

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 621.3.049.774.2

### АНАЛИЗ ПАССИВНОГО СМЕСИТЕЛЯ ЧАСТОТ С УПРАВЛЕНИЕМ ПО ТОКУ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ЧАСТОТЕ С УЧЕТОМ ВХОДНОГО И ВЫХОДНОГО ИМПЕДАНСОВ

© 2023 г. А. С. Коротков<sup>а</sup> \*, Т. Д. Чан<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251 Российская Федерация

\*E-mail: korotkov@spbstu.ru

Поступила в редакцию 12.04.2022 г.

После доработки 04.08.2022 г.

Принята к публикации 25.08.2022 г.

Предложена обобщенная методика расчета схемы пассивного смесителя частот с управлением по току на произвольной промежуточной частоте с учетом комплексного входного импеданса источника тока и выходной нагрузки. Приведены результаты моделирования в среде Micro-Cap и сравнения с расчетом. Рассмотрены частотные зависимости передаточного импеданса.

DOI: 10.31857/S0033849423010072, EDN: CCZ1BX

#### ВВЕДЕНИЕ

Представляется перспективным применение смесителей частот с управлением по току при построении многофункциональных и многодиапазонных приемо-передающих устройств [1]. В общем случае смесители частот классифицируются по двум основным группам: 1) пассивные смесители – на диодах [2], полевых транзисторах, работающих при нулевом смещении [3], на основе схемы с коммутационным управлением по току [1]; 2) активные смесители на основе схемы Гильберта – на биполярных [4], полевых транзисторах [5]. Преимущество пассивных смесителей – отсутствие потребляемой мощности (или очень низкая потребляемая мощность), активных смесителей – усиление входного сигнала. Активные смесители на основе схемы Гильберта подробно проанализированы, например, в [6]. В традиционной схеме Гильберта протекающие через транзисторы токи содержат не только переменную, но и постоянную составляющую (ток смещения). Было показано, что фликкерный шум транзисторов, как низкочастотный эффект, на выходе активного смесителя определяется в том числе постоянным током [7]. Пассивный смеситель с управлением по току коммутирует только радиочастотный ток с выхода малошумящего усилителя преселектора, поэтому влияние фликкерного шума в этом смесителе существенно меньше. Кроме того, пассивный смеситель с управлением по току обеспечивает высокую линейность [8]. Благодаря этим преимуществам, пассивные смесители с управлением по току применяются в раз-

личных современных беспроводных системах: сенсорные сети [9], мобильные системы пятого поколения [10], интернет вещей [11].

Схема пассивного смесителя частот с управлением по току проанализирована в [12] при комплексном входном импедансе и импедансе нагрузки как  $RC$ -цепи. Однако при этом предполагается, что на частоте гетеродина и его гармониках импеданс нагрузки много меньше, чем входной импеданс на частоте гетеродина. Данное предположение позволяет упростить анализ, но приводит к пренебрежению в выходном сигнале гармониками на комбинационных частотах  $\omega_{пч} + w\omega_r$ , где  $\omega_{пч}$  – промежуточная угловая частота,  $\omega_r$  – угловая частота гетеродина,  $w$  – номер гармоники частоты гетеродина. Кроме того, моделирование показало, что приведенные в данных статьях результаты обеспечивают высокую точность расчета при условии малости импеданса нагрузки на частоте гармоник гетеродина по сравнению с его значением на промежуточной частоте. Так, для схемы с числом плеч 4 при значениях конденсатора нагрузки 10 пФ, промежуточной частоты 100 МГц, входной частоты 2.1 ГГц при сопротивлении нагрузки 100 Ом ошибка составила около 2%, а при сопротивлении нагрузки 10 Ом ошибка составила около 20%. Как следствие, результаты анализа имеют сравнительно невысокую точность при малом входном импедансе или малом сопротивлении нагрузки. Схема пассивного смесителя с управлением по току также проанализирована в [13] при произвольной промежуточной частоте, но входной импеданс представляется как рези-

