
ТЕОРИЯ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

УДК 621.382.2/3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТРИГГЕРА
И ОДНОВИБРАТОРА С ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

© 2025 г. А. Е. Китаев

АО Научно-производственное объединение им. М.В. Фрунзе,
просп. Гагарина, 174, Нижний Новгород, 603951 Российская Федерация

E-mail: kitaev_a_e@mail.ru

Поступила в редакцию 22.11.2024 г.

После доработки 28.11.2024 г.

Принята к публикации 09.12.2024 г.

Получены численные решения дифференциальных уравнений для триггера на биполярных транзисторах при наличии внешнего воздействия. Показано, что решения обладают гистерезисными свойствами. Выведены дифференциальные уравнения для одновибратора на биполярных транзисторах и найдены их численные решения.

Ключевые слова: симметричный триггер, одновибратор, гистерезис

DOI: 10.31857/S0033849425010037, **EDN:** HJOQJB

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Давно известны следующие радиотехнические устройства: триггер, мультивибратор и одновибратор. Первые варианты этих устройств работали на радиолампах, последующие – на транзисторах, в том числе биполярных. Дифференциальные уравнения для лампового триггера и мультивибратора можно найти в известной книге [1]. При составлении этих уравнений использовались токовые характеристики активных элементов (радиоламп). Представляет интерес построение универсальной теории, применимой к подобным устройствам, работающим на любой элементной базе. Начать разумно с симметричных вариантов первых двух устройств – триггера и мультивибратора. Дифференциальные уравнения для симметричного транзисторного триггера и мультивибратора были получены в работе [2], причем автор опирался не на токовые характеристики, а на передаточные характеристики по напряжению для усилителей с общим эмиттером, входящих в состав этих устройств. Автор назвал эти характеристики «усилительными функциями» – они имеют вид резкого перепада от большего квазипостоянного значения к меньшему

(причем, «универсализируя» теорию, можно не принимать во внимание происхождение и конкретный физический смысл «усилительной функции», записывая лишь ее математическое выражение). Более ранние упоминания в научной литературе об уравнениях подобного рода автору неизвестны. Данную работу можно рассматривать как продолжение статьи [2] (чуть ниже будут уточнены поставленные в ней цели).

Коротко напомню, каким образом получен «транзисторный» вариант передаточной характеристики, использованной в работе [2]. В статьях [3] и [4] была предложена формула для коллекторного тока усилителя с общим эмиттером:

$$i_k = \alpha D_{01}(U_{bx}) - D_{22}(\alpha D_{01}(U_{bx})(R + R_n) - (E - U_{bx})). \quad (1)$$

Функции D_{01} и D_{22} , входящие в это выражение, имеют следующий вид:

$$D_{01}(x) = -I_s + \frac{\Phi}{R + R_{n\alpha}} W \left(I_s \frac{R + R_{n\alpha}}{\Phi} \exp \left(\frac{x + I_s(R + R_{n\alpha})}{\Phi} \right) \right), \quad (2)$$

$$D_{22}(x) = -I_s + \frac{\Phi}{R \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) + R_n} W \left(I_s \frac{R \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) + R_n}{\Phi} \exp \left(\frac{x + I_s \left(R \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) + R_n \right)}{\Phi} \right) \right).$$

Во всех этих выражениях R – внутреннее сопротивление $p-n$ -переходов $n-p-n$ -транзистора, которое предполагается одинаковым для обоих переходов, R_n – нагрузочное сопротивление в цепи коллектора, $R_{n\alpha}$ – стабилизирующее сопротивление в цепи эмиттера, α – коэффициент передачи коллекторного тока, U_{bx} – это напряжение входного усиливаемого сигнала, E – напряжение источника питания (включенного в коллекторную цепь), φ – температурный потенциал, I_s – ток насыщения. $W(z)$ – специальная функция Ламберта (ее начали использовать в конце 80-х годов прошлого века, термины этой функции можно найти в [5]).

