики Беларусь и Казахстана.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны сотрудникам ИЕИМ УрФУ А. П. Сафронову и Г. В. Курляндской и зав. лабораторией импульсных процессов Института электрофизики УрО РАН (г. Екатеринбург) И. В. Бекетову за предоставление наночастиц магнетита, которые были получены и первично аттестованы в этой лаборатории.

### СОБЛЮДЕНИЕ ЭТИЧЕСКИХ НОРМ

До экспериментов и в период их проведения животные содержались в стандартных условиях вивария ФГБУ «НМИЦ онкологии им. Н. Н. Блохина» Минздрава России в соответствии с «Правилами Европейской конвенции по защите позвоночных животных, используемых для экспериментальных и иных научных целей».

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, а также при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FFSFZ-2023-0004).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cheng S. H., Lee S. H., Chen M.-C. et al. // J. Mater. Chem. 2010. V. 20. № 29. P. 6149. doi.org/10.1039/c0jm00645a
2. Bardhan R., Chen W., Bartels M. et al. // Nano Lett. 2010. V. 10. P. 4920.

- doi.org/10.1021/nl102889y
3. Головин Ю. И., Клячко Н. Л., Мажуга А. Г. и др. // Рос. нанотехнологии. 2018. Т. 13. № 5–6. С. 3.
  4. Maeda H. // J. Pers. Med. 2021. V. 11. № 3. P. 229. doi.org/10.3390/jpm11030229
  5. Ngoune R., Peters A., von Elverfeldt D. et al. // J. Controlled Release. 2016. V. 238. P. 58. doi.org/10.1016/j.jconrel.2016.07.028
  6. Nishiyama N., Kataoka K. // Pharmacol. Ther. 2006. V. 112. P. 630.
  7. Guan Q., Wang M. // Nano Life. 2021. V. 11. № 4. P. 2141004. doi.org/10.1142/S179398442141004X
  8. Кокшарова Ю. А., Губинс С. П., Таранов И. В. и др. // РЭ. 2022. Т. 67. № 2. С. 99. doi.org/10.31857/S0033849422020073
  9. Khlebtsov B., Panfilova E., Khanadeev V. et al. // ACS Nano. 2011. V. 5. № 9. P. 7077. doi.org/10.1021/nn2017974
  10. Ivanov A. V., Rumyantseva V. D., Shchamkhalov K. S., Shilov I. P. // Laser Phys. 2010. V. 20. № 12. P. 2056. doi.org/10.1134/s1054660x10220032
  11. Гайнов В. В., Шайдуллин Р. И., Рябушкин О. А. // Квант. электроника. 2011. Т. 41. № 7. С. 637.
  12. Шилов И. П., Румянцева В. Д., Иванов А. В. и др. // РЭ. 2023. Т. 68. № 4. С. 399. doi.org/10.31857/S0033849423030130
  13. Веснин С. Г. Антенна аппликатор для неинвазивного измерения температуры внутренних тканей биологического объекта. Патент РФ на изобретение № 2306099. Опул. офиц. бюл. «Изобретение. Полезные модели» № 26 от 20.09.2007 г.
  14. Маркушев В. М., Румянцева В. Д., Шилов И. П., Горшкова А. С. // Журн. радиоэлектроники. 2020. № 11. doi.org/10.30898/1684-1719.2020.11.5
  15. Ивановская Н. П., Шилов И. П., Иванов А. В. и др. // Рос. нанотехнологии. 2019. Т. 14. № 5–6. С. 87. doi.org/10.21517/1992-7223-2019-5-6-87-95
  16. Шелкунова А. Е., Болтухина Е. В., Румянцева В. Д. и др. // Макрогетероциклы. 2019. Т. 12. № 3. doi.org/10.6060/mhc190658s
  17. Шилов И. П., Кочмарев Л. Ю., Новичихин Е. П. // Мед. техника. 2020. № 6. С. 1.
  18. Хлебцов Б. Н., Панфилова Е. В., Ханадеев В. А. и др. // Рос. нанотехнологии. 2011. Т. 6. № 7–8. С. 112.
  19. Хлебцов Б. Н., Хлебцов Н. Г., Терентюк Г. С. и др. Композитные наночастицы для фотодинамической диагностики. Патент РФ на изобретение № 2463074. Опул. офиц. бюл. «Изобретение. Полезные модели» № 28 от 10.10.2012.
  20. Ivanovskaya N. P., Shilov I. P., Shchamkhalov K. S. et al. // Macroheterocycles. 2015. V. 8. № 1. P. 50. doi.org/10.6060/mhc140715r

## USE OF YTTERBIUM PORPHYRINS COMPLEXES IN CANCER THERANOSTICS

I. P. Shilov<sup>a, \*</sup>, V. D. Rumyantseva<sup>a, b, \*</sup>, A. S. Gorshkova<sup>a</sup>, A. V. Ivanov<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Fryazino Branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,  
Vvedenskii Squar., 1, Fryazino, Moscow Region, 141190 Russian Federation

<sup>b</sup> MIREA – Russian Technological University,  
Vernadsky Prosp., 78, Moscow, 119454 Russian Federation

<sup>c</sup> National Medical Research Center of Oncology named after N. N. Blokhin,  
Kashirskoe Shos., 23, Moscow, 115522 Russian Federation

\*E-mail: laserlab@ms.ire.rssi.ru

Received September 28, 2023, revised December 14, 2023, accepted January 25, 2024

The principles of new cancer theranostics methods based on nanosized Yb-porphyrins complexes have been developed. The obtained data indicate the promise of using synthesized nanoparticles based on Yb-porphyrins complexes for the development of sensitive luminescent diagnostics and theranostics methods for tumors of visually and endoscopically accessible localization. It is shown that laser photothermolysis at a wavelength of 750...800 nm in combination with near-IR luminescent diagnostics (in the spectral range of 900...1100 nm) is a pioneering development in the medical biophotonics. It is predicted that the synthesized structure of the Lexan-polymer matrix + Yb-porphyrin complex + FeO<sub>x</sub> can be in demand for the purposes of neoplasms magneto-luminescent theranostics. It has been established that tumors luminescent diagnostics in combination with photodynamic therapy in the porphyrin absorption band (wavelength 635 nm at an optical exposure dose of ~300 J/cm<sup>2</sup>) using the Fluroscan-type pharmaceutical composition can be used for malignant neoplasms of the skin and mucous membranes.

*Keywords:* theranostics, photodynamic therapy, ytterbium complexes of porphyrins, luminescent diagnostics, malignant neoplasms

УДК 539.23, 621.793.18

## О ВЛИЯНИИ КИСЛОРОДНОЙ БОМБАРДИРОВКИ НА СТРУКТУРООБРАЗОВАНИЕ ПЛЕНОК ОКСИДА ГАФНИЯ

© 2024 г. В. А. Лузанов

Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190 Российская Федерация

E-mail: valery@luzanov.ru

Поступила в редакцию 14.12.2023 г.

После доработки 14.12.2023 г.

Принята к публикации 25.01.2024 г.

Методом магнетронного реактивного распыления в условиях кислородной бомбардировки получены пленки оксида гафния. Структурный анализ показал, что присутствие кислородной бомбардировки в процессе роста пленки приводит к изменениям ближнего порядка в кристаллической структуре полученных пленок.

*Ключевые слова:* оксид гафния, кислородная бомбардировка, фазовый переход

DOI: 10.31857/S0033849424110058, EDN: HOGBLL

Ровно сто лет назад открытие нового элемента – гафния – дало старт многочисленным исследованиям его соединений. В настоящее время оксид гафния  $\text{HfO}_2$ , благодаря своим уникальным физическим свойствам, широко используется в различных областях науки и технологии. Высокий коэффициент преломления в сочетании с низким поглощением в широком диапазоне длин волн определяют его применение в качестве просветляющего покрытия для приборов, работающих как в ультрафиолетовой области, так и в ИК-диапазоне. Высокая диэлектрическая проницаемость, низкие токи утечки и высокая термостабильность дает преимущество в использовании пленок оксида гафния в качестве изолятора в структурах металл–диэлектрик–металл, например, в ячейках памяти с произвольным доступом.

Изучение оксида гафния показало существование трех полиморфных модификаций: моноклинной, кубической и тетрагональной. Стабильная при температуре ниже  $1650^\circ\text{C}$ , моноклинная фаза является неполярной, так же как и другие высокотемпературные фазы. Тем удивительнее было обнаружение сегнетоэлектрических свойств в тонких пленках оксида гафния. В [1] авторы сообщили о том, что при определенных условиях в тонких (около 10 нм) пленках на основе  $\text{HfO}_2$  наблюдается образование орторомбической фазы, связанной с сегнетоэлектрическими свойствами таких пленок.

Как известно, зачастую физические свойства материалов в виде пленок отличаются от объемных материалов и зависят от используемого метода получения. Это касается и оксида гафния. В последнее время для осаждения пленок  $\text{HfO}_2$  были использованы многочисленные методы:

радиочастотное распыление [2], импульсное лазерное осаждение [3], химическое осаждение из газовой фазы [4], золь-гель-процесс [5].

В данной работе для осаждения пленок оксида гафния использовали метод магнетронного распыления керамической мишени  $\text{HfO}_2$  в высокочастотном разряде с частотой 13.56 МГц. В качестве подложек применяли пластины кремния с напыленным слоем платины. После достижения остаточного давления  $1.5 \cdot 10^{-4}$  Па в камеру напустили смесь аргона и кислорода в соотношении 10:1. При плотности мощности разряда около 2 Вт/см<sup>2</sup> и давлении рабочей смеси 0.4 Па скорость осаждения пленки составила 200 нм/ч. Радиационный нагрев подложки во время напыления обеспечивал достаточную поверхностную подвижность осаждаемых частиц для кристаллизации оксида. Структуру полученных пленок исследовали методами рентгеновской дифрактометрии и спектроскопии комбинационного рассеяния.

Известно [2], что при использовании метода реактивного магнетронного осаждения для получения оксидных пленок подложка во время напыления испытывает бомбардировку отрицательными ионами кислорода. При этом интенсивность такой бомбардировки меняется в зависимости от расположения подложки относительно распыляемой мишени. Это обусловлено тем, что максимальная плотность ионов кислорода в плазме находится в области, где векторы направлений магнитного и электрического полей перпендикулярны друг другу. При этом, как было показано, данная бомбардировка приводит к модификации структуры растущей пленки, в частности, к изменению направления преимущественного роста определенных кристаллографических



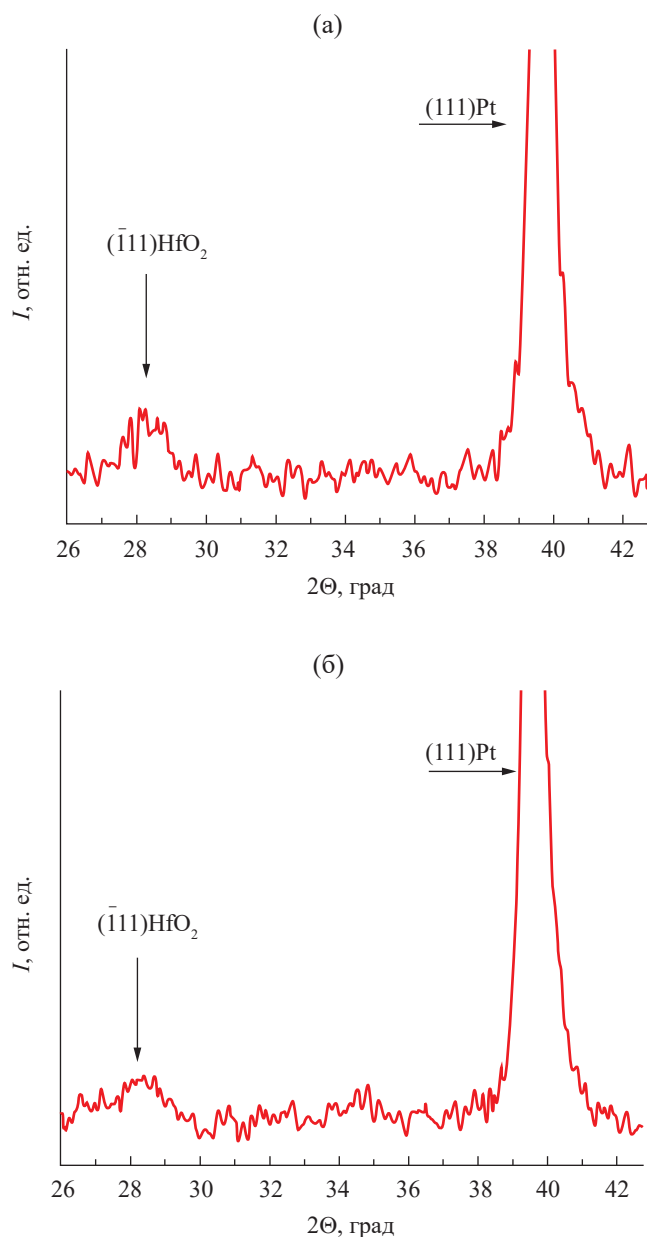
плоскостей. Также может приводить к изменению структуры ближнего порядка.

Для того чтобы определить влияние кислородной бомбардировки на структуру растущей пленки оксида гафния, подложки при напылении помещали в области с различной интенсивностью бомбардировки. Полученные пленки исследовали методами рентгеноструктурного анализа и спектроскопии комбинационного (рамановского) рассеяния. На рентгеновских дифрактограммах (рис. 1) нет заметных отличий для пленок, полученных при расположении подложки в областях с разной

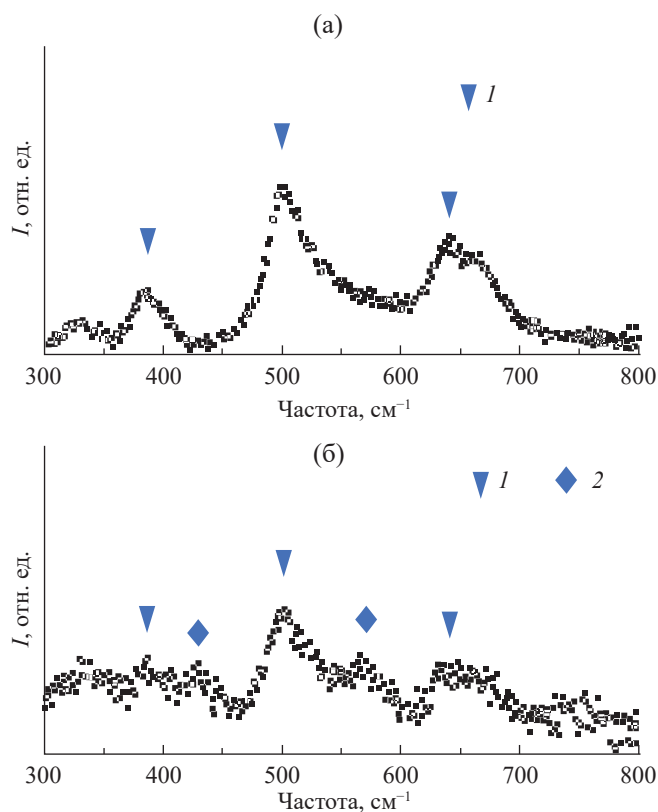
интенсивностью бомбардировки. Однако на рамановских спектрах (рис. 2) они есть.

Как видно из рис. 2а, в пленках, полученных при минимальной интенсивности кислородной бомбардировки, наблюдаются только линии, характерные для моноклинной фазы оксида гафния. На рис. 2б представлен спектр от пленок, выращенных в условиях повышенной бомбардировки. Видно, что кроме линий моноклинной фазы появились дополнительные рефлекссы на 430 и 570  $\text{см}^{-1}$ . Согласно [6] их можно отнести к тетрагональной фазе  $\text{HfO}_2$ .

Таким образом, можно сделать вывод, что энергии отрицательных ионов кислорода, бомбардирующих растущую пленку, оказывается достаточно для перехода из равновесной моноклинной фазы в более неравновесные, одной из которых является тетрагональная. Также оказывается возможен переход и в орторомбическую фазу. Это подтверждается исследованием структур на основе этих пленок [7], где было показано наличие у них сегнетоэлектрических свойств. При этом эффект сохраняется и в пленках толщиной более 100 нм.



**Рис. 1.** Рентгеновская дифрактограмма от пленки  $\text{HfO}_2$ , осажденной при минимальной (а) и максимальной (б) кислородной бомбардировке.



**Рис. 2.** Рамановский спектр от пленки  $\text{HfO}_2$ , осажденной при минимальной (а) и максимальной (б) кислородной бомбардировке: 1 – моноклинная фаза, 2 – тетрагональная фаза.



## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-49-10, <https://rscf.ru/project/23-49-10014>)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Börscke T., Müller J., Bräuhaus D. et al. // Int. Electron Devices Meeting. 2011. P. 24.5.1.
2. Grüger H., Kunath C., Kurth E. et al. // Thin Solid Films. 2004. № 447. P. 509.
3. Cavalieri M., O'Connor É., Gastaldi C. et al. // ACS Appl. Electron. Mater. 2020. V. 2. № 6. P. 1752.
4. He J. Q., Teren A., Jia C. L. et al. // J. Crystal Growth. 2004. № 262. P. 295.
5. Tongpenga S., Makbuna K., Peanporma P. et al. // Materials Today: Proceedings. 2019. V. 17. Pt. 4. P. 1555.
6. Belo G. S., Nakagomi F., Minko A. et al. // Appl. Surf. Sci. 2012. № 261. P. 727.
7. Лузанов В. А., Алексеев С. Г., Ползикова Н. И. // РЭ. 2018. Т. 63. № 9. P. 1015.

## ON THE INFLUENCE OF OXYGEN BOMBARDMENT ON THE STRUCTURE FORMATION OF HAFNIUM OXIDE FILMS

V. A. Luzanov

*Fryazino Branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,  
Vvedenskii Squar., 1, Fryazino, Moscow Region, 141190 Russian Federation  
E-mail: valery@luzanov.ru*

Received December 14, 2023, revised December 14, 2023, accepted January, 25, 2024

Hafnium oxide films were deposited by magnetron reactive sputtering under oxygen bombardment conditions. Structural analysis showed that the presence of oxygen bombardment during film growth leads to changes in the short-range order in the crystal structure of the films obtained.

*Keywords:* hafnium oxide, oxygen bombardment, phase transition

## ПАРАКСИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ВО ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ИНТЕНСИВНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

© 2024 г. Т. М. Сапронова\*, В. А. Сыровой\*

ВЭИ – филиал ФГУП "РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина",  
ул. Красноказарменная, 12, Москва, 111250 Российская Федерация

\*E-mail: red@cplire.ru

Поступила в редакцию 23.12.2023 г.

После доработки 15.03.2024 г.

Принята к публикации 25.03.2024 г.

Приведена оценка параксиальных алгоритмов расчета формирующих электродов для плотного электронного пучка в криволинейных ортогональных координатах. Предложены два варианта ортогональных систем, не имеющих недостатков известных подходов, использованию которых не мешает принципиальное отсутствие ортогональной сетки в области электронного потока (релятивистские пучки с собственным азимутальным магнитным полем; случай магнитного поля под острым углом к катоду). Выполнено тестирование различных алгоритмов решения задачи с использованием известных точных решений.

*Ключевые слова:* формирующие электроды, параксиальная модель, криволинейные ортогональные координаты

DOI: 10.31857/S0033849424110063, EDN: HOFXXJ

### ВВЕДЕНИЕ

Приближенные модели узких электронных пучков основываются на классической асимптотической теории параксиальных и кольцевых потоков, изложение которой можно найти в монографии [1], использовании ортогональных криволинейных координат [2–4] и геометризованной теории [5, 6]. Аппаратом всех этих подходов являются обыкновенные дифференциальные уравнения, через решения которых в численном виде выражаются потенциал в потоке, нормальное электрическое поле на трубке тока и сама геометрия течения.

При расчете формирующих электродов существуют две возможности: либо смотреть на результат приближенных построений как на точный и использовать известные в этом случае подходы, либо заниматься конструированием приближенных параксиальных моделей и во внешней задаче [1, 7–9].

Одна из основных трудностей при любом составе исходной информации, аналитической или численной, состоит в построении в лапласовской области координатной сетки, удовлетворяющей требованию однозначности на удалениях от границы пучка, достаточных для расчета эффективной электронно-оптической системы.

Как точные алгоритмы, так и численные подходы с выходом в комплексное пространство, где мнимые характеристики уравнения Лапласа

становятся действительными [9–11], вынуждены иметь дело не с конформным отображением внешности границы пучка на какую-либо каноническую область, а с аппаратом аналитического продолжения, не гарантирующего упомянутых свойств криволинейной системы. Особые точки и области неоднозначности, как правило, формируются возле вогнутых участков границы. Универсальная система  $l, s$  (длина дуги образующей трубки тока, нормаль к ней) приводит к пересечению нормалей на расстояниях порядка радиуса кривизны траектории. При строгом выполнении требований параксиальной теории (малая кривизна) этого могло бы быть достаточно, но в практических задачах соответствующие критерии редко выполнимы. Длинные узкие пучки в диодном варианте требуют электродов с поперечным размером порядка продольной протяженности системы, либо перехода к совокупности коротких формирующих электродов.

Цель работы – оставаясь в рамках параксиального приближения, сформулировать алгоритмы построения однозначной сетки и решения задачи для сплошных осесимметричных, трубчатых и ленточных потоков и сравнить возможные приближенные модели с существующими точными решениями этой проблемы.

1. КРИВОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА, СВЯЗАННАЯ СО ВСЕМ ПОЛЕМ ТЕЧЕНИЯ, В ОБЛАСТИ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ

В работе [10] решение уравнения Лапласа предложено искать в системе координат, связанной с геометрией потока, в которой описывается и сам пучок, в виде

$$\varphi = \varphi_i + \varepsilon^2 S, \tag{1}$$

где  $\varphi_i$  – потенциал в пучке,  $S$  – функция второго порядка малости, удовлетворяющая уравнению Пуассона с членом  $(-\rho)$  в правой части ( $\rho$  – плотность пространственного заряда) и однородными условиями на границе течения. Поперечная координата  $\eta$  описывается выражением

$$R = \eta R_1(z) \tag{2}$$

где  $R_e = \eta_e R_1(z)$  – уравнение границы.

В работе [11] это предложение распространено на теорию второго приближения, причем модифицированная формула (2) описывает кривые, не удовлетворяющие требованию подобия:

$$\begin{aligned} R &= \eta R_1(z) + \eta^3 R_3(z), \\ R_e &= \eta_e R_1(z) + \eta_e^3 R_3(z). \end{aligned} \tag{3}$$

Форма (1) оказалась эффективной в общетеоретическом плане при работе с точными решениями  $\varphi_i$  ( $\varepsilon = 1$ ): в работах [12–15] с ее помощью получен новый вид точного решения внешней задачи для произвольного осесимметричного потока, цилиндрического пучка с произвольным сечением, произвольного клиновидного потока, однако в приложении к приближенным моделям электронных пучков она имеет следующие недостатки.

При однозначной криволинейной сетке (2) для решения внешней задачи по алгоритму [10] необходимо часть интервала по  $\eta$ , в которой ряд для  $\varphi_i$  обнаруживает тенденцию к сходимости, зарезервировать для решения внешней задачи, тем самым отказываясь от возможности описать более широкий пучок.

Во втором приближении в дополнение к указанному ограничению добавляется генерация неоднозначной сетки. На рис. 1 приведены координатные линии  $\eta = \text{const}$  для второго приближения геометризованной теории осесимметричных электростатических пучков [16]. Электроды для электронного потока на рис. 1а с границей  $\eta_e = 0.5$  при  $Z = 3$  можно рассчитать в области  $\eta \leq 0.75$  явно недостаточной для эффективного формирования пучка. Для  $\eta = 1.2$  вблизи  $Z = 3$  начинаются самопересечения координатных линий, при больших значениях  $\eta$  система становится неоднозначной и непригодной как для расчета потока, так и формирующих

электродов. Ситуация усугубляется для более широкого пучка  $\eta_e = 0.75$  (рис. 1б).

На рис. 2 представлены координатные линии  $\eta = \text{const}$  и распределение потенциала на них в трех приближениях геометризованной теории для эталонного решения с эллиптическими орбитами частиц при отношении полуосей базовой трубки тока  $a/b = 3$  и увеличении начальной ширины потока  $f(0)$  [17]. Из рис. 2б,  $f(0) = 0.25$ , начиная со второго приближения видно изменение качественной картины траекторий с образованием вогнутой части с большой кривизной в третьем приближении. Потенциал при этом обнаруживает тенденцию к сходимости: максимальная относительная ошибка  $\delta_\varphi = 5.9\%$ ,  $4.0\%$ ,  $2.7\%$ . При  $f(0) = 0.3$  (рис. 2б) в третьем приближении образуется петля на возможной внешней границе пучка, в то время как для потенциала  $\delta_\varphi = 7.5\%$ ,  $5.4\%$ ,  $5.0\%$ . При  $f(0) = 0.4$  (рис. 2в) петля линии  $\eta = 1.96$  в третьем приближении приобретает размеры, сравнимые с малой полуосью эллипса;

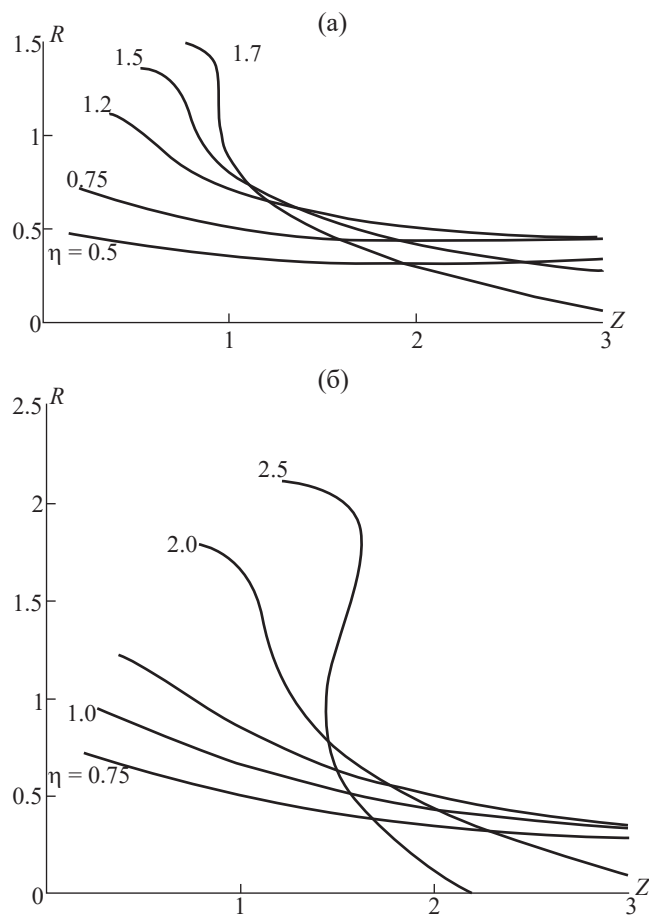


Рис. 1. Координатные линии  $\eta = \text{const}$  для второго приближения геометризованной теории осесимметричных электростатических пучков: начальная ширина пучка  $R_e = 0.5$  (а) и  $0.75$  (б).

система настолько неоднозначна, что аналогичный эффект наблюдается и для кривой  $\varphi = \varphi(X)$  (рис. 2г).

Приведенные примеры иллюстрируют очевидное свойство приближенного решения: терять смысл, начиная с некоторой величины параметра, по которому строится ряд. Система координат в области внешней задачи лишилась необходимого свойства однозначности раньше, чем выражение для потенциала в пучке  $\varphi_r$ .

В силу сказанного представляется целесообразным, сохранив аппарат описания пучка для самого электронного потока, построить решение внешней задачи в специально организованной криволинейной системе, не обладающей продемонстрированными недостатками.

Будем считать, что в результате рассмотрения занятой зарядами области нам известны форма границы, потенциал и нормальное поле на ней:

$$R = R_e(z), \varphi = \varphi_e(z), E_y = E_y(z). \quad (4)$$

Все приводимые ниже соотношения даны в нормировках, исключающих физические константы используемой системы единиц [1].

### 2. СПЛОШНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПУЧКИ

*Координатные линии, подобные границе пучка.* В отличие от (3) определим систему, связанную с границей пучка  $\eta = 1$ , формулой

$$R = \eta R_e(z), R_e = \eta_e R_1(z) + \eta_e^3 R_3(z) + \dots, \quad (5)$$

где функция  $R_e(z)$  может включать произвольное число слагаемых, соответствующих номеру приближения. Вторая координата  $\xi$  ортогональной системы описывается выражением

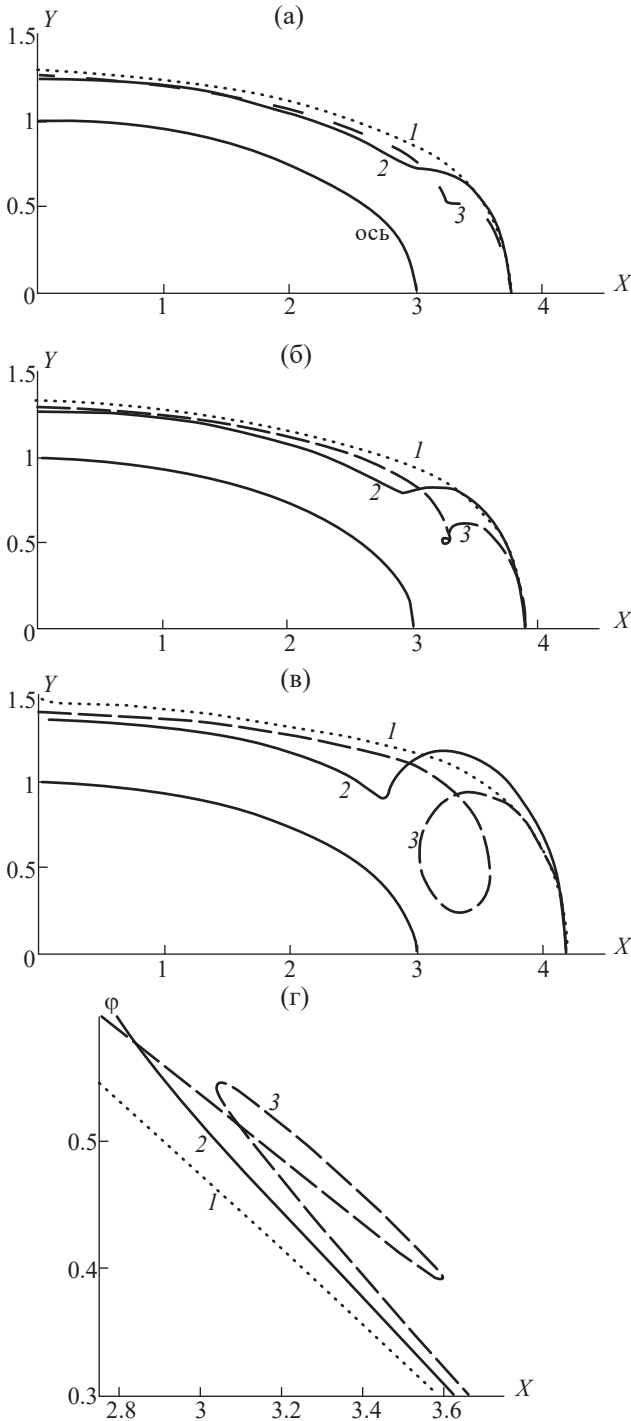
$$\xi = \frac{1}{2} R^2 + \int \frac{R_e}{R_e'} dz. \quad (6)$$

По сравнению с величиной  $\xi$  в [10] формула (6) дает явную зависимость  $\xi$  от  $R, z$ , но при этом не совпадает с  $z$  на оси пучка, которая не входит в область рассмотрения.

Производные от  $R, z$  по  $\xi, \eta$  ( $R_{,\xi} \equiv \partial R / \partial \xi$ ) и коэффициенты Ляме в системе (5), (6) имеют вид

$$\begin{aligned} R_{,\xi} &= \frac{RR_e'^2}{R^2 R_e'^2 + R_e^2}, & R_{,\eta} &= \frac{R_e^3}{R^2 R_e'^2 + R_e^2}, \\ z_{,\xi} &= \frac{R_e R_e'}{R^2 R_e'^2 + R_e^2}, & z_{,\eta} &= -\frac{RR_e^2 R_e'}{R^2 R_e'^2 + R_e^2}; \\ h_1 &= \frac{R_e'}{\sqrt{R^2 R_e'^2 + R_e^2}}, & h_2 &= \frac{R_e^2}{\sqrt{R^2 R_e'^2 + R_e^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение Лапласа в предположении  $\partial/\partial \xi \sim \epsilon$  запишется следующим образом:



**Рис. 2.** Координатные линии  $\eta = \text{const}$  (а, б, в) и распределение потенциала (г) в трех приближениях (1, 2, 3) геометризованной теории для потока с эллиптической границей при различной начальной ширине пучка:  $f(0) = 0.25$  (а),  $0.3$  (б),  $0.4$  (в).

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_1 R}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_2 R}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{R'_e}{R_e} \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = -\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{R_e^3}{R'_e} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \xi} \right).$$

Как и всегда в параксиальных моделях, нас интересуют члены с  $\eta$  в степени, не выше второй. Последний член во втором уравнении (8) выписан на границе  $\eta = 1$ , где между  $\xi$  и  $z$  существует связь

$$\xi = \frac{1}{2} R_e^2(z_e) + \int_{z_e}^z \frac{R_e}{R'_e} dz, \quad z_e = z(\xi, 1), \tag{9}$$

и зависит только от  $\xi$ . Производная по криволинейной координате  $\xi$  при  $\eta = 1$  описывается формулой

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = z_{,\xi} \frac{d}{dz} = \frac{R'_e}{R_e(1 + R_e'^2)} \frac{d}{dz}. \tag{10}$$

Учитывая соотношение (10), получаем

$$\Phi(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{R_e^3}{R'_e} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \xi} \right) = \frac{R'_e}{(1 + R_e'^2)^2} \left[ R_e \Phi_e'' + \frac{2R'_e}{1 + R_e'^2} (1 + R_e'^2 - R_e R_e'') \Phi_e' \right]. \tag{11}$$

Представим функцию  $R'_e/R_e$  в левой части уравнения Лапласа в виде разложения по  $\bar{\eta} = \eta - 1$ :

$$\frac{R_e}{R'_e} = F(z(\xi, \eta)) = F_0(z_e) + F_1(z_e) \bar{\eta} + \frac{1}{2} F_2(z_e) \bar{\eta}^2;$$

$$F_0 = \frac{R_e(z_e)}{R'_e(z_e)}, \quad F_1 = -\frac{R_e R'_e}{1 + R_e'^2} F', \quad \bar{F}_k \equiv \frac{F_k}{F_0},$$

$$F_2 = \frac{R_e^2 R_e''}{(1 + R_e'^2)^2} F'' + \frac{R_e R'_e}{(1 + R_e'^2)^2} \left[ R_e'^2 + \frac{R_e(2 - R_e'^2) R_e''}{1 + R_e'^2} \right];$$

$$F' = 1 - \frac{R_e R_e''}{R_e'^2},$$

$$F'' = \frac{1}{R_e^3} (-R_e R'_e R_e''' + 2R_e R_e''^2 - R_e'^2 R_e''). \tag{12}$$

Последовательно оставляя в уравнении (8) члены порядка  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$ , в результате интегрирования получаем

$$\Phi = \Phi_e + \frac{\Phi_1}{F_0} (1 + \bar{F}_1 - \bar{F}_2 + \bar{F}_1^2) \ln \eta + \frac{1}{F_0} \left[ -(1 + \bar{F}_2 - \bar{F}_1^2) \Phi - (\bar{F}_1 - \bar{F}_2 + \bar{F}_1^2) \Phi_1 \right] \bar{\eta} +$$

$$+ \frac{1}{2F_0} \left[ (\bar{F}_1 - 2\bar{F}_2 + 2\bar{F}_1^2) \Phi - (\bar{F}_2 - \bar{F}_1^2) \Phi_1 \right] \bar{\eta}^2, \tag{13}$$

$$\Phi_1 = F_0 \Phi_{,\eta e} + (1 + \bar{F}_2 - \bar{F}_1^2) \Phi.$$

При малых  $\bar{\eta}$  логарифм ведет себя как квадратичная функция:

$$\ln \eta = \bar{\eta} - \frac{1}{2} \bar{\eta}^2. \tag{14}$$

Система, образованная трансляцией границы пучка вдоль оси  $R$ . Ортогональная система, связанная с границей пучка  $\eta = 0$ , определена формулами

$$\xi = R + \int \frac{dz}{R'_e}, \quad \eta = R - R_e(z);$$

$$R_{,\xi} = \frac{R_e'^2}{1 + R_e'^2}, \quad R_{,\eta} = \frac{1}{1 + R_e'^2},$$

$$z_{,\xi} = \frac{R'_e}{1 + R_e'^2}, \quad z_{,\eta} = -\frac{R'_e}{1 + R_e'^2},$$

$$h_1 = \frac{R'_e}{\sqrt{1 + R_e'^2}}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + R_e'^2}}. \tag{15}$$

Уравнение Лапласа в системе (15) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ R'_e (\eta + R_e) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right] = -\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{R_e}{R'_e} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \xi} \right). \tag{16}$$

Раскладывая сомножитель производной  $\partial \Phi / \partial \eta$  в ряд, имеем

$$R'_e (\eta + R_e) = R_e(\xi) R'_e(\xi) \left[ 1 + \frac{1 + R_e R_e''}{R_e (1 + R_e'^2)} \eta \right]. \tag{17}$$

Интегрирование уравнения (16) приводит к следующему результату:

$$\Phi = \Phi_e(\xi) + \Phi_{,\eta e}(\xi) \eta - \frac{1}{2} \left[ \frac{\Phi}{R_e R'_e} + \frac{1 + R_e R_e''}{R_e (1 + R_e'^2)} \Phi_{,\eta e} \right] \eta^2,$$

$$\Phi(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{R_e}{R'_e} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \xi} \right) = \frac{R'_e}{(1 + R_e'^2)^2} \left[ R_e \Phi_e'' + R'_e \Phi_e' - \frac{2R_e R'_e R_e'' \Phi_e'}{1 + R_e'^2} \right]. \tag{18}$$

### 3. ТРУБЧАТЫЕ И ЛЕНТОЧНЫЕ ПУЧКИ

Для трубчатых пучков вывод формул основан на разложении коэффициентов Ляме в ряд по  $\eta$



и приравнивании членов с одинаковыми степенями этой координаты в уравнении Лапласа.