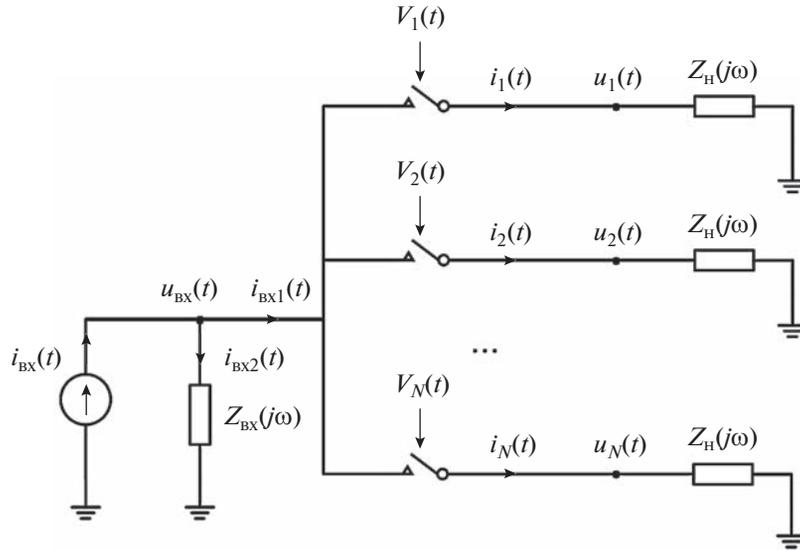


Рис. 1. Структурная схема переключаемой части пассивного смесителя частот с управлением по току.

стор, что не позволяет оценить частотный диапазон смесителя, поскольку не учитывается влияние выходной емкости входного источника тока. Таким образом, приведенные ограничения снижают точность расчетов и не позволяют использовать приведенные методики в общем случае.

В данной работе представлена обобщенная методика анализа и расчета передаточного импеданса  $Z_{см}$  пассивного смесителя частот с управлением по току на произвольной промежуточной частоте с учетом комплексного характера входного импеданса источника тока и импеданса нагрузки для случая идеального переключения ключей без учета нелинейных свойств компонентов схемы. Передаточный импеданс представляет отношение выходного напряжения как отклика схемы на входное воздействие в виде тока, а не напряжения, как в случае передаточной функции по напряжению. Другими словами – передаточный импеданс описывает рассматриваемый тип смесителя с учетом характера входного воздействия.

Цель данной работы – теоретический расчет схемы пассивного смесителя частот с управлением по току в линейном приближении; анализ эффекта компенсации гармоник; моделирование схемы и сравнение с теоретическим расчетом.

## 1. АНАЛИЗ СХЕМЫ СМЕСИТЕЛЯ

Структурная схема переключаемой части пассивного смесителя частот с управлением по току показана на рис. 1. Преобразование осуществляется с помощью схемы коммутации ключей (транзисторов в ключевом режиме). Ключи периодически коммутируются с частотой гетеродина  $f_r$  с помощью импульсного сигнала гетеродина  $V_{0k}(t)$ . В ре-

зультате входной высокочастотный ток с выхода малошумящего усилителя преселектора преобразуется в ток на промежуточной частоте.

### 1.1. Расчет тока $i_k(t)$

Предполагается, что транзисторы переключаются из открытого состояния в режим отсечки и обратно (ключевой режим) при подаче последовательности импульсов гетеродина. В каждом периоде только  $k$ -е плечо подключено к входу на отрезке времени  $\tau = T_r/N$ , где  $T_r$  – период сигнала гетеродина,  $N$  – количество плеч. Следовательно, ток  $i_k(t)$ , протекающий через подключенное плечо, равен току  $i_{вх1}(t)$  на этом отрезке времени. Поэтому ток  $i_k(t)$  определяется соотношением

$$i_k(t) = i_{вх1}(t)V_k(t), \quad (1)$$

где  $V_k(t) = V_{0k}(t)/V_0$  – нормированная управляющая функция  $k$ -го ключа, показанная на рис. 2,  $V_0$  – максимальное значение сигнала гетеродина, причем

$$V_k(t) = 1, \quad t \in [(v + (k - 1)/N)T_r, (v + k/N)T_r], \\ V_k(t) = 0, \quad t \notin [(v + (k - 1)/N)T_r, (v + k/N)T_r], \\ v \in Z.$$