Здесь уместно отметить, что первое применение функции Ламберта к описанию характеристик схем с полупроводниковыми приборами (диодами и биполярными транзисторами) относится, насколько известно автору, к 2000 г. (см. работы [6,7]). Получение удобных выражений для характеристик цепей с этими приборами до сих пор является предметом обсуждения (см., например, [8] – там рассматривается вольт-амперная характеристика цепи «диод – резистор»).

Пусть $R_{n\alpha} = 0$. Если в формулу для напряжения коллектор-эмиттер U_{ke} в усилителе с общим эмиттером

$$U_{ke} = E - R_n i_k \quad (3)$$

подставить выражение (1), получится функция $U_{ke} = F(U_{bx})$ (искомая передаточная характеристика), которая имеет вид резкого перепада от напряжения питания к почти нулевому значению.

Перейдем к дифференциальным уравнениям триггера из статьи [2]:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{RC} (F(y_2) - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{RC} (F(y_1) - y_2). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь y_1 и y_2 – напряжения коллектор-эмиттер на двух транзисторах триггера, R – сопротивление резисторов в их коллекторных цепях, а C – емкость $p-n$ -переходов транзисторов (зависящая от напряжения). Функция $F(x)$ – «усилительная функция» (или передаточная характеристика по напряжению). В уравнения (4) не входят какие-либо внешние напряжения (или токи). Но, как известно, для изменения состояния триггера нужно воздействовать на него переключающими импульсами. Поэтому представляет интерес усложнение данной системы с целью учета внешних возмущений. Учесть одно из возможных внешних возмущений (подключение источника заданного напряжения) – это первая цель настоящей работы.

Помимо триггера в статье [2] была рассмотрена схема симметричного мультивибратора. Были предложены дифференциальные уравнения,

описывающие его работу, и получены их численные решения. Представляет интерес аналогичное исследование схемы, которую можно считать промежуточной между триггером и мультивибратором. Это – одновибратор, с помощью которого формируются одиночные импульсы. Построение математической модели, описывающей одновибратор, является второй целью данной работы.

2. МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Переключающие импульсы можно подавать в схему триггера разными способами. Например, в книге [9, с. 517] рассмотрено включение источника тока между базой и эмиттером одного из транзисторов. Здесь же, стремясь к простоте и избегая включения в схему дополнительных ветвей, разумно ограничиться подключением источника переменного напряжения в проводнике, соединяющем базу одного транзистора с коллектором другого (см. рис. 1). Повторяя выкладки, проведенные в [2], можно получить дифференциальные уравнения, отличающиеся от варианта (4) наличием заданного переменного напряжения $E_1(t)$.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{RC} (F(y_2 + E_1(t)) - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{RC} (F(y_1) - y_2). \end{cases} \quad (5)$$

Нужно уточнить значения емкости C , которая входит в эти уравнения. Эта величина в исследуемом нами триггере на биполярных транзисторах является функцией напряжения коллектор-эмиттер (она зависит от y_1 в первом уравнении и от y_2 во втором). Как и в работе [2], предположим, что нам известна соответствующая вольт-фарадная характеристика. Также отметим, что при решении

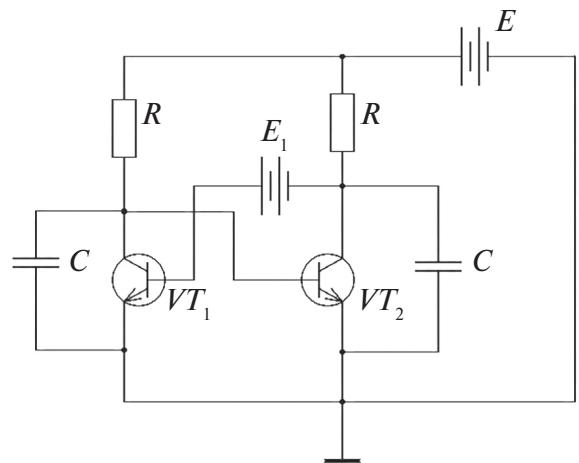


Рис. 1. Схема триггера (с учетом емкостей $p-n$ -переходов). Источник $E_1(t)$ осуществляет заданное внешнее воздействие на схему.