Координатные линии, подобные границе осесимметричного пучка. Для разложений коэффициентов Ляме (7) системы  $\xi, \eta$  имеем

$$\xi = \frac{1}{2}R^2 + \int \frac{R_e}{R_e'} dz, \quad \eta = \frac{R}{R_e(z)}, \quad \bar{\eta} = \eta - 1;$$

$$h_1 = a_0(1 + \bar{a}_1\bar{\eta} + \dots), \quad h_2 = b_0(1 + \bar{b}_1\bar{\eta} + \dots),$$

$$h_3 = R = R_0(1 + \bar{R}_1\bar{\eta} + \dots), \quad R_0 = R_e(z_e),$$

$$R_1 = R_{,\eta e}(z_e), \quad z_e = z(\xi, 1). \quad (19)$$

Будем искать решение уравнения Лапласа из (8) в виде

$$\varphi = \varphi_e(\xi) + \varphi_{,\eta e}(\xi)\bar{\eta} + \varphi_2(\xi)\bar{\eta}^2. \quad (20)$$

Подстановка разложений (19), (20) в (8) дает выражение для  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{2}(\bar{a}_1 - \bar{b}_1 + \bar{R}_1)\varphi_{,\eta e},$$

$$\Phi = \frac{b_0}{a_0 R_0} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{b_0 R_0}{a_0} \frac{d\varphi_e}{d\xi} \right). \quad (21)$$

Коэффициенты Ляме на границе потока определены формулами

$$a_0(\xi) = \frac{R_e'}{R_e \sqrt{1 + R_e'^2}},$$

$$b_0(\xi) = \frac{R_e}{\sqrt{1 + R_e'^2}}, \quad z_e = z(\xi, 1). \quad (22)$$

Функции  $a_1, b_1$  вычисляются по следующим правилам:

$$a_1(\xi) = (h_{1,\eta})_e = (h_{1,z}z_{,\eta} + h_{1,R}R_{,\eta})_e = -\frac{R_e'R_e''}{(1 + R_e'^2)^{5/2}},$$

$$b_1(\xi) = (h_{2,\eta})_e = (h_{2,z}z_{,\eta} + h_{2,R}R_{,\eta})_e =$$

$$= -\frac{R_e R_e'^2 (2 + 2R_e'^2 - R_e R_e'')}{(1 + R_e'^2)^{5/2}}. \quad (23)$$

Входящие в формулу (21) величины имеют вид

$$\bar{a}_1 = \frac{R_e R_e''}{(1 + R_e'^2)^2}, \quad \bar{b}_1 = -\frac{R_e'^2 (2 + 2R_e'^2 - R_e R_e'')}{(1 + R_e'^2)^2},$$

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{1 + R_e'^2},$$

$$\Phi(\xi) = \frac{(R_e'^2 \varphi_e')'}{(1 + R_e'^2)^2} - 2 \frac{R_e'^2 R_e' R_e'' \varphi_e'}{(1 + R_e'^2)^3}. \quad (24)$$

Используя формулы (24), для функции  $\varphi_2$  получаем

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\Phi(\xi) - \frac{1}{2} \frac{1 + 2R_e'^2 - R_e R_e''}{1 + R_e'^2} \varphi_{,\eta e},$$

$$\varphi_{,\eta e} = \frac{R_e}{\sqrt{1 + R_e'^2}} E_v. \quad (25)$$

Ленточные пучки. Для плоских потоков с границей  $y = y_e(x)$ , формулы осесимметричного случая модифицируются следующим образом:

$$\varphi = \varphi_e(\xi) + \varphi_{,\eta e}(\xi)\bar{\eta} + \varphi_2(\xi)\bar{\eta}^2;$$

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{y_e'^2}{y_e'}, \quad z_{,\xi} = \frac{y_e'}{y_e(1 + y_e'^2)}, \quad \bar{a}_1 - \bar{b}_1 = \frac{2y_e'y_e'' - y_e y_e'''}{1 + y_e'^2},$$

$$\Phi(\xi) = \frac{y_e(y_e \varphi_e')'}{(1 + y_e'^2)^2} - 2 \frac{y_e^2 y_e' y_e''}{(1 + y_e'^2)^3} \varphi_e',$$

$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\Phi(\xi) - \frac{1}{2} \frac{2y_e'^2 - y_e y_e''}{1 + y_e'^2} \varphi_{,\eta e}. \quad (26)$$

Система, образованная трансляцией границы, трубчатые пучки. В формулу для потенциала входят следующие функции, описывающие трубчатые пучки:

$$\xi = R + \int \frac{dz}{R_e'}, \quad \eta = R - R_e(z);$$

$$\varphi = \varphi_e(\xi) + \varphi_{,\eta e}(\xi)\eta + \varphi_2(\xi)\eta^2;$$

$$a_0(\xi) = \frac{R_e'}{\sqrt{1 + R_e'^2}}, \quad b_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + R_e'^2}},$$

$$\frac{b_0 R_0}{a_0} = \frac{R_e}{R_e'}, \quad \frac{b_0}{a_0 R_0} = \frac{1}{R_e R_e'},$$

$$a_1(\xi) = -\frac{R_e' R_e''}{(1 + R_e'^2)^{5/2}}, \quad b_1(\xi) = \frac{R_e'^2 R_e''}{(1 + R_e'^2)^{5/2}},$$

$$\bar{a}_1(\xi) = -\frac{R_e''}{(1 + R_e'^2)^2}, \quad \bar{b}_1(\xi) = \frac{R_e'^2 R_e''}{(1 + R_e'^2)^2},$$

$$\Phi(\xi) = \frac{b_0}{a_0 R_0} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{b_0 R_0}{a_0} \frac{d\varphi_e}{d\xi} \right) =$$

$$= \frac{1}{(1 + R_e'^2)^2} \left[ \frac{(R_e \varphi_e')'}{R_e} - \frac{2R_e' R_e'' \varphi_e'}{1 + R_e'^2} \right]. \quad (27)$$

Фрагмент второго порядка малости  $\varphi_2$  определен выражением

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= -\frac{1}{2}\Phi(\xi) - \frac{1}{2}(\bar{a}_1 - \bar{b}_1 + \bar{R}_1)\varphi_{,\eta e} = \\ &= -\frac{1}{2}\Phi(\xi) + \frac{1}{2}\frac{1 + R_e R_e''}{R_e(1 + R_e'^2)^2}\varphi_{,\eta e}, \\ \varphi_{,\eta e} &= \sqrt{1 + R_e'^2} E_v.\end{aligned}\quad (28)$$

*Ленточные потоки.* Функции  $\Phi(\xi)$ ,  $\varphi_2(\xi)$  для ленточных пучков следуют из (27), (28) при  $R_e \rightarrow \infty$  с заменой  $R_e(z)$  на  $y_e(x)$ :

$$\begin{aligned}\xi &= y + \int \frac{dx}{y_e'}, \quad \eta = y - y_e(x), \\ \varphi &= \varphi_e(\xi) + \varphi_{,\eta e}(\xi)\eta + \varphi_2(\xi)\eta^2, \\ \bar{a}_1 - \bar{b}_1 &= -\frac{y_e''}{1 + y_e'^2}, \quad \Phi(\xi) = \frac{1}{(1 + y_e'^2)^2} \left[ \varphi_e'' - \frac{2y_e' y_e'' \varphi_e'}{1 + y_e'^2} \right], \\ \varphi_2(\xi) &= -\frac{1}{2}\Phi(\xi) + \frac{1}{2}\frac{y_e''}{1 + y_e'^2}\varphi_{,\eta e}.\end{aligned}\quad (29)$$

Отметим, что все производные, определяющие решение внешней задачи, присутствуют в алгоритме приближенного описания самого пучка и не требуют аппроксимации результатов для выполнения численного дифференцирования. Обращение  $h_1$  в нуль за счет равенств  $R_e' = 0$  или  $y_e' = 0$ , имеющих место при эмиссии с плоскости или в кроссовере, может приводить к сложностям при построении решения внешней задачи.

*Система  $\xi$ ,  $\eta$  с конформной метрикой.* Для пучков, которые могут быть описаны в подобной системе, уравнение Лапласа и его параксиальное решение имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} &= 0, \quad \varphi = \varphi_e(\xi) + \\ &+ \varphi_{,\eta e}(\xi)\eta - \frac{1}{2}\varphi_{e,\xi\xi}(\xi)\eta^2.\end{aligned}\quad (30)$$

*Система  $l$ ,  $s$  классической параксиальной теории.* В системе  $l$ ,  $s$  (длина дуги образующей, нормаль к ней) параксиальное решение внешней задачи для тонких трубчатых пучков описывается формулой

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_e(l) + \varphi_{,se}(l)s + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{R_e} (R_e \varphi_{e,l})_{,l} + (k_1 + k_2)\varphi_{,se} \right] s^2,\end{aligned}\quad (31)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$  — главные кривизны граничной трубки тока. На вогнутых участках границы система теряет однозначность на расстояниях порядка радиуса кривизны  $1/k_1$  из-за пересечения нормалей из разных точек контура.

Для ленточных пучков имеем

$$\varphi = \varphi(l) + \varphi_{,se}(l)s + \frac{1}{2}(-\varphi_{e,ll} + k_1\varphi_{,se})s^2.\quad (32)$$

В сформулированных выше алгоритмах (для определенности будем говорить о ленточных пучках в системе с трансляцией) производные от декартовых координат  $x$ ,  $y$  по криволинейным координатам  $\xi$ ,  $\eta$  и коэффициенты Ляме зависят от  $x$ . Множители перед степенями  $\eta$  в формуле для  $\varphi$  выражаются через производные по  $x$  от функции  $y = y_e(x)$ , определяющей границу пучка. Эти производные, однако, записываются при  $\eta = 0$ , поэтому величина  $x$  перестает быть декартовой координатой  $x = x(\xi, \eta)$  и становится функцией  $\xi$ :  $x_e = x(\xi, 0)$ . По этой причине построение эквипотенциалей сводится к следующему. Задав на границе пучка точку  $x_0$ , получим величину потенциала  $\varphi_0$ , которую мы хотели бы отследить. Смещаясь от  $x_0$  в ту или другую сторону, фиксируем значение  $x_*$ , которое определит величину  $\xi_*$  в этой точке границы. Изменяя  $x$ , движемся вдоль линии  $\xi = \xi_*$ , причем координата  $y$  при этом меняется по закону

$$y_* = \xi_* - \int_{x_*}^x \frac{dx}{y_e'}.\quad (33)$$

Соответствующее значение  $\eta_*$

$$\eta_* = y_* - y_e(x)\quad (34)$$

позволяет вычислить величину потенциала  $\varphi_*$ , коэффициенты в формуле для которого являются функциями  $\xi_*$ , и сравнить  $\varphi_*$  с  $\varphi_0$ . При совпадении координаты эквипотенциала  $\varphi = \varphi_0$  определяются парой  $(x, y_*)$ .

#### 4. ТЕСТИРОВАНИЕ ПАРАКСИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Для тестирования параксиальных моделей мы располагаем решениями внешней задачи в элементарных функциях для трех эталонных потоков: плоского электростатического течения с гиперболической границей [18, 19], плоского течения с эллиптическими орбитами частиц в однородном магнитном поле [20–23], потока в плоском магнетроне с магнитным полем под острым углом к катоду (пространственные траектории на цилиндрических трубках тока с криволинейными направляющими) [24, 25]. В четвертом случае для течения с траекториями-окружностями [26] решение внешней задачи содержит определенный интеграл.

*Электростатический поток с равнобочной гиперболой в качестве границы.* Точные выражения для траекторий и потенциала в потоке определены формулами

$$\eta = xy = \text{const}, \quad \varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).\quad (35)$$

Решение внешней задачи в элементарных функциях для гиперболической границы  $\eta = 1$  описывается выражениями [1, 19]

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \sqrt{m} \cos \frac{\vartheta}{2} + \theta, \quad w = u + iv; \\ \sqrt{w^2 + 1} &= \sqrt{m} \exp(i\vartheta/2), \quad w + \sqrt{w^2 + 1} = M \exp(i\theta); \\ u = \xi, \quad v &= \eta - 1, \quad \xi = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \eta = xy. \end{aligned} \quad (36)$$

Система  $\xi, \eta$  с подобными границе линиями. Построение линий, подобных граничной кривой  $\eta_e = 1$ , приводит к системе с конформной метрикой и решению в форме (31):

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad \eta = xy, \quad \bar{\eta} = xy - 1; \\ \varphi &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \varphi_e = \sqrt{\xi^2 + 1}, \quad \varphi_{,\eta e} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}}, \\ \varphi_{e,\xi\xi} &= \frac{1}{(\xi^2 + 1)^{3/2}}; \\ \varphi &= \sqrt{\xi^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \bar{\eta} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} \bar{\eta}^2. \end{aligned} \quad (37)$$

На рис. 3 приведено сравнение решения (37) и точного результата (36).

Применим формулу (1) в однозначной системе (37) с точным выражением потенциала  $\varphi_i$  в пучке, не требуя его узости. Сравнение с решением (36) позволит оценить эффективность формы (1), когда

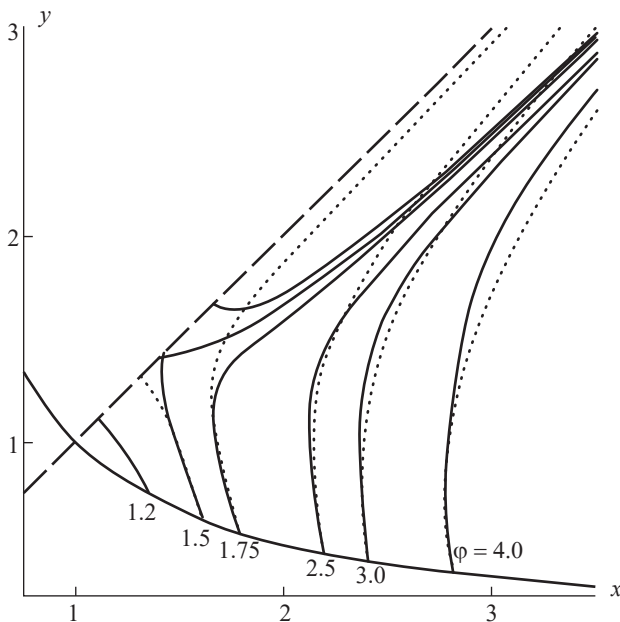


Рис. 3. Решение для гиперболического потока с подобными границе координатными линиями: пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (37).

все травмирующие факторы (неоднозначность сетки, приближенное значение  $\varphi_i$ ) исключены:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_i + S, \quad \varphi_i = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ S &= -\int_1^\eta \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) d\eta + \\ &+ \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 + 1}\right)(\eta - 1). \end{aligned} \quad (38)$$

Потенциал на линии симметрии меняется по закону

$$\varphi(0, \eta) = 2\eta - \ln \eta - 1, \quad \eta = x^2. \quad (39)$$

Сравнение эквипотенциалей для решений (36), (39) приведено на рис. 4.

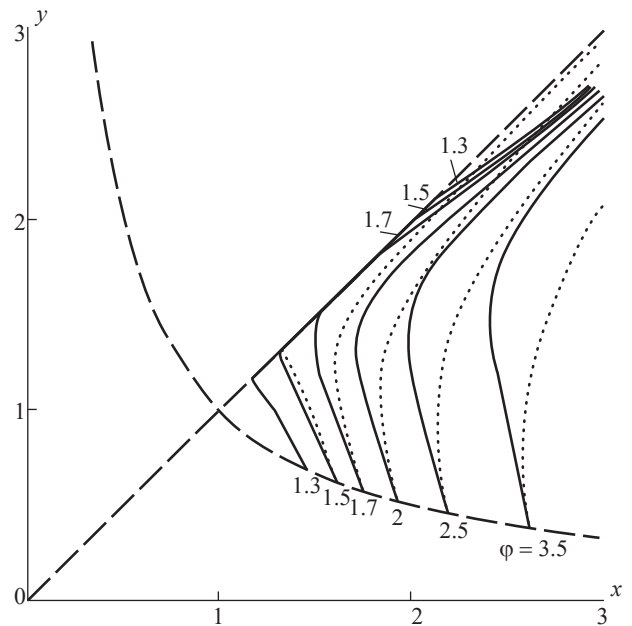


Рис. 4. Решение для гиперболического потока в форме (1) с точным значением  $\varphi_i$ ; пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (38).

Если рассматриваются узкие пучки, то, сохранив квадратичные по  $\bar{\eta}$  члены в разложениях для  $\varphi_i, S$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi_{iар} &= \sqrt{\xi^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \bar{\eta} + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} \bar{\eta}^2, \\ S_{ар} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \bar{\eta}^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Нетрудно проверить, что результат совпадает с формулой (37).

Система  $l, s$ . На основании формулы (32) параксиальное разложение в системе  $l, s$  описывается выражениями

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_e + \varphi_{,se}s + \frac{1}{2}(-\varphi_{e,ll} + k_1\varphi_{,se})s^2; \\ y_e &= \frac{1}{x}, \quad y'_e = -\frac{1}{x^2}, \quad 1 + y_e'^2 = \frac{x^4 + 1}{x^4}, \\ \frac{d}{dl} &= \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}} \frac{d}{dx}, \\ \varphi_e &= \frac{x^4 + 1}{2x^2}, \quad \varphi_{,se} = 2k_1\varphi_e = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}}, \\ k_1 &= \frac{2x^3}{(x^4 + 1)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{41}$$

В формуле для  $\varphi$  удобно перейти от  $l$  к  $x$ , в результате получим

$$\varphi = \frac{x^4 + 1}{2x^2} + \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}}s - \frac{1}{2}s^2. \tag{42}$$

Эквипотенциали, соответствующие выражению (42), приведены на рис. 5. На рис. 6 представлены распределения потенциала на оси симметрии для точного решения и параксиальных вариантов (37), (38), (42). В табл. 1 даны численные значения  $\varphi$ , позволяющие оценить ошибку на разных расстояниях от границы.

Сравнение двух эквипотенциальных кривых для различных вариантов решения демонстрирует рис. 7.

*Система с трансляцией границы.* Вертикальная трансляция границы  $y = 1/x$  нарушает симметрию задачи. Трансляция вдоль оси симметрии

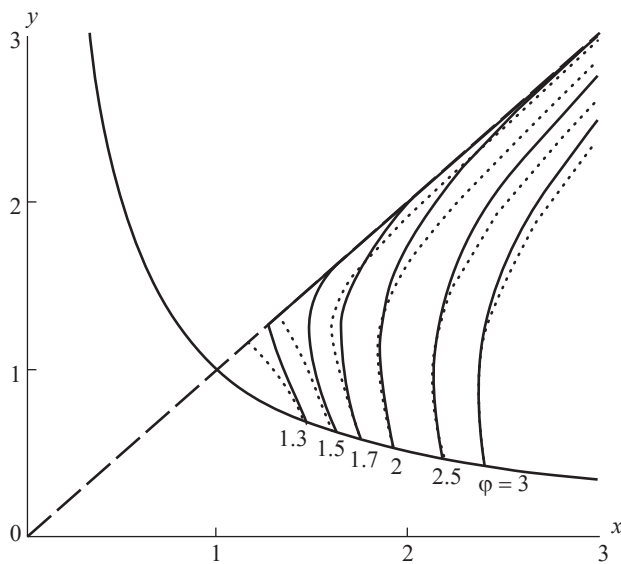


Рис. 5. Решение для гиперболического потока в системе  $l, s$ : пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (42).

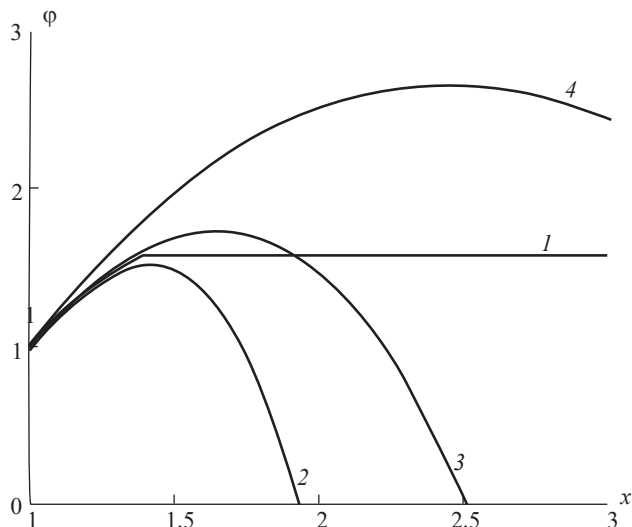


Рис. 6. Распределение потенциала на оси симметрии для гиперболического потока; 1 – точное решение, 2 – модель (37), 3 – модель (38), 4 – модель (42).

Таблица 1. Распределение потенциала на оси симметрии для равнобочной гиперболы

$x$	$\varphi$			
	Точное решение	модель (37)	модель (38)	модель (42)
1	1.0	1.0	1.0	1.0
1.1	1.189	1.188	1.189	1.206
1.2	1.354	1.343	1.355	1.414
1.3	1.485	1.452	1.493	1.613
1.4	1.567	1.499	1.601	1.795
1.5	1.571	1.469	1.675	1.959
1.6	1.571	1.343	1.714	2.103
1.7	1.571	1.104	1.713	2.229

для равнобочной гиперболы  $y = \sqrt{2 + x^2}$ , получающейся из  $y = 1/x$  поворотом на  $45^\circ$ , описывается формулами

$$y_e = \sqrt{2 + x^2}, \quad y'_e = \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}}, \quad 1 + y_e'^2 = \frac{2(1 + x^2)}{2 + x^2};$$

$$\xi = y + \sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2} \left[ \ln \left( \sqrt{2} + \sqrt{2 + x^2} \right) - \ln x \right],$$

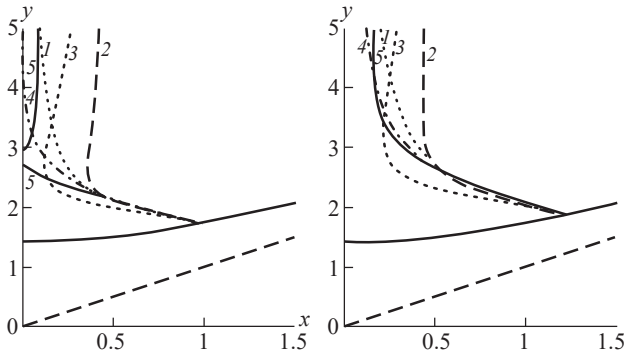
$$\eta = y - y_e; \quad \varphi = \varphi_e + \varphi_{,\eta e}\eta + \varphi_{2,\eta^2}\eta^2; \tag{43}$$

$$\varphi_e = x^2 + 1, \quad \varphi_{,\eta e} = \frac{\sqrt{2 + x^2}}{1 + x^2},$$

$$\Phi_2 = -\frac{2+x^2}{4(1+x^2)^3}(x^4+x^2+2) + \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\Phi_{,ne}$$

где  $x$  означает  $x(\xi, 0)$

Эквипотенциалы, построенные по формулам (43) с учетом (33), (34) приведены на рис. 8.



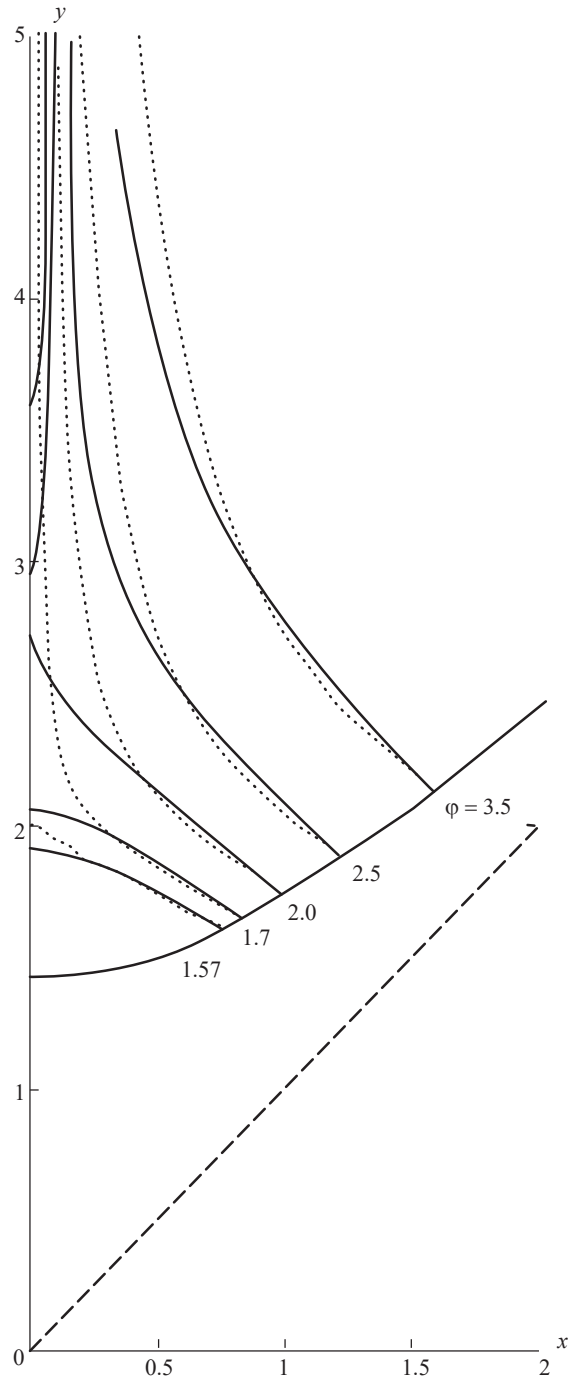
**Рис. 7.** Сравнение эквипотенциалов  $\varphi = 2.0$  (а) и  $2.5$  (б) для гиперболического потока, рассчитанных по различным моделям: 1 – точное решение, 2 – модель (37), 3 – модель (38), 4 – модель (42), 5 – модель (43); масштаб по оси  $x$  увеличен.

*Поток с эллиптическими орбитами в однородном магнитном поле.* Финитные траектории не являются характерными в задачах электронной оптики. Известно всего два решения для плоских двумерных потоков с замкнутыми орбитами: эллиптический поток в однородном магнитном поле и электростатическое периодическое течение, имеющее финитные траектории в области под траекторией-сепаратрисой [20]. Для эллиптической границы известно точное решение внешней задачи [21–23], что дает возможность провести ряд тестовых расчетов.

Семейство эллипсов  $\xi = \text{const}^1$  в системе  $\xi, \eta$  с конформной метрикой образовано софокусными кривыми, в то время как траектории эллиптического потока в магнитном поле получаются из базовой кривой  $\xi = 1$  равномерным растяжением координат  $x, y$  с сохранением отношения полуосей  $a/b$ . По этой причине алгоритм [3] не может быть применен в этом случае в полной мере: линии  $\xi = \text{const}$  внешней задачи не являются траекториями пучка.

Течение с эллиптическими орбитами частиц в однородном магнитном поле [20] описывается формулами

<sup>1</sup> Эллиптическая граница пучка в конформной системе  $\xi, \eta$  [21–23] описывается уравнением  $\xi = \text{const}$ , поэтому в этом примере в отличие от предыдущих продольной координатой будет  $\eta$ .



**Рис. 8.** Решение для гиперболического потока в системе с трансляцией: пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (43).

$$\varphi = \frac{1}{2}(\bar{\Omega}^2 x^2 + y^2), \quad \bar{\Omega}x^2 + y^2 = \text{const}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\omega - \Omega}{\omega + \Omega},$$

$$\omega = \frac{1}{2}H_z, \quad \Omega = \text{const}, \quad \alpha = a/b = 1/\sqrt{\bar{\Omega}};$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^4} \text{ch}^2 \xi \cos^2 \eta + (\alpha^2 - 1) \text{sh}^2 \xi \sin^2 \eta \right],$$



$$x = \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = \sqrt{\alpha^2 - 1} \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \quad (44)$$

Точное выражение для потенциала в лапласовской области в системе  $\xi, \eta$  с конформной метрикой  $h_1 = h_2 = h$  имеет вид [21–23]

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} + \frac{\alpha^4 + 1}{2\alpha^3} (\xi - \xi_e) - \\ &- \left( \frac{\alpha^4 + 1}{4\alpha^3} \operatorname{sh} 2\xi - \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} \operatorname{ch} 2\xi \right) \cos 2\eta, \\ h &= \sqrt{(\alpha^2 - 1) (\operatorname{sh}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta)}, \\ \operatorname{th} \xi_e &= 1/\alpha. \end{aligned} \quad (45)$$

Системы с растяжением и трансляцией непригодны для замкнутых контуров с двумя плоскостями симметрии: помимо возникновения особенностей в вершинах, область, покрываемая сеткой, ограничивается полосой, ширина которой равна соответствующей полуоси контура.

Оценка основного предположения параксиальной теории о малости продольных производных в конформной системе  $\xi, \eta$  для эллипса приводит к выражению (31) с результатами, изображенными на рис. 9:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_e + \varphi_{,\xi e} \bar{\xi} - \frac{1}{2} \varphi_{e,\eta\eta} \bar{\xi}^2, \quad \bar{\xi} = \xi - \xi_e; \\ \varphi_e &= \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} - \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha^2} \cos 2\eta, \\ \varphi_{,\xi e} &= \frac{1}{\alpha^3} (\cos^2 \eta + \alpha^4 \sin^2 \eta), \\ \varphi_{e,\eta\eta} &= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \cos 2\eta. \end{aligned} \quad (46)$$

В окончательной форме решение принимает вид

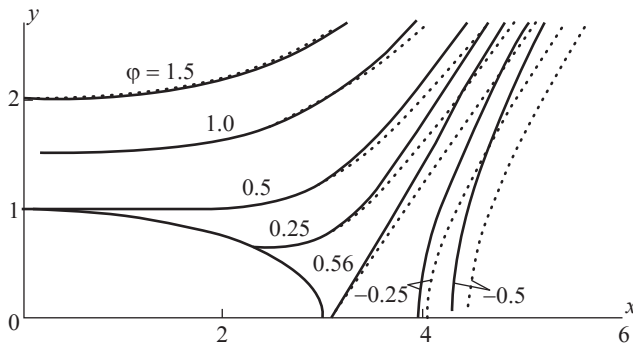


Рис. 9. Решение для эллиптического потока,  $a/b = 3$ : пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (49).

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} - \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha^2} \cos 2\eta + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^4 + 1}{\alpha^3} - \right. \\ &- \left. \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha^3} \cos 2\eta \right) \bar{\xi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \cos 2\eta \bar{\xi}^2. \end{aligned} \quad (47)$$

Использование представления потенциала (1) с точным значением  $\varphi_i$  из (44) дает (рис. 10) выражение

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_i + S, \quad \rho = (1 + \alpha^4)/\alpha^4, \\ \varphi_i &= \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \left( \frac{1}{\alpha^4} \operatorname{ch}^2 \xi \cos^2 \eta + \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta \right), \\ S &= -\frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \rho \left[ \frac{1}{4} (\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{ch} 2\xi_e) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi_e^2) \cos 2\eta + \left( \xi_e \cos 2\eta - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\xi_e \right) \bar{\xi} \right] \end{aligned} \quad (48)$$

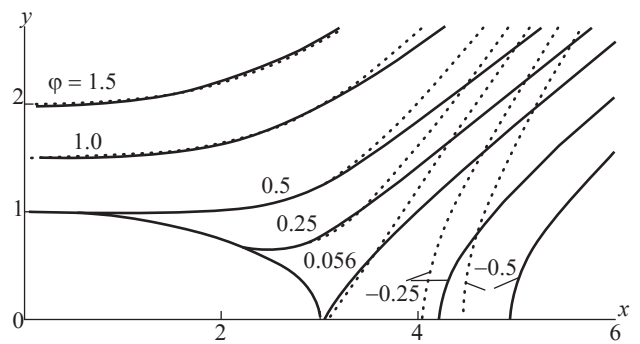


Рис. 10. Решение для эллиптического потока,  $a/b = 3$ , в форме (1) с точным значением  $\varphi_i$ : пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (49).

Если учесть узость пучка, сохраняя в формулах для  $\varphi_i, S$  члены порядка  $\bar{\xi}^2$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{iap} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \cos^2 \eta + \sin^2 \eta + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{1}{\alpha^4} \cos^2 \eta + \sin^2 \eta \right) \left[ 2\alpha \bar{\xi} + (\alpha^2 + 1) \bar{\xi}^2 \right] \right\}, \\ S_{ap} &= -\frac{1 + \alpha^4}{4\alpha^4} \left[ \alpha^2 + 1 - (\alpha^2 - 1) \cos 2\eta \right] \bar{\xi}^2, \end{aligned} \quad (49)$$

то, как и в случае с гиперболой, решение (49) совпадает с (47).

Система  $l, s$ . Для выпуклых контуров система  $l, s$  является однозначной. В случае эллиптической границы справедлива формула (41) со следующими входящими в это выражение величинами

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_e + \varphi_{,se}s + \frac{1}{2}(-\varphi_{e,ll} + k_1\varphi_{,se})s^2; \\ \varphi_e &= \frac{\alpha^2 + 1}{4\alpha^2} - \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha^2} \cos 2\eta, \\ \varphi_{,\xi e} &= \frac{1}{\alpha^3}(\cos^2 \eta + \alpha^4 \sin^2 \eta), \\ \varphi_{,se} &= \frac{1}{h_e} \varphi_{,\xi e} = \frac{\cos^2 \eta + \alpha^4 \sin^2 \eta}{\alpha^3 \sqrt{\cos^2 \eta + \alpha^2 \sin^2 \eta}}, \quad k_1 = -\frac{\alpha}{h_e^3}, \\ \frac{d}{dl} &= \frac{1}{h_e} \frac{d}{d\eta}, \quad h_e = \sqrt{\cos^2 \eta + \alpha^2 \sin^2 \eta}; \\ \varphi_{e,ll} &= \frac{1}{h_e} \left( \frac{1}{h_e} \varphi_{,e\eta} \right)_{,\eta} = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha^2} \frac{1}{h_e^4} \left[ -\frac{\alpha^2 - 1}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha^2 + 1) \cos 2\eta - \frac{\alpha^2 - 1}{2} \cos^2 2\eta \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Переход к декартовым координатам выполняется по формулам

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cos \eta + s \sin \vartheta, \quad y = \sin \eta + s \cos \vartheta, \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{ctg} \eta. \end{aligned} \quad (51)$$

Результаты расчетов представлены на рис. 11. Хотя, как было сказано выше, система с трансляцией границы не дает возможности построить решение внешней задачи для всего эллиптического контура, однако наличие точного решения позволяет исследовать поведение приближенных моделей вблизи точек с заметной кривизной. В примере с гиперболической границей кривизна не превышала единицы.