Разложим функцию  $V_k(t)$  в ряд Фурье:

$$V_k(t) = \frac{a_{0,k}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T_r}\right) + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n,k} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T_r}\right),$$

где коэффициенты определены как

$$\begin{aligned}
 a_{0,k} &= \frac{2}{T_r} \int_0^{T_r} V_k(t) dt = \frac{2}{N}, \\
 a_{n,k} &= \frac{2}{T_r} \int_0^{T_r} V_k(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T_r}\right) dt = \\
 &= \frac{2}{T_r} \int_{(k-1)T_r/N}^{kT_r/N} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T_r}\right) dt = \\
 &= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) \cos\left(\frac{n(2k-1)\pi}{N}\right), \\
 b_{n,k} &= \frac{2}{T_r} \int_0^{T_r} V_k(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T_r}\right) dt = \\
 &= \frac{2}{T_r} \int_{(k-1)T_r/N}^{kT_r/N} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T_r}\right) dt = \\
 &= \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{n(2k-1)\pi}{N}\right).
 \end{aligned}$$

Функция  $V_k(t)$  может быть представлена в более общем виде

$$V_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_{|n|,k} - j \operatorname{sign}(n) b_{|n|,k}) \exp(jn\omega_r t).$$

Применив преобразование Фурье с учетом теоремы о частотном сдвиге, получим для тока (1)

$$\begin{aligned}
 I_k(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_{|n|,k} - j \operatorname{sign}(n) b_{|n|,k}) \times \\
 &\times I_{\text{BX1}}(j\omega - nj\omega_r) = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_{|n|,k} + j \operatorname{sign}(n) b_{|n|,k}) I_{\text{BX1}}(j\omega + nj\omega_r),
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $I_k(j\omega)$  – преобразование Фурье для  $i_k(t)$ ;  $I_{\text{BX1}}(j\omega)$  – преобразование Фурье для  $i_{\text{BX1}}(t)$ . Номер коэффициента  $n$  показывает во сколько раз по сравнению с  $I_{\text{BX1}}(j\omega)$  частотный сдвиг для тока  $I_{\text{BX1}}(j\omega + n\omega_r)$  больше, чем  $\omega_r$ . Таким образом, преобразование Фурье для  $i_k(t)$  является суммой преобразований Фурье для  $i_{\text{BX1}}(t)$  с частотными сдвигами  $n\omega_r$  и соответствующими весовыми коэффициентами.

### 1.2. Расчет выходного напряжения плеча $u_k(t)$

Преобразование Фурье  $U_k(j\omega)$  напряжения  $k$ -го плеча  $u_k(t)$  определяется выражением

$$U_k(j\omega) = Z_H(j\omega) I_k(j\omega). \tag{3}$$

Из (2) и (3) получим

$$\begin{aligned}
 U_k(j\omega) &= Z_H(j\omega) \times \\
 &\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_{|n|,k} + j \operatorname{sign}(n) b_{|n|,k}) I_{\text{BX1}}(j\omega + nj\omega_r).
 \end{aligned} \tag{4}$$

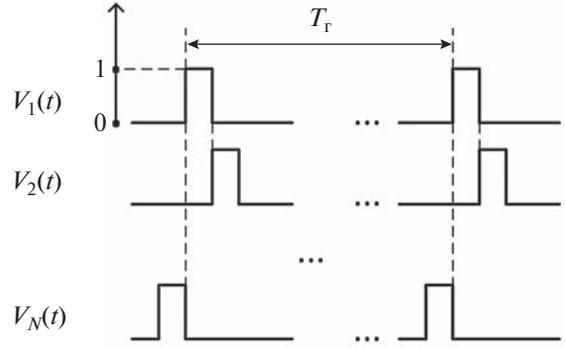


Рис. 2. Нормированная управляющая функция  $k$ -го ключа  $V_k(t)$ .