дифференциальных уравнений (5) и (4) удобнее иметь дело с постоянным значением емкости. Для начальных оценок можно использовать значение емкости в одной из стационарных точек системы (4) (или некоторое среднее значение).

С помощью приложения «Wolfram Mathematica 9.0» получены численные решения системы (5) для внешних воздействий, представленных конечными рядами Фурье

$$E_1(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \cos nt + \sum_{n=1}^N B_n \sin nt,$$

где (1-й вариант)

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ B_n &= -\frac{\cos nd + \cos n\pi - \cos n(d - \pi) - 1}{n\pi}, \\ A_n &= -\frac{\sin n\pi + \sin n(d - \pi) - \sin nd}{n\pi}, \quad n \neq 0 \end{aligned}$$

и (2-й вариант)

$$\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ B_n &= \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi}, \\ A_n &= \frac{-2 + 2 \cos n\pi + n\pi \sin n\pi}{(n\pi)^2}, \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

В первом случае ряд представляет последовательность коротких импульсов с чередующейся полярностью (d — длина одиночного импульса, ряд состоит из 25 членов, т.е. $N = 25$). Результат численного счета представлен на рис. 2 (сплошной линией обозначено напряжение коллектор-эмиттер на первом транзисторе, штриховой линией — ЭДС внешнего воздействия). Импульсы внешнего воздействия «перебрасывают» триггер из одного состояния в другое.

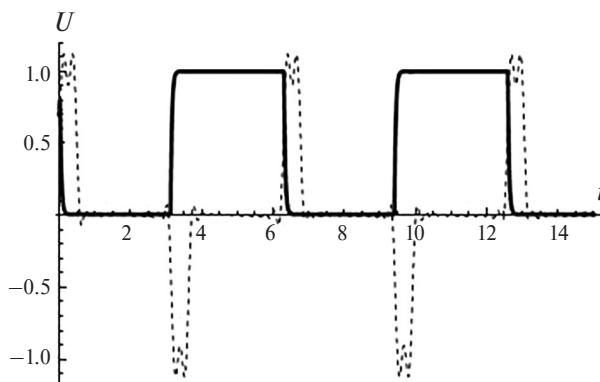


Рис. 2. График напряжения коллектор-эмиттер (сплошная линия), возникающего в результате действия последовательности коротких импульсов с чередующейся полярностью (штриховая линия).

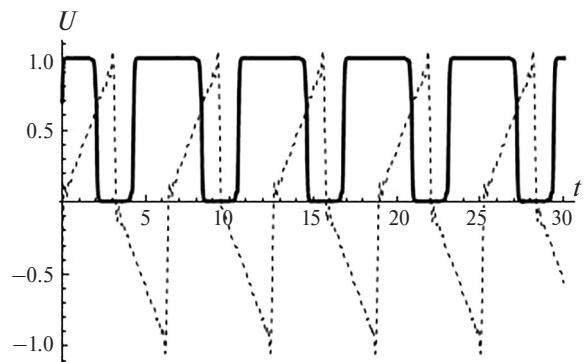


Рис. 3. График напряжения коллектор-эмиттер (сплошная линия), возникающего в результате действия последовательности пилообразных импульсов с чередующейся полярностью (штриховая линия).

Во втором случае ряд представляет последовательность пилообразных импульсов также с чередующейся полярностью (ряд состоит из 24 членов). Результат численного счета представлен на рис. 3 (сплошной линией, как и на рис. 2, обозначено напряжение коллектор-эмиттер на первом транзисторе, прерывистой — ЭДС внешнего воздействия). На рис. 4 представлена зависимость напряжения U_{k-e1} от напряжения внешнего воздействия E_1 . Видно, что получившаяся зависимость обладает гистерезисными свойствами.

На всех этих графиках расчет произведен с помощью усиительной функции F , представляющей собой характеристику усилителя с общим эмиттером (способ получения этой функции изложен в начале статьи — см. формулы (1)–(3)). Но аналогичные результаты получаются и для убывающих усиительных функций, заданных при помощи других математических выражений.