Для эллипса с  $a/b = 10$  в точке с  $k = 7.6$ , радиус кривизны  $R = 0.13$ , модель с трансляцией слабо

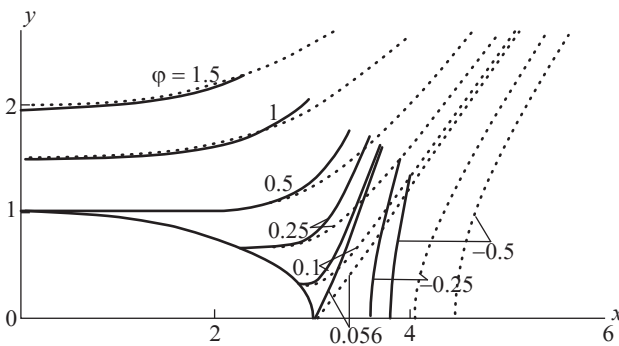


Рис. 11. Решение для эллиптического потока,  $a/b = 3$ , в системе  $l, s$ : пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модель (50).

отличается от точного решения на расстоянии до  $0.38R$ , система  $(l, s)$  – до  $0.055R$ . При  $a/b = 3$  соответствующие величины в точке с кривизной  $k = 2.67$ ,  $R = 0.37$  составляют  $0.37R$  и  $0.15R$ .

*Плоский магнетрон.* В случае магнитного поля, направленного под острым углом к катоду и эмиссии в  $\rho$ -режиме, с трубками тока в принципе нельзя связать ортогональную систему координат [5] и использовать алгоритм [3]. Точное решение уравнений пучка при эмиссии в  $T$ -режиме в параметрической форме с параметром  $\tau$  построено в работах [24, 25]. Расчет формирующих электродов [24, 25] выполнен с использованием подхода [26], основанного на аналитическом продолжении границы для построения ортогональной сетки  $u, v$  и интегрировании обыкновенного дифференциального уравнения эквипотенциали.

При сопоставлении приводимых ниже результатов с данными [24, 25] необходимо иметь в виду различие нормировок: в [24, 25] интерес представлял  $T$ -режим эмиссии и при обезразмеривании потенциала поле  $E$  на катоде находилось в знаменателе. Мы используем безразмерные переменные (символы с чертой), позволяющие объединить описание двух режимов эмиссии и определенные следующими формулами для потенциала, электрического и магнитного полей, плотности тока:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{\varphi_*}, \quad \varphi_* = \frac{V_*^2}{\eta}; \quad \bar{E} = \frac{E}{E_*}, \quad E_* = \frac{V_*^2}{\eta L_*}; \\ \bar{\Omega} &= \frac{\Omega}{\Omega_*}, \quad \Omega_* = \frac{V_*}{\eta \mu L_*}, \quad \bar{J} = \frac{J}{J_*}, \quad J_* = \frac{\varepsilon V_*^3}{\eta L_*^2}, \end{aligned} \quad (52)$$

где звездочками отмечены характерные значения величин;  $V_*$ ,  $L_*$  – масштабы скорости и длины;  $\eta, \mu, \varepsilon$  – удельный заряд электрона, магнитная и диэлектрическая постоянные вакуума. В результате соотношение безразмерных длины и потенциала ( $X, G$ ) в [24, 25] и  $(\bar{y}_m, \bar{\varphi})$  ниже определено формулами

$$\frac{X}{\bar{y}_m} = \frac{\bar{\Omega}^2}{\bar{E} \cos^2 \alpha}, \quad \frac{\bar{\varphi}}{G} = \frac{\bar{E}^2}{\bar{\Omega}^2}; \quad \Omega \equiv H. \quad (53)$$

Здесь  $\Omega, \alpha$  – напряженность и угол наклона магнитного поля на катоде. Типичные для планарного гиротрона [27] величины  $\bar{\Omega} = 2.9$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\bar{E} = 0.6$  приводят к следующим значениям отношений в (53):

$$X/\bar{y}_m = 18.7, \quad \bar{\varphi}/G = 0.043. \quad (54)$$

Параметр  $\gamma = \bar{\Omega} \bar{E} / \bar{J}$  является обратной величиной параметра с тем же обозначением в [24, 25].

*Точное решение.* Дифференциальное уравнение эквипотенциали, определяющее точное решение задачи, имеет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{\operatorname{Re} \Phi}{\operatorname{Im} \Phi}, \quad \tau = u + iv = t \exp(i\vartheta),$$

$$A = \frac{\dot{y}_m}{\dot{x}_m}, \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{d\tau};$$

$$\bar{y} = \tau - \sin \tau + \gamma(1 - \cos \tau), \quad \bar{z} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{1}{3} \tau^3 + \gamma \tau^2 \right),$$

$$\bar{h}^2 = \dot{\bar{y}}^2 + \dot{\bar{z}}^2, \quad \bar{U} = \frac{1}{2} (\bar{h}^2 + \bar{y}^2), \quad \bar{k}_1 = (\ddot{\bar{y}} \dot{\bar{z}} - \ddot{\bar{z}} \dot{\bar{y}}) / \bar{h}^3,$$

$$\bar{E}_v = \bar{k}_1 \bar{h}^2 + \bar{y} \dot{\bar{z}} / \bar{h}; \quad (55)$$

$$\bar{x}_m = \bar{y} \cos \alpha + \bar{z} \sin \alpha, \quad \bar{y}_m = -\bar{y} \sin \alpha + \bar{z} \cos \alpha.$$

Здесь  $y, z$  – система, связанная с направленным по оси  $z$  магнитным полем;  $x_m, y_m$  – система с уравнением  $x_m = 0$  для катода;  $\bar{U}$  – потенциал в потоке;  $\bar{k}_1, \bar{E}_v$  – кривизна трубки тока и нормальное электрическое поле на ней. Символы  $y, z$  и  $\bar{y}, \bar{z}$  и т.д. различаются постоянными множителями [28].

Правая часть уравнения эквипотенциали определена формулами

$$\operatorname{Re} \Phi = \operatorname{Re} \dot{\bar{U}} (1 + \operatorname{Im} A) + \operatorname{Im} \dot{\bar{U}} \operatorname{Re} A,$$

$$\operatorname{Im} \Phi = -\operatorname{Re} \dot{\bar{U}} \operatorname{Re} A + \operatorname{Im} \dot{\bar{U}} (1 + \operatorname{Im} A),$$

$$\operatorname{Re} A = (\operatorname{Re} \dot{x}_m \operatorname{Re} \dot{y}_m + \operatorname{Im} \dot{x}_m \operatorname{Im} \dot{y}_m) / M^2, \quad (56)$$

$$\operatorname{Im} A = (-\operatorname{Im} \dot{x}_m \operatorname{Re} \dot{y}_m + \operatorname{Re} \dot{x}_m \operatorname{Im} \dot{y}_m) / M^2,$$

$$M^2 = (\operatorname{Re} \dot{x}_m)^2 + (\operatorname{Im} \dot{x}_m)^2.$$

Функция  $\operatorname{Im} \Phi$  обращается в нуль не только на границе пучка, но и в некоторых внутренних точках лапласовской области. В подобных случаях приходится интегрировать уравнение  $du/dv = \operatorname{Im} \Phi / \operatorname{Re} \Phi$ . Аналитическое продолжение границы приводит к неоднозначной координатной сетке, что не дает возможность построить точное решение задачи во всей интересующей нас области.

Система  $l, s$ . Параксиальное решение задачи о формировании потока в магнетроне с использованием формулы (31) приобретает вид

$$\varphi = \bar{\Omega}^2 \left\{ p^2 \bar{U} + p \bar{E}_s s + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{\bar{h}^2} \left( \ddot{\bar{U}} - \frac{\dot{\bar{h}}}{\bar{h}} \dot{\bar{U}} \right) + \bar{k}_1 \bar{E}_s \right] s^2 \right\},$$

$$p = J \cos \alpha / \bar{\Omega}^3. \quad (57)$$

Расчет потенциала по формуле (57) сводится к следующему: задав  $\tau$ , находим все функции, зависящие от этой переменной в (57). Определив  $s$ , находим точку  $X, Y$  и значение потенциала  $\varphi$  в ней, используя (57)

$$X = \bar{z} - \frac{\dot{\bar{y}}}{\bar{h}} \frac{s}{p}, \quad Y = \bar{y} + \frac{\dot{\bar{z}}}{\bar{h}} \frac{s}{p}. \quad (58)$$

По формулам для  $\bar{x}_m, \bar{y}_m$  в (55) с заменой  $\bar{y} \rightarrow Y, \bar{z} \rightarrow X$ , умножив результат на  $p$ , получаем координаты точки в системе, связанной с катодом. Результаты вычислений при  $\bar{\Omega} = 2.9, \bar{J} = 0.116, \bar{E} = 0.6, \alpha = 30^\circ$  приведены на рис. 12–14 для внешней и внутренней областей границы. Там же представлены эквипотенциали точного решения и криволинейная сетка – результат аналитического продолжения. При принятой нормировке кривая  $\bar{\varphi} = 0$  соответствует аноду.

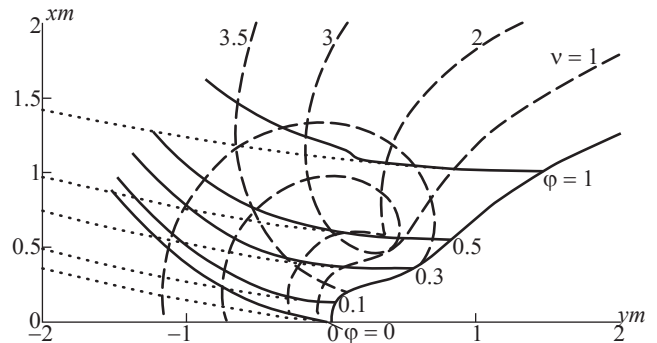


Рис. 12. Решение для плоского магнетрона во внешней области, система  $l, s, \gamma = 15, T$ -режим эмиссии; пунктирные кривые – точное решение, сплошные – параксиальное решение;  $v = \text{const}$  – координатные линии системы  $u, v$ .

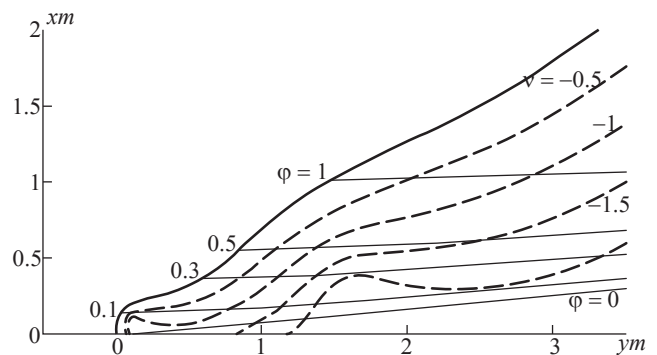


Рис. 13. Решение для плоского магнетрона во внутренней области, система  $l, s, \gamma = 15, T$ -режим эмиссии.

Во внутренней области (рис. 13) самопересекающиеся линии  $v = \text{const}$  вблизи катода  $x_m = 0$  не позволяют просчитать кривую  $\varphi = 0$  точного решения дальше  $y_m \sim 0.4$ , кривую  $\varphi = 0.1$  – дальше  $y_m \sim 1.8$ . В области, где точное решение построено, параксиальное приближение обнаруживает хорошее совпадение с ним. Во внешней области различие гораздо сильнее: параксиальные кривые имеют большую кривизну, а отсутствие гладкости линии  $\varphi = 1$  является следствием пересечения нормалей

из разных точек контура. Сетка  $u, v$  однозначна при  $v \leq 1$ , на линии  $v = 2$  образуется острие, превращающееся в петлю при  $v = 3$ .

На рис. 14 приведены результаты расчетов для внешней области в случае эмиссии в  $\rho$ -режиме ( $\gamma = 0$ ). Максимальное отличие от точной кривой имеет параксиальная эквипотенциаль  $\varphi = 0$ , причем область близости приближенного и точного решений уменьшается по мере убывания значения  $\varphi$  от  $\varphi = 1$ .

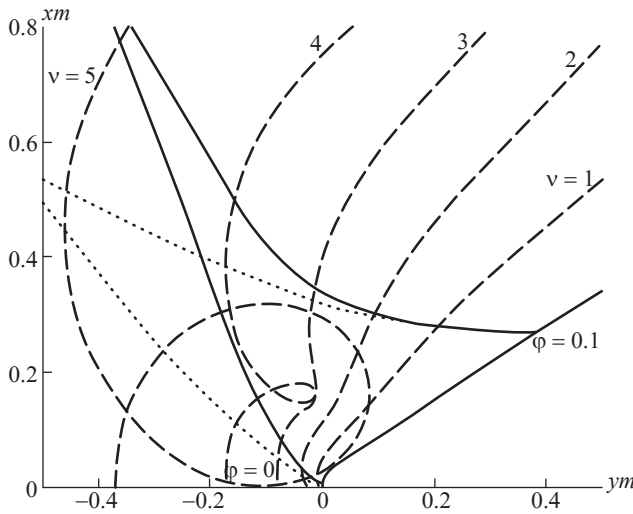


Рис. 14. Решение для плоского магнетрона во внешней области, система  $l, s, \gamma = 0$ , эмиссия в  $\rho$ -режиме; пунктирные кривые – точное решение, сплошные – параксиальное решение.

*Решение с траекториями-окружностями.* Электронный поток описывается элементарными функциями [28], а выражение для потенциала в лапласовской области содержит определенный интеграл [26]

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2R^2} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2}, \quad \varphi_{,R} = -\frac{1}{R^3} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2}; \\ \varphi(u, v) &= \frac{1}{2} r^{4/3}(u, v) \cos \frac{4}{3} \vartheta(u, v) + \\ &+ \int_0^v r^{4/3}(u, \xi) \cos \frac{4}{3} \vartheta(u, \xi) d\xi; \quad u = \psi, \quad v = -\ln R; \\ r^2(u, \xi) &= \left( \sin \frac{3u}{2} \operatorname{ch} \frac{3\xi}{2} \right)^2 + \left( \cos \frac{3u}{2} \operatorname{sh} \frac{3\xi}{2} \right)^2, \\ \vartheta &= \operatorname{Arctg} \left( \operatorname{ctg} \frac{3u}{2} \operatorname{th} \frac{3\xi}{2} \right). \end{aligned} \quad (59)$$

Решение в форме (1) с точным значением  $\varphi_i$  для границы  $R_e = 1$  описывается формулой (рис. 15)

$$\varphi = \frac{1}{2R^2} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} +$$

$$+ \frac{1}{4R^2} \sin^{-2/3} \frac{3\Psi}{2} \left[ \frac{1}{2} (R^2 - 1) - R^2 \ln R \right]. \quad (60)$$

В системе  $l, s$  получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} + \left( \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} \right) s + \\ &+ \frac{1}{4} \sin^{-2/3} \frac{3\Psi}{2} \left( -\cos^2 \frac{3\Psi}{2} + 5 \sin^2 \frac{3\Psi}{2} \right) s^2; \quad (61) \\ l &= \psi, \quad s = 1 - R. \end{aligned}$$

В работе [29] показано, что точность приближенного решения может зависеть от смысла поперечной координаты, не меняющей вида координатных линий (преобразование перемаркировки). В системе  $\xi = \Psi, \eta = \ln R$  решение принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} - \left( \sin^{4/3} \frac{3\Psi}{2} \right) \ln R - \\ &- \frac{1}{4} \sin^{-2/3} \frac{3\Psi}{2} \left( \cos^2 \frac{3\Psi}{2} - 3 \sin^2 \frac{3\Psi}{2} \right) \ln^2 R. \end{aligned} \quad (62)$$

На рис. 16 результаты расчетов по формулам (61), (62) сравниваются с точным решением (59). Распределение потенциала на оси симметрии для решений (59)–(62) показано на рис. 17. В табл. 2

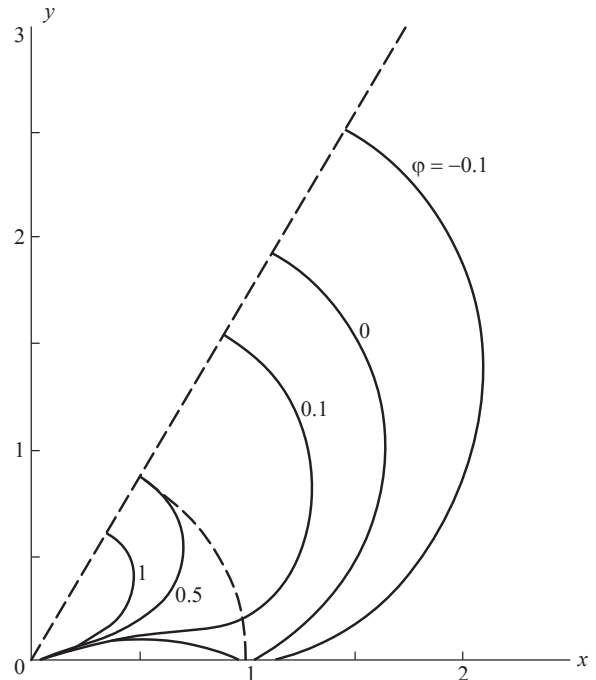
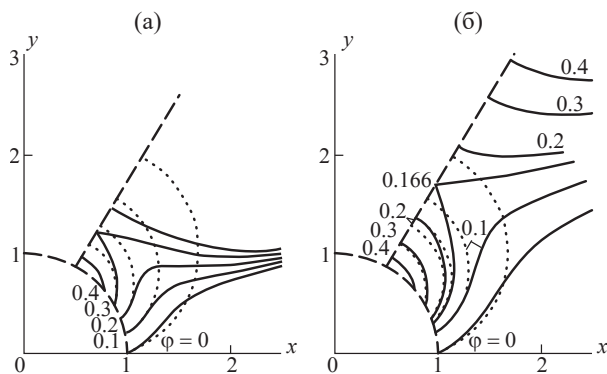
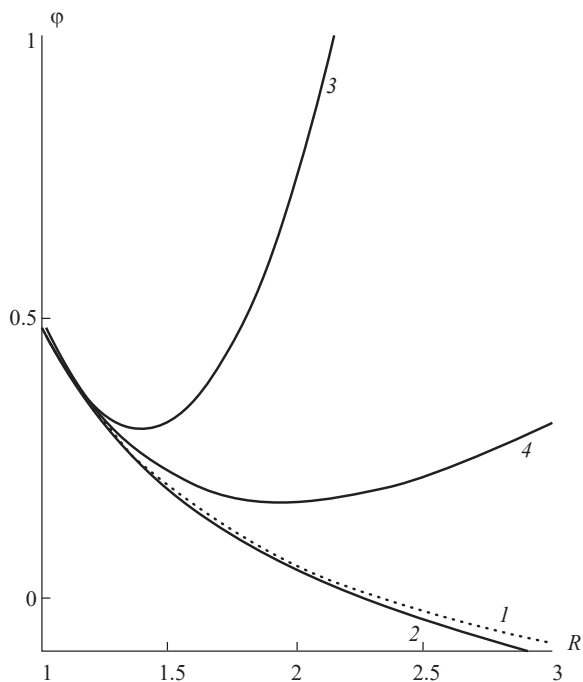


Рис. 15. Решение с траекториями-окружностями в форме (1) с точным значением  $\varphi$ , модель (60)



**Рис. 16.** Решение с траекториями-окружностями: а – система  $1 = \psi, s = 1 - R$ , модель (61); б – система  $\psi, \ln(R)$ , модель (62); пунктирные кривые – точное решение, сплошные – модели (61) и (62).



**Рис. 17.** Решение с траекториями-окружностями, распределение потенциала на оси симметрии для различных моделей: 1 – точное решение, 2 – модель (60), 3 – модель (61), 4 – модель (62).

приведены координаты нулевой эквипотенциали, рассчитанные на основании разных моделей.

### 5. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Задачи с гиперболической и эллиптической границами позволяют оценить эффективность решения в форме (1) при однозначной криволинейной

**Таблица 2.** Координаты  $R = R(\psi)$  эквипотенциали  $\varphi = 0$

$\psi$ , град	$R$ , точное решение	$R$ , модель (60)	$R$ , модель (61)	$R$ , модель (62)
0.051	1.0	1.0	1.0	1.0
5	1.201	1.180	1.161	1.171
10	1.383	1.348	1.300	1.326
15	1.548	1.505	1.457	1.480
20	1.698	1.649	1.982	1.649
25	1.832	1.779		1.875
30	1.949	1.895		2.032
35	2.049	1.995		
40	2.131	2.078		
45	2.196	2.143		
50	2.243	2.191		
55	2.271	2.220		
60	2.281	2.229		

сетке. Поле в случае гиперболы имеет более сложную структуру (образование сепаратрисы) и в качественном отношении воспроизводится обеими моделями (37), (38), рис. 3, 4 (точное и параксиальное выражения для  $\varphi_i$ ). Аналогичные приближения для эллипса описываются формулами (47), (48) и рис. 9, 10. Модель (48) с точным значением  $\varphi_i$  имеет меньшую ошибку в окрестности вершины с большей кривизной, причем из рис. 9, 10 видно, как уменьшается отличие от точного решения по мере убывания кривизны в начальной точке границы. Подобное утверждение для гиперболы в области сепаратрисы менее очевидно из-за сложной картины поля. В этой области (см. рис. 7) все модели заметно отличаются от точного решения, причем модель ( $l, s$ ), (41), рис. 5 не воспроизводит эквипотенциаль-сепаратрису. Кривые с большим значением  $\varphi$  (см. рис. 7,  $\varphi = 2.5$ ) получаются ближе к точной кривой при использовании модели ( $l, s$ ) и системы с трансляцией (43).

Из рис. 12, 13 видно, что координаты  $l, s$  с хорошей точностью обеспечивают формирование узкой



вырезки из плоского магнетрона как во внешней, так и во внутренней областях границы. В практических задачах подобного типа (планарный гиротрон [27]) кривая  $\varphi = 0$  должна быть скорректирована, исходя из соотношения приближенного и точного решений (см. рис. 12) с использованием результатов теории антипараксиальных разложений [5, 6].

Решение с траекториями-окружностями отличается от практических задач с диодной оптикой наличием оси симметрии и соответствующей структурой поля. Из рис. 15 видно, что форма (1) оказалась весьма удачной: ошибка в определении линии  $\varphi = 0$  в точке максимального удаления от границы пучка при использовании системы  $R, \psi$  составляет 1.3%. Система  $l, s$  приводит к образованию сепаратрисы, отсутствующей в точном решении, и замене монотонного убывания потенциала на оси симметрии на зависимость с минимумом. Трансформация поперечной координаты от  $1-R$  к  $\ln R$  повышает точность приближенного решения, не меняя его качественного характера (рис. 17). Приемлемое отличие от точного результата в координатах  $\psi, \ln R$  имеет место в полосе порядка 0.5, в то время как в системе  $l, s$  она втрое уже. Разумная толщина пучка может составлять 0.17, 0.05 соответственно.

Проведенное рассмотрение тестовых задач без учета толщины пучка дает уровень ошибки, обусловленной предположениями параксиальной теории в задаче расчета формирующих электродов. В практических случаях к ней будет добавляться ошибка, связанная с приближенным описанием электронного потока [30].

Особенности, свойственные эталонным тестовым задачам (эмиссия с плоскости, обращение  $h_1$  в нуль, а  $\xi$  — в бесконечность, плоскости симметрии) не позволили в полной мере (исключение — трансляция равнобочной гиперболы вдоль линии симметрии) оценить эффективность предлагаемых в разд. 2 систем с растяжением и трансляцией границы, которые, тем не менее, обладают несомненным качеством однозначности криволинейной сетки.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликтов интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сыровой В. А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.

2. Кормилицын Б. Т., Овчаров В. Т. // РЭ. 1960. Т. 5. № 7. С. 1112.
3. Овчаров В. Т. // РЭ. 1962. Т. 7. № 8. С. 1367.
4. Овчаров В. Т., Пензяков В. В. // РЭ. 1970. Т. 15. № 8. С. 1651.
5. Сыровой В. А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
6. Syrovoy V. A. Theory of Intense Beams of Charged Particles. Amsterdam; N.Y.; Tokyo: Elsevier, 2011.
7. Harker K. J. // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. № 12. P. 2165.
8. Мануилов В. Н., Цимринг Ш. Е. // РЭ. 1978. Т. 23. № 7. С. 1486.
9. Мануилов В. Н. // РЭ. 1981. Т. 26. № 11. С. 2425.
10. Овчаров В. Т. // РЭ. 1967. Т. 12. № 12. С. 2156.
11. Овчаров В. Т., Пензяков В. В. // РЭ. 1970. Т. 15. № 9. С. 1897.
12. Сыровой В. А. // РЭ. 2013. Т. 58. № 2. С. 185.
13. Сыровой В. А. // РЭ. 2012. Т. 57. № 7. С. 804.
14. Сыровой В. А. // РЭ. 2012. Т. 57. № 11. С. 1221.
15. Сыровой В. А. // РЭ. 2012. Т. 57. № 12. С. 1323.
16. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. // РЭ. 2024. Т. 69. № 9. С.
17. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. // РЭ. 2024. Т. 69. № 3. С. 260.
18. Meltzer B. // Proc. Phys. Soc. 1949. V. 62B. № 355. P. 431.
19. Rosenblatt J. // J. Appl. Phys. 1960. V. 31. № 8. P. 1371.
20. Kirstein P. T. // J. Electr. Contr. 1958. V. 4. № 5. P. 425.
21. Kent G. // Communic. Electr. 1960. V. 79. № 48. P. 144.
22. Pöschl K., Veith W. // J. Appl. Phys. 1962. V. 33. № 3. P. 1013.
23. Сыровой В. А. // РЭ. 1993. Т. 38. № 3. С. 481.
24. Цимринг Ш. Е. // Радиопизика. Изв. вузов. 1977. Т. 20. № 10. С. 1550.
25. Tsimring Sh. E. Electron Beams and Microwave Vacuum Electronics. US: A John Wiley&Sons, 2006.
26. Lomax R. J. // J. Electr. Contr. 1959. V. 7. № 6. P. 482.
27. Manuilov V. N., Zaslavsky V. Yu., Ginzburg N. S. et al. // Phys. of Plasmas. 2014. V. 21. P. 023106.
28. Meltzer B. // J. Electr. Contr. 1956. V. 2. № 2. P. 118.
29. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. // РЭ. 2010. Т. 55. № 6. С. 726.
30. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. // РЭ. 2020. Т. 65. № 12. С. 1209.

## PARAXIAL MODEL IN THEORY OF DENSE ELECTRON BEAMS FORMATION

**T. M. Saprionova\*, V. A. Syrovoy\***

*All-Russian Electrotechnical Institute – branch of the Russian Federal Nuclear Center  
All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics named after academician E.I. Zababakhin,  
Krasnokazarmennaya Str. 12, Moscow, 111250 Russian Federation  
\*E-mail: red@cplire.ru*

Received December 23, 2023, revised March, 15, 2024, accepted March, 25, 2024

Two variants of orthogonal curvilinear system for dense electron beam formation are discussed in the paper. Testing calculations are carried out using some exact solutions for comparison with paraxial approximation.

*Keywords:* beam forming electrodes, paraxial model, orthogonal curvilinear system

## ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

УДК 537.52, 537.53

### ДИАГНОСТИКА СИЛЬНОТОЧНОГО НЕРАСПЫЛЯЮЩЕГО МАГНЕТРОННОГО РАЗРЯДА В ВОДОРОДЕ

© 2024 г. А. В. Казиев<sup>a, b, \*</sup>, Д. В. Колодко<sup>a, b, c</sup>, Н. С. Сазонов<sup>a</sup>,  
М. М. Харьков<sup>a</sup>, А. В. Тумаркин<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,  
Каширское шоссе, 31, Москва, 115409 Российская Федерация

<sup>b</sup>Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,

Ленинский просп., 53, Москва, 119991 Российская Федерация

<sup>c</sup>Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190 Российская Федерация

\*E-mail: kaziev@plasma.mephi.ru

Поступила в редакцию 23.12.2023 г.

После доработки 15.03.2024 г.

Принята к публикации 25.03.2024 г.

Проведены эксперименты по диагностике плазмы нераспыляющего разряда миллисекундной длительности в водороде при давлении  $\sim 1$  Торр, длительности и максимальной мощности импульса соответственно около 1 мс и 80 кВт. Показано, что применение импульсных нераспыляющих режимов магнетронного разряда в легких газах позволяет получать плотную неконтрагированную плазму при отсутствии в спектрах оптического излучения линий, соответствующих частицам материала катода или анода.

**Ключевые слова:** нераспыляющий магнетронный разряд, дуговой разряд, водород, оптическая эмиссионная спектроскопия

**DOI:** 10.31857/S0033849424110078, **EDN:** HOFBOQ

#### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в ряде областей практических применений, таких как сухое травление материалов, создание плазменных двигателей, проведение испытаний материалов при высоких термических и плазменных нагрузках, требуются эффективные источники чистой газовой плазмы с высокой степенью ионизации. В качестве такого источника можно рассмотреть сильноточный импульсный магнетронный разряд (СИМР) [1], либо его версию с короткими импульсами (high-power impulse magnetron sputtering, HiPIMS) [2]. Однако в силу того, что СИМР и HiPIMS сочетают в себе высокий ток и достаточно большое напряжение, они преимущественно используются для осаждения покрытий и, следовательно, в своей традиционной форме не пригодны для создания плазмы, в которой нет заметной доли металлических частиц. Использование легкого рабочего газа (водорода или гелия) позволяет существенно снизить эффекты распыления и превратить этот тип разряда в высокоэффективный генератор беспримесной газовой плазмы.

В зависимости от условий эксплуатации (в том числе длительности импульса) возможен перевод режима HiPIMS с большой длительностью (СИМР или L-HiPIMS) в нераспыляющий низковольтный режим на том же уровне мощности. Этот режим известен как нераспыляющий магнетронный разряд (НРМР) [3, 4]. Применение в качестве плазмообразующих газов водорода или гелия может привести к генерации плазмы высокой плотности с чрезвычайно низкой скоростью эрозии материала катода, что интересно для применений в области коммутации тока [5–7].

Цель данной работы – провести диагностику плазмы нераспыляющего разряда миллисекундного масштаба в водороде при давлении 1...2 Торр.

#### 1. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Эксперименты проводили в специальном разрядном устройстве, представляющем собой антипробкотрон (ловушка с встречными магнитными полями) с парой электродов, форма которых повторяет кривизну силовых линий магнитного поля (подробнее см. [2]). Катод выполнен из меди, источником питания служила искусственная

длинная линия. Напряжение зарядки линии было задано в диапазоне от 600 до 2500 В. Подача напряжения на электроды осуществлялась с помощью тиристора. Для подачи управляющего сигнала использован генератор задержанных импульсов Stanford Research Systems DG645, и он также был использован для синхронизации записи осциллограмм и спектров оптического излучения.

Длительность разряда составляла более 1 мс. Напряжение разряда во время импульса измерялось дифференциальным пробником Pintek DP-50. Ток разряда измерялся токовым датчиком Pintek PA-622 (рассчитан на максимальный ток 200 А) и поясом Роговского RFSY-70–50. В большинстве экспериментов датчик тока Pintek PA-622 выходил за пределы заявленного предела измерений, однако позволял быстро оценить поведение разряда, без необходимости пересчета тока по сигналу пояса Роговского. Сигналы с датчиков регистрировались цифровым четырехканальным осциллографом АК ИП-4126/3А-Х.

Наличие примесей в плазме определяли с помощью трехканального оптоволоконного спектрометра Avantes AvaSpec ULS2048L с тремя спектральными диапазонами: 200...365, 364...603 и 600...810 нм и с разрешениями соответственно 0.12, 0.18 и 0.15 нм. Спектры излучения плазмы измеряли через акриловое окно с полосой пропускания ~ 370...2000 нм. Наличие того или иного элемента в плазме определяли по появлению устойчивых линий согласно базе данных атомных спектров NIST. Оптическое излучение плазмы собиралось линзой и передавалось по оптоволокну в каналы спектрометра. Время экспозиции было зафиксировано на минимальном доступном для устройства значении и составляло 1.050 мс.

Запись спектра синхронизировалась с передним фронтом импульса напряжения.

Концентрацию плазмы определяли электростатическим зондом в режиме ионного насыщения.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

При отсутствии ограничения длительности импульса, в конечном итоге, НРМР характеризуется переходом в дуговой режим. Типичные осциллограммы тока и напряжения в случае НРМР с переходом в дугу показаны на рис. 1 вместе с сигналом ионного тока, поступающего на зонд.

Из-за высокой импульсной мощности (около десятков киловатт) такие дуги наносили видимые повреждения поверхности катода, а спектры, полученные методом оптической эмиссионной спектроскопии, в дуговом режиме содержали интенсивные линии излучения частиц металла. Типичный спектр оптического излучения дугового разряда показан на рис. 2. Эти данные свидетельствуют о наличии в плазме частиц  $\text{Cu}$  и  $\text{Cu}^+$ , а также о высокой степени ионизации плазмы.

Тем не менее НРМР может существовать в течение нескольких микросекунд без перехода в дугу. Спектр, характерный для разряда НРМР, представлен на рис. 3. В отличие от спектра дуги, здесь присутствуют только линии, соответствующие рабочему газу (водороду). Максимальная измеренная плотность плазмы сильноточного импульсного нераспыляющего магнетронного разряда в водороде составила  $1.8 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}$  при среднем токе разряда 1200 А (ток, поступающий на зонд, 0.9 А). Степень ионизации при этом составила около 20%.

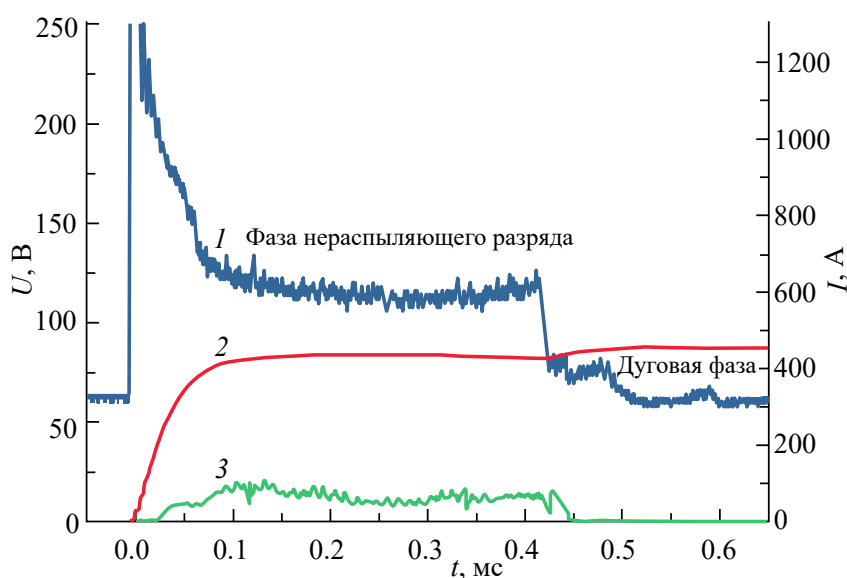


Рис. 1. Осциллограмма развития разряда, с переходом от НРМР к дуговому разряду: 1 — напряжение разряда, 2 — ток разряда, 3 — ток, поступающий на зонд ( $\times 10^3$ ).

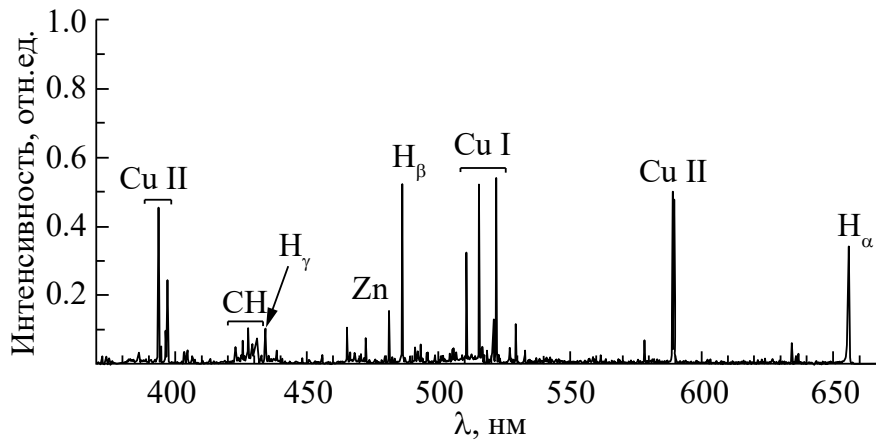


Рис. 2. Спектр излучения плазмы дугового разряда.