### 1.3. Расчет входного напряжения $U_{\text{BX}}(j\omega)$

В каждом периоде входной узел подключен только к одному плечу на отрезке времени  $\tau = T_r/N$ . Следовательно, входное напряжение определяется соотношением

$$\begin{aligned}
 u_{\text{BX}}(t) &= R_T i_{\text{BX1}}(t) \sum_{k=1}^N V_k(t) + \sum_{k=1}^N u_k(t) V_k(t) = \\
 &= R_T i_{\text{BX1}}(t) + \sum_{k=1}^N u_k(t) V_k(t),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где  $R_T$  – внутреннее сопротивление ключа как транзистора в открытом состоянии. Применив преобразование Фурье для выражения (5), получим

$$\begin{aligned}
 U_{\text{BX}}(j\omega) &= R_T I_{\text{BX1}}(j\omega) + \\
 &+ \sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_{|m|,k} + j \operatorname{sign}(m) b_{|m|,k}) U_k(j\omega + mj\omega_r),
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $U_{\text{BX}}(j\omega)$  – преобразование Фурье для входного напряжения  $u_{\text{BX}}(t)$ . Номер коэффициента  $m$  показывает, во сколько раз по сравнению с  $U_k(j\omega)$  частотный сдвиг для напряжения  $U_k(j\omega + mj\omega_r)$  больше, чем  $\omega_r$ . Из (4) и (6) следует

$$\begin{aligned}
 U_{\text{BX}}(j\omega) &= R_T I_{\text{BX1}}(j\omega) + \\
 &+ \sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} (a_{|n|,k} + j \operatorname{sign}(n) b_{|n|,k}) \times \\
 &\times (a_{|m|,k} + j \operatorname{sign}(m) b_{|m|,k}) Z_H(j\omega + mj\omega_r) \times \\
 &\times I_{\text{BX1}}(j\omega + (n+m)j\omega_r).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Расчет преобразования Фурье для входного напряжения  $u_{\text{BX}}(t)$  приведен в Приложении 1. Окончательная формула для  $U_{\text{BX}}(j\omega)$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 U_{\text{BX}}(j\omega) &= R_T I_{\text{BX1}}(j\omega) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{\text{BX1}}(j\omega + pNj\omega_r) \times \\
 &\times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} N \exp(-jp\pi) A_m A_{pN-m} Z_H(j\omega + mj\omega_r),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $A_m = (\text{sinc}(m\pi/N))/N$ ,  $p$  – целая часть отношения  $p = [(m + n)/N]$ .

1.4. Система уравнений для расчета тока  $I_{\text{ex1}}(j\omega)$

Представим выражение для токов схемы следующим образом:

$$I_{\text{BX1}}(j\omega) + I_{\text{BX2}}(j\omega) = I_{\text{BX1}}(j\omega) + U_{\text{BX}}(j\omega)/Z_{\text{BX}}(j\omega) = I_{\text{BX}}(j\omega), \tag{9}$$

где  $I_{\text{BX2}}(j\omega)$  – преобразование Фурье для тока  $i_{\text{BX2}}(t)$ . Далее, из выражений (8) и (9) получим

$$(Z_{\text{BX}}(j\omega) + R_{\Gamma}) I_{\text{BX1}}(j\omega) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} Q(p, \omega) I_{\text{BX1}}(j\omega + pNj\omega_{\Gamma}) = Z_{\text{BX}}(j\omega) I_{\text{BX}}(j\omega), \tag{10}$$

где  $Q(p, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} N \exp(-jp\pi) A_{m,k} A_{pN-m,k} \times Z_{\text{H}}(j\omega + mj\omega_{\Gamma})$ .