В работе [2], как уже было сказано выше, помимо триггера была исследована схема мультивибратора (и сформулированы соответствующие дифференциальные уравнения). Рассмотрим схему

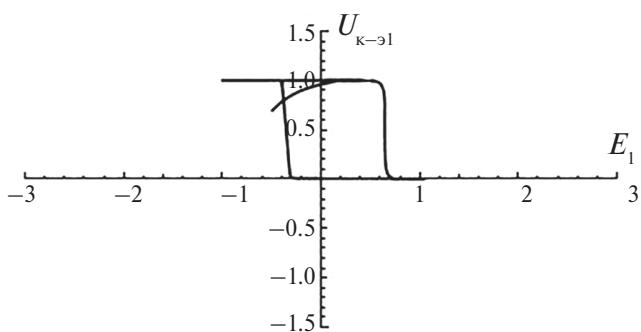


Рис. 4. Зависимость напряжения коллектор-эмиттер от напряжения внешнего воздействия (график напряжения внешнего воздействия см. на рис. 3).

одновибратора, которую можно считать переходным звеном между триггером и мультивибратором (см. рис. 5). Видно, что правая часть схемы похожа на мультивибратор, а левая – на триггер. Также в схеме в проводниках, подходящих к базам транзисторов, подключены внешние источники переменной ЭДС (E_1 и E_2). Уточним – так же, как и в [2], под напряжением на конденсаторе C_0 понимается разность между потенциалом того вывода конденсатора, который ближе к правому краю схемы и потенциалом другого вывода (того, который ближе к центру).

В этой схеме, как и в рассмотренной выше схеме триггера, емкость C для каждого транзистора зависит от напряжения коллектор-эмиттер. Для начальных оценок можно использовать одно из постоянных значений емкости в одной из стационарных точек задачи о триггере или некоторое среднее значение (это обсуждалось в работе [2] – схемы мультивибратора и одновибратора несложно преобразовать в схему триггера).

Вначале составим уравнения для правого транзистора (на рис. 5 он обозначен индексом «2»). Используем контур, который проходит через источник питания E , сопротивление R в правой части схемы, коллектор второго транзистора и его эмиттер. Этот первый контур направлен против часовой стрелки. Запишем, используя законы Кирхгофа:

$$i_2 R + U_{k-e2} = E. \quad (6)$$

В узле A (правом коллекторном узле схемы) входящий ток равен сумме трех вытекающих токов:

$$i_2 = i_{c2} + i_{02} + i_{32}.$$

С учетом этого

$$U_{k-e2} = E - i_{k2} R - RC \frac{dU_{k-e2}}{dt} - i_{32} R. \quad (7)$$

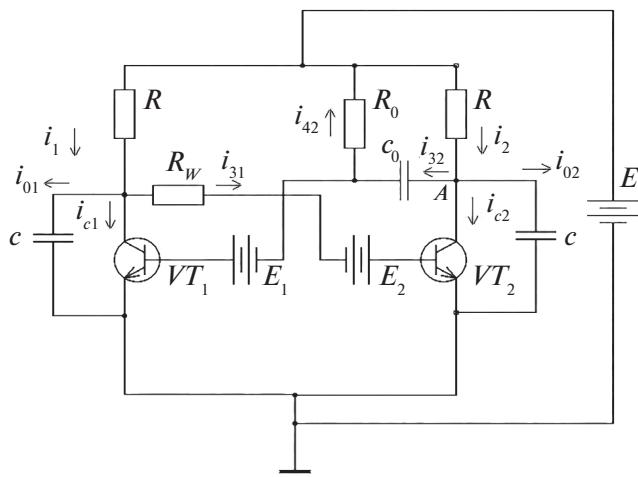


Рис. 5. Схема одновибратора. Источники $E_1(t)$ и $E_2(t)$ осуществляют внешнее воздействие на схему.