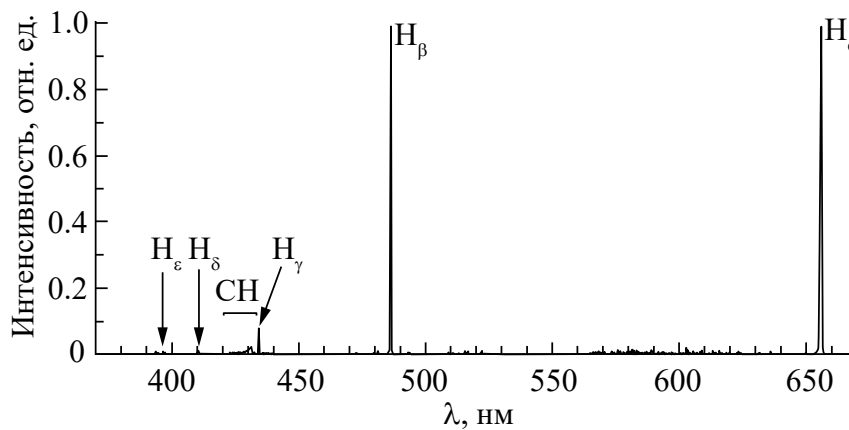


Рис. 3. Спектр излучения плазмы нераспыляющего магнетронного разряда.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определены концентрация плазмы, ее состав и степень ионизации в сильноточном нераспыляющем магнетронном разряде. Для водорода максимальная измеренная плотность плазмы составила  $1.8 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}$  при степени ионизации порядка 20%. Для этого режима характерно подавление эрозии электродов. Использование импульсных нераспыляющих режимов в легких газах позволяет получать неконтрагированную плазму с высокой плотностью и отсутствием оптического излучения частиц материала катода или анода.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых

российских ученых — кандидатов наук (проект № МК-4445.2022.4), а также частично поддержана государственным заданием ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мозгрин Д. В., Ходаченко Г. В., Фетисов И. К. // Физика плазмы. 1995. Т. 21. № 5. Р. 422.
2. Gudmundsson J. T., Brenning N., Lundin D., Helmersson U. // J. Vac. Sci. Technol. A. 2012. V. 30. № 3. Р. 030801.
3. Ходаченко Г. В., Мозгрин Д. В., Фетисов И. К., Степанова Т. В. // Физика плазмы. 2012. Т. 38. № 1. С. 71.
4. Kaziev A. V. // Vacuum. 2018. V. 158. Р. 191.
5. Sommerer T. J., Aceto S. C., Trotter J. F. et al. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2019. V. 52. № 43. Р. 435202.
6. Smith D. J., Sommerer T. J., Lawler J. E., Hitchon W. N. G. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2021. V. 54. № 29. Р. 295201.
7. Levko D., Raja L. L. // J. Appl. Phys. 2022. V. 132. № 24. Р. 243301.



## DIAGNOSTICS OF A HIGH-CURRENT NON-SPUTTERING MAGNETRON DISCHARGE IN HYDROGEN

**A. V. Kaziev<sup>a, b, \*</sup>, D. V. Kolodko<sup>a, b, c</sup>, N. S. Sazonov<sup>a</sup>,  
M. M. Kharkov<sup>a</sup>, A. V. Tumarkin<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*National Research Nuclear University MPhI (Moscow Engineering Physics Institute),  
31 Kashirskoe sh., Moscow, 115409 Russian Federation*

<sup>b</sup>*Lebedev Physical Institute of RAS,*

*53 Leninskiy prosp., Moscow, 119991 Russian Federation*

<sup>c</sup>*Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS, Fryazino Branch,  
1 Vvedenskogo pl., Fryazino, Moscow Region, 141190 Russian Federation*

*\*E-mail: kaziev@plasma.mephi.ru*

Received December 23, 2023, revised March 15, 2024, accepted March 25, 2024

The experiments were carried out to characterize plasma of a non-sputtering millisecond discharge in hydrogen at a pressure of  $\sim 1$  Torr, pulse duration and a maximum impulse power near 1 ms and 80 kW, correspondingly. It has been demonstrated that the implementation of impulse non-sputtering modes of a magnetron discharge in light gases enables generation of dense non-constricted plasma with no lines of cathode or anode material present in its optical emission spectra.

*Keywords:* non-sputtering magnetron discharge, arc discharge, hydrogen, optical emission spectroscopy

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 536.42

### ОСОБЕННОСТИ ДИФРАКЦИИ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ РЕШЕТКАХ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМОЙ РЕЛЬЕФА

© 2024 г. В. А. Комоцкий

*Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы,  
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198 Российская Федерация*

*E-mail: vkomotskii@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2024 г.

После доработки 26.05.2024 г.

Принята к публикации 26.06.2024 г.

Приведены результаты исследований дифракция лазерного излучения на отражательных фазовых дифракционных решетках (ДР), которые образованы рельефом с прямоугольной формой на поверхности плоской подложки, и применение таких ДР для построения оптоэлектронных датчиков угловых колебаний объектов. Приведены формулы для расчета мощностей дифракционных порядков, представлены расчетные графики зависимостей мощности излучения дифракционных порядков от угла падения оптической волны на ДР при различных глубинах рельефа ДР. Показана возможность применения оптоэлектронной схемы с отражательной ДР для построения датчиков угловых колебаний поверхности, сейсмометров и модулятора мощности излучения лазера.

*Ключевые слова:* дифракция, отражательные фазовые дифракционные решетки, датчики угловых колебаний

**DOI:** 10.31857/S0033849424110081, **EDN:** HOCFIG

#### ВВЕДЕНИЕ

Специфические фазовые отражательные дифракционные решетки (ДР), которые рассматриваются в данной работе, образованы рельефом с прямоугольной формой профиля на поверхности плоской подложки. Рельеф прямоугольной формы несложно изготовить, применив технологию травления поверхности через маску из фоторезиста. Если подложка изготовлена из стекла, то поверхность рельефа покрываем металлической пленкой с высоким коэффициентом отражения. Рельефная отражательная ДР с прямоугольным профилем была ранее применена в схеме лазерного зондирования поверхностных акустических волн (ПАВ) с опорной дифракционной решеткой [1]. Эта схема позволила достичь высочайшей чувствительности зондирования ПАВ и провести не только амплитудные, но и фазовые измерения волновых фронтов ПАВ [2]. Однако в схемах лазерного зондирования ПАВ применялись ДР с малой глубиной рельефа, которая была значительно меньше, чем длина волны зондирующего лазерного излучения. В дальнейшем, при детальном исследовании дифракции лазерного пучка на отражательных ДР с прямоугольным профилем, был обнаружен ряд существенных особенностей, которые отчетливо

проявляются при наклонном падении оптического пучка на поверхность рельефа при условии, что глубина рельефа составляет порядка нескольких длин волн светового излучения [3]. Следует отметить, что дифракция света на фазовых отражательных ДР с прямоугольным профилем не описана в широко известных учебниках и монографиях, возможно из-за того, что они не представляют значительного интереса для спектроскопии. Вместе с тем наши исследования показали, что устройства с применением глубоких отражающих ДР, имеющих прямоугольный профиль, могут найти практическое применение в качестве измерителей (датчиков) малых угловых колебаний [4,5], при построении устройств для измерения колебаний земной поверхности [6], а также модуляторов лазерного излучения [7–9].

Изложена также методика расчета пространственного спектра волн после дифракции оптической волны на периодической фазовой отражательной ДР, приведены формулы для расчета мощностей дифракционных порядков, представлены расчетные графики зависимостей мощности излучения дифракционных порядков от угла падения оптической волны на ДР при различных глубинах рельефа ДР. Показана возможность применения оптоэлектронной схемы с дифракцией лазерного

пучка на отражательной ДР для измерения угловых колебаний поверхности и для построения модулятора мощности излучения лазера.

Цель данной работы – проанализировать особенности дифракции когерентного оптического пучка на отражательных ДР с прямоугольным профилем рельефа на поверхности, глубина которого превышает половину длины волны излучения лазера, и провести оценку некоторых возможных технических применений наблюдаемых физических явлений.

### 1. РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН ПОСЛЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ЛАЗЕРНОГО ПУЧКА СКВОЗЬ ФАЗОВУЮ ДИФРАКЦИОННУЮ РЕШЕТКУ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ

Рассмотрим схему, представленную на рис. 1, где фазовая дифракционная решетка образована рельефом прямоугольной формы на поверхности прозрачной пластины с показателем преломления, равным  $n$ .

Положим, что плоская световая волна падает вдоль оси  $Oz$  перпендикулярно поверхности пластины, что решетка имеет бесконечную протяженность в направлении координаты  $Ox$ , а в направлении  $Oy$  решетка однородна. Функцию пропускания фазовой ДР можно выразить формулой

$$t_p(x) = \exp(i\Phi(x)), \tag{1}$$

где  $\Phi(x)$  – функция формы решетки, которая имеет вид

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_M & \frac{\Lambda_p}{2} + k\Lambda_p > x \geq 0 + k\Lambda_p \\ -\Phi_M & 0 + k\Lambda_p > x \geq -\frac{\Lambda_p}{2} + k\Lambda_p \end{cases}, \tag{2}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$\Lambda_p$  – период решетки,  $\Phi_M$  – амплитуда пространственной фазовой модуляции (ПФМ) волнового фронта, которая равна половине разности фаз двух волн, прошедших через выступ и через впадину рельефа:

$$\Phi_M = (\varphi_2 - \varphi_1)/2 = \pi h(n - 1)/\lambda. \tag{3}$$

Здесь  $h$  – глубина рельефа ДР,  $\lambda$  – длина волны света,  $n$  – показатель преломления материала пластины.

В дополнение к ДР, в плоскости ДР (см. рис. 1) расположено «окно», которое имеет вид щели в непрозрачном экране и ограничивает реальный размер апертуры падающего пучка. Функцию прозрачности окна в направлении  $Ox$  обозначим  $w(x)$ . В качестве функции  $w(x)$  можем использовать функцию щели или, например, функцию распределения амплитуды волны в лазерном пучке, падающем на ДР. Функцию пропускания сложной системы  $t_c(x)$ , состоящей из решетки и «окна», можно выразить как произведение функции пропускания ДР на функцию окна:

$$t_c(x) = t_p(x)w(x). \tag{4}$$

Периодическую функцию решетки  $t_p(x)$  представим рядом Фурье:

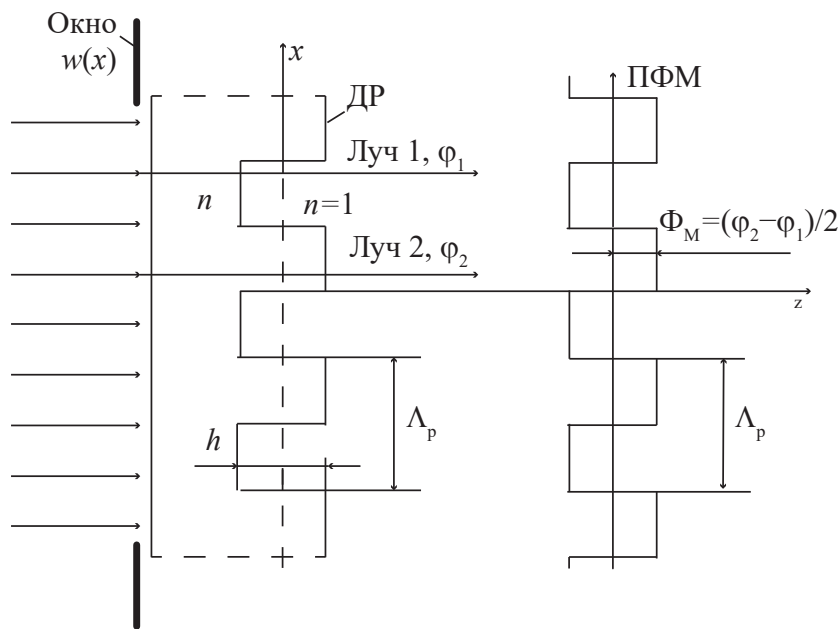


Рис. 1. Схема прохождения оптической волны через рельефную ДР, расположенную на поверхности прозрачной пластины.

$$t_p(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp(i2\pi m \xi_1 x), \quad (5)$$

где  $\xi_1 = 1/\Lambda_p$  – основная пространственная частота периодической ДР, а число  $m$  – номер пространственной гармоники.

Формулы для расчета коэффициентов ряда Фурье для фазовой рельефной ДР, у которой ширина выступа рельефа равна ширине впадины, имеют вид

$$C_0 = \frac{1}{\Lambda} \int_{-\Lambda/2}^{\Lambda/2} \exp(i\Phi(x)) dx = \frac{1}{\Lambda} \left( \int_{-\Lambda/2}^0 \exp(-i\Phi_M) dx + \int_0^{\Lambda/2} \exp(i\Phi_M) dx \right) = \cos \Phi_M, \quad (6)$$

$$C_m = \frac{1}{m\pi} (\sin \Phi_M - \sin(\Phi_M - \pi m)), \quad (7)$$

в частности,

$$C_1 = (2/\pi) \sin \Phi_M, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = (2/3\pi) \sin \Phi_M,$$

$$C_4 = 0, \quad C_5 = (2/5\pi) \sin \Phi_M \dots$$

Четные коэффициенты ряда равны нулю, но это справедливо только при одинаковой ширине выступов и впадин рельефа (форма типа «меандр»). Отсутствие четных порядков в картине дифракции, наблюдаемой при экспериментах, может служить критерием близости формы рельефа ДР к форме типа «меандр». Для решетки, у которой форма рельефа поверхности отличается от меандра, формулы расчета коэффициентов  $C_0 \dots C_m$  приведены в статье [3].

Далее перейдем к расчету пространственного спектра (ПС) дифракционных волн на выходе оптической системы, состоящей из ДР и окна. Вначале рассчитаем ПС на выходе ДР, которая имеет бесконечную протяженность вдоль оси  $0x$ . Для этого подставим функцию  $t_p(x)$  в виде ряда Фурье (5) в формулу преобразования Фурье:

$$T_p(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} t_p(x) \exp(-i2\pi \xi x) dx.$$

В результате получим следующее выражение для пространственного спектра бесконечной ДР:

$$T_p(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp(-i2\pi(\xi - m\xi_1)x) dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta(\xi - m\xi_1). \quad (8)$$

Здесь  $\delta(\xi - m\xi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i2\pi(\xi - m\xi_1)x] dx$  –  $\delta$ -функции, которые сдвинуты на значения  $m\xi_1$  по шкале пространственных частот, переменная

$\xi = (\sin\theta)/\lambda$  – пространственная частота оптической волны в пространственном спектре ( $\lambda$  – длина волны света,  $\theta$  – угол излучения элементарной дифракционной плоской волны относительно оси  $0z$ ).

Пространственным частотам  $\xi_1 = 1/\Lambda_p$  и  $\xi_{-1} = -1/\Lambda_p$  соответствуют следующие значения углов излучения первых порядков дифракции:

$$\theta_1 = \arcsin(\lambda/\Lambda_p) \text{ и } \theta_{-1} = -\arcsin(\lambda/\Lambda_p),$$

а пространственным частотам  $m\xi_1$  (при  $m = 2, -2, 3, -3, \dots$ ) соответствуют значения углов излучения высших порядков дифракции:

$$\theta_m = \arcsin(m\lambda/\Lambda_p).$$

Далее получим формулу для расчета пространственного спектра фазовой ДР, у которой апертура ограничена размером «окна». Для этого вначале рассчитаем пространственный спектр функции «окна», применив формулу преобразования Фурье:

$$W(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \exp(-i2\pi \xi x) dx. \quad (9)$$

Так как функция пропускания сложной схемы, состоящей из бесконечной решетки и окна, выражена через произведение функций пропускания ДР  $t_p(x)$  и окна  $w(x)$  формулой (4), то амплитуда волны на выходе имеет вид

$$a_{\text{вых}} = a_0 t_p(x) w(x), \quad (10)$$

где  $a_0$  – амплитуда волны на входе схемы.

В соответствии с теоремой о свертке, пространственный спектр  $S(\xi)$  на выходе такой схемы можно выразить через свертку пространственных спектров ДР и окна:

$$\begin{aligned} S(\xi) &= a_0 T_p(\xi) \otimes W(\xi) = \\ &= a_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \delta(\xi - m\xi_1) \otimes W(\xi) = \\ &= a_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m W(\xi - m\xi_1). \end{aligned} \quad (11)$$

Как следует из формулы (11), пространственный спектр дифракции на выходе схемы состоит из суммы волн различных дифракционных порядков, форма которых определяется функциями  $W(\xi - m\xi_1)$ , а амплитуды волн пропорциональны коэффициентам разложения  $C_m$  функции пропускания ДР в ряд Фурье.

Далее рассмотрим соотношения для расчета мощностей излучения в дифракционных порядках. Положим, что в дифракционной картине пучки разных порядков дифракции хорошо разделяются в пространстве, так что пространственный спектр волны, которая излучается в направлении порядка с номером  $m$ , практически не перекрывается

с пространственными спектрами волн, которые соответствуют порядкам с номерами:  $(m + 1)$  и  $(m - 1)$ . На практике это условие будет выполняться, если размер апертуры окна (или диаметр лазерного пучка) будет в четыре-пять раз больше, чем период ДР. Если рассчитать интегральную мощность  $P_{\text{вх}}$  оптического пучка на входе в пределах входной апертуры (например, в пределах окна с единичной шириной) и сравнить ее с интегральной мощностью  $P_m$  в дифракционном порядке с номером  $m$ , то, как показано в [10], отношение этих мощностей равно

$$(P_m/P_{\text{вх}}) = (C_m)^2.$$

В этом соотношении не учитываются потери входной мощности из-за отражений светового пучка от поверхностей подложки, поэтому для уточнения целесообразно ввести параметр эффективной входной мощности  $P_{\text{вх.эф}}$ , которая равна  $P_{\text{вх.эф}} = k_{\text{эф}} P_{\text{вх}}$  ( $k_{\text{эф}}$  – коэффициент, учитывающий потери вследствие отражений света от границ подложки).

В результате получим следующие формулы для расчетов мощностей излучения нулевого и первого дифракционных порядков:

$$P_0/P_{\text{вх.эф}} = (\cos\Phi_m)^2 \text{ и } P_1/P_{\text{вх.эф}} = \left(\frac{2}{\pi} \sin\Phi_m\right)^2. \quad (12)$$

Расчетные графики зависимостей  $P_0/P_{\text{вх.эф}}$  и  $P_1/P_{\text{вх.эф}}$  от амплитуды ПФМ, приведены на рис. 2.

Амплитуда ПФМ пропорциональна глубине рельефа ДР. При увеличении глубины рельефа ДР мощность излучения в нулевом дифракционном порядке изменяется периодически от максимального значения, равного  $P_{\text{вх.эф}}$ , до нуля. Первый ноль графика мощности нулевого порядка и первый максимум мощности первого порядка дифракции наблюдаются при значении  $\Phi_m = 90^\circ$ . Как следует из формулы (3), этому значению  $\Phi_m$  соответствует физическая глубина рельефа, равная

$$h = \frac{\lambda}{2(n-1)}$$

Это соотношение соответствует схеме на рис. 1, в которой световая волна проходит сквозь ДР по нормали к поверхности. Отношение мощности первого порядка к мощности нулевого порядка равно

$$P_1/P_0 = C_1^2/C_0^2 = (4/\pi^2)(\text{tg}\Phi_m)^2. \quad (13)$$

Формулу (13) можно использовать для определения глубины рельефа ДР. Для этого следует просветить ДР лазерным пучком по нормали к поверхности, выделить с помощью диафрагм пучки первого и нулевого порядков дифракции, измерить мощности этих пучков  $P_1$  и  $P_0$  и рассчитать значение  $\Phi_m$  по формуле, которая следует из формулы (13)

$$\Phi_m = \text{arctg} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P_1}{P_0}}. \quad (14)$$

Затем, используя полученное значение  $\Phi_m$  и формулу (3), можно рассчитать значение глубины рельефа по формуле

$$h = \frac{\Phi_m}{(n-1)\pi} \lambda = \frac{\lambda}{(n-1)\pi} \text{arctg} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P_1}{P_0}}. \quad (15)$$

Отметим, что применение формул (14) и (15) ограничено областью значений  $\Phi_m \leq 90^\circ$ . Если же  $\Phi_m > 90^\circ$ , то результат расчета будет неверным, так как в области  $\Phi_m > 90^\circ$  данному отношению  $P_1/P_0$  будет соответствовать множество значений  $\Phi_m$ . Если, например, рельеф создан на стеклянной подложке, у которой показатель преломления равен  $n = 1.5$ , то значению  $\Phi_m = 90^\circ = \pi/2$  соответствует значение глубины рельефа, равное  $h = \lambda$ . При этом диапазон однозначного определения глубины рельефа составит от  $h = 0$  до  $h = \lambda$ .

## 2. ДИФРАКЦИЯ ОПТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ РЕЛЬЕФНОЙ РЕШЕТКЕ

В схеме, представленной на рис. 3, оптическая волна, направленная на поверхность рельефной

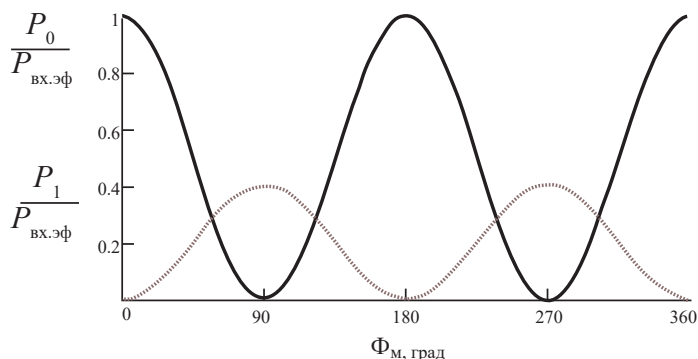


Рис. 2. Графики зависимостей  $P_0/P_{\text{вх.эф}}$  (сплошная линия) и  $P_1/P_{\text{вх.эф}}$  (пунктирная линия) от амплитуды ПФМ.



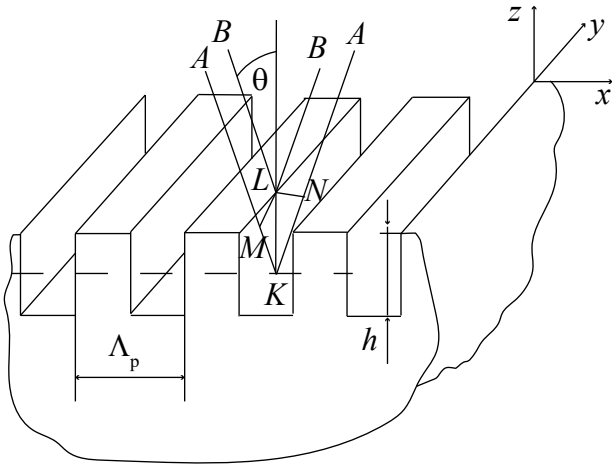


Рис. 3. Схема отражения световых лучей от поверхности рельефной ДР.

ДР под углом падения  $\Theta$ , отражается от этой поверхности.

Рассмотрим схему, в которой плоскость падения—отражения параллельна боковым плоскостям рельефа ДР. При этом условии отсутствует затенение канавок рельефа его боковыми поверхностями. Для повышения эффективности дифракции света поверхность рельефа покрыта пленкой металла (алюминия) с высоким коэффициентом отражения. На фронте отраженной волны образуется пространственная фазовая модуляция (ПФМ), которая имеет прямоугольную форму, подобную форме, изображенной на рис. 1. Оптическая разность хода  $\Delta\varphi$  между лучом, отраженным от дна канавки, и лучом, отраженным от выступа рельефа, равна сумме фазовых набегов волны на отрезках  $MK$  и  $KN$  (см. рис. 3):

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi h}{\lambda} \cos \Theta. \quad (16)$$

Амплитуда ПФМ  $\Phi_m$  равна половине разности фаз  $\Delta\varphi$  оптических лучей, отраженных от выступа и от впадины рельефа:

$$\Phi_m = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\varphi_{MK} + \varphi_{KN}}{2} = \frac{2\pi h}{\lambda} \cos \Theta. \quad (17)$$

С учетом (17) запишем формулы, подобные (12), по которым можно будет рассчитать значения мощностей излучения в дифракционных порядках отраженной волны:

$$\begin{aligned} P_0/P_{\text{вх.эф}} &= \cos^2 \Phi_m = \cos^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} h \cos \Theta \right) = \\ &= 0.5 \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi}{\lambda} h \cos \Theta \right) \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} P_{\pm 1}/P_{\text{вх.эф}} &= \left( 4/\pi^2 \right) \sin^2 \Phi_m = \\ &= \left( 4/\pi^2 \right) \sin^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} h \cos \Theta \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $\Phi_m$  — амплитуда ПФМ, которую рассчитываем по формуле (17), а  $P_{\text{вх.эф}} = P_{\text{пад}} R$  — эффективная мощность падающего лазерного излучения с учетом потерь при отражении света от пленки, покрывающей рельеф,  $P_{\text{пад}}$  — мощность света, падающего на поверхность,  $R$  — коэффициент отражения светового пучка от поверхности пленки, покрывающей рельеф.

На рис. 4 приведен ряд расчетных зависимостей мощности излучения в нулевом  $P_0(\Theta)$ , а также в первом  $P_1(\Theta)$  и в третьем  $P_3(\Theta)$  дифракционных порядках от угла падения светового пучка на поверхность отражательной ДР при разных значениях параметра относительной глубины рельефа  $\gamma = h/\lambda$ . Зависимости  $P_1(\Theta)$  и  $P_3(\Theta)$  изменяются синфазно. Аналогично, синфазно с графиками первого и третьего порядков осциллируют зависимости высших порядков дифракции  $P_m(\Theta)$  (на рисунке не показаны).

Максимумы зависимостей  $P_1(\Theta)$ ,  $P_3(\Theta)$ , а также высших порядков дифракции наблюдаются при углах падения, которые соответствуют минимумам  $P_0(\Theta)$ . Значения мощностей в максимумах кривой  $P_0(\Theta)$  равны  $P_0 = P_{\text{вх.эф}}$ . При тех углах падения, при которых мощность нулевого порядка дифракции становится нулевой, наблюдаются максимальные значения мощности излучения во всех других дифракционных порядках, от первого до самого высокого.

Значения мощностей в максимумах первого и минус первого порядков равны

$$P_1 = P_{-1} = (4/\pi^2) P_{\text{вх.эф}} = 0.405 P_{\text{вх.эф}};$$

в максимумах третьего и минус третьего

$$P_3 = P_{-3} = 0.045 P_{\text{вх.эф}},$$

а далее, в пятом и минус пятом порядках

$$P_5 = P_{-5} = 0.016 P_{\text{вх.эф}}.$$

При этом в четных порядках дифракции у ДР с идеальным профилем типа «меандр» значения мощностей равны нулю. Если просуммировать мощности шести порядков дифракции с номерами 1, -1, 3, -3, 5, -5 в максимумах, то получим суммарную мощность  $P_\Sigma > 0.95 P_{\text{вх.эф}}$ . Также можем провести обобщенный расчет суммарной мощности, просуммировав все парциальные мощности членов ряда пространственных гармоник от  $m = 1$  до  $m = \infty$  и от  $m = -1$  до  $m = -\infty$ . В результате получим следующую сумму:

$$2 \left( 4/\pi^2 \right) P_{\text{вх.эф}} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) = P_{\text{вх.эф}}.$$

Для вывода этого соотношения мы воспользовались формулой (приведенной в [13]), которая имеет вид

$$\left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

Таким образом, при условии, когда мощность пучка нулевого порядка равна нулю, вся

эффективная мощность входного пучка перераспределяется по всевозможным дифракционным порядкам, от первых до самых высоких порядков. Между тем следует отметить некоторое противоречие, имеющее место при использовании теории пространственных частот. При формальном представлении функции в виде ряда Фурье мы получаем набор пространственных частот от нулевых до бесконечно высоких. Однако по определению пространственной частоты волны в дифракционном спектре наиболее высокая пространственная частота ограничена условием  $\sin\Theta \leq 1$ .

Мощность нулевого порядка на графиках  $P_0(\Theta)$  изменяется от нулевого значения до максимального, равного  $P_{\text{вх.эф}}$ . На правом краю расчетной зависимости, где  $\Theta = 90^\circ$ , значение  $P_0/P_{\text{вх.эф}} = 1$  всегда. На левом краю графика  $P_0/P_{\text{вх.эф}}$  кривая может начинаться с любого уровня, лежащего в интервале от  $P_0/P_{\text{вх.эф}} = 0$  до максимального  $P_0/P_{\text{вх.эф}} = 1$ . Только при условии, что значение параметра  $\gamma = h/\lambda$  кратно числу 0.5, т.е. при  $\gamma = 0.5, 1, 1.5, 2$  и т.д., эта кривая начинается с уровня  $P_0/P_{\text{вх.эф}} = 1$ . Расположение нулей  $P_0/P_{\text{вх.эф}}$  на горизонтальной оси переменной  $\Theta$  соответствует нулям формулы (18) и определяется следующим условием:

$$\frac{4\pi}{\lambda} h \cos \Theta_k = \pi, 3\pi, \dots (2k + 1)\pi.$$

Углы падения, которые соответствуют нулям (минимумам) зависимости  $P_0/P_{\text{вх.эф}}$ , равны

$$\Theta_k^{\text{min}} = \arccos \frac{\lambda}{4h} (2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (20)$$

Углы падения, соответствующие максимумам зависимости  $P_0/P_{\text{вх.эф}}$ , равны

$$\Theta_k^{\text{max}} = \arccos \frac{\lambda}{4h} (2k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Значению числа  $k = 0$  в формуле (21) соответствует угол  $\Theta_1^{\text{max}} = 90^\circ$ . Посредине между максимальными и минимальными значениями графика  $P_0/P_{\text{вх.эф}}$ , на уровне  $0.5 P_{\text{вх.эф}}$ , находятся средние точки линейных участков зависимостей  $P_0(\Theta)$ . Значения углов падения, которые соответствуют средним точкам, можно рассчитать по формуле

$$\Theta_q^{\text{cp}} = \arccos \frac{\lambda}{4h} \left( q + \frac{1}{2} \right), \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Наименьшему значению числа  $q$  соответствует точка на графике рис. 4, ближайшая к углу  $\Theta = 90^\circ$ .

Достоверность расчетных зависимостей  $P_0(\Theta)$  подтверждена экспериментами, которые были проведены на нескольких отражающих рельефных дифракционных решетках с прямоугольным профилем рельефа, период которых был равен 100 мкм, а глубина ДР составляла от долей длины волны до четырех длин волн гелий-неонового лазера  $\lambda = 0.6328 \text{ мкм}$ . Одна из экспериментальных зависимостей приведена на рис. 5.

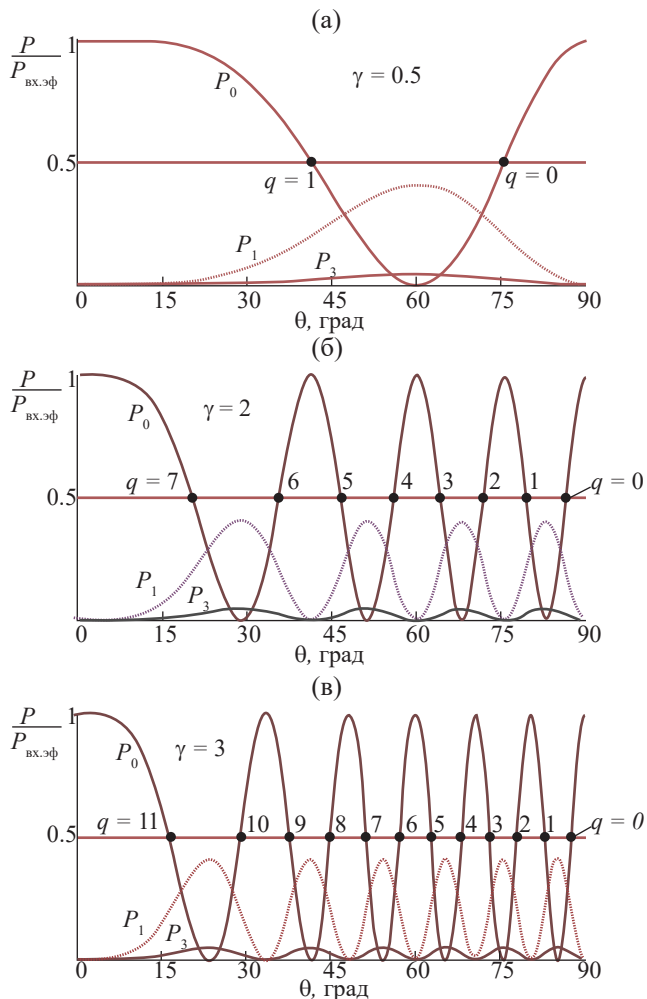


Рис. 4. Расчетные зависимости нормированных мощностей излучения в нулевом и в первом порядках дифракции от угла падения светового пучка на рельефную отражательную ДР при  $\gamma = 0.5$  (а), 2 (б) и 3 (в).

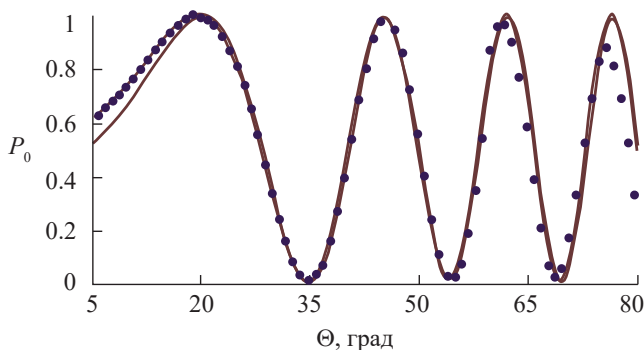


Рис. 5. Экспериментальная нормированная зависимость мощности излучения в нулевом дифракционном порядке от угла падения лазерного пучка на рельефную отражательную ДР (точки) и соответствующая расчетная зависимость при значении параметра  $\gamma = 2.13$  (сплошная линия).

Экспериментальная зависимость нормировалась на значение выходного сигнала фотодетектора в первом максимуме зависимости  $P_0(\Theta)$ . Расчет глубины рельефа ДР был проведен по методике, изложенной в [11], по результатам измерения углов двух соседних минимумов на экспериментальной зависимости  $P_0(\Theta)$ . Расчетная зависимость построена с применением программы Mathcad (см. рис. 5, сплошная линия). Для наилучшего согласования расчетной кривой с положением экспериментальных точек производилась вариация расчетного параметра  $\gamma = h/\lambda$  в небольших пределах. Как видно из рис. 5, положения экспериментальных точек весьма близки к расчетной кривой с глубиной рельефа ДР  $h = 2.13\lambda$ . Аналогичное согласование наблюдалось также и в экспериментах с образцами, имеющими другие значения глубины ДР.