Если входной ток представлен как комплексный экспоненциальный сигнал  $i_{\text{BX}}(t) = I_{\text{BX}} \exp(j\omega_{\text{BX}} t)$  с амплитудой  $I_{\text{BX}}$  и угловой частотой  $\omega_{\text{BX}}$ , то ток  $I_{\text{BX1}}(j\omega)$  описывается составляющими на частотах  $\omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma}$ , где целое число  $r$  характеризует частотный сдвиг  $rN\omega_{\Gamma}$  данных составляющих по сравнению с основной составляющей на угловой частоте  $\omega_{\text{BX}}$ . При этом входной ток  $I_{\text{BX}}(j\omega)$  не содержит гармоник, т.е.  $I_{\text{BX}}(j\omega) = I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})$  при  $r = 0$ . При остальных значениях  $r$  входной ток  $I_{\text{BX}}(j\omega) = 0$ . Таким образом, для каждой частоты  $\omega = \omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma}$  из (10) получим уравнение

$$(Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma}) + R_{\Gamma}) I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma}) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} Q(p, \omega_{\text{BX}} + rN\omega_{\Gamma}) I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + (r + p)Nj\omega_{\Gamma}) = Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma}) I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma}).$$

Тогда для всего множества значений  $r$  имеем систему уравнений матричного вида относительно комплексного сигнала входного тока:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_{\Gamma}) + R_{\Gamma} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) + R_{\Gamma} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_{\Gamma}) + R_{\Gamma} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_{\Gamma}) \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}}) \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_{\Gamma}) \\ \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Q(0, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q(-1, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & Q(-2, \omega_{\text{BX}} + N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & Q(1, \omega_{\text{BX}}) & Q(0, \omega_{\text{BX}}) & Q(-1, \omega_{\text{BX}}) & \dots \\ \dots & Q(2, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q(1, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & Q(0, \omega_{\text{BX}} - N\omega_{\Gamma}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_{\Gamma}) \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}}) \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_{\Gamma}) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ 0 \\ Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Чтобы найти комбинационные гармоники  $I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + rNj\omega_{\Gamma})$ , необходимо решить систему уравнений (11). Решение системы уравнений (11) приведено в Приложении 2:

$$I_{\text{BX1}} = \frac{I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{Z(j\omega_{\text{BX}})} \begin{pmatrix} \dots \\ -c/(b(b + N)(1 + g)Z(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_{\Gamma})) \\ 1 - c/((1 + g)b^2 Z(j\omega_{\text{BX}})) \\ -c/(b(b - N)(1 + g)Z(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_{\Gamma})) \\ \dots \end{pmatrix},$$

где

$$Z(j\omega) = R_r + Z_{BX}(j\omega) + Z_H(j\omega); Z_H(j\omega) = R_H / (1 + j\omega R_H C_H); b = (j\omega_{BX} R_H C_H + 1) / (j\omega_r R_H C_H);$$

$$c = (jN \sin(b(\pi - \pi/N)) \sin(b\pi/N)) / (\pi\omega_r C_H \sin(b\pi));$$

$$g = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c / ((b + lN)^2 Z(j\omega_{BX} + lNj\omega_r)).$$

Ток  $I_{BX1}(j\omega)$  включает составляющие на частотах  $\omega_{BX}$ ,  $\omega_{BX} \pm N\omega_r$ ,  $\omega_{BX} \pm 2N\omega_r$  и т.д. В процессе преобразования необходимо выделить основную составляющую  $I_{BX1}(j\omega_{BX})$  и подавить комбинационные гармоники  $I_{BX1}(j\omega_{BX} + rNj\omega_r)$ . Чем больше  $N$ , тем дальше от основной составляющей расположены комбинационные гармоники  $I_{BX1}(j\omega_{BX} + rNj\omega_r)$ . При  $N=4$  комбинационные гармоники находятся на частотах  $\omega_{BX} \pm 4\omega_r$ ,  $\omega_{BX} \pm 8\omega_r$  и т.д. При  $N=8$  комбинационные гармоники находятся на частотах  $\omega_{BX} \pm 8\omega_r$ ,  $\omega_{BX} \pm 16\omega_r$  и т.д. В зависимости от диапазона частот выбираемое значение  $N$  должно обеспечивать компромисс между сложностью цепи компенсации гармоник и схемы гетеродина.