Рассмотрим второй контур, проходящий через базу и эмиттер первого транзистора (то есть левого), источник питания E и резистор R_0 (контур также направлен против часовой стрелки). Из второго закона Кирхгофа следует:

$$-i_{42} R_0 + U_{6-e1} = E + E_1.$$

Если пренебречь током базы для первого транзистора (тогда $i_{42} = i_{32}$), соотношение (7) можно записать так:

$$U_{k-e2} = E - i_{k2} R - RC \frac{dU_{k-e2}}{dt} + \frac{E + E_1 - U_{6-e1}}{R_0} R. \quad (8)$$

Первые два слагаемых в правой части соотношения (8) представляют собой усилительную функцию

$$E - i_{k2} R = F(U_{k-e2}).$$

Рассмотрим третий контур, проходящий через конденсатор C_0 , через коллектор и эмиттер второго транзистора и через базу и эмиттер первого (тоже против часовой стрелки), чтобы выразить U_{6-e1} в выражении (8) через напряжение коллектор-эмиттер и напряжение на конденсаторе C_0 (обозначено как V_2):

$$U_{6-e1} = E_1 + U_{k-e2} - V_2.$$

Теперь рассмотрим четвертый контур, по часовой стрелке проходящий через сопротивление R_w , через коллектор и эмиттер первого транзистора и через базу и эмиттер второго, чтобы выразить U_{6-e2} через более удобные для нас величины:

$$U_{6-e2} = U_{k-e1} - i_{31} R_w + E_2.$$

Ток i_{31} представляет собой базовый ток второго (правого) транзистора. Будем считать его пренебрежимо малым. Тогда

$$U_{6-e2} = U_{k-e1} + E_2.$$

В итоге получается уравнение:

$$U_{k-e2} = -RC \frac{dU_{k-e2}}{dt} + F(U_{k-e1} + E_2) + \frac{R}{R_0} V_2 - \frac{R}{R_0} U_{k-e2} + \frac{R}{R_0} E.$$

Рассмотрим пятый контур, проходящий через источник питания, резистор R_0 , конденсатор C_0 и через коллектор и эмиттер правого транзистора (против часовой стрелки), чтобы записать еще одно уравнение:

$$R_0 C_0 \frac{dV_2}{dt} + V_2 = U_{k-e2} - E.$$

Здесь используется приближенное равенство токов i_{42} и i_{32} , после чего ток i_{32} выражается через

производную напряжения на конденсаторе C_0 . Приведем получившиеся два уравнения для величин V_2 , U_{k-32} , U_{k-31} :

$$\begin{aligned} RC \frac{dU_{k-32}}{dt} &= -U_{k-32} + \\ &+ F(U_{k-31} + E_2) - \frac{R}{R_0}(U_{k-32} - E - V_2), \\ R_0 C_0 \frac{dV_2}{dt} + V_2 &= U_{k-32} - E. \end{aligned} \quad (9)$$

Перейдем теперь к левой части схемы. Для левого транзистора

$$U_{k-31} = E - i_1 R. \quad (10)$$

Этот вывод можно сделать, рассматривая шестой контур, проходящий через источник питания E , левый резистор R и через коллектор и эмиттер левого транзистора (против часовой стрелки). В левом коллекторном узле схемы должно выполнять условия:

$$i_1 = i_{k1} + i_{01} + i_{31}.$$

Поэтому

$$U_{k-31} = E - (i_{k1} + i_{01} + i_{31})R. \quad (11)$$

Но

$$i_{01} = C \frac{dU_{k-31}}{dt}.$$

С учетом этого

$$U_{k-31} = E - Ri_{k1} - RC \frac{dU_{k-31}}{dt} - i_{31}R. \quad (12)$$

Первые два слагаемых в правой части представляют собой усиительную функцию F . Поэтому только что приведенное выражение можно записать так:

$$U_{k-31} = F(U_{6-31}) - RC \frac{dU_{k-31}}{dt} - i_{31}R. \quad (13)$$

Ток i_{31} (базовый ток второго транзистора) будем считать пренебрежимо малым. Тогда

$$U_{k-31} = F(U_{6-31}) - RC \frac{dU_{k-31}}{dt}. \quad (14)$$

Выразим U_{6-31} в удобной форме, используя седьмой контур, проходящий против часовой стрелки через базу и эмиттер левого транзистора, эмиттер и коллектор правого транзистора и через конденсатор C_0