Линейные участки зависимостей  $P_0(\Theta)/P_{\text{вх.эф}}$  в области  $\Theta = \Theta_q^{\text{ср}}$  можно использовать для линейного преобразования малых угловых колебаний ДР в плоскости  $yOz$  в колебания мощности нулевого порядка дифракции. Для этого следует направить пучок лазерного излучения на отражающую рельефную ДР под углом  $\Theta_q^{\text{ср}}$  таким образом, чтобы плоскость падения была параллельна линиям рельефа ДР. Тогда при угловом отклонении решетки в плоскости  $yOz$  на угол  $\Delta\Theta$  будет наблюдаться пропорциональное изменение мощности излучения на  $\Delta P_0$  в нулевом порядке в отраженном пучке:

$$\Delta P_0 = P_{\text{вх.эф}} S_{\Theta \rightarrow P} \Delta\Theta, \quad (23)$$

где  $S_{\Theta \rightarrow P}$  – крутизна преобразования углового отклонения ДР в изменение мощности нулевого

порядка дифракции. Формулу для расчета  $S_{\Theta \rightarrow P}$  мы получили в результате дифференцирования выражения (18)

$$S_{\Theta \rightarrow P} = \frac{dP_0}{d\Theta} = P_{\text{вх.эф}} \frac{2\pi h}{\lambda} \left( \sin \left( \frac{4\pi h}{\lambda} \cos \Theta \right) \right) \sin \Theta. \quad (24)$$

Для расчета крутизны преобразования, которая соответствует средним точкам кривых  $P_0(\Theta)$ , подставим в формулу (24) значения  $\Theta_q^{\text{ср}}$  из формулы (22). В результате получим выражение

$$\begin{aligned} S_{\Theta \rightarrow P}^{\text{ср}} &= P_{\text{вх.эф}} \frac{2\pi h}{\lambda} \left( \sin \left( \frac{4\pi h}{\lambda} \cos \left( \arccos \frac{\lambda}{4h} \left( q + \right. \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \right) \right) \right) \right) \sin \left( \arccos \frac{\lambda}{4h} \left( q + \frac{1}{2} \right) \right) = \\ &= P_{\text{вх.эф}} 2\pi \frac{h}{\lambda} (-1)^q \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{4h} \left( q + \frac{1}{2} \right) \right)^2} \quad (25) \end{aligned}$$

Для преобразования вида формулы (25) здесь применены следующие тождества [11]:

$$\cos(\arccos(z)) = z, \quad \sin(\arccos(z)) = \sqrt{1 - z^2}.$$

В табл. 1 приведены расчетные значения углов падения и крутизны преобразования  $S_{\Theta \rightarrow P}^{\text{ср}}$  на линейных участках зависимости  $P_0(\Theta)$ , у которой значение параметра  $\gamma = h/\lambda = 2$  при условии, что эффективная мощность лазерного пучка равна  $P_{\text{вх.эф}} = 1$  мВт. Аналогичные данные для  $\gamma = h/\lambda = 3$  приведены в табл. 2.

**Таблица 1.** Расчетные значения крутизны преобразования угловых отклонений ДР в приращении мощности нулевого порядка дифракции при условии, что входная эффективная мощность лазерного пучка равна 1 мВт при относительной глубине рельефа  $\gamma = h/\lambda = 2$

Параметр	$q$							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$\Theta_q^{\text{ср}}$ , град	86.4	79.2	71.8	61.1	55.8	46.5	35.7	20.4
$S_{\Theta \rightarrow P}^{\text{ср}}$ , мВт/рад	12.56	-12.34	11.94	-11.3	10.39	-9.13	7.33	-4.37

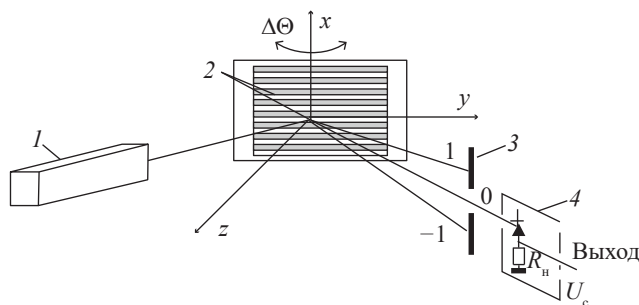
**Таблица 2.** Расчетные значения крутизны преобразования угловых отклонений ДР в приращении мощности нулевого порядка дифракции при условии, что входная эффективная мощность лазерного пучка равна 1 мВт при относительной глубине рельефа  $\gamma = h/\lambda = 3$

Параметр	$q$											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\Theta_q^{\text{ср}}$ , град	87.6	82.8	77.8	73.04	67.98	62.7	57.2	51.3	44.9	37.7	28.9	16.6
$S_{\Theta \rightarrow P}^{\text{ср}}$ , мВт/рад	18.8	-18.7	18.4	-18.03	17.5	-16.7	15.8	-14.7	13.3	-11.5	9.13	-5.38

### 3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ГЛУБОКИХ ОТРАЖАТЕЛЬНЫХ ДР

#### 3.1. Регистрация малых угловых колебаний поверхности объекта

Схема регистрации угловых колебаний поверхности объекта с применением глубокой рельефной отражательной ДР представлена на рис. 6.



**Рис. 6.** Схема измерения малых угловых колебаний поверхности с применением дифракции лазерного пучка на рельефной отражательной ДР: 1 – лазер, 2 – отражательная рельефная ДР, 3 – диафрагма, 4 – блок фотодиода.

Отражательная ДР может быть изготовлена на тонкой пластинке или на пленке, а затем приклеена к поверхности объекта. При малых размерах и массе пластинки с ДР она не вносит значительных изменений в процесс колебаний исследуемого объекта. Глубину рельефа ДР целесообразно выбрать в диапазоне от  $h = \lambda$  до  $h = 4\lambda$ . При увеличении относительной глубины ДР возрастает коэффициент эффективности преобразования  $S_{\Theta \rightarrow P}^{cp}$  (см. формулу (24) и табл. 1 и 2), но сокращается протяженность монотонного участка кривой  $P_0(\Theta)$  (см. рис. 4).

Перед началом измерений следует направить пучок излучения лазера на ДР под таким углом падения, который соответствует среднему значению напряжения выходного сигнала  $U_{\text{вых}}(\Theta)$  между максимальным и минимальным его значениями. Выходной электрический сигнал  $\Delta U_{\text{вых}}$  с резистора нагрузки фотодиода, подключенного по схеме с запертым  $p-n$ -переходом, пропорционален малому отклонению ДР на угол  $\Delta\Theta$  в плоскости  $yOz$ :

$$\Delta U_{\text{вых}} = R_n S_{\text{ф}} P_{\text{вх.эф}} S_{\Theta \rightarrow P}^{cp} \Delta\Theta,$$

где  $R_n$  – сопротивление резистора нагрузки фотодиода,  $S_{\text{ф}}$  – монохроматическая чувствительность фотодиода (А/Вт).

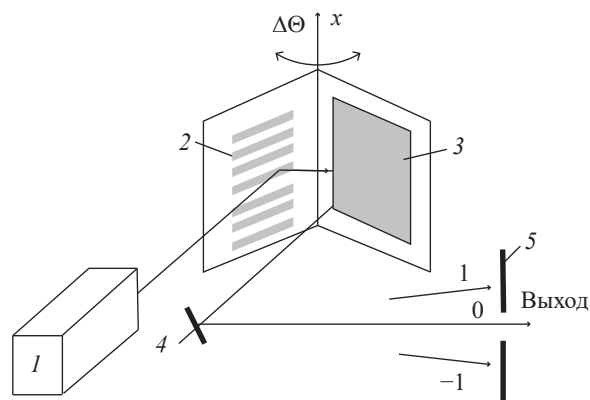
Для фотодиода типа ФД-24к при  $\lambda = 0.63$  мкм значение  $S_{\text{ф}} = 0.24$  А/Вт. При постановке экспериментов следует учитывать, что при угловом

отклонении ДР на угол  $\Delta\Theta$ , отраженный пучок будет отклоняться на угол  $2\Delta\Theta$ . При этом необходимо предусмотреть, чтобы след пучка не выходил за пределы площадки фотодиода. Для этого можно либо использовать фотодиод с достаточно большой площадкой, либо дополнить схему фокусирующей линзой перед фотодиодом.

Эксперименты, описанные в работе [4], показали, что минимальная амплитуда угловых колебаний, которую можно было зарегистрировать при отношении сигнала к шуму, равному 10, составляла  $5 \times 10^{-6}$  рад при полосе частот 800 Гц. Это значение не является предельным, а характеризует лишь результат конкретного эксперимента, описанного в [4]. В литературе описаны оптические методы измерения угловых колебаний, которые имеют более высокую чувствительность, порядка  $10^{-7}$  рад. Например, в [14] описан метод оптического детектирования поверхностных акустических волн (ПАВ) с применением ножевой диафрагмы и фотодетектора, установленных на пути пучка света, отраженного от поверхности, по которой распространяется ПАВ. При этом пучок излучения лазера фокусировали в пятно на этой поверхности. Размер фокального пятна составлял менее половины длины ПАВ. При движении ПАВ происходит угловое отклонение отраженного пучка с частотой ПАВ и вызванное этим смещение следа оптического пучка относительно ножевой диафрагмы. Этим методом детектировали ПАВ с амплитудой волны порядка  $10^{-11}$  м.

#### 3.2. Схема регистрации угловых отклонений и колебаний с применением ДР и уголкового отражателя

На рис. 7 представлена схема блока уголкового отражателя (БУО), который предназначен для измерения угловых отклонений и колебаний. Пучок



**Рис. 7.** Схема датчика угловых колебаний объекта с применением рельефной отражательной ДР и уголкового отражателя: 1 – лазер, 2 – отражательная рельефная ДР, 3 – зеркало, 4 – вспомогательное зеркало, 5 – диафрагма.



излучения от лазера 1 направлен на рельефную ДР 2, которая расположена на первой грани БУО. Линии рельефа ДР параллельны плоскости падения оптического пучка. Поверхность ДР покрыта отражающей металлической пленкой. На второй грани БУО расположено зеркало 3. Угол между гранями БУО равен  $90^\circ$ . Пучок излучения лазера последовательно отражается от рельефной ДР 2, а затем от зеркала 3. При повороте БУО относительно оси  $Ox$  изменяется угол падения лазерного пучка на ДР, что приводит к изменению мощности пучка нулевого порядка дифракции. Однако направление пучка, отраженного от зеркала 3, при этом не изменяется: оно всегда противоположно направлению пучка, падающего на ДР. Это является достоинством данной схемы.

Из соображений симметрии схемы целесообразно выбрать начальный угол падения лазерного пучка на ДР равным  $\Theta_{нач} = 45^\circ$  или близким к этому значению. Вместе с тем начальный угол падения должен соответствовать середине участка монотонного нарастания или монотонного спада зависимости  $P_0(\Theta)$ . Так, например, если применить ДР, у которой  $\gamma = 3$ , то при  $q = 8$  расчетный угол падения, соответствующий средней точке монотонного участка зависимости  $P_0(\Theta)$ , равен  $\Theta_q^{cp} = 44.9^\circ$ , что очень близко к  $45^\circ$ . При этом, как следует из табл. 2, крутизна преобразования равна  $S_{\Theta \rightarrow P}^{cp} = 13.3$ . Диапазон углов падения оптического пучка на ДР, в пределах которого знак угла наклона участка кривой  $P_0(\Theta)$  не изменяется, равен  $\Delta\Theta = 6.8^\circ$  (от  $\Theta_{k=4}^{min} = 41.4^\circ$  до  $\Theta_{k=4}^{min} = 48.2^\circ$ ). Если же применить ДР со значением относительной глубины  $\gamma = 2$ , то при  $q = 5$  расчетный угол падения, который соответствует средней точке, равен  $\Theta_q^{cp} = 46.5^\circ$ , что не равно, но довольно близко к  $45^\circ$ . Как показывают расчеты, в случае если относительная глубина рельефа ДР будет равна  $\gamma = 1.95$ , то угол  $\Theta_q^{cp} = 45^\circ$ .

### 3.3. Примеры схем с БУО

Схема с БУО с глубокой отражательной ДР может применяться в качестве датчика малых угловых отклонений и колебаний в составе геофизических приборов: накломера и сейсмометра [6]. Схема хода оптического пучка в устройстве представлена на рис. 8.

Угловой отражатель размещается на оси физического маятника 4, который на данной схеме имеет форму диска. Пучок излучения от лазера 1 направляется на ДР 2, отражается от ДР и затем от зеркала 3. После отражения от вспомогательного зеркала 5 возвратный пучок излучения направляется на диафрагму 6, выделяющую пучок нулевого порядка, и далее на фотодетектор. Электрический сигнал с выхода фотодетектора пропорционален в определенных пределах углу отклонению маятника по отношению к основанию, на котором закреплена ось маятника.

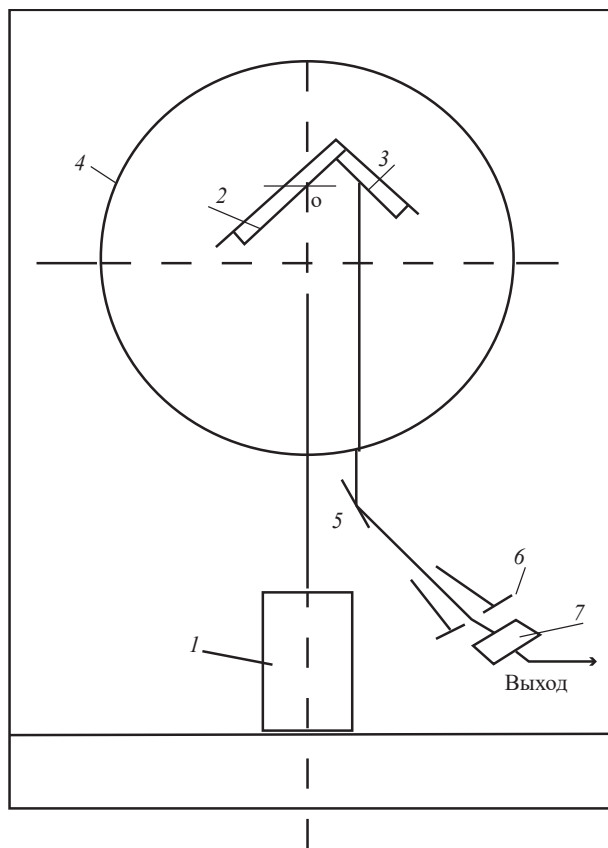


Рис. 8. Схема хода оптических пучков в устройстве для измерения колебаний земной поверхности: 1 – лазер, 2 – отражательная рельефная ДР, 3 – зеркало, 4 – физический маятник в виде диска на оси вращения в точке «О», 5 – вспомогательное зеркало, 6 – диафрагма, 7 – блок фотодиода.

Таким образом, если основание прибора закреплено на поверхности, то выходной сигнал будет пропорционален изменению наклона этой поверхности. Вместе с тем построенный прибор (рис. 8) реагирует также на динамические смещения основания в горизонтальном направлении подобно обычному сейсмометру инерционного типа.

С применением БУО можно построить плавный регулятор мощности лазерного пучка, используя зависимость  $P_0(\Theta)$ , а также модулятор мощности лазерного излучения. Экспериментальный макет модулятора излучения гелий-неонового лазера был описан в [9]: БУО был закреплен на оси механического привода, который поворачивал БУО на определенный угол, а пучок излучения лазера направлен на ДР по схеме, изображенной на рис. 7.

Настройка начального угла падения входного пучка на ДР подобна описанной выше. При повороте БУО на небольшой угол  $\Delta\Theta$  относительно начального угла  $\Theta_{нач}$  происходит линейное увеличение либо линейное уменьшение мощности



выходного пучка нулевого порядка в зависимости от направления поворота привода. При условии, что углы отклонения приближаются к значениям  $\Theta^{\min}$  или  $\Theta^{\max}$ , линейность зависимости мощности выходного пучка излучения от угла поворота нарушается. При повороте БУО в пределах от  $\Theta^{\min}$  до  $\Theta^{\max}$  мощность выходного пучка изменяется от нулевого до максимального значения. При этом максимальное значение равно

$$P_{\text{вых}}^{\max} = k_{\text{отр1}} k_{\text{отр2}} P_{\text{вх}},$$

где  $k_{\text{отр1}}$  и  $k_{\text{отр2}}$  — это коэффициенты отражения зеркальных металлизированных поверхностей на гранях БУО, а  $P_{\text{вх}}$  — это мощность излучения на входе БУО.

Действие модулятора данного типа было продемонстрировано на пучке красного гелий-неонового лазера. Следует отметить, что быстродействие модулятора данного типа невелико, в пределах десятков или сотен герц. По быстродействию модулятор на ДР значительно уступает акустооптическим и электрооптическим модуляторам. Однако отметим, что данную схему достаточно просто реализовать на практике. Подбирая параметры ДР можно построить модуляторы лазерных пучков с длинами волн как в области видимого, так и ИК-диапазона.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При дифракции лазерного пучка на глубоких отражательных ДР с прямоугольным профилем с глубиной рельефа более половины длины волны наблюдаются циклические изменения мощностей дифракционных порядков в отраженном пучке при изменении угла падения лазерного пучка на ДР в плоскости, параллельной линиям ДР.

Расчеты показывают, что мощность излучения в нулевом порядке дифракции изменяется в диапазоне от нуля до максимума, который равен эффективной мощности на входе схемы. Зависимость мощности нулевого порядка дифракции от угла имеет линейные участки, которые могут быть

использованы для построения схем дифракционных датчиков малых угловых перемещений, а также для модуляции и регулирования мощности лазерного излучения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Black T. D., Komotskii V. A. // J. Appl. Phys. 1981. V. 52. № 1. P. 129.
2. Кащенко Н. М., Комоцкий В. А., Никулин В. Ф. // ПТЭ. 1988. № 4. С. 116.
3. Кащенко Н. М., Комоцкий В. А. // Вестн. РУДН. Сер. Физика. 1999. Т. 1. № 7. С. 16.
4. Комоцкий В. А., Соколов Ю. М., Алексеев А. Н., Басистый Е. В. // Вестн. РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2009. № 4. С. 95.
5. Комоцкий В. А., Корольков В. И., Соколов Ю. М. // Фотоника. 2011. № 1. С. 16.
6. Комоцкий В. А., Суетин Н. В. Устройство для определения колебаний земной поверхности // Патент на полезную модель № 191766. Оpubл. офиц. бюл. "Изобретения. Полезные модели" 21.08.2019 г.
7. Комоцкий В. А., Соколов Ю. М., Басистый Е. В. // РЭ. 2012. Т. 57. № 7. С. 821.
8. Комоцкий В. А., Соколов Ю. М., Суетин Н. В. Устройство для модуляции лазерного излучения // Патент РФ на изобретение № 2616935. Оpubл. офиц. бюл. "Изобретения. Полезные модели" № 11 от 18.04.2017.
9. Комоцкий В. А., Соколов Ю. М., Суетин Н. В. // РЭ. 2017. Т. 62. № 7. С. 717.
10. Комоцкий В. А. Основы когерентной оптики и голографии, конспект лекций. М.: изд. РУДН, 2011.
11. Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканава М. И. Элементарная математика. М.: Наука, 1974. Гл. 11.
12. Комоцкий В. А., Соколов Ю. М., Басистый Е. В. // РЭ. 2011. Т. 56. № 2. С. 243.
13. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1966.
14. Whitman R. L., Korpel A. // Appl. Opt. 1969. V. 8. № 8. P. 1567.

**FEATURES OF LASER BEAM DIFFRACTION ON PERIODIC PHASE GRATINGS WITH A RECTANGULAR SHAPE RELIEF****V. A. Komotskii**

*People's Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba,  
Miklukho-Maklaya Street, 6, Moscow, 117198 Russia  
E-mail: vkomotskii@mail.ru*

Received April 25, 2024, revised May 26, 2024, accepted June 26, 2024

The results of research on the diffraction of laser radiation on reflective phase diffraction gratings (DR), which are formed by a rectangular relief on the surface of a flat substrate, and the use of such DR for the construction of optoelectronic sensors of angular vibrations of objects are presented. Formulas for calculating the power of diffraction orders are given, calculated graphs of the dependences of the radiation power of diffraction orders on the angle of incidence of the optical wave on the DR at different depths of the relief of the DR are presented. The possibility of using an optoelectronic circuit with a reflective DR for the construction of sensors of angular vibrations of the surface, seismometers and a modulator of laser radiation power is shown.

*Keywords:* diffraction, reflective phase diffraction gratings, angular vibration sensors

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 621.3.049.774.2

### АНАЛИЗ КОЭФФИЦИЕНТА ШУМА ПРИЕМНОГО ТРАКТА НА ОСНОВЕ СМЕСИТЕЛЯ С УПРАВЛЕНИЕМ ПО ТОКУ

© 2024 г. А. С. Коротков\*, Т. Д. Чан

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, 195251 Российская Федерация*

\*E-mail: korotkov@spbstu.ru

Поступила в редакцию 14.02.2024 г.

После доработки 17.05.2024 г.

Принята к публикации 25.07.2024 г.

Проведен анализ шумовых свойств приемного тракта на основе пассивного смесителя с управлением по току с учетом источников шума следующих устройств: входного малошумящего усилителя, собственно смесителя, выходного трансимпедансного усилителя. Проанализирован шум на выходе приемного тракта, который генерируется перечисленными группами источников шума. Найден коэффициент шума приемного тракта и его оптимальное (наименьшее) значение с учетом влияния паразитных емкостей ключей смесителя. Результаты расчета подтверждены результатами моделирования.

*Ключевые слова:* коэффициент шума, приемный тракт, малошумящий усилитель, пассивный смеситель с управлением по току, трансимпедансный усилитель, спектральная плотность средней мощности шума

DOI: 10.31857/S0033849424110092, EDN: HOCDDO

#### ВВЕДЕНИЕ

На выходе гомодинного приемника сигнал в основной полосе частот сосредоточен в области нулевой частоты и может быть значительно искажен фликкерным шумом. Поскольку в традиционном активном смесителе по схеме Гильберта через транзисторы протекает постоянный ток (ток смещения), то на выходе смесителя появляется фликкерный шум транзисторов, пропорциональный этому постоянному току. В работах [1–3] проведен анализ шумовых свойств смесителей на основе схемы Гильберта. Расчеты по приведенным методикам и моделирование показали, что смесители с управлением по току должны обладать меньшим уровнем шумов по сравнению со схемами Гильберта. Данное обстоятельство определяется следующим: транзисторы в смесителях с управлением по току работают в ключевом режиме, поэтому ток транзисторов практически не содержит постоянную составляющую, что уменьшает влияние фликкерного шума. Как следствие, пассивные смесители с управлением по току применяются в современных системах, особенно в широкополосных приемниках [4–7].

Физическая модель фликкерного и белого шумов в пассивных смесителях с управлением по току представлена в [8]. Согласно данной модели белый шум ключей (МОП-транзисторов в ключевом режиме), белый и фликкерный шум трансимпедансных

усилителей (ТИУ), которые фильтруют, усиливают и преобразуют выходной ток смесителя в напряжение в основной полосе частот, проходят на выход приемного тракта в интервалы времени перекрытий импульсов сигнала гетеродина, когда ключи одновременно замкнуты. Однако в работе [9] рассматривается схема смесителя с защитными интервалами между импульсами сигналов гетеродина, что позволяет уменьшить эффект прохождения шума на выход смесителя и приемного тракта в целом. В данной работе предлагается рассмотреть обобщенную схему пассивного смесителя с управлением по току с помощью  $N$  неперекрывающихся однополярных последовательностей, как показано в [10, рис. 2].

В работе [11] отмечено, что для увеличения коэффициента передачи смесителя необходимо уменьшить внутреннее сопротивление ключей  $R_T$  в замкнутом состоянии. Однако в [11] не учтена паразитная емкость ключей. Чтобы уменьшить  $R_T$ , необходимо увеличить ширину затвора МОП-транзисторов (ключей)  $W$  и тем самым значительно увеличить их суммарную паразитную емкость  $C_n$ . Большая емкость  $C_n$  уменьшит коэффициент передачи приемного тракта и, следовательно, увеличит его коэффициент шума. В данной работе рассчитываются спектральная плотность средней мощности выходного шумового напряжения и коэффициент шума приемного тракта с учетом

источников шума в схемах малошумящего усилителя, смесителя и ТИУ с использованием результатов, изложенных в [10]. Представлена методика поиска оптимальной ширины  $W$  затвора МОП-транзисторов (ключей) смесителя с учетом паразитных емкостей ключей для минимизации коэффициента шума приемного тракта. Цель работы в целом – расчет и оптимизация коэффициента шума приемного тракта на основе выбора параметров МОП-транзисторов (ключей) смесителя.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ШУМА ПРИЕМНОГО ТРАКТА

Необходимо определить параметры схемы смесителя, при которых приемный тракт, включающий малошумящий усилитель, смеситель и ТИУ, обеспечивает наименьший коэффициент шума. Для этого следует провести анализ шумов смесителя с учетом влияния усилителей по входу и по выходу. Рассмотрим общий подход к анализу шумов схемы приемного тракта, показанного на рис. 1 с использованием следующих обозначений: МШУ – малошумящий усилитель, СМ – смеситель, Г – гетеродин, ТИУ – выполняет преобразование токов в выходное напряжение;  $R_n$  – внутренний импеданс источника сигнала, который обычно является полосовым фильтром или антенной;  $I_k(j\omega)$  – выходные токи смесителя, индекс  $k$  – порядковый номер плеча;  $U_{\text{вых}}(j\omega)$  – напряжение на выходе приемного тракта;  $Z_{n,\text{ТИУ}}(j\omega)$  – нагрузка трансимпедансного усилителя;  $Z_n(j\omega)$  – выходной импеданс смесителя (или входной импеданс ТИУ), который представляется в виде параллельной RC-цепи ( $R_n \parallel C_n$ ) для фильтрации сигнала в основной полосе частот.

Обобщенная шумовая блок-схема приемного тракта представлена на рис. 2 с использованием следующих обозначений:  $S_{\text{МШУ}}$  – спектральная плотность средней мощности эквивалентных шумовых токов источников шума в МШУ;  $S_{\text{ТИУ}}$  – спектральная плотность средней мощности эквивалентных шумовых токов источников шумов в ТИУ;  $V_k(t)$  – управляющие сигналы гетеродина;  $S_{\text{Тк}}$  – спектральная плотность средней мощности шумовых токов для каждого ключа смесителя.

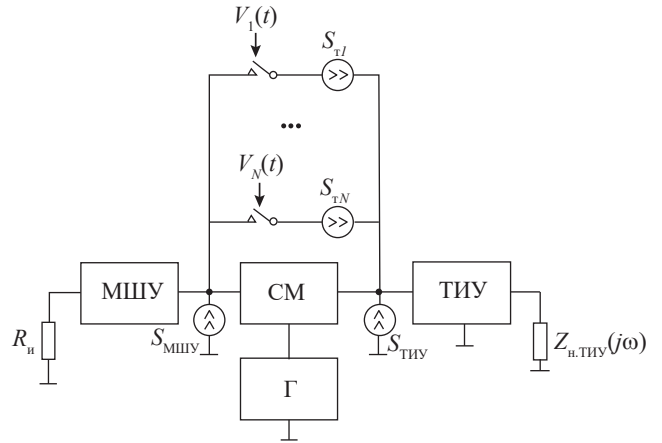


Рис. 2. Обобщенная шумовая блок-схема приемного тракта.

В МШУ шумовой генератор приведен к выходу; в СМ шумовой генератор подключен параллельно; в ТИУ шумовой генератор приведен ко входу. Предлагаемая шумовая схема позволяет эффективно анализировать вклад каждого эквивалентного источника собственного шума.

Проведем анализ воздействия собственных шумов МШУ, смесителя и ТИУ. На первом этапе определим спектральную плотность средней мощности шумового напряжения  $S_{\text{вых,МШУ}}$ , генерируемого МШУ на выходе приемного тракта. Для этого разомкнем выход МШУ и вход смесителя. Значения  $S_{\text{МШУ}}$  определим компьютерным моделированием шумов МШУ (т.е. будем предполагать собственные шумы МШУ известными). Обобщенная шумовая блок-схема для оценки влияния  $S_{\text{МШУ}}$  на характеристики полной схемы представлена на рис. 3. На втором этапе определим спектральную плотность средней мощности  $S_{\text{вых,Г}}$  шумового напряжения на выходе приемного тракта, генерируемого СМ.

Для характеристики шумовых источников, обусловленных ключами смесителя в замкнутом состоянии, используем спектральную плотность средней мощности  $S_{\text{Тк}}$  тепловых шумов (фликкер-шумом ключей пренебрегаем):

$$S_{\text{Тк}}(\omega) = \frac{4k_B T}{R_t}$$

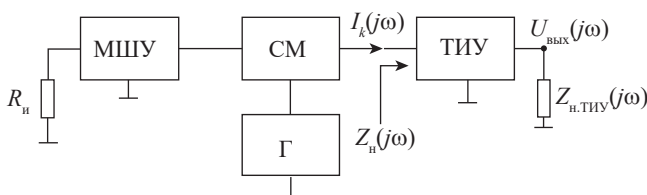


Рис. 1. Обобщенная блок-схема приемного тракта.

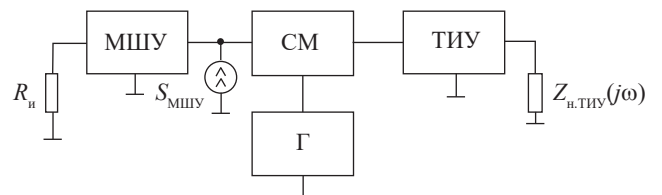


Рис. 3. Обобщенная шумовая блок-схема для оценки влияния  $S_{\text{МШУ}}$  на характеристики приемного тракта.

где  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура.

На рис. 4 показана предлагаемая шумовая схема ключа из схемы смесителя, где оба ключа предполагаются идеальными, а внутреннее сопротивление реального ключа вынесено как внешний элемент. Обобщенная шумовая блок-схема для оценки влияния  $S_{tk}$  на характеристики схемы тракта представлена на рис. 5.

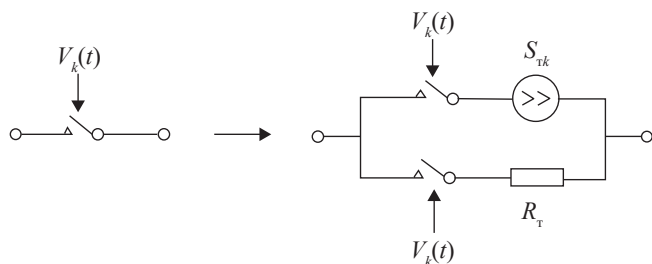


Рис. 4. Шумовая модель ключа схемы смесителя.

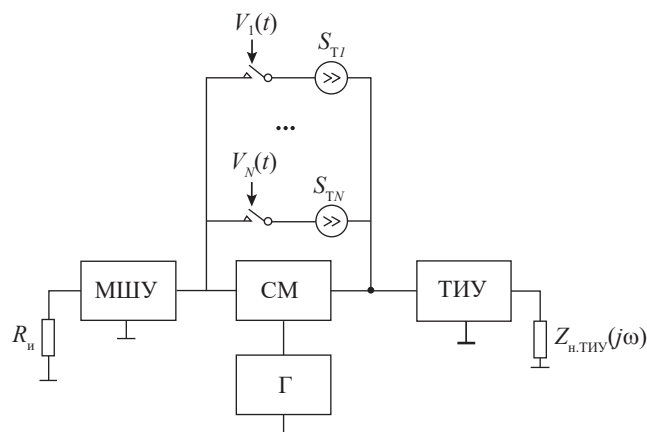


Рис. 5. Обобщенная шумовая блок-схема для оценки влияния  $S_{tk}$  на характеристики приемного тракта.

На третьем этапе определим спектральную плотность средней мощности  $S_{\text{вых.ТИУ}}$  шумового напряжения на выходе приемного тракта, генерируемого ТИУ  $S_{\text{ТИУ}}$ . Обобщенная шумовая схема на уровне блок-схемы для оценки влияния  $S_{\text{ТИУ}}$  на характеристики полной схемы представлена на рис. 6.

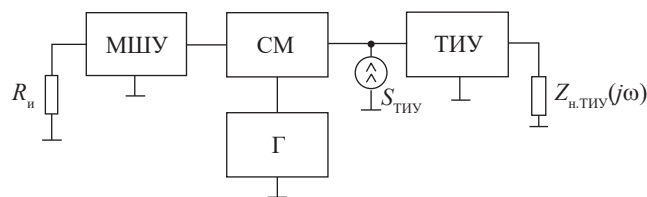


Рис. 6. Обобщенная шумовая блок-схема для оценки влияния  $S_{\text{ТИУ}}$  на характеристики приемного тракта.

Таким образом, в результате определяется спектральная плотность средней мощности выходных шумовых токов на выходе смесителя, рассчитывается спектральная плотность средней мощности шумового напряжения на выходе приемного тракта, т.е. на выходе ТИУ. После этого определяется коэффициент шума приемного тракта и параметры смесителя, при которых достигается минимальный коэффициент шума приемного тракта.

## 2. ШУМ, ГЕНЕРИРУЕМЫЙ МШУ

Обобщенная эквивалентная шумовая схема МШУ представлена на рис. 7, где  $i_{\text{ш.МШУ}}(t)$  – генератор эквивалентного шумового тока, подключенный параллельно с импедансом  $Z_L$ , который определяется выходным импедансом МШУ.

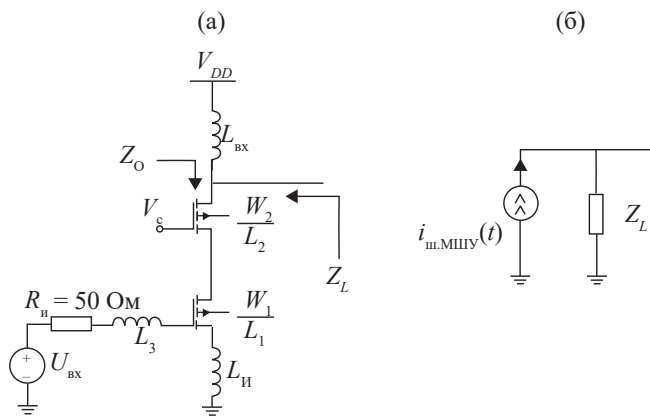


Рис. 7. Схема МШУ (а) и обобщенная эквивалентная шумовая схема МШУ (б).

Ток шумового генератора соответствует сумме токов от каждого из внутренних генераторов шума МШУ. Поскольку собственные шумы МШУ предполагаются известными, для оценки влияния МШУ на шумовые свойства тракта проведено моделирование схемы усилителя и определены спектральные плотности средней мощности  $S_{\text{МШУ}}(\omega)$  для различных источников шума МШУ на входной частоте 2.5 ГГц. Шумовые свойства МШУ определяются следующими элементами: МОП-транзисторы, индуктивности, внутренний импеданс источника сигнала ( $R_i = 50$  Ом). Эти источники являются независимыми, поэтому анализируются отдельно.