$$U_{k-31} = E_1 + U_{k-32} - V_2. \quad (15)$$

Тогда

$$U_{k-31} = F(E_1 + U_{k-32} - V_2) - RC \frac{dU_{k-31}}{dt}. \quad (16)$$

В конечном итоге получается система из трех дифференциальных уравнений, описывающих одновибратор:

$$\begin{aligned} RC \frac{dU_{k-31}}{dt} &= -U_{k-31} + F(U_{k-32} + E_1 - V_2), \\ RC \frac{dU_{k-32}}{dt} &= -U_{k-32} + F(U_{k-31} + E_2) - \\ &- \frac{R}{R_0}(U_{k-32} - E - V_2), \\ R_0 C_0 \frac{dV_2}{dt} + V_2 &= U_{k-32} - E. \end{aligned} \quad (17)$$

В приложении «Wolfram Mathematica» было проведено численное решение этих уравнений (для усиительной функции F , представляющей собой характеристику усилителя с общим эмиттером — см. [3], график функции изображен на рис. 6). Как и следовало ожидать, при нулевых внешних воздействиях E_1 и E_2 система производит лишь одно колебание (в отличие от мультивибратора, в котором осуществляется бесконечный колебательный процесс). Результат для напряжения U_{k-31} можно видеть на рис. 7. Так же было получено решение для внешнего воздействия E_1 в виде последовательности коротких импульсов (аналогичных случаю 1 для триггера). Система откликается лишь на импульсы одной полярности, длительность выходных импульсов напряжения коллектор-эмиттер определяется свойствами самой системы (см. рис. 8).

ВЫВОДЫ

В работе получены дифференциальные уравнения для транзисторного триггера при учете

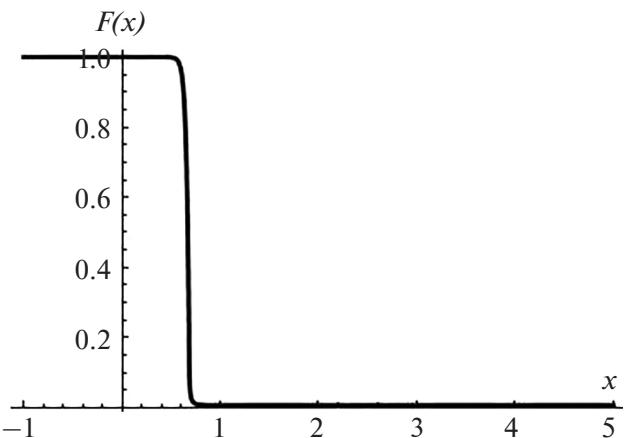


Рис. 6. Характеристика усилителя, входящего в состав исследуемых систем.

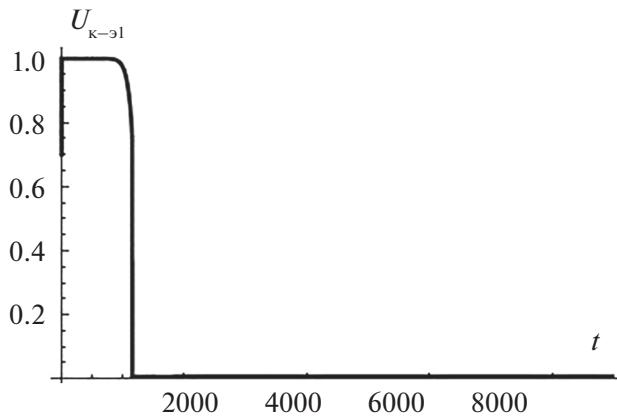


Рис. 7. Численное решение для напряжения $U_{K-91}(t)$ в одновибраторе без внешнего воздействия.