Для расчета  $S_{\text{вых.МШУ}}$  используем результаты анализа детерминированного воздействия на смеситель согласно [10]. Определим напряжение на выходе приемного тракта через ток на выходе смесителя  $I_k(j\omega)$  при воздействии эквивалентного



выходного тока МШУ  $I_{\text{МШУ}}(j\omega)$ . В работе [12] показано, что схема на рис. 8а эквивалентна схеме на рис. 8б при следующих соотношениях:

$$Z_{\text{ВХ}}(j\omega) = \frac{Z_{\text{Сп}}(j\omega)[Z_L(j\omega) + Z_C(j\omega)]}{Z_L(j\omega) + Z_C(j\omega) + Z_{\text{Сп}}(j\omega)}, \quad (1)$$

$$I_{\text{ВХ}}(j\omega) = \frac{Z_L(j\omega)Z_{\text{Сп}}(j\omega)}{[Z_L(j\omega) + Z_C(j\omega) + Z_{\text{Сп}}(j\omega)]Z_{\text{ВХ}}(j\omega)} \times I_{\text{МШУ}}(j\omega) = K_1(j\omega)I_{\text{МШУ}}(j\omega), \quad (2)$$

где

$$K_1(j\omega) = \frac{Z_L(j\omega)}{Z_L(j\omega) + Z_C(j\omega)},$$

$Z_C(j\omega)$  – импеданс разделительного конденсатора  $C$ ,  $Z_{\text{Сп}}(j\omega)$  – импеданс суммарной паразитной емкости  $C_{\text{п}}$ . Рассмотрим схему на рис. 8б. Используя метод расчета, приведенный в [10, 12], представим спектр выходного тока  $I_k(j\omega)$  смесителя в виде

$$I_k(j\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_2(m,k)I_{\text{ВХ}}(j\omega + mj\omega_{\Gamma}), \quad (3)$$

где  $\omega_{\Gamma}$  – угловая частота сигнала гетеродина,  $N$  – число плеч,

$$K_2(m,k) = \frac{Z_{\text{ВХ}}(j\omega + mj\omega_{\Gamma})}{Z(j\omega + mj\omega_{\Gamma})} \times$$

$$\times \left[ A_m \exp(j\Phi_{m,k}) - \frac{c(\omega + m\omega_{\Gamma})}{b(\omega + m\omega_{\Gamma})[1 + g(\omega + m\omega_{\Gamma})]} \right] \times \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{A_{m+qN} \exp(j\Phi_{m+qN,k})}{[b(\omega + m\omega_{\Gamma}) + qN]Z(j\omega + (m + qN)\omega_{\Gamma})},$$

$$b(\omega) = \frac{1 + j\omega R_{\text{H}}C_{\text{H}}}{j\omega_{\Gamma} R_{\text{H}}C_{\text{H}}}, c(\omega) =$$

$$= \frac{jN \sin\left(b(\omega)\left(\pi - \frac{\pi}{N}\right)\right) \sin\left(\frac{b(\omega)\pi}{N}\right)}{\pi\omega_{\Gamma} C_{\text{H}} \sin(b(\omega)\pi)},$$

$$g(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{c(\omega)}{(b(\omega) + lN)^2 Z(j\omega + lN\omega_{\Gamma})},$$

$$Z(j\omega) = R_{\Gamma} + Z_{\text{ВХ}}(j\omega) + Z_{\text{H}}(j\omega), A_m \exp(j\Phi_{m,k}) =$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{N}\right)}{m\pi} \exp\left[\frac{jm(2k-1)\pi}{N}\right].$$

Из (1)–(3) получим

$$I_k(j\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_2(m,k)K_1(j\omega + mj\omega_{\Gamma}) \times I_{\text{МШУ}}(j\omega + mj\omega_{\Gamma}). \quad (4)$$

Предполагая приемник гомодинным, рассмотрим выходной ток (4) в основной полосе частот  $\omega$ . Учтем, что внутреннее сопротивление ключей в замкнутом состоянии и входной импеданс ТИУ малы, поэтому выходная нагрузка МШУ по высокой частоте представляет параллельный резонансный контур, состоящий из индуктивности  $L$  и разделительного конденсатора  $C$ . Как следствие, для максимизации коэффициента передачи смесителя  $Z_L(j\omega)$  и  $Z_C(j\omega)$  рассчитываются как резонансный LC-контур, настроенный на входную несущую частоту  $\omega_{\text{ВХ}}$ , поэтому  $|K_1(j\omega)|$  в области входной частоты  $\omega_{\text{ВХ}}$  значительно больше, чем  $|K_1(j\omega)|$  на других частотах. Аппроксимируем сумму в формуле (4) двумя основными слагаемыми при  $m = 1$  и  $m = -1$ . Для этих слагаемых имеем следующие равенства и приближения:

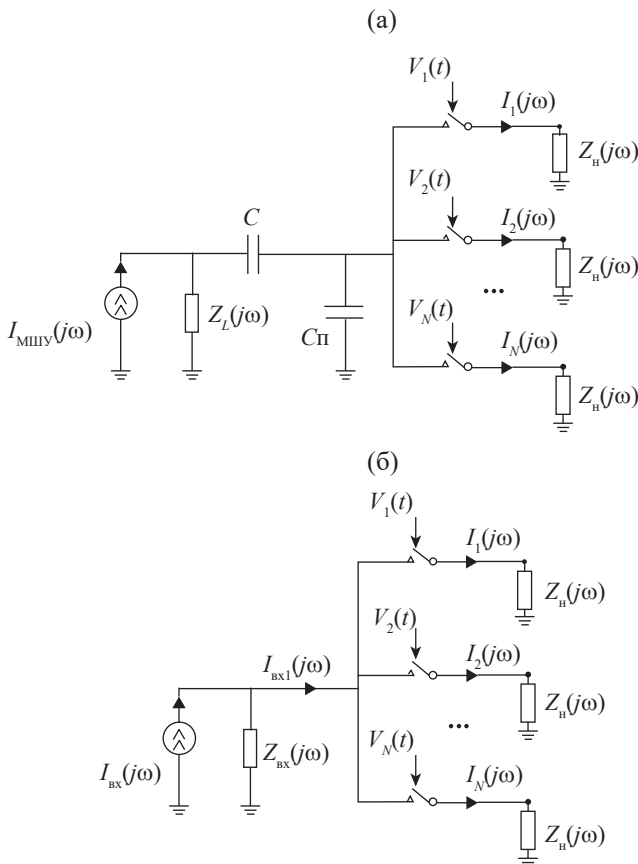


Рис. 8. Схема смесителя для расчета зависимости выходных токов  $I_k(j\omega)$  от  $I_{\text{МШУ}}(j\omega)$  (а) и ее эквивалентная схема (б).

$$\begin{aligned}
A_{m+qN} \exp(j\Phi_{m+qN,k}) &= \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{c(\omega + m\omega_\Gamma) A_{m+qN} \exp(j\Phi_{m+qN,k})}{[b(\omega + m\omega_\Gamma) + qN] Z(j\omega + (m+qN)j\omega_\Gamma)} \approx \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(m+qN)\pi}{N}\right) \exp\left[\frac{j(m+qN)(2k-1)\pi}{N}\right]}{(m+qN)\pi} = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{c(\omega + m\omega_\Gamma) mA_m \exp(j\Phi_{m,k})}{(m+qN)^2 Z(j\omega + (m+qN)j\omega_\Gamma)} \approx \\
&= \frac{mA_m \exp(j\Phi_{m,k})}{m+qN}, \quad \approx mA_m \exp(j\Phi_{m,k}) g(\omega + m\omega_\Gamma).
\end{aligned}$$

$$b(\omega + m\omega_\Gamma) = b(\omega) + m \approx m,$$

Тогда формула (4) упрощается следующим образом:

$$I_k(j\omega) \approx \sum_{m=1,-1} \frac{Z_L(j\omega + mj\omega_\Gamma) Z_{\text{ВХ}}(j\omega + mj\omega_\Gamma) A_m \exp(j\Phi_{m,k})}{[Z_L(j\omega + mj\omega_\Gamma) + Z_C(j\omega + mj\omega_\Gamma)] Z(j\omega + mj\omega_\Gamma) [1 + g(\omega + m\omega_\Gamma)]} I_{\text{МШУ}}(j\omega + mj\omega_\Gamma). \quad (5)$$

Из (5) следует, что выходное напряжение приемного тракта в основной полосе частот  $\omega$  рассчитывается по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
U_{\text{ВЫХ}}(j\omega) &= U_{\text{ВЫХ},1}(j\omega) - U_{\text{ВЫХ},1+N/2}(j\omega) = [I_1(j\omega) - I_{1+N/2}(j\omega)] Z_{\text{ТИУ}}(j\omega) \approx \\
&\approx 2 \sum_{m=1,-1} \frac{Z_L(j\omega + mj\omega_\Gamma) Z_{\text{ВХ}}(j\omega + mj\omega_\Gamma) A_m \exp(j\Phi_{m,k}) Z_{\text{ТИУ}}(j\omega)}{[Z_L(j\omega + mj\omega_\Gamma) + Z_C(j\omega + mj\omega_\Gamma)] Z(j\omega + mj\omega_\Gamma) [1 + g(\omega + m\omega_\Gamma)]} I_{\text{МШУ}}(j\omega + mj\omega_\Gamma), \quad (6)
\end{aligned}$$

где  $U_{\text{ВЫХ},k}(j\omega)$  – выходное напряжение ТИУ  $k$ -го плеча,  $Z_{\text{ТИУ}}(j\omega) = U_{\text{ВЫХ},k}(j\omega)/I_k(j\omega)$  – передаточный импеданс каждого ТИУ. Множитель 2 учитывает противоположную разность фаз токов  $I_1(j\omega)$  и  $I_{1+N/2}(j\omega)$  в основной полосе частот.

Шумовое напряжение на выходе приемного тракта является циклостационарным. Поэтому согласно (6) спектральная плотность средней мощности  $S_{\text{ВЫХ.МШУ}}(\omega)$  шумового напряжения на выходе приемного тракта в основной полосе частот  $\omega$  рассчитывается по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
S_{\text{ВЫХ.МШУ}}(\omega) &\approx 4 \sum_{m=1,-1} \left| \frac{Z_L(j\omega + mj\omega_\Gamma) Z_{\text{ВХ}}(j\omega + mj\omega_\Gamma) A_m \exp(j\Phi_{m,k}) Z_{\text{ТИУ}}(j\omega)}{[Z_L(j\omega + mj\omega_\Gamma) + Z_C(j\omega + mj\omega_\Gamma)] Z(j\omega + mj\omega_\Gamma) [1 + g(\omega + m\omega_\Gamma)]} \right|^2 S_{\text{МШУ}}(\omega + m\omega_\Gamma) \approx \\
&\approx 4 \left| \frac{Z_L(j\omega_\Gamma) Z_{\text{ВХ}}(j\omega_\Gamma) Z_{\text{ТИУ}}(j\omega)}{\pi [Z_L(j\omega_\Gamma) + Z_C(j\omega_\Gamma)] Z(j\omega_\Gamma) [1 + g(\omega_\Gamma)]} \right|^2 S_{\text{МШУ}}(\omega_\Gamma). \quad (7)
\end{aligned}$$

Как отмечено в [12], для максимизации коэффициента передачи смесителя разделительный конденсатор  $C$  выбирается так, чтобы мнимая часть суммарного импеданса  $Z_L(j\omega_\Gamma) + Z_C(j\omega_\Gamma)$  была близка к нулю, поэтому

$$Z_L(j\omega_\Gamma) + Z_C(j\omega_\Gamma) \approx \text{Re } Z_L(j\omega_\Gamma).$$

Тогда соотношение (1) при  $N = 4$  и следующих приближениях:

$$c(\omega_\Gamma) \approx \frac{2R_{\text{H}}}{\pi^2}, |Z_{\text{ВХ}}(j\omega_\Gamma)| \gg |Z_{\text{H}}(j\omega_\Gamma)|, 1 \gg \frac{R_{\Gamma}}{|Z_{\text{Сп}}(j\omega_\Gamma)|}, \quad \text{где}$$

$$g(\omega_\Gamma) \approx \frac{2R_{\text{H}}}{\pi^2} \left( \frac{1}{Z(j\omega_\Gamma)} + \frac{\pi}{4|Z_{\text{Сп}}(j\omega_\Gamma)|} \right),$$

$$Z_{\text{Сп}}(j\omega_\Gamma) \gg \text{Re } Z_L(j\omega_\Gamma),$$

позволяет упростить формулу (7) следующим образом:

$$S_{\text{ВЫХ.МШУ}}(\omega) \approx 4|K_3|^2 S_{\text{МШУ}}(\omega_\Gamma), \quad (8)$$

$$K_3 = \frac{Z_L(j\omega_\Gamma)Z_{\text{ГЛУ}}(j\omega)}{\pi \left[ \text{Re } Z_L(j\omega_\Gamma) \left( 1 + \frac{R_H}{2\pi|Z_{CП}(j\omega_\Gamma)|} \right) + R_\Gamma + \frac{2R_H}{\pi^2} \left( 1 + \frac{\pi R_\Gamma}{4|Z_{CП}(j\omega_\Gamma)|} \right) \right]}$$

### 3. ШУМ, ГЕНЕРИРУЕМЫЙ КЛЮЧАМИ СМЕСИТЕЛЯ

Проведем анализ воздействия шума, генерируемого транзисторами в триодном режиме, т.е. ключами в замкнутом состоянии. Эти шумы моделируются источниками шумового тока, как показано на рис. 4. Необходимо определить спектральную плотность средней мощности шумового напряжения  $S_{\text{ВЫХ.Т}}$ , генерируемого  $N$  ключами смесителя на выходе приемного тракта в основной полосе частот. Поскольку шумовые источники тока независимы, достаточно определить отклик в одном плече и далее просуммировать результат для  $N$  независимых источников шума.

Рассмотрим анализ схемы на рис. 9 на примере первого плеча смесителя. Составим уравнение Кирхгофа для определения тока на выходе смесителя  $I_k(j\omega)$  при воздействии тока  $I_{\text{Т1}}(j\omega)$  с использованием методики, рассмотренной в [10]:

$$[Z_{\text{ВХ}}(j\omega) + R_\Gamma] I_{\text{ВХ1}}(j\omega) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} Q(p, \omega) I_{\text{ВХ1}}(j\omega + pNj\omega_\Gamma) = R_\Gamma \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp(j\varphi_{m,1}) I_{\text{Т1}}(j\omega + mj\omega_\Gamma), \quad (9)$$

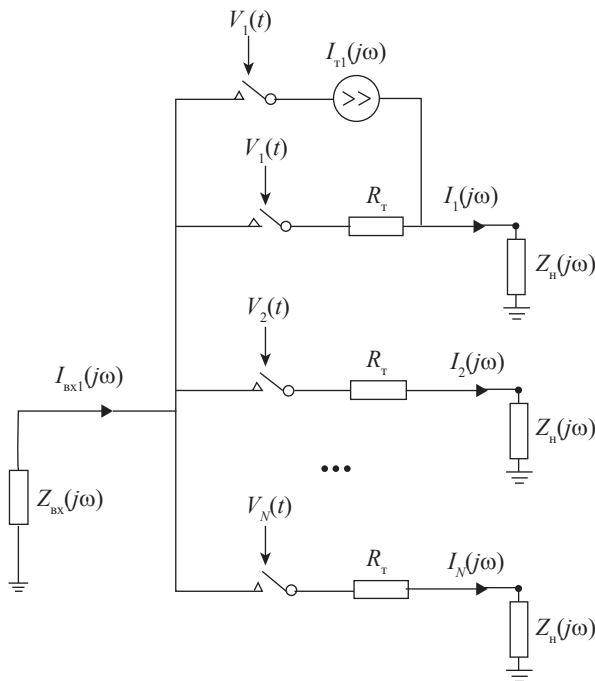


Рис. 9. Схема смесителя для расчета зависимости выходных токов  $I_k(j\omega)$  от  $I_{\text{Т1}}(j\omega)$ .

где

$$Q(p, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} N \exp(-jp\pi) A_m A_{pN-m} Z_H(j\omega + mj\omega_\Gamma).$$

Выходной импеданс смесителя  $Z_H(j\omega)$  является параллельной  $RC$ -цепью ( $R_H \parallel C_H$ ) для фильтрации сигнала в основной полосе частот. В [11] показано, что для обеспечения большого коэффициента передачи смесителя сопротивление  $R_H$  должно быть достаточно малым. Однако для выделения основной полосы частот в области низкой или нулевой промежуточной частоты конденсатор  $C_H$  должен быть достаточно большим. Поэтому входной импеданс  $|Z_{\text{ВХ}}(j\omega)|$  смесителя много больше, чем  $|Q(p, \omega)|$ . Тогда, используя приближение

$$[Z_{\text{ВХ}}(j\omega) + R_\Gamma] I_{\text{ВХ1}}(j\omega) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} Q(p, \omega) I_{\text{ВХ1}}(j\omega + pNj\omega_\Gamma) \approx [Z_{\text{ВХ}}(j\omega) + R_\Gamma + Q(0, \omega)] I_{\text{ВХ1}}(j\omega),$$

упростим формулу (9) следующим образом:

$$[Z_{\text{ВХ}}(j\omega) + R_\Gamma + Q(0, \omega)] I_{\text{ВХ1}}(j\omega) \approx R_\Gamma \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp(j\varphi_{m,1}) I_{\text{Т1}}(j\omega + mj\omega_\Gamma).$$

Откуда определим входной ток

$$I_{\text{ВХ1}}(j\omega) \approx \frac{R_\Gamma \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp(j\varphi_{m,1}) I_{\text{Т1}}(j\omega + mj\omega_\Gamma)}{Z_{\text{ВХ}}(j\omega) + R_\Gamma + Q(0, \omega)}. \quad (10)$$

Согласно соотношению (2) из [10] выходной ток смесителя рассчитывается по формуле

$$I_k(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp(j\varphi_{n,k}) I_{\text{ВХ1}}(j\omega + nj\omega_\Gamma) \approx R_\Gamma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{A_n \exp(j\varphi_{n,k}) A_m \exp(j\varphi_{m,1})}{Z_{\text{ВХ}}(j\omega + nj\omega_\Gamma) + R_\Gamma + Q(0, \omega + n\omega_\Gamma)} \times I_{\text{Т1}}(j\omega + (m+n)j\omega_\Gamma),$$

где

$$\frac{1}{2} (a_{|n|,k} + j \text{sgn}(n) b_{|n|,k}) = A_n \exp(j\varphi_{n,k}).$$

Обозначим  $m + n = q$ . Тогда, с учетом  $m = q - n$  имеем

$$I_k(j\omega) \approx \sum_{q=-\infty}^{+\infty} I_{T1}(j\omega + qj\omega_\Gamma) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{R_T A_n \exp(j\varphi_{n,k}) A_{q-n} \exp(j\varphi_{q-n,1})}{Z_{BX}(j\omega + nj\omega_\Gamma) + R_T + Q(0, \omega + n\omega_\Gamma)}.$$

Таким образом, выходное напряжение приемного тракта в основной полосе частот  $\omega$  определяется как

$$\begin{aligned} U_{\text{ВЫХ}}(j\omega) &= U_{\text{ВЫХ},1}(j\omega) - U_{\text{ВЫХ},1+N/2}(j\omega) = [I_1(j\omega) - I_{1+N/2}(j\omega)] Z_{\text{ТИУ}}(j\omega) \approx \\ &\approx Z_{\text{ТИУ}}(j\omega) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} I_{T1}(j\omega + qj\omega_\Gamma) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{R_T A_n [\exp(j\varphi_{n,1}) - \exp(j\varphi_{n,1+N/2})] A_{q-n} \exp(j\varphi_{q-n,1})}{Z_{BX}(j\omega + nj\omega_\Gamma) + R_T + Q(0, \omega + n\omega_\Gamma)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Шумовое напряжение на выходе приемного тракта является циклостационарным. Шумовой ток каждого ключа является тепловым шумом, поэтому  $S_{T_k}$  не меняется с частотой. Следовательно, согласно

(11) спектральная плотность средней мощности  $S_{\text{ВЫХ},T1}(\omega)$  шумового напряжения на выходе приемного тракта, генерируемого первым ключом смесителя, рассчитывается по следующей формуле:

$$\begin{aligned} S_{\text{ВЫХ},T1}(\omega) &\approx \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{T1}(\omega + q\omega_\Gamma) \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{R_T Z_{\text{ТИУ}}(j\omega) A_n [\exp(j\varphi_{n,1}) - \exp(j\varphi_{n,1+N/2})] A_{q-n} \exp(j\varphi_{q-n,1})}{Z_{BX}(j\omega + nj\omega_\Gamma) + R_T + Q(0, \omega + n\omega_\Gamma)} \right|^2 = \\ &= S_{T1} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2R_T Z_{\text{ТИУ}}(j\omega) A_n \exp(j\varphi_{n,1}) A_{q-n} \exp(j\varphi_{q-n,1})}{Z_{BX}(j\omega + nj\omega_\Gamma) + R_T + Q(0, \omega + n\omega_\Gamma)} \right|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

В [11] показано, что для обеспечения большого коэффициента передачи смесителя внутреннее сопротивление ключа  $R_T$  в замкнутом состоянии должно быть достаточно малым. Обычно на практике  $R_T$  выбирается меньше 20 Ом. Поэтому  $R_T$  много меньше, чем входной импеданс  $|Z_{BX}(j\omega)|$  смесителя. Данное обстоятельство и сопоставление соотношений (7) и (12) показывает, что  $S_{\text{ВЫХ},T1}(\omega)$  много меньше, чем  $S_{\text{ВЫХ},MШУ}(\omega)$ . Полученный результат позволяет сделать принципиальный вывод: при оценке шумового напряжения на выходе приемного тракта пренебрегаем спектральной плотностью средней мощности шума  $S_{\text{ВЫХ},T}(\omega) = N S_{\text{ВЫХ},T1}(\omega)$ , генерируемого  $N$  ключами смесителя по сравнению с шумом МШУ. Это подтверждает низкий уровень шума смесителя с управлением по току.

#### 4. ШУМ, ГЕНЕРИРУЕМЫЙ ТИУ

Поскольку предполагается управление смесителем непрерывными импульсами, не существует периода времени, когда несколько ключей замкнуты одновременно. Таким образом, не происходит утечки

шумов из ТИУ одного плеча к другому. Кроме того, входной импеданс  $|Z_{BX}(j\omega)|$  смесителя намного больше, чем выходной импеданс  $|Z_H(j\omega)|$  смесителя. Поэтому считаем, что шум ТИУ не может просочиться в смеситель и МШУ. Это означает, что составляющая спектральной плотности средней мощности  $S_{\text{ВЫХ},ТИУ}(\omega)$  шумового напряжения на выходе приемного тракта, генерируемого ТИУ, не зависит от схемы МШУ и смесителя и подключается непосредственно на выход приемника в целом.

#### 5. МИНИМИЗАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ШУМА ПРИЕМНОГО ТРАКТА

Коэффициент шума приемного тракта рассчитывается по формуле

$$NF = 10 \lg \left[ \frac{S_{\text{ВЫХ}}(\omega)}{S_{\text{ВЫХ},Rи}(\omega)} \right], \quad (13)$$

где  $S_{\text{ВЫХ},Rи}(\omega)$  – спектральная плотность средней мощности шумового напряжения на выходе приемного тракта, генерируемого внутренним

импедансом  $R_{и}$  источника сигнала. Из (8)  $S_{\text{вых.}R_{и}}(\omega)$  где рассчитывается по формуле

$$S_{\text{вых.}R_{и}}(\omega) \approx 4|K_3 g_{\text{МШУ}}|^2 S_{\text{вх.}R_{и}}(\omega), \quad (14)$$

где  $g_{\text{МШУ}} = I_{\text{МШУ}}/U_{\text{вх}}$  – передаточная проводимость МШУ, которая предполагается известной,  $U_{\text{вх}}$  – амплитуда входного напряжения МШУ,  $S_{\text{вх.}R_{и}}(\omega)$  – спектральная плотность средней мощности шумового напряжения на входе МШУ, генерируемого внутренним импедансом  $R_{и}$  источника сигнала. Суммарная спектральная плотность  $S_{\text{вых}}$  равна сумме всех спектральных плотностей средней мощности шумового напряжения на выходе приемного тракта, генерируемого каждым источником шума в приемном тракте. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} S_{\text{вых}}(\omega) &= S_{\text{вых.}R_{и}}(\omega) + S_{\text{вых.МШУ}}(\omega) + \\ &+ S_{\text{вых.Т}}(\omega) + S_{\text{вых.ТИУ}}(\omega) \approx \\ &\approx 4|K_3 g_{\text{МШУ}}|^2 S_{\text{вх.}R_{и}}(\omega) + \\ &+ 4|K_3|^2 S_{\text{МШУ}}(\omega_{\Gamma}) + S_{\text{вых.ТИУ}}(\omega). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (13)–(15) коэффициент шума приемного тракта определяется как

$$\begin{aligned} NF &= 10 \log \left[ \frac{S_{\text{вых}}(\omega)}{S_{\text{вых.}R_{и}}(\omega)} \right] \approx \\ &\approx 10 \log \left[ 1 + \frac{S_{\text{МШУ}}(\omega_{\Gamma})}{g_{\text{МШУ}}^2 S_{\text{вх.}R_{и}}(\omega)} + \right. \\ &\left. + \frac{S_{\text{вых.ТИУ}}(\omega)}{4|K_3 g_{\text{МШУ}}|^2 S_{\text{вх.}R_{и}}(\omega)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Для минимизации коэффициента шума приемного тракта необходимо определить ширину  $W$  транзисторов (ключей) смесителя, так как при заданном напряжении на затворе внутреннее сопротивление ключей в замкнутом состоянии  $R_{т}$  и суммарная паразитная емкость  $C_{п}$  ключей зависят от данного параметра. Поскольку согласно (16) только функция  $K_3$  зависит от  $W$ , то, применив неравенство Коши  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ,  $x \geq 0, y \geq 0$  для знаменателя  $P$  коэффициента  $K_3$ , получим

$$\begin{aligned} P &= \pi \left[ \text{Re } Z_L(j\omega_{\Gamma}) \left( 1 + \frac{R_{н}}{2\pi|Z_{Cп}(j\omega_{\Gamma})|} \right) + \right. \\ &\left. + \left( R_{т} + \frac{2R_{н}}{\pi^2} \right) \right] \geq P_{\text{min}}, \end{aligned}$$

$$x = R_{т}, y = \frac{\text{Re } Z_L(j\omega_{\Gamma})R_{н}}{2\pi|Z_{Cп}(j\omega_{\Gamma})|},$$

$$P_{\text{min}} = \pi \left[ 2\sqrt{\frac{\text{Re } Z_L(j\omega_{\Gamma})R_{н}R_{т}}{2\pi|Z_{Cп}(j\omega_{\Gamma})|}} + \text{Re } Z_L(j\omega_{\Gamma}) + \frac{2R_{н}}{\pi^2} \right].$$

Поскольку отношение  $K_4 = R_{т}/|Z_{Cп}(j\omega_{\Gamma})|$  не зависит от ширины  $W$  транзисторов, то выражение  $P_{\text{min}}$  также не зависит от ширины  $W$  транзисторов. Следовательно, коэффициент шума приемного тракта достигает наименьшего значения при выполнении равенства в условии Коши, т.е. при  $x = y$  получаем

$$\begin{aligned} R_{т} &= \frac{\text{Re } Z_L(j\omega_{\Gamma})R_{н}}{2\pi|Z_{Cп}(j\omega_{\Gamma})|} = \frac{\text{Re } Z_L(j\omega_{\Gamma})R_{н}}{\frac{2\pi R_{т}}{K_4}}, \\ R_{т.опт} &= \sqrt{\frac{K_4 \text{Re } Z_L(j\omega_{\Gamma})R_{н}}{2\pi}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Значение внутреннего сопротивления ключа в замкнутом состоянии  $R_{т.опт}$ , рассчитанное согласно (17), обеспечивает минимальное значение коэффициента шума приемника.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Схема приемного тракта при несущей частоте 2.5 ГГц представлена в [12, рис. 2]. В данной работе представлены разработки приемного тракта на основе двух технологических процессов: 180 нм КМОП UMC, GaAs pHEMT05D (АО «Светлана-Рост»). Малощумящий усилитель разработан на основе схемы с отрицательной обратной связью по току [13]. Разделительный конденсатор  $C$  рассчитывается по методике [12]. Трансимпедансный усилитель разработан на основе схемы с общим затвором, что обеспечивает низкий выходной импеданс  $|Z_{н}(j\omega)|$  смесителя в режиме управления по току. Емкость  $C_{п}$  определяется шириной основной полосы частот. Параметры элементов приемного тракта для двух вариантов технологического процесса представлены в табл. 1.

Для оценки влияния МШУ на шумовые свойства тракта проведено моделирование схемы усилителя и определена спектральная плотность средней мощности  $S_{\text{МШУ}}(\omega)$  на несущей частоте 2.5 ГГц с помощью программной платформы Cadence (для 180 нм КМОП UMC) и Microwave Office (для GaAs pHEMT05D) для различных источников шума МШУ. На основе результатов моделирования  $S_{\text{МШУ}}(\omega)$  рассчитана  $S_{\text{вых.МШУ}}(\omega)$  согласно (8).

Представленные в табл. 2 результаты подтверждают хорошее соответствие между моделированием и расчетом  $S_{\text{МШУ}}(\omega)$ ,  $S_{\text{вых.МШУ}}(\omega)$ .



**Таблица 1.** Основные параметры элементов приемного тракта для двух технологических процессов

Параметр	180 нм КМОП UMC	GaAs pHEMT05D
$g_{\text{МШУ}}, \text{А/В}$	0.022	0.045
$L, \text{нГн}$	14.2	4.6
Добротность индуктивности $Q_L$	5.6	29.8
$W_1/L_1, \text{мкм/мкм}$	500/0.2	400/0.5
$W_2/L_2, \text{мкм/мкм}$	50/0.2	80/0.5
$Z_L(j\omega)$ на частоте 2.5 ГГц	$94.5 + 276.5j$	$3.5 + 74.8j$
$C, \text{пФ}$	0.232	0.851
$K_4$	0.097	0.073
$R_{\text{н}}, \text{Ом}$	82.6	28
$C_{\text{н}}, \text{пФ}$	20	20
$Z_{\text{ТИУ}}, \text{Ом}$ , на частоте 5 МГц	862	638.3

**Таблица 2.** Результат моделирования и расчета шумового свойства МШУ и  $R_{\text{и}}$ 

Параметр	180 нм КМОП UMC			GaAs pHEMT05D		
	$S_{\text{МШУ}}$ на частоте 2.5 ГГц (моделирование), $\text{нА}^2/\text{Гц}$	$S_{\text{вых.МШУ}}$ на частоте 5 МГц (моделирование), $\text{нВ}^2/\text{Гц}$	$S_{\text{вых.МШУ}}$ на частоте 5 МГц (расчет по (8)), $\text{нВ}^2/\text{Гц}$	$S_{\text{МШУ}}$ на частоте 2.5 ГГц (моделирование), $\text{нА}^2/\text{Гц}$	$S_{\text{вых.МШУ}}$ на частоте 5 МГц (моделирование), $\text{нВ}^2/\text{Гц}$	$S_{\text{вых.МШУ}}$ на частоте 5 МГц (расчет по (8)), $\text{нВ}^2/\text{Гц}$
$R_{\text{и}}$	4.000e-4	5.232e+2	5.359e+2	1.639e-3	6.115e+3	6.397e+3
Тепловой шум каскодного транзистора	7.555e-5	1.017e+2	1.012e+2	2.077e-5	7.746e+1	8.105e+1
$L_3$	6.683e-5	8.751e+1	8.953e+1	3.100e-4	1.152e+3	1.210e+3
Тепловой шум усилительного транзистора	3.974e-5	5.218e+1	5.324e+1	2.151e-5	8.028e+2	8.394e+2
$L_{\text{и}}$	1.795e-5	2.354e+1	2.405e+1	7.611e-6	2.848e+1	2.971e+1
Фликерный шум каскодного транзистора	1.769e-5	2.330e+1	2.370e+1	0	0	0
$L$	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$	7.382e-6	2.751e+1	2.881e+1

Для оценки вклада шумов смесителя  $S_{\text{вых.т}}$  и ТИУ  $S_{\text{вых.ТИУ}}$  в суммарную спектральную плотность средней мощности шумового напряжения на выходе приемного тракта  $S_{\text{вых}}$  проведено моделирование схемы приемного тракта в основной полосе на частоте 5 МГц для различных значений  $R_{\text{т}}$ . Результат моделирования показывает, что вклад  $S_{\text{вых.т}}$  не превышает 5% от  $S_{\text{вых}}$  при изменении  $R_{\text{т}}$  до 70 Ом.

Рассчитанные согласно (17) оптимальные значения составили:  $R_{\text{т.опт}} = 11$  Ом при ширине транзистора  $W = 55$  мкм и  $N_{\text{п}} = 2$ , где  $N_{\text{п}}$  — число

«пальцев» для технологии 180 нм КМОП UMC,  $R_{\text{т.опт}} = 1$  Ом при ширине транзистора  $W = 213$  мкм и  $N_{\text{п}} = 8$  для технологии GaAs pHEMT05D. Зависимости коэффициента шума приемного тракта от  $R_{\text{т}}$  для двух технологических процессов представлены на рис. 10. Результат моделирования соответствует расчету с точностью до 5%.

Результаты расчетов и моделирования показывают, что для технологии 180 нм КМОП UMC при изменении  $W$  от 30 мкм и  $N_{\text{п}} = 2$  ( $R_{\text{т}} = 20$  Ом) до 60 мкм и  $N_{\text{п}} = 2$  ( $R_{\text{т}} = 10$  Ом) коэффициент шума

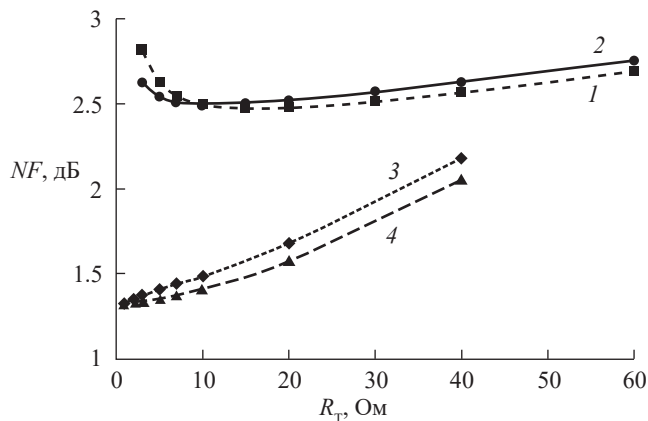


Рис. 10. Зависимость коэффициента шума  $NF$  от  $R_T$  для КМОП (1, 2) и GaAs (3, 4): моделирование (1, 3) и расчет (2, 4).

приемного тракта слабо изменяется относительно минимального значения 2.48 дБ. Если  $W$  меньше 30 мкм и  $N_{\text{п}} = 2$ , то коэффициент шума увеличивается из-за увеличения  $R_T$ . Если  $W$  больше 60 мкм и  $N_{\text{п}} = 2$ , то коэффициент шума увеличивается из-за увеличения  $C_{\text{п}}$ . Следует отметить, что аналогичные результаты получены для технологии GaAs рНЕМТ05D при изменении  $W$  от 200 мкм и  $N_{\text{п}} = 4$  до 400 мкм и  $N_{\text{п}} = 8$ . При этом минимальный коэффициент шума составляет 1.33 дБ при  $W = 213$  мкм и  $N_{\text{п}} = 8$  ( $R_T = 1$  Ом).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена методика расчета спектральной плотности средней мощности шумового напряжения на выходе приемного тракта, генерируемого источниками шумов МШУ, смесителя, ТИУ, и коэффициента шума приемного тракта.

По результатам моделирования и расчета шума на выходе показано, что шум, генерируемый МШУ и внутренним импедансом источника сигнала, составляет основную часть шума на выходе приемного тракта. Шум, генерируемый ключами смесителя, мал и им можно пренебречь. Это доказывает преобладающие шумовые характеристики пассивного смесителя с управлением по току.

Определено оптимальное (наименьшее) значение коэффициента шума приемного тракта на основе выбора ширины  $W$  транзисторов

(ключей) смесителя. Результаты расчета подтверждены результатами моделирования для двух технологических процессов (180 нм КМОП УМС и GaAs рНЕМТ05D), показавшими высокую точность методики расчета. На основе результата исследования указан диапазон значений  $W$ , в которых достигается минимальное значение коэффициента шума приемного тракта. Если  $W$  находится за пределами этого диапазона, коэффициент шума значительно возрастает из-за уменьшения коэффициента передачи приемного тракта.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Terrovitis M. A., Mayer R. G. // IEEE J. Solid-State Circuits. 1999. V. 34. № 6. P. 772.
2. Darabi H., Abidi A. A. // IEEE Trans. 2000. V. SSC-35. № 1. P. 15.
3. Коротков А. С. // Микроэлектроника. 2011. Т. 40. № 2. С. 128.
4. Qi G., Shao H., Mak P. I. // IEEE J. Solid-State Circuits. 2020. V. 55. № 12. P. 3387.
5. Yang D., Andrew C., Molnar A. // IEEE Trans. 2015. V. CS-I-62. № 11. P. 2759.
6. Lenka M. K., Banerjee G. // IEEE Trans. 2019. V. VLSI-27. № 5. P. 993.
7. Shams N., Nabki F. // IEEE Trans. 2023. V. VLSI-31. № 3. P. 369.
8. Chehrazai S., Mirzaei A., Abidi A. A. // IEEE Trans. 2010. V. CS-I-57. № 2. P. 332.
9. Чан Т. Д., Коротков А. С. // РЭ. 2024. Т. 69. № 3. С. 288.
10. Коротков А. С., Чан Т. Д. // РЭ. 2023. Т. 68. № 1. С. 83.
11. Mirzaei A., Darabi D., Leete J. C. et al. // IEEE J. Solid-State Circuits. 2009. V. 44. № 10. P. 2678.
12. Korotkov A. S., Tran T. D. // Proc. 2023 Int. Conf. Electrical Engineering and Photonics. St. Petersburg. 19–20 Oct. N.Y.: IEEE, 2023. P. 22.
13. Nguyen T. K., Kim C. H., Ihm G. J. et al. // IEEE Trans. 2004. V. MTT-52. № 5. P. 1433.

## NOISE FIGURE ANALYSIS OF RECEIVER BASED ON CURRENT-DRIVEN MIXER

**A. S. Korotkov\*, T. D. Tran**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,  
Polytechnicheskaya St. 29, Str. Petersburg, 195251 Russia  
\*E-mail: korotkov@spbstu.ru*

Received February 14, 2024, revised May 17, 2024, accepted July 25, 2024

An analysis of the noise characteristics of the receiver based on a current-driven passive mixer is presented, taking into account the noise of the following blocks: the low-noise amplifier at input of the mixer, the mixer itself, and the transimpedance amplifier at output of the mixer. The noise at the output of the receiver, which is generated by the listed groups of noise sources, is analyzed. The noise figure of the receiver and its optimal (minimum) value are found taking into account the influence of parasitic capacitances of the switches of the mixer. The calculation results are confirmed by the simulation results.

*Keywords:* noise figure, receiver, low-noise amplifier, current-driven passive mixer, transimpedance amplifier, noise power spectral density

УДК 537.811

## КОМПЕНСАЦИЯ ШУМА ДВИЖЕНИЯ МОРСКОГО ЭЛЕКТРОДНОГО ДАТЧИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

**В. Г. Максименко**

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190 Российская Федерация*

*E-mail: max54@ms.ire.rssi.ru*

Поступила в редакцию 10.04.2024 г.

После доработки 10.04.2024 г.

Принята к публикации 24.04.2024 г.

Показана возможность компенсации составляющей шума электродного датчика, вызванной пульсациями скорости жидкости относительно электродов датчика электромагнитного поля, и возможность повышения чувствительности приемного устройства в несколько раз. Предложена схема устройства для приема и измерения низкочастотного электрического поля в море, в которой осуществлена указанная компенсация.

*Ключевые слова:* электродный датчик, электродный шум, пульсации скорости жидкости, коэффициент корреляции

**DOI:** 10.31857/S0033849424110104, **EDN:** HNYOSQ

### ВВЕДЕНИЕ

Электродный датчик электрического поля, представляющий собой пару электродов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга, нашел широкое применение в геофизике при измерении напряженности низкочастотных электрических полей в океане. Он используется для изучения строения земной коры и разведки полезных ископаемых на шельфе, а также в системах радиосвязи с глубоко погруженными исследовательскими объектами в океане [1–3]. При обследовании акватории большой площади датчик буксируют за судном на кабель-тросе. При этом основной причиной, ограничивающей чувствительность электродного датчика, является специфический электродный шум, представляющий собой флуктуации потенциала электродов, возникающие вследствие движения электродов относительно жидкости. Величина шумового напряжения в выполненных нами ранее экспериментах при движении датчика была на 10...20 дБ больше, чем в состоянии покоя [4, 5]. Экспериментально и теоретически установлена связь пульсаций напряжения между электродами с пульсациями скорости жидкости относительно электродов [6]. Такие пульсации скорости могут возникать, например, вследствие вибраций буксирующего датчик кабель-троса, при пересечении

датчиком турбулентных вихрей, возникающих в кильватерном следе буксирующего судна, и т.п.

В работе [7] показана возможность компенсации шума движения при использовании корреляционной связи между напряжением шума движения электродного датчика и пульсациями скорости потока жидкости. Однако практическая реализация такой компенсации достаточно сложна, так как для получения компенсирующего напряжения в приемном устройстве используют специальные датчики скорости, которые установлены рядом с электродами.

Цель статьи — показать возможность компенсации шума более простыми техническими средствами.

### 1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Ранее нами было показано [8], что за счет правильного выбора размеров и места расположения электродов датчика на плоской диэлектрической пластине-обтекателе достигается уменьшение шума движения до 10 раз по сравнению с расположением электродов на передней кромке пластины-обтекателя. Это свойство открывает возможность применения второго электродного датчика для получения компенсирующего напряжения.

Пусть пара электродов, образующих первый датчик, расположена непосредственно у передней кромки обтекателя. Пусть также на поверхности

обтекателя на некотором расстоянии от передней кромки обтекателя (рис.1) расположена вторая пара электродов, идентичная первой, образующая второй датчик. Среднеквадратическое значение напряжения шума движения у первого датчика в  $k$  раз больше, чем у второго, при этом оба напряжения коррелированы, поскольку они созданы одним и тем же пульсирующим потоком жидкости. Напряжение, создаваемое на обоих парах электродов измеряемым электрическим полем, одинаково, поскольку одинаково расстояние между электродами датчика.

Пусть  $x(t)$  — напряжение шума первого датчика,  $y(t)$  — напряжение шума второго датчика, а  $r_{xy}$  — коэффициент корреляции между  $x(t)$  и  $y(t)$ . Средние значения  $x(t)$  и  $y(t)$  равны нулю, а среднеквадратические отклонения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  мы уравниваем. Среднеквадратическое отклонение разности  $x(t) - y(t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{x-y} &= \sqrt{(x-y)^2} = \\ &= \sqrt{x^2 \left( 1 - 2\frac{xy}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} \right)} = \sigma_x \sqrt{1 - 2\frac{R_{xy}}{\sigma_x^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $R_{xy} = \overline{xy}$  — ковариация двух случайных процессов. Так как  $\sigma_x = \sigma_y$ , коэффициент корреляции  $r_{xy} = R_{xy}/\sigma_x\sigma_y$ , то формулу (1) можно записать в виде

$$\sigma_{x-y} = \sigma_x \sqrt{2(1-r_{xy})}. \quad (2)$$

При высокой корреляции двух случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  и одинаковых среднеквадратических отклонениях возможно получить  $\sigma_{x-y} \ll \sigma_x$

при вычитании этих процессов.

В работе [7] показано, что при коэффициенте корреляции, равном 0.9, вычитание напряжения датчика скорости из электродного шума позволило уменьшить среднеквадратическое отклонение напряжения шума в 2.3 раза, что совпадает со значением, которое дает формула (2). Можно ожидать высокой корреляции и между флуктуациями потенциала двух рядом расположенных в одном потоке электродов. Это дает основание полагать, что при вычитании шумовых напряжений с двух рядом расположенных пар электродов разностное напряжение будет иметь значительно меньшее среднеквадратическое отклонение, чем большее из них, принадлежащее первому датчику с электродами, который расположен на передней кромке пластины. Однако если полученное при этом напряжение шума больше, чем напряжение, полученное со второй пары электродов, т.е. меньшее из вычитаемых, то такое вычитание не имеет смыс-

ла. Получить выигрыш в отношении сигнал—шум можно только при высокой степени корреляции шумовых напряжений.

В соответствии с [8] и рис. 1 отношение  $k$  шумовых напряжений первого и второго датчика определяется формулой

$$k = 2\sqrt{l_1/d + 1}, \quad (3)$$

где  $l_1$  — расстояние от передней кромки пластины до передней границы электрода,  $d$  — ширина электрода. При  $l_1 \gg d$

$$k \approx 2\sqrt{l_1/d}. \quad (4)$$

При удалении узкого электрода ( $d \ll l_1$ ) от передней кромки пластины чувствительность его к пульсациям скорости жидкости уменьшается пропорционально  $\sqrt{l_1}$ .

После уравнивания и вычитания шумовых напряжений отношение сигнал—шум увеличивается в  $N$  раз, где

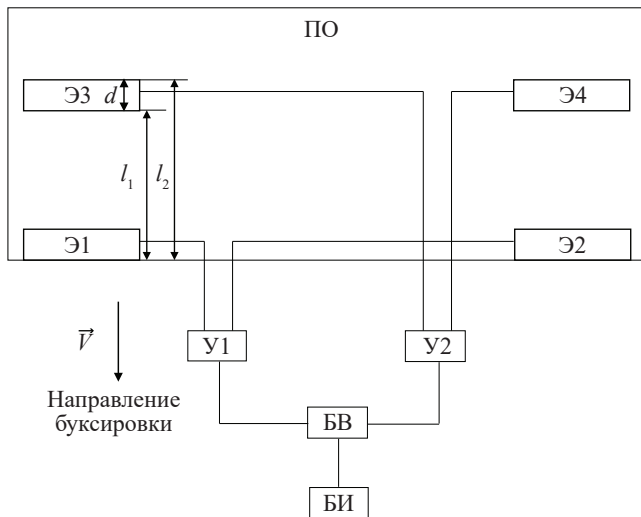
$$N = (k-1) / k\sqrt{2(1-r_{xy})}. \quad (5)$$

При коэффициенте корреляции  $r_{xy} = 0.9$  получаем увеличение отношения сигнал—шум в  $2.24(1-1/k)$  раз. Следовательно, увеличение отношения сигнал—шум достигается уже при  $k \geq 2$ . При  $k = 3$  получаем  $N = 1.5$ .

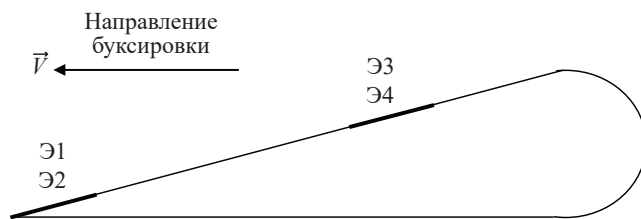
Устройство для приема и измерения низкочастотного электромагнитного поля в море, в котором используется компенсация шума движения, схематично изображено на рис. 1 и 2 (вид сбоку на буксируемую часть). Устройство состоит из буксируемой диэлектрической платформы-обтекателя ПО, первого и второго усилителей У1 и У2, блока вычитания БВ, блока обработки информации БИ и четырех электродов Э1...Э4.

Диэлектрическая платформа имеет форму клина с затупленными концами (см. рис. 2). Как известно [9], пограничный слой на поверхности обтекаемого жидкостью тела имеет склонность к отрыву, особенно при наличии неровностей на обтекаемой поверхности. При отрыве пограничного слоя пульсации скорости у поверхности электрода становятся значительно больше. Там же показано, что отрыва пограничного слоя не происходит, если толщина обтекаемого тела увеличивается по направлению вектора скорости потока. Поэтому диэлектрическую платформу следует выполнить в виде клина с углом при вершине 5...10 град. Переднюю и заднюю кромку клина целесообразно затупить в целях безопасности и для улучшения гидродинамического качества. Одинаковые плоские металлические электроды Э3





**Рис. 1.** Устройство для приема и измерения низкочастотного электрического поля в море: Э1... Э4 — электроды, ПО — диэлектрическая платформа-обтекатель, У1 — усилитель, У2 — регулируемый усилитель, БВ — блок вычитания, БИ — блок обработки информации. Стрелкой показано направление буксировки.



**Рис. 2.** Схема буксируемой диэлектрической платформы с электродами (вид сбоку).

и Э4 в форме прямоугольника заподлицо встроены в плоскую поверхность платформы. Передние и задние стороны электродов (относительно направления буксировки) параллельны передней кромке платформы и расположены на равных расстояниях от ее передней кромки. Электроды Э1 и Э2 также идентичны и имеют прямоугольную форму. Они заподлицо встроены в плоскую поверхность диэлектрической платформы таким образом, что их передняя по ходу движения граница совпадает с передней кромкой платформы. Электроды Э1 и Э2 образуют первый электродный датчик, а электроды Э3 и Э4 — второй электродный датчик. Первый электродный датчик через усилитель У1 соединен с первым входом блока вычитания БВ, а второй электродный датчик через регулируемый усилитель У2 соединен со вторым входом блока вычитания БВ, выход которого подключен к блоку обработки информации БИ.

Устройство работает следующим образом. Платформа ПО буксируется с помощью ка-

бель-троса влево (в соответствии с рис. 2) за судном на некоторой глубине от поверхности моря. Электрическая компонента электромагнитной волны, распространяющейся от поверхности моря вниз, создает в морской воде токи проводимости. Разность потенциалов, создаваемая в воде токами проводимости, с помощью электродов первого и второго датчика передается по кабель-тросу на расположенное на борту буксирующего судна приемное устройство, включающее в себя усилители, блок вычитания и блок обработки и отображения информации, где выделяется из помех и измеряется. Пульсации скорости буксировки создают специфическую помеху — электродный шум движения. Как показано автором [7], пульсации потенциала электрода, обтекаемого пульсирующим потоком воды, имеют высокую степень корреляции с пульсациями скорости потока. В работе автора [6] также показано, что электродный шум движения определяется флуктуациями потока диффузии кислорода на поверхности электрода. При этом скорость диффузии уменьшается при увеличении толщины диффузионного слоя жидкости у поверхности электрода, следовательно, при увеличении расстояния от электрода до передней кромки платформы-обкателя. Пульсации скорости потока воды создают на паре электродов Э3 и Э4, удаленной от передней кромки обкателя ПО, существенно меньшее напряжение шума движения, чем на паре электродов Э1 и Э2, расположенной непосредственно вблизи передней кромки. Оба эти напряжения имеют высокую степень корреляции, что позволяет осуществить их компенсацию путем вычитания при уравнивании среднеквадратических значений. Обозначим  $U_{ш}$  напряжение шума движения, получаемое от электродов Э3 и Э4. Тогда напряжение шума движения, получаемое от электродов Э1 и Э2, расположенных у передней кромки платформы, равно  $kU_{ш}$ , где  $k > 1$ . В лабораторных экспериментах, выполненных автором, значение  $k$  достигало 3. Его можно увеличить путем увеличения расстояния от передней кромки платформы до передней и задней границ электродов Э1 и Э2, однако при этом, очевидно, будет уменьшаться корреляция между шумовым напряжением первого и второго датчиков. Напряжение сигнала  $U_c$ , получаемое от первого и второго датчиков, одинаково, поскольку одинаково расстояние между электродами Э1 и Э2 первого датчика и между электродами Э3 и Э4 второго датчика. После уравнивания среднеквадратического значения напряжения шума, поступающего с первого и второго датчиков, с помощью усилителей У1, У2 (коэффициент усиления усилителя У2 регулируется) напряжения сигнала на выходе усилителей У1, У2 тоже отличаются в  $k$  раз. Поэтому после вычитания при  $k = 10$  получим на выходе блока вычитания напряжение сигнала  $0.9KU_c$  ( $K$  — коэффициент усиления усилителя 7). При коэффициенте

корреляции 0.9 между напряжением шума с первого и второго датчиков после вычитания оно станет меньше в 2.3 раза, т.е. равным  $0.435KU_{\text{ш}}$ . В результате на входе блока обработки информации отношение сигнал—шум повысится примерно в два раза. Следует располагать электроды Э1 и Э3, а также Э2 и Э4 друг за другом в одном потоке, что повышает коэффициент корреляции между шумовым напряжением первого и второго датчиков, следовательно, увеличивает выигрыш в отношении сигнал—шум.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Выполнен лабораторный эксперимент, подтверждающий правильность предположения о высокой степени корреляции между пульсациями потенциала двух электродов, находящихся в одном потоке жидкости, как, например, электродов Э1, Э3 и Э2, Э4 (см. рис. 1). Лабораторная установка, использованная в эксперименте, описана в [8]. Схема измерительной ячейки показана на рис. 3.

Исследуемые электроды 1 и 2, выполненные в виде отрезков титановой проволоки диаметром 1 мм, встроены в диэлектрический цилиндр 3 диаметром 11 мм, отлитый из эпоксидной смолы. Вместе с цилиндром 3 они образуют электродный блок, который установлен на корпусе ячейки 4, изготовленном из органического стекла. Шлифованные торцы отрезков титановой проволоки, которые и являются собственно измерительными электродами, встроены заподлицо в плоскую торцевую площадку диэлектрического цилиндра (см. рис. 3), на которую набегает пульсирующий поток раствора NaCl с концентрацией 4.5 г/л, имитирующего морскую воду. Первый электрод 1 находится вблизи переднего края площадки на расстоянии 4 мм от инжектора. Второй электрод 2 на 10 мм отодвинут от первого по направлению потока и располагается у противоположного края площадки. Среднюю скорость потока жидкости не измеряли, но по косвенным оценкам она составляла около 0.2 м/с. Скорость имела контролируемую пульсацию с частотой 22.8 Гц. Помимо специально созданной пульсации скорости существуют и случайные пульсации, обусловленные турбулентностью потока. Направление вектора пульсации скорости в турбулентных вихрях произвольное, поэтому для них корреляция на электродах 1 и 2 отсутствует. Одновременно записаны две секундные реализации шумового напряжения: между электродами 1, 8 и 2, 8.

В результате обработки этих реализаций получены спектры шумового напряжения, которые на частоте 22.8 Гц имеют пик, причем в спектре напряжения с электрода 1 он на 7.7 дБ ( $k = 2.427$ ) больше, чем в спектре напряжения с электрода 2. На рис. 4 показаны: спектр напряжения с электро-

да 1, после умножения его на коэффициент 0.412 для уравнивания высоты пиков на частоте 22.8 Гц (кривая 1), спектр напряжения с электрода 2 (кривая 2) и спектр шумового напряжения, полученного после их вычитания (кривая 3).

Как видно из рис. 4, кривые 1 и 2 вблизи частоты 22.8 Гц совпадают. Высота пика в спектре разностного напряжения (кривая 3) на частоте пульсации скорости 22.8 Гц в 3.07 раза ниже, чем в спектре напряжения с электрода 2 (кривая 2). Во столько же раз стала меньше и высота пика на второй гармонике пульсации скорости.

## 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты эксперимента свидетельствуют о возможности частичной компенсации шума движения описанным способом. Коэффициент

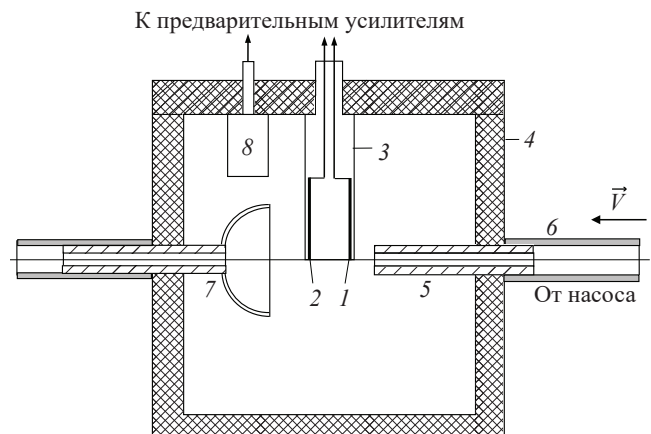


Рис. 3. Схема измерительной ячейки с электродами: 1, 2 — первый и второй электроды, 3 — диэлектрический цилиндр, 4 — корпус ячейки, 5 — инжектор, 6 — трубопровод, 7 — уловитель потока, 8 — опорный электрод.

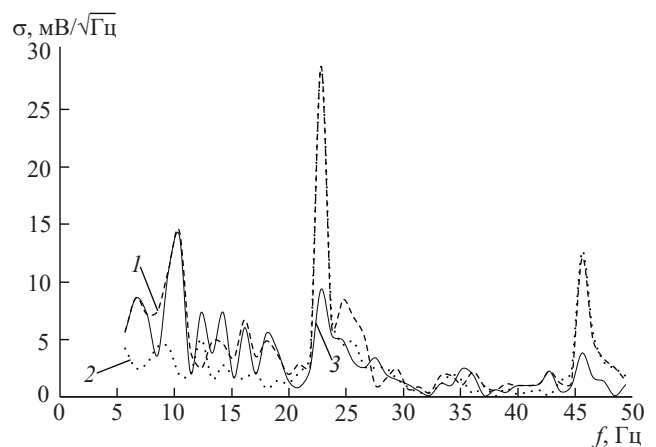


Рис. 4. Спектры шумового напряжения: 1 — между электродами 1 и 8, 2 — между электродами 2 и 8, 3 — спектр разностного напряжения.

корреляции между двумя шумовыми напряжениям на частоте 22.8 Гц в соответствии с (2) близок к 0.95. Следует иметь в виду, что эта оценка относится не к шумовым напряжениям во всей полосе пропускания усилителей, а к пульсациям потенциала в весьма узкой полосе в окрестностях частоты 22.8 Гц. Принимаемый сигнал обычно тоже является весьма узкополосным. Оценим повышение отношения сигнал/шум после такой компенсации. Вычитание напряжений, полученных от двух датчиков, приведет к уменьшению полезного сигнала в  $1/(1 - 0.412) = 1.7$  раза. При этом напряжение шума уменьшится в 3.07 раза, следовательно, отношение сигнал/шум повысится в 1.8 раза. Увеличение расстояния от электрода 1 до электрода 2 (см. рис. 3) позволяет увеличить это значение до нескольких раз. Таким образом, эксперимент показал, что существует реальная возможность с помощью простых технических средств повысить в несколько раз чувствительность приемника низкочастотного электромагнитного поля с электродным датчиком.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность А.И. Захарову за помощь в обработке результатов эксперимента.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зимин Е.Ф., Кочанов Э.С.* Измерение напряженности электрических и магнитных полей в проводящих средах. М.: Энергоатомиздат, 1985.
2. Взаимодействие электромагнитных полей контролируемых источников СНЧ диапазона с ионосферой и земной корой: Матер. Всерос. (с международным участием) научно-практич. семинара. В 2 тт. Апатиты, 2014. Т. 1.
3. *Бернштейн С.Л., Барроуз М.Л., Эванс Дж. Э. и др.* // ТИИЭР. 1974. Т. 62. № 3. С. 5.
4. *Максименко В.Г., Нарышкин В.И.* // РЭ. 2003. Т. 48. № 1. С. 70.
5. *Максименко В.Г.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 11. С. 1086.
6. *Максименко В.Г.* // РЭ. 2018. Т. 63. № 7. С. 720.
7. *Максименко В.Г.* // Измерит. техника. 2019. № 1. С. 58.
8. *Максименко В.Г.* // РЭ. 2023. Т. 68. № 12. С. 1159.
9. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.

## MOTION NOISE COMPENSATION OF THE MARINE ELECTRODE SENSOR OF THE ELECTRIC FIELD

V. G. Maksimenko

*Fryazino Branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,  
Vvedenskii Squar., 1, Fryazino, Moscow Region, 141190 Russian Federation  
E-mail: max54@ms.ire.rssi.ru*

Received April 10, 2024, revised April 10, 2024, accepted April 24, 2024

The possibility of compensation of the noise component of the electrode sensor caused by pulsations of the liquid velocity relative to the electromagnetic field sensor electrodes and the possibility of increasing the sensitivity of the receiving device several times is shown. The scheme of the device for reception and measurement of low-frequency electric field in the sea, in which the specified compensation is realized, is offered.

*Keywords:* electrode sensor, electrode noise, liquid velocity pulsations, correlation coefficient

---



---

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС  
В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ**

---



---

УДК 621.373

**СИСТЕМА ЛОРЕНЦА КАК НЕЛИНЕЙНО СВЯЗАННЫЕ  
РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ RC-ФИЛЬТРЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

**В. И. Пономаренко\*, М. Д. Прохоров**

*Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Зеленая, 38, Саратов, 410019 Российская Федерация*

*\*E-mail: ponomarenkovi@gmail.com*

Поступила в редакцию 06.03.2024 г.

После доработки 09.04.2024 г.

Принята к публикации 23.04.2024 г.

Предложена радиофизическая реализация системы Лоренца, демонстрирующей хаотический аттрактор. Показано, что вид уравнения Лоренца позволяет представить его в виде набора низкочастотных RC-фильтров первого порядка, связанных нелинейными связями при помощи электронных умножителей. Предложена схема, состоящая из трех радиотехнических RC-фильтров первого порядка и двух умножителей. Рассмотрена электронная схема, позволяющая эффективно реализовать генератор, демонстрирующий хаотический аттрактор Лоренца.

*Ключевые слова:* радиофизический эксперимент, система Лоренца, аналоговое моделирование, хаотический аттрактор

**DOI:** 10.31857/S0033849424110113, **EDN:** HNJKPE

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование сложной динамики и хаоса в электронных системах и построение различных хаотических генераторов не только представляет интерес с чисто научной точки зрения [1, 2], но и используется в целом ряде практических областей исследования, таких как системы передачи информации [3–6], системы генерации случайных чисел [7, 8], в принципиально новых криптографических схемах [9–11]. Методы исследования динамического хаоса могут быть полезны при реконструкции динамических систем [12].

Аттрактор Лоренца имеет особый статус и может наблюдаться не только в радиотехнических схемах [13], но и в системах самой различной природы, таких как оптические системы [14, 15], механические [16] химические [17] и другие [18]. Разрабатываются также осцилляторы Лоренца с использованием мемристоров [19]. Таким образом, моделирование поведения уравнения Лоренца является важной задачей нелинейной динамики. Рассмотрим некоторые примеры реализации системы Лоренца с использованием операционных усилителей (ОУ) и электронных умножителей.

## 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАТОРОВ

Системы с псевдогиперболическими аттракторами, к которым относится аттрактор Лоренца, вызывают интерес как математиков, так и физиков. Странный аттрактор Лоренца был впервые обнаружен [20] в нелинейной системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (1)$$

при значениях управляющих параметров  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$ .

Остановимся на методах реализации в эксперименте системы, соответствующей этим уравнениям, и исследованию ее радиофизическими методами.

В настоящее время популярным способом реализации дифференциальных уравнений является методика аналогового моделирования. Первоначально она использовалась в аналоговых ЭВМ, получивших распространение в середине XX в. [21], а затем с развитием элементной базы в виде



ОУ нового поколения и интегральных аналоговых умножителей широко используется при экспериментальном моделировании различных, в том числе хаотических, нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями, например, уравнениями Ресслера [22]. ОУ дают возможность реализации самых различных схем, таких как усилители напряжения и тока, преобразователи тока и напряжения, интеграторы и дифференциаторы, преобразователи сопротивления и импеданса, различные нелинейные схемы [23].

Суть подхода аналогового моделирования заключается в следующем. Проинтегрируем левую и правую части каждого из уравнений системы (1):

$$\begin{aligned}x &= \int(\sigma(y - x))dt, \\y &= \int(x(r - z) - y)dt, \\z &= \int(xy - bz)dt.\end{aligned}\quad (2)$$

В соответствии с этой системой уравнений можно построить блок-схему экспериментального устройства для решения такой системы (рис. 1), где для формирования каждой из переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  используется один интегратор, на вход которого подается подынтегральное выражение, соответствующее правым частям уравнений в системе (2). Напряжения на выходах интеграторов  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответствуют переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$  системы уравнений (2). Таким образом, для реализации такой схемы необходимо два электронных умножителя для реализации произведений переменных,

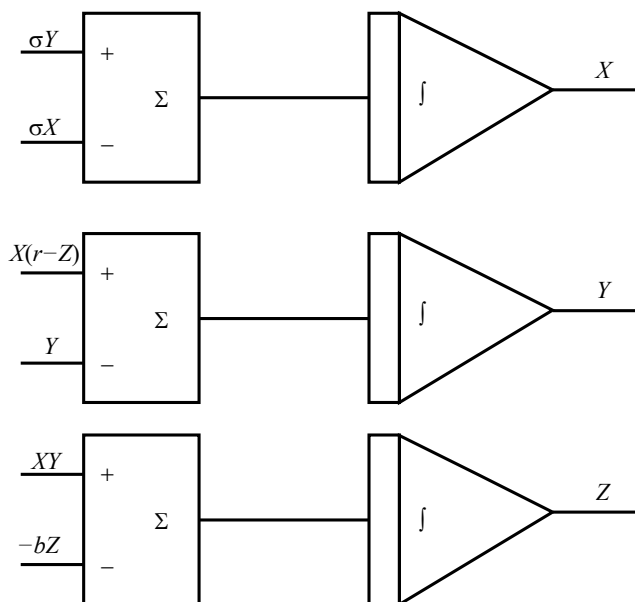


Рис. 1. Использование интеграторов для реализации системы Лоренца.

три интегратора и некоторые масштабирующие схемы для реализации нужных коэффициентов передачи.

Обычно схемы, моделирующие систему Лоренца, содержат два умножителя и от двух до восьми ОУ. Так, в [13] предложена реализация схемы Лоренца с использованием восьми ОУ и двух умножителей. Эффективная схемотехническая реализация системы Лоренца представлена в [http://seti.harvard.edu/unusual\_stuff/misc/lorenz.htm]. Она содержит два умножителя и три ОУ. Также одна из реализаций схемы Лоренца представлена в [24]. В [25] предложена идея замены одного из уравнений системы Лоренца радиотехническим фильтром первого порядка.

В данной работе мы предлагаем новый способ схемотехнической реализации системы Лоренца, позволяющий проведение аналогии этой системы с набором связанных между собой низкочастотных (НЧ) радиотехнических  $RC$ -фильтров первого порядка.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА НА ОСНОВЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ $RC$ -ФИЛЬТРОВ

Рассмотрим процесс моделирования системы Лоренца (1) по шагам. Переменные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и время  $t$  системы (1) в эксперименте должны быть размерными. Пусть одна единица переменной равна 1 В, а одна единица времени равна  $RC = 1$  мс. Здесь  $RC$  — постоянная времени используемой в эксперименте  $RC$ -цепи. На первом шаге используем идеальные электронные компоненты симулятора Multisim. Уравнение при этом принимает вид

$$\begin{aligned}RC\dot{x} &= \sigma(y - x), \\RC\dot{y} &= x(r - z) - y, \\RC\dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\quad (3)$$

Моделирование этой схемы в Multisim с использованием идеальных умножителей и ОУ показывает, что переменные  $x$  и  $y$  изменяются примерно в пределах  $[-25 \text{ В}, +25 \text{ В}]$ , а переменная  $z$  — в пределах  $[0 \text{ В}, +50 \text{ В}]$  при заданных параметрах модели. Произведение  $xy$  может принимать значения в большем диапазоне,  $[-625 \text{ В}, +625 \text{ В}]$ . Для реализации в виде аналоговой схемы это неприемлемо, поэтому уменьшим пропорционально значения переменных, проведя замену:

$$X = 0.01x, Y = 0.01y, Z = 0.01z.$$

Тогда уравнение (3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}100RC\dot{X} &= 100\sigma(Y - X), \\100RC\dot{Y} &= 100X(r - 100Z) - 100Y, \\100RC\dot{Z} &= 100X100Y - 100bZ.\end{aligned}\quad (4)$$



В правой части первого уравнения системы (4) переменные входят линейно, поэтому это уравнение не изменится по сравнению с первым уравнением системы (3). Относительно системы (3) изменятся только два других уравнения системы (4), в которых есть произведение переменных:

$$\begin{aligned} RC\dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ RC\dot{Y} &= 100X\left(\frac{r}{100} - Z\right) - Y, \\ RC\dot{Z} &= 100XY - bZ. \end{aligned} \quad (5)$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma}RC\dot{X} &= Y - X, \\ RC\dot{Y} &= 100X\left(\frac{r}{100} - Z\right) - Y, \\ \frac{1}{b}RC\dot{Z} &= \frac{100}{b}XY - Z. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь отметим, что уравнение RC-фильтра первого порядка (рис. 2) имеет вид

$$\dot{U}_{\text{вых}} = \frac{1}{C}I = \frac{1}{RC}(U_{\text{вх}} - U_{\text{вых}}).$$

Очевидно, что каждое из уравнений системы (6) представляет собой фильтр первого порядка. Для первого уравнения имеем фильтр первого порядка с постоянной времени  $(1/\sigma)RC$ , на вход которого подается переменная  $Y$ , а на выходе реализуется переменная  $X$ . Для второго уравнения это фильтр с постоянной времени  $RC$ , на вход которого подается  $100X((r/100) - Z)$ , а на выходе реализуется переменная  $Y$ . Для третьего уравнения это фильтр первого порядка с постоянной времени  $(1/b)RC$ , на вход которого подается напряжение  $(100/b)XY$ , а на выходе реализуется напряжение  $Z$ .

Таким образом, можно представить систему Лоренца как три фильтра первого порядка, нелинейно связанных друг с другом (рис. 3).

На рис. 3 переменные  $X, Y, Z$  соответствуют напряжениям на конденсаторах  $C1...C3$ , умножители  $A1, A2$  имеют коэффициенты усиления по выходу 37.5 и 100 соответственно, смещение по выходу для обоих умножителей равно 0 (подписаны на рисунке под самими умножителями).

Параметр  $\sigma$  определяется соотношением постоянных времени RC-фильтров  $\sigma = R3C3/(R2C2)$ . Отметим, что величина сопротивления  $R3$  выбрана в 10 раз больше  $R2$ , чтобы в уравнении для фильтра  $R2C2$  можно было не учитывать ток, проходящий через  $R3$ . Поэтому конденсатор  $C3$  в 100, а не в 10 раз меньше  $C2$ .

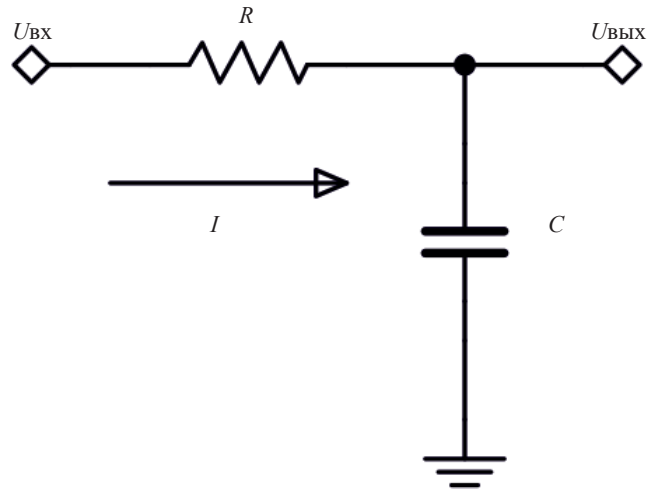


Рис. 2. Фильтр первого порядка как элемент интегрирования.

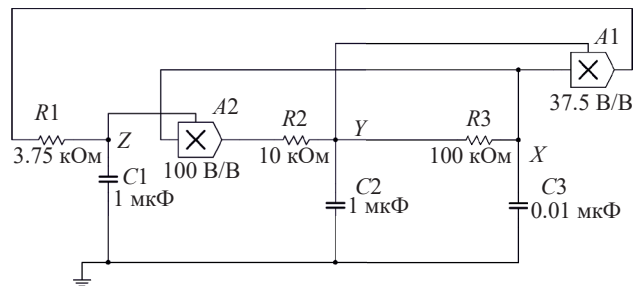


Рис. 3. Схематехническая реализация системы Лоренца с использованием только умножителей и НЧ-фильтров первого порядка.

Такая схема хорошо работает с идеальными умножителями, однако для реальных аналоговых умножителей AD633 невозможно реализовать коэффициенты усиления по выходу умножителей 100 и 37.5. Как следует из документации, максимальный коэффициент усиления по выходу составляет 10. В то же время отметим, что в этой схеме напряжения  $X, Y$  имеют размах примерно 200 мВ, что позволит нам усилить напряжение  $Y$  (и, соответственно,  $X$ ) в 10 раз, до того как оно попадет на умножители  $A1, A2$ . Переменная  $Z$  достигает значений 500 мВ, поэтому ее также можно увеличить в 10 раз. Тогда коэффициент передачи для  $A1$  будет составлять 0.375, а для  $A2$  равен 1.0.

Таким образом, выделяя в скобках сигналы, подаваемые на входы электронных умножителей, перепишем систему (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} RC\dot{X} &= Y - X, \\ RC\dot{Y} &= (10X)\left(\frac{r}{10} - (10Z)\right) - Y, \\ \frac{1}{b} RC\dot{Z} &= \frac{1}{b}(10X)(10Y) - Z. \end{aligned} \quad (7)$$

Схема устройства с использованием реальных умножителей и ОУ, соответствующая уравнениям системы (7), представлена на рис. 4.

Напряжение, пропорциональное переменной  $Y$ , усиливается в 10 раз усилителем на ОУ  $U3A$ . Соответственно, напряжение на выходе фильтра  $R3C3$  становится равным  $10X$ . Напряжение, пропорциональное переменной  $Z$ , усиливается в 10 раз усилителем на ОУ  $U3B$ . Делитель  $R4, R5$  определяет коэффициент передачи по выходу умножителя  $U1$  равным 0.375, а делитель  $R8, R9$  определяет коэффициент передачи по выходу умножителя  $U2$  равным 1. Подстройка параметра  $r$  производится подачей смещения на дифференциальный вход умножителя  $U2$  вариацией резистора  $R7$ . Как видно из уравнений (7), это смещение равно  $r/10$  [В]. Здесь отметим, что поскольку фильтры  $R2C2$  и  $R3C3$  разделены усилителем, можно выбрать величину  $R3 = R2$ .

Поскольку использованные в схеме умножители AD633 не являются прецизионными, в некоторых случаях необходимо ввести смещение  $V3, V4$ , которое предназначено для компенсации постоянного

смещения по выходу умножителя и определяется экспериментально.