заданного внешнего воздействия (которое может осуществлять переключения). В исследованном случае внешнее возмущающее воздействие осуществлялось с помощью источника переменной ЭДС, подключенного в базовую цепь одного из транзисторов. Уравнения триггера для неизвестных функций y_1, y_2 в этом случае могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = g(F(y_2 + \varepsilon(t)) - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} = g(F(y_1) - y_2). \end{cases}$$

Здесь g – числовой параметр или функция, зависящая от y_1 в первом уравнении и от y_2 во втором уравнении, а $F(y)$ – убывающая усилительная функция, имеющая вид перепада от большего значения к меньшему. Функция $\varepsilon(t)$ в первом уравнении задает внешнее воздействие на систему.

Были получены дифференциальные уравнения для одновибратора (неизвестные функции – y_1, y_2 и z):

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = g\{F(y_2 - z + \varepsilon_1(t)) - y_1\}, \\ \frac{dy_2}{dt} = g\{F(y_1 + \varepsilon_2(t)) - y_2 - \frac{R}{R_0}(y_2 - z - E)\}, \\ \frac{dz}{dt} = -g_0(z - y_2 + E). \end{cases}$$

Здесь $g_0 = 1/R_0 C_0$, R, R_0 и E – числовые параметры, $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ – заданные функции, роль которых аналогична роли $\varepsilon(t)$ в уравнениях триггера.

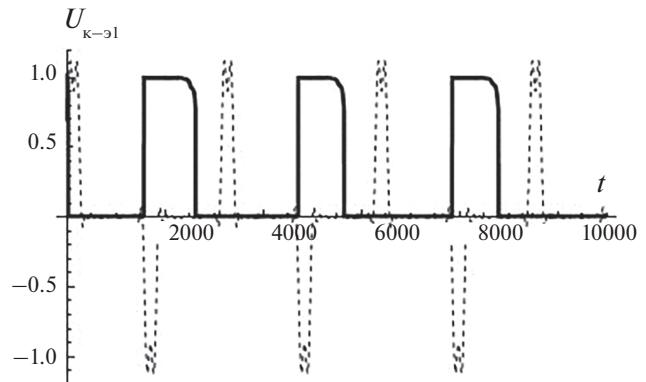


Рис. 8. Численное решение для напряжения $U_{K-91}(t)$ в одновибраторе (сплошная линия) при внешнем воздействии $E_1(t)$ (штриховая линия).

Приведены примеры численного решения уравнений триггера и одновибратора. Для случая триггера отмечен гистерезисный характер полученной зависимости напряжения коллектор-эмиттер от заданного напряжения внешнего воздействия.

Полученные в статье результаты могут быть полезны при математическом моделировании систем, обладающих гистерезисными свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: ГИФМЛ, 1959.
2. Китаев А.Е. // РЭ. 2021. Т. 66. № 5. С. 483.
3. Китаев А.Е. // Радиотехника. 2020. № 1. С. 74.
4. Китаев А.Е. // Радиотехника. 2017. № 10. С. 189.
5. Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006.
6. Banwell T.C., Jayakumar A. // Electronics Lett. 2000. V. 36. № 4. P. 291.
7. Banwell T.C. // IEEE Trans. 2000. V. CS-I – 47. № 11. P. 1621.
8. Gazquez J.A., Torrecillas B., Carmona J. et al. // AEU – Int. J. Electronics and Commun. 2021. V. 133. Article No. 153665.
9. Степаненко И.П. Основы теории транзисторов и транзисторных схем. М.: Энергия, 1977.

DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR A TRIGGER AND A SINGLE VIBRATOR WITH EXTERNAL ACTION

© 2025 A. E. Kitaev

*JSC Scientific and Production Association named after M.V. Frunze,
Gagarina prosp., 174, Nizhnii Novgorod, 603951 Russian Federation
E-mail: kitaev_a_e@mail.ru*

Received November 22, 2024; revised November 28, 2024; accepted December 9, 2024

Numerical solutions of differential equations for a trigger on bipolar transistors in the presence of an external action are obtained. It is shown that the solutions have hysteresis properties. Differential equations for a single vibrator on bipolar transistors are derived and their numerical solutions are found.

Keywords: symmetrical trigger, single vibrator, hysteresis