На рис. 5 представлена проекция фазового портрета для схемы на рис. 4 в координатах  $(X, Y)$ . Переменная  $Y$  принимает значения в пределах  $[+2, -2]$  В, переменная  $X$  имеет немного меньшую амплитуду. Проекция фазового портрета хорошо соответствует фазовому портрету

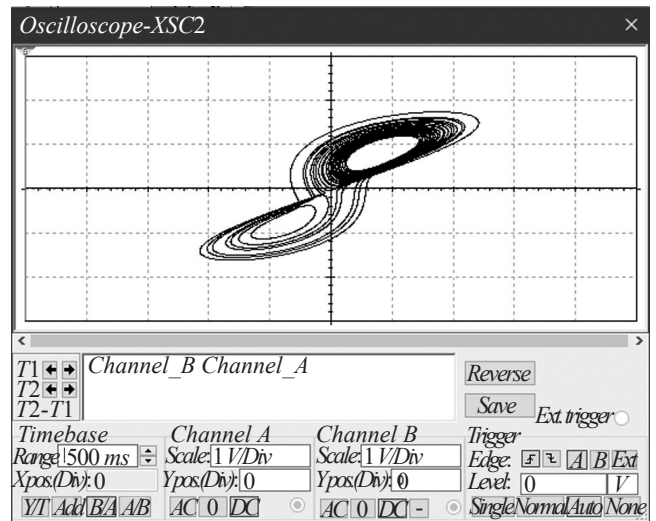


Рис. 5. Фазовый портрет моделированной системы Лоренца, представленной на рис. 4 (скриншот): по горизонтальной оси отложена переменная  $Y$ , по вертикальной — переменная  $X$ .

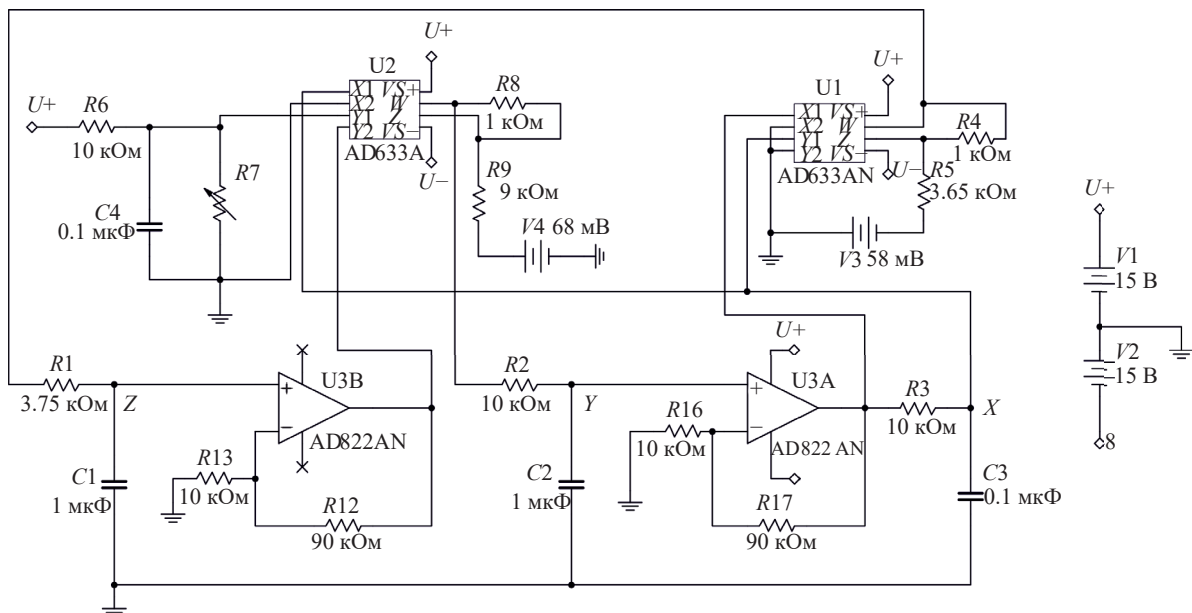


Рис. 4. Схемотехническая реализация системы Лоренца с использованием реальных моделей ОУ и электронных умножителей.

системы Лоренца, полученному в численном эксперименте.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, представление системы Лоренца в виде низкочастотных RC-фильтров первого порядка позволило упростить ее схемотехническую реализацию и представить систему Лоренца в более радиофизическом виде.

Предложенный метод построения схем автоколебательных систем не является универсальным, поскольку при его использовании необходимо, чтобы уравнения имели вид, подобный уравнению фильтра первого порядка. Такие уравнения получаются не всегда. Так, в системе Ресслера тоже три дифференциальных уравнения, но каждое из них нельзя напрямую представить в том виде, как это удалось сделать для системы Лоренца.

В то же время, такая методика может оказаться полезной при создании, например, нейрона Хиндмарша–Розе, в котором одно из уравнений имеет вид, подобный уравнению НЧ-фильтра первого порядка. Это позволяет упростить схему реализации данного нейрона.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берже П, Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности М.: Мир, 1991.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М: Мир, 1988.
3. Tsay S.-C., Huang C.-K., Qiu D.-L., Chen W.-T. // Chaos, Solitons & Fractals. 2004. V. 20. № 3. P. 567.
4. Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. // РЭ. 2004. Т. 49. № 9. С. 1098.
5. Дмитриев А.С., Кузьмин Л.В., Панас А.И., Старков С.О. // РЭ. 1998. Т. 43. № 9. С. 1115.
6. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Ицков В.В. и др. // РЭ. 2022. Т. 67. № 8. С. 797.
7. Stojanovski T., Kocarev L. // IEEE Trans. 2001. V. CS-I-48. № 3. P. 281.
8. Stojanovski T., Pihl J., Kocarev L. // IEEE Trans. 2001. V. CS-I-48. № 3. P. 382.
9. Kocarev L. // IEEE Circuits and Systems Magazine. 2001. V. 1. № 3. P. 6.
10. Aissaoui R., Deneuville J.-C., Guerber C., Pirovano A. // Vehicular Commun., 2023. V. 44. Article No. 100661.
11. Andreyev Yu.V., Dmitriev A.A. // Proc. Int. Symp. Signals Circuits Systems (SCS'2001). Iasi. 10-11 Jul. 2001. P. 57.
12. Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваев А.С., Безручко Б.П. Системы с запаздыванием (реконструкция моделей и их приложение). Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2016.
13. Cuomo K. M., Oppenheim A.V. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. № 1. P. 65.
14. Ораевский А.Н. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4. № 1. С. 3.
15. Haken H. // Phys. Lett. A. 1975. V. 53. № 1. P. 77.
16. Doroshin A.V. // Commun. Nonlinear Sci. Numerical Simulation. 2011. V. 16. № 8. P. 3188.
17. Poland D. // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. V. 65. № 1. P. 86.
18. Hemail N. // IEEE Trans. 1994. V. CS-I-41. № 1. P. 40.
19. Jiang Y., Li C., Liu Z. et al. // IEEE Trans. 2022. V. CS-II-69. № 7. P. 3344.
20. Lorenz E.N. // J. Atmospheric Sci. 1963. V. 20. № 2. P. 130.
21. Тетельбаум И.М., Шнайдер Ю.Р. Практика аналогового моделирования динамических систем: Справочное пособие. М.: Энергоатомиздат, 1987.
22. Butusov D.N., Karimov T.I., Lizunova I.A. et al. // 2017 IEEE Conf. Rus. Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIconRus). St. Petersburg and Moscow. 1-3 Feb. N.Y.: IEEE, 2017. P. 265.
23. Itoh M. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2001. V. 11. № 3. P. 605.
24. Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26. № 3. С. 35.
25. Campos-Cantón I., Soubervielle-Montalvo C., Martinez-Montejano R.C. // Integration, VLSI J. 2023. V. 90. P. 51.

**LORENZ SYSTEM AS NONLINEARLY CONNECTED FIRST-ORDER  
RADIOPHYSICAL RC-FILTERS****V. I. Ponomarenko\*, M. D. Prokhorov***Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,  
38, Zelyonaya Street, Saratov, 410019 Russian Federation**\*E-mail: ponomarenkovi@gmail.com*

Received March 06, 2024, revised April 09, 2024, accepted April 23, 2024

A radiophysical implementation of the Lorenz system demonstrating a chaotic attractor is proposed. It is shown that the form of the Lorenz equation allows it to be represented as a set of low-frequency first-order RC filters connected by nonlinear connections using electronic multipliers. A circuit consisting of three first-order radiotechnical RC filters and two multipliers is proposed. An electronic circuit is considered that allows for the effective implementation of a generator demonstrating the chaotic Lorenz attractor.

*Keywords:* radiophysical experiment, Lorenz system, analog modeling, chaotic attractor

---

---

**ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ  
В ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ**

---

---

УДК 621.382 + 621.391.822

**ВКЛАД ЕМКОСТНЫХ И ИНДУЦИРОВАННЫХ ТОКОВ  
В ПОЛНЫЕ ТОКИ НА МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОДЫ  
И ТЕОРЕМА ШОКЛИ–РАМО**

**С. Г. Дмитриев**

*Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
пл. Введенского, 1, Фрязино, Московская обл., 141190 Российская Федерация  
E-mail: sgd@ms.ire.rssi.ru*

Поступила в редакцию 12.03.2024 г.

После доработки 12.03.2024 г.

Принята к публикации 25.03.24 г.

Рассмотрено место теоремы Шокли–Рамо (ТШР) в теории электрических цепей. Приведена краткая история вопроса. Проанализированы условия, при которых источники тока в ТШР в случае потенциальных электрических полей сводятся к индуцированным и емкостным токам.

*Ключевые слова:* теорема Шокли–Рамо, индуцированные токи, сверхвысокочастотные приборы, интегральные цепи

**DOI:** 10.31857/S0033849424110122, **EDN:** HNJVBI

**1. ПРАВИЛА КИРХГОФА ДЛЯ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ  
И ИНДУЦИРОВАННЫЕ ТОКИ  
НА МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОДЫ**

Соотношения между токами на отдельных участках электрических цепей и параметрами элементов на этих участках полезны при описании электронных приборов и экспериментальных образцов. К таким полезным формулам относятся прежде всего вольт-амперные характеристики (ВАХ) элементов цепей. Однако ВАХ электровакуумных [1] и полупроводниковых [2–4] приборов, например, известны лишь в некоторых ситуациях. Это связано с тем, что в общем случае токи в элементах цепи зависят не только от напряжения на элементе, но и от многих других его параметров, которые могут, изменяясь во времени, приводить к зависимости токов от предыстории элемента и существенно усложнять теоретическое описание электронных приборов. Речь может идти о распределении зарядов в вакууме в электровакуумных приборах или о зарядах в диэлектриках, которые часто являются важной составной частью полупроводниковых приборов; кроме того, могут

играть роль изменения диэлектрических свойств исследуемого образца, его поляризация и т.п.

Но если элементы, из которых состоит цепь, уже изучены и описаны теоретически, то электрическая схема цепи (эквивалентная ее схема) строится по правилам Кирхгофа для электрических цепей [5–7]. В качестве известных в его время элементов электрической цепи Кирхгоф рассматривал сопротивления, емкости, электродвижущую силу (ЭДС) и, конечно, соединительные провода. В работе [6] им была установлена роль потенциала в недавно открытом законе Ома [8], а сами правила Кирхгофа были сформулированы (без доказательства) в приложении к работе [5]. Вероятно, ранее остальных в научной литературе появились (в обсуждаемом контексте) понятия электрическая емкость и ЭДС. Емкостные явления активно обсуждались в литературе рядом авторов еще в XVIII столетии и хорошо известны в истории науки (см., в частности, обзоры по истории открытия электропроводности [9] и электростатической индукции [10]). Сам термин «емкость» присутствовал уже в работах А. Вольта [11, 12] (*capacita* в [11] и *capacity* в [12]), где было предложено также и количественное описание емкостных токов [12], а термин «электродви-



жуший» (*electromotive*) введен в работе [13], которая посвящена описанию батареи Вольта. Роль соединительных проводов была выяснена еще раньше, на самой заре изучения электричества, когда понятия потенциала и емкости только еще формировались (см., например, известные работы Генри Кавендиша [14, 15], в которых особо отмечалось, что соединительные провода слабо влияют на распределение зарядов в массивных проводниках). Они (провода) призваны играть лишь вспомогательную роль, так что их влияние и должно быть мало. Можно сказать, что Кирхгоф привнес понятие потенциала в теорию электрических цепей и, тем самым, придал ей практически современный вид (еще до открытия уравнений Максвелла). Эти результаты вскоре были дополнены принципом суперпозиции ЭДС (и индуцируемых ими токов) и теоремой о существовании эквивалентной ЭДС [16] (которая открывала возможность для построения эквивалентных схем). В дополнении к этому интересно отметить, что в работе [12] впервые появился и термин «полупроводниковый» (*semiconducting*) (как это отмечено в [17]), хотя употреблялся он там в другом (не современном) смысле.

В это же время Уильям Томсон (будущий лорд Кельвин) вывел дифференциальное уравнение для описания электрических колебаний в электрических цепях с емкостями, индуктивностями и сопротивлениями [18]. Он исходил исключительно из энергетических соображений, а электрические цепи как таковые и процессы в них не рассматривал. При этом соединительные провода, роль которых считалась пренебрежимо малой в силу малости их емкости, вообще не рассматривались. Разумеется, это не исключает того, что на практике с паразитным по своей природе влиянием проводов все-таки приходится считаться.

Далее, одним из факторов, которые не учитывались в построениях Кирхгофа, являются токи, индуцированные движением зарядов в вакууме или в диэлектрике вблизи металлических электродов, — так называемые индуцированные (*induced*) или наведенные токи. При этом наведенные на металле заряды подводятся (по проводам) токами из внешней цепи. В случае системы из  $N$  металлических электродов в вакууме конвективный ток с плотностью  $\vec{j} = (t, \vec{r})$  индуцирует компоненту тока, втекающего из внешней цепи в  $\alpha$ -й электрод (см., например, [19, 20]), равную

$$I_{\alpha 0} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{j}) dV, \quad (1)$$

где

$$\vec{E}^{(\alpha)} = \vec{E}^{(1\alpha)} / \Phi_0 \quad (2)$$

— некоторое вспомогательное нормированное электрическое поле,  $\Phi^{(1\alpha)}(\vec{r})$  и

$\vec{E}^{(1\alpha)} = -\text{grad}\varphi^{(1\alpha)}$  — соответственно вспомогательные потенциал и электрическое поле в той же системе, но без пространственных зарядов и с потенциалами электродов

$$\Phi_{\beta}^{(1\alpha)} = \delta_{\beta}^{\alpha} \Phi_0, \Phi_0 = 1 - , \quad (3)$$

где  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  — символ Кронекера. Более точно вспомогательное поле будет определено ниже. Интегрирование проводится по всему пространству без электродов.

Формула (1) является обобщением теоремы Шокли–Рамо (ТШР) [20, 21], в которой (с целью применения к теории дробовых шумов) рассматривалось движение точечного заряда  $q$  между металлическими электродами в вакуумной структуре, в которой другие заряды, двигающиеся или неподвижные, отсутствуют. Точечный заряд, двигаясь со скоростью  $\vec{v}$  в точке  $\vec{r}_0$ , создает плотность тока

$$\vec{j}_0 = q\vec{v}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (4)$$

( $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  — дельта-функция) и индуцирует тем самым во внешней цепи компоненту тока  $I_{\alpha 0}$ ,

втекающую в  $\alpha$ -й электрод:

$$I_{\alpha 0} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{j}_0) dV = q(\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{v}). \quad (5)$$

Наиболее простой вид формулы теоремы приобретают в случае двух плоскопараллельных электродов:

$$\vec{E}_{\parallel}^{(0)} = \vec{n}_0 / d, \quad (6)$$

$$I_{0\parallel} = q(\vec{v} \cdot \vec{n}_0) / d, \quad (7)$$

$$I_{1\parallel} = q(\vec{v} \cdot \vec{n}_1) / d = -I_{0\parallel}, \quad (8)$$

где  $d$  — расстояние между электродами,  $\vec{n}_0$  — вектор внешней нормали к поверхности одного из электродов (индекс «0»), направленный в сторону другого электрода (индекс «1»). При приближении заряда к первому электроду  $(\vec{v} \cdot \vec{n}_0) < 0$  и  $qI_{0\parallel} < 0$ , т.е. ток из внешней цепи приносит в электрод заряд другого знака, а при удалении от электрода знаки заряда и тока совпадают. Нормаль ко второму электроду имеет другой знак  $\vec{n}_1 = -\vec{n}_0$ , поэтому ток в этот электрод имеет ту же величину, но другой знак, так что сумма этих токов равна нулю. Это означает, что рассматриваемый

заряд наводит на электродах экранирующие заряды, которые при его движении перераспределяются между электродами.

Заметим, что обсуждаемые правила и законы соответствуют квазистационарным (достаточно медленными) режимам изменения полей, когда эффектами запаздывания можно пренебречь, а характерные частоты полей и размеры структур достаточно малы (см., например, [7, 23]).

Первоначально интерес к ТШР и ее обобщениям как за рубежом [19–22], так и в нашей стране (см., например, [24–27]) возник в связи с бурным развитием работ по электровакуумным сверхвысокочастотным (СВЧ) приборам (для нужд радиолокации и других целей). При этом в состав ТШР (расширенный) не редко включались и ее обобщения. Вскоре, однако, появились работы по обобщению ТШР (в ее расширенном, конечно, смысле) на диэлектрики в составе полупроводниковых структур и приборов на их основе [28–36], что было связано с применениями теоремы к описанию датчиков ионизирующего излучения [28, 29, 34, 37]. Соотношение между индукцией  $\vec{D}(t, \vec{r})$  и полем  $\vec{E}(t, \vec{r})$  описывается формулой (в системе СИ):

$$\vec{D} = \vec{P} + \vec{D}^* , \quad (9)$$

где  $\vec{P}(t, \vec{r})$  — поляризация (плотность дипольного момента), которая может быть связана, например, со спонтанной поляризацией в пирозлектриках (см., например, [7, 23]), т.е. с той частью поляризации в образце, которая может существовать и без поля. Второе слагаемое призвано учитывать индуцированную полем часть индукции, которая в низкочастотном случае имеет вид

$$D_i^* = \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} E_k , \quad (10)$$

где  $\varepsilon_{ik}(t, \vec{r})$  — тензор относительной диэлектрической проницаемости, а  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная вакуума (по повторяющимся тензорным индексам предполагается суммирование). Оказалось, что формула для индуцированных токов сохраняет свой вид (1) и в этих случаях. Рассмотрим более подробно вывод формул ТШР.

## 2. ИНДУЦИРОВАННЫЕ И ПОЛНЫЕ ТОКИ НА ЭЛЕКТРОДЫ

При доказательстве теоремы использовались различные подходы (см. обсуждение этого вопроса в [38]). В первых статьях [21, 22], например, применялась вторая формула Грина и следствие из нее (теорема взаимности). Соответствующая работа Грина 1828 г. [39] (см. также [40], где приведена и история вопроса) была посвящена развитию тео-

рии потенциала (вслед за Лапласом и Пуассоном); авторы [21, 22] ссылались на монографии [41, 42]. С более современным изложением материала можно ознакомиться в [43].

Другой подход к выводу теоремы связан с использованием производящего функционала

$$F_1 = -\iiint \text{div}(\varphi^{(1)} \vec{j}_\Pi) dV , \quad (11)$$

где полный ток

$$\vec{j}_\Pi = \vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t , \quad (12)$$

удовлетворяет равенству

$$\text{div} \vec{j}_\Pi = 0 , \quad (13)$$

$\varphi^{(1)}$  — некоторая вспомогательная функция, постоянная на поверхностях электродов, а область интегрирования не включает металлические объекты. Доказательство теоремы с помощью (11) сводится (в духе [43]) к преобразованию интеграла в (9) с помощью теоремы Остроградского–Гаусса в поверхностный интеграл, с одной стороны, и выполнению дифференцирования в (11) с учетом (13) — с другой. Поток полного тока через поверхность электрода описывается выражением (с учетом соответствующего уравнения Максвелла)

$$\partial Q / \partial t - I_s$$

( $Q$  — заряд внутри поверхности,  $I_s$  — ток, втекающий в нее из внешнего пространства), которое равно нулю в силу закона сохранения заряда. Поток вектора  $\varphi^{(1)} \vec{j}_\Pi$  через поверхность (электрода) равен

$$\Phi^{(1)}(\partial Q / \partial t - I_s)$$

( $\Phi^{(1)}(t)$  — значение вспомогательной функции на поверхности электрода), и тоже равен нулю (по той же причине). Но если область интегрирования в (11) не включает провода и поверхности электродов не замкнуты, так как не включают места контактов проводов с ними, то, в пренебрежении возможными здесь вкладами от проводов, поток вектора  $\varphi^{(1)} \vec{j}_\Pi$  через поверхность  $\alpha$ -го электрода равен

$$\Phi_\alpha^{(1)}(\partial Q_\alpha / \partial t - I_{s\alpha}) = \Phi_\alpha^{(1)} I_\alpha , \quad (14)$$

где  $Q_\alpha$  — заряд электрода,  $I_{s\alpha}$  — ток из внешнего пространства,  $\Phi_\alpha^{(1)}$  — значение вспомогательной функции на его поверхности, а  $I_\alpha$  — полный ток, втекающий из внешней цепи в  $\alpha$ -й электрод по подводящим проводам (см. обсуждение этого вопроса в [44]). Это и есть нужный результат. Итак,

для вывода формул ТШР (включая, конечно, и обобщения теоремы) от вспомогательной функции требуется только постоянство на поверхностях электродов (в каждый момент времени), а в остальном она может быть и не связана прямо с основной задачей (см. [30, 31, 35, 45]). Отметим, что в работах [21, 22] движение заряда рассматривалось как последовательность статических ситуаций с неподвижным зарядом в бесконечно близкие моменты времени.

Далее, в результате указанной программы действий получается (в том же приближении) формула

$$\sum_{\beta=1}^N \Phi_{\beta}^{(1)} I_{\beta} = \iiint (\vec{E}^{(1)} \cdot \vec{j}_{\Pi}) dV, \quad (15)$$

где  $\vec{E}^{(1)} = -\text{grad}\Phi^{(1)}$ , а в случае (3)

$$\Phi_0 I_{\alpha} = \iiint (\vec{E}^{(1\alpha)} \cdot \vec{j}_{\Pi}) dV \quad (16)$$

или

$$I_{\alpha} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{j}_{\Pi}) dV \quad (17)$$

(нормированное «поле», как и ранее, равно  $\vec{E}^{(\alpha)} = \vec{E}^{(1\alpha)} / \Phi_0$ ). В этом выражении индуцированный ток соответствует первому слагаемому в полном токе, т.е. формула для него снова сохранила свой вид (1). Однако теперь ТШР справедлива и для непотенциальных полей (в том числе и для СВЧ-полей). Кроме того, при выводе (17) связь между индукцией и электрическим полем не конкретизировалась. Значит, эта формула, а вместе с ней и ТШР, справедливы при произвольной связи между индукцией и полем (а не только такой, как в (10)).

Отметим также, что токи, связанные с изменениями поляризации в (17), имеют ту же природу, что и индуцированные токи (см. обсуждение этого вопроса в [46]). Поэтому их можно объединить в общий обобщенный индуцированный ток

$$I_{\alpha} = I_{\alpha 1} + \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \partial \vec{D}^* / \partial t) dV, \quad (18)$$

где

$$I_{\alpha 1} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot (\vec{j} + \partial \vec{P} / \partial t)) dV, \quad (19)$$

слагаемое  $\partial \vec{P} / \partial t$  имеет смысл плотности тока связанного заряда (с плотностью  $-\text{div} \vec{P}$ ), а сумма

$$\vec{j} + \partial \vec{P} / \partial t = \vec{J}^* \quad (20)$$

соответствует плотности общего тока свободных и связанных зарядов.

### 3. СУММА ЕМКОСТНЫХ И ИНДУЦИРОВАННЫХ ТОКОВ И ПОЛНЫЕ ТОКИ НА ЭЛЕКТРОДЫ

Другим источником токов (кроме индуцированных токов) являются емкостные токи (в то время как электромагнитная индукция приводит к распределенной ЭДС индукции (см., например, [7]), т.е. к эффектам другой природы), которые в общем случае, когда емкость зависит от напряжения (как в полупроводниковых элементах (см., например, [2, 3])), описываются формулами типа

$$I = d(CV) / dt, \quad (21)$$

где  $C$  — емкость, а  $V$  — напряжение на элементе (на конденсаторе, например). Если других источников тока нет, т.е. полные токи на электроды состоят из емкостных и индуцированных токов, то второе слагаемое в (18) должно сводиться к емкостным формулам. Они и применялись в ранних (вакуумных) работах (см., например, [24–27]), а затем и в случае диэлектриков [30, 33]. Было бы поучительно, однако, вывести указанное утверждение в более общем виде в рамках развиваемого подхода (непосредственно из уравнений Максвелла).

Рассмотрим с этой целью еще один функционал [36]:

$$F_2 = -\iiint \text{div}[\Phi^{(1)} \vec{j}_{\Pi} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D}^{(1)} \Phi)] dV, \quad (22)$$

где потенциал  $\Phi^{(1)}$  соответствует вспомогательной краевой задаче для потенциала для той же структуры, что и в основной задаче, и с теми же граничными условиями, но без поляризации, зарядов и токов в образце, а  $\vec{D}^{(1)}$  — соответствующая индукция, т.е.

$$\text{div} \vec{D}^{(1)} = 0, \quad \text{div} \vec{D} = \rho, \quad (23)$$

где  $\rho$  — плотность заряда. Кроме того, электрическое поле в основной задаче потенциально, а  $\Phi$  — его потенциал. Предполагается также, что используемые решения существуют (а интегрирование по бесконечно удаленным областям дает нулевой вклад). Тогда преобразования, аналогичные предыдущим (см. формулу (11) и сопутствующий текст), приводят к равенству [36, 44–47]

$$\sum_{\beta=1}^N \Phi_{\beta}^{(1)} I_{\beta} - \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial t} (Q_{\beta}^{(1)} \Phi_{\beta}) = \iiint \{(\vec{E}^{(1)} \cdot (\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t})) -$$

$$-(\frac{\partial \vec{E}^{(1)}}{\partial t} \cdot \vec{D}^*) + \frac{\partial}{\partial t} [(\vec{E}^{(1)} \cdot \vec{D}^*) - (\vec{D}^{(1)} \cdot (-\text{grad}\Phi))]\} dV \quad (24)$$

$(Q_\beta^{(1)})$  — заряд  $\beta$ -го электрода во вспомогательной задаче), которое в случае (3) можно записать в виде

$$I_\alpha = \iiint \{ (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t})) + \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial t} (C_\beta^\alpha \Phi_\beta) + \\ - (\frac{\partial \vec{E}^{(\alpha)}}{\partial t} \cdot \vec{D}^*) + \frac{\partial}{\partial t} [(\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{D}^*) - \\ - (\vec{D}^{(\alpha)} \cdot \vec{E})] \} dV, \quad (25)$$

где  $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$ , а величины

$$C_\beta^\alpha = Q_\beta^{(1\alpha)} / \Phi_0 \quad (26)$$

можно назвать (по аналогии с электростатикой [7, 23]) емкостными коэффициентами,  $Q_\beta^{(1\alpha)}$  — заряд  $\beta$ -го электрода во вспомогательной задаче в случае (3), а  $\vec{D}^{(\alpha)} = \vec{D}^{(1\alpha)} / \Phi_0$  — нормированная индукция в том же случае. Как видно из (25), ток на отдельный электрод содержит четыре компоненты различной природы

$$I_\alpha = \sum_{k=1}^4 I_{\alpha k}. \quad (27)$$

Здесь первое слагаемое описывает (обобщенный) индуцированный ток и может быть записано в виде

$$I_{\alpha 1} = \iiint (\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{J}^*) dV. \quad (28)$$

Второе слагаемое

$$I_{\alpha 2} = \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial t} (C_\beta^\alpha \Phi_\beta) \quad (29)$$

имеет, очевидно, смысл токов емкостной природы.

Следующие слагаемые менее известны. В случае, когда потенциалы  $\Phi_\beta^{(1)}$  постоянны во времени (который мы и рассматриваем), третье слагаемое в (25) можно представить в виде

$$I_{\alpha 3} = - \iiint \frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial t} \rho^* dV, \quad (30)$$

где

$$\varphi^{(\alpha)} = \varphi^{(1\alpha)} / \Phi_0 \quad (31)$$

— нормированный потенциал, а

$$\rho^* = \rho - \text{div} \vec{P} = \text{div} \vec{D}^* \quad (32)$$

— плотность общего (свободного и связанного) заряда. Природа этого вклада в ток обсуждалась в [47], где приведен иллюстрирующий пример с конденсатором. Отметим, что если параметры образца не меняются со временем (в частности, в вакуумном случае), то  $\varphi^{(\alpha)}(t) = \text{const}$  и  $\partial \varphi^{(\alpha)} / \partial t = 0$ , а поэтому равен нулю и ток  $I_{\alpha 3} = 0$ .

Наконец, четвертое слагаемое равно

$$I_{\alpha 4} = \iiint \frac{\partial}{\partial t} [(\vec{E}^{(\alpha)} \cdot \vec{D}^*) - (\vec{D}^{(\alpha)} \cdot \vec{E})] dV. \quad (33)$$

В случае (10) это выражение можно преобразовать к виду

$$I_{\alpha 4} = \iiint \frac{\partial}{\partial t} [E_i^{(\alpha)} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}) E_j] dV, \quad (34)$$

который обращается в нуль ( $I_{\alpha 4} = 0$ ), если тензор диэлектрической проницаемости симметричен

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \quad (35)$$

как это бывает при низких частотах или в вакууме (см. анализ вопросов симметрии тензора  $\epsilon_{ij}$  в [23]).

Отметим, что развиваемая теория позволяет находить новые элементы электрических цепей и выявлять те параметры образцов, которые влияют на токи во внешней цепи. Обсуждаемые компоненты тока независимы друг от друга [47]. Поэтому источники тока в ТШР сводятся к двум первым слагаемым в (27), если равны нулю последние слагаемые

$$I_{\alpha 3} = I_{\alpha 4} = 0. \quad (36)$$

Это условие верно в случае электровакуумных приборов и для диэлектрических пленок в структурах металл—диэлектрик—полупроводник (МДП) и в интегральных схемах (ИС) (при условии (35)). Например, в случае диагностики подвижных ионов в тонких диэлектрических пленках структур МДП и в ИС полезным сигналом служат индуцированные токи, которые нужно поэтому отделить от емкостных токов, присутствующих в измеряемом сигнале [4, 36, 48, 49]. Отметим также интересное применение ТШР при изучении транспорта зарядов в протеинах [50].

Далее, в общем случае электрические поля непотенциальны, и в вакууме справедливы известные формулы

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (37)$$



$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} \quad (38)$$

( $\varphi$  — скалярный потенциал,  $\vec{A}$  — векторный) для напряженностей электрического и магнитного полей соответственно (см., например, [51]). В предыдущем случае чисто потенциальных полей при выводе формулы для емкостных токов было существенным условие постоянства потенциала на металлических поверхностях. Если это условие выполняется и для скалярного потенциала в (37), то вывод формулы (24) остается в силе, только теперь (см. (37))

$$-\text{grad} \varphi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (39)$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена краткая история теории электрических цепей и место теоремы Шокли–Рамо (ТШР) в ней. Указаны условия, при которых источники токов на металлические электроды в обобщенной ТШР, в случае потенциальных электрических полей, сводятся к индуцированным и емкостным токам. Рассмотрена возможность развития теории на случай непотенциальных электрических полей.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добрецов Л.Н., Гомоюнова М.В. Эмиссионная электроника. М.: Наука, 1966.
2. Бонч-Бруевич В. Л., Калашиников С. Г. Физика полупроводников. М.: Наука, 1990.
3. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. М.: Мир, 1984.
4. Nicollian E. R., Brews J. R. MOS (Metal–Oxide–Semiconductor) Physics and Technology. N.Y.: J. Wiley & Sons, 1982.
5. Kirchhoff G. // Ann. Phys. 1845. В. 140. Н. 4. S. 497.
6. Kirchhoff G. // Ann. Phys. 1849. В. 154. Н. 12. S. 506.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. М.: Физматлит, 2002.
8. Ohm G.S. // J. Chem. Phys. 1826. В. 46. Н. 2. S. 137.
9. Крыжановский Л.Н. // Успехи физ. наук. 1988. Т. 155. № 1. С. 129.
10. Крыжановский Л.Н. // Электричество. 1992. № 4. С. 60.
11. Volta A. // Opuscoli Scelti. 1778. V. 1. S. 273.
12. Volta A. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1782. V. 72. P. 237.
13. Volta A. // Phil. Mag. 1800. V. 7. № 28. P. 289.
14. Cavendish H. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1771. V. 61. P. 584.
15. Cavendish H. The Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1879.
16. Helmholtz H. // Pogg. Ann. 1853. В. 89. Н. 6. S. 211.
17. Bush G. // Eur. J. Phys. 1989. V. 10. № 4. P. 254.
18. Thomson W. // Phil. Mag. 1853. V. 5. № 34. P. 393.
19. Jen C.K. // Proc. IRE. 1941. V. 29. P. 345.
20. Beck A.H.W. Thermionic Valves: Their Theory and Design. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1953.
21. Shockley W. // J. Appl. Phys. 1938. V. 9. № 10. P. 635.
22. Ramo S. // Proc. IRE. 1939. V. 27. № 9. P. 584.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005.
24. Гвоздовер С., Лопухин В. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 1. С. 29.
25. Лопухин В. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946. Т. 10. № 1. С. 111.
26. Коваленко В.Ф. Введение в электронику сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1955.
27. Лопухин В.М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. М.: Гостехиздат, 1953.
28. Cavalleri G., Fabri G., Gatti E., Svelto V. // Nucl. Instr. Meth. 1963. V. 21. P. 177.
29. Cavalleri G., Gatti E., Fabri G., Svelto V. // Nucl. Instr. Meth. 1971. V. 92. P. 137.
30. Pellegrini B. // Phys. Rev. 1986. V. B-34. № 8. P. 5921.
31. Yoder P.D., Gärtner K., Fichtner W. // J. Appl. Phys. 1996. V. 79. № 4. P. 1951.
32. Visschere P. De. // Sol.-St. Electronics. 1990. V. 33. № 4. P. 455.
33. Kim H., Min H.S., Tang T.W., Park Y.J. // Sol.-St. Electronics. 1991. V. 34. № 11. P. 1251.
34. He Z. // Nucl. Instr. Meth. 2001. V. A-463. № 1-2. P. 250.
35. Дмитриев С.Г. // РЭ. 2018. Т. 63. № 10. С. 1115.
36. Дмитриев С.Г. // РЭ. 2019. Т. 64. № 9. С. 926.
37. Tavernier S. Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics. L: Springer, 2010.
38. Дмитриев С.Г. // РЭ. 2023. Т. 68. № 5. С. 482.
39. Green G. An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism. Nottingham: T. Wheelhouse, 1828.
40. Любимов Ю.А. // Успехи физ. наук. 1994. Т. 164. № 1. С. 105.
41. Jeans J.H. The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.
42. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
43. Владимиров В.С., Жариков В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004.
44. Дмитриев С.Г. // РЭ. 2020. Т. 65. № 7. С. 725.
45. Дмитриев С.Г. // РЭ. 2022. Т. 67. № 11. С. 1140.
46. Дмитриев С.Г. // РЭ. 2022. Т. 67. № 4. С. 411.
47. Дмитриев С.Г. // РЭ. 2022. Т. 67. № 2. С. 181.
48. Дмитриев С.Г. // ФТП. 2009. Т. 43. № 6. С. 854.
49. Дмитриев С.Г. // РЭ. 2012. Т. 57. № 11. С. 1229.
50. Eisenberg B., Nonner W. // J. Comput. Electron. 2007. V. 6. № 1-3. P. 363.
51. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Физматлит, 2003.



# THE CONTRIBUTION OF CAPACITIVE AND INDUCED CURRENTS IN TOTAL CURRENTS ON METAL ELECTRODES AND SHOCKLEY-RAMO THEOREM

**S. G. Dmitriev**

*Fryazino Branch Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,  
Vvedensky square, 1, Fryazino, Moscow Region, 141190 Russian Federation  
E-mail: sgd@ms.ire.rssi.ru*

Received March 12, 2024, revised March 12, 2024, accepted March, 25, 2024

The position of Shockley-Ramo theorem (SRT) in the theory of electric circuits is considered. A brief history of problem is given. The conditions are analyzed, when current sources in SRT in the case of potential electric fields are reduce to induced and capacitive currents.

*Keywords:* Shockley-Ramo theorem, induced currents, superhighfrequency devices, integrated circuits