### 1.5. Расчет передаточного импеданса одного плеча

Из формулы (4) имеем составляющую выходного напряжения на одном плече (например, первом при  $k=1$ ) на промежуточной частоте  $\omega_{ПЧ} = \omega_{BX} - \omega_r$ :

$$U_1(j\omega_{BX} - j\omega_r) = Z_H(j\omega_{BX} - j\omega_r) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_{|m|,1} + j \text{sign}(m) b_{|m|,1}) \times$$

$$\times I_{BX1}(j\omega_{BX} + (m-1)j\omega_r).$$

Так как ток  $I_{BX1}(j\omega)$  определяется составляющими только на частотах  $\omega_{BX} + rN\omega_r$ , то:

$$U_1(j\omega_{BX} - j\omega_r) = Z_H(j\omega_{BX} - j\omega_r) \times$$

$$\times \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi/N) \exp(j\pi/N)}{(rN+1)\pi} I_{BX1}(j\omega_{BX} + rNj\omega_r).$$

Тогда имеем

$$U_1(j\omega_{BX} - j\omega_r) = I_{BX}(j\omega_{BX}) \times$$

$$\times \frac{Z_{BX}(j\omega_{BX}) Z_H(j\omega_{BX} - j\omega_r) \sin(\pi/N) \exp(j\pi/N)}{\pi Z(j\omega_{BX})} \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{c}{b(1+g)} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(rN+1)(rN+b)Z(j\omega_{BX} + rNj\omega_r)} \right).$$

Таким образом, передаточный импеданс одного плеча (первого) переключаемой части пассивного смесителя с управлением по току определяется по формуле

$$Z_1 = \frac{U_1(j\omega_{BX} - j\omega_r)}{I_{BX}(j\omega_{BX})} = \frac{Z_{BX}(j\omega_{BX}) Z_H(j\omega_{BX} - j\omega_r) \sin(\pi/N) \exp(j\pi/N)}{\pi Z(j\omega_{BX})} \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{c}{b(1+g)} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(rN+1)(rN+b)Z(j\omega_{BX} + rNj\omega_r)} \right). \tag{12}$$

## 2. КОМПЕНСАЦИЯ ГАРМОНИК

Напряжение  $U_k(j\omega)$  состоит из составляющих на частотах  $\omega_{BX} + q\omega_r$ , где  $q$  – номер гармоники частоты гетеродина. Тогда, согласно (4) имеем

$$U_k(j\omega_{BX} + jq\omega_r) = Z_H(j\omega_{BX} + jq\omega_r) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_{|m|,k} + j \text{sign}(m) b_{|m|,k}) \times$$

$$\times I_{BX1}(j\omega_{BX} + jq\omega_r + mj\omega_r) =$$

$$= Z_H(j\omega_{BX} + jq\omega_r) \times$$

$$\times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp(j\varphi_{m,k}) I_{BX1}(j\omega_{BX} + (q+m)j\omega_r),$$

где  $\varphi_{m,k} = m(2k-1)\pi/N$ . Однако ток  $I_{BX1}$  состоит из гармоник на частотах  $\omega_{BX} + rN\omega_r$ , поэтому  $q+m=rN$  и, следовательно,

$$U_k(j\omega_{BX} + jq\omega_r) = Z_H(j\omega_{BX} + jq\omega_r) \times$$

$$\times \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_{rN-q} \exp(j\varphi_{rN-q,k}) I_{BX1}(j\omega_{BX} + rNj\omega_r).$$

Далее выразим напряжение плеча с номером  $k+d$  через напряжение  $k$ -го плеча:

$$U_{k+d}(j\omega_{BX} + jq\omega_r) = Z_H(j\omega_{BX} + jq\omega_r) \times$$

$$\times \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_{rN-q} \exp(j\varphi_{rN-q,k+d}) I_{BX1}(j\omega_{BX} + rNj\omega_r) =$$

$$= \exp(-j2\pi dq/N) U_k(j\omega_{BX} + jq\omega_r).$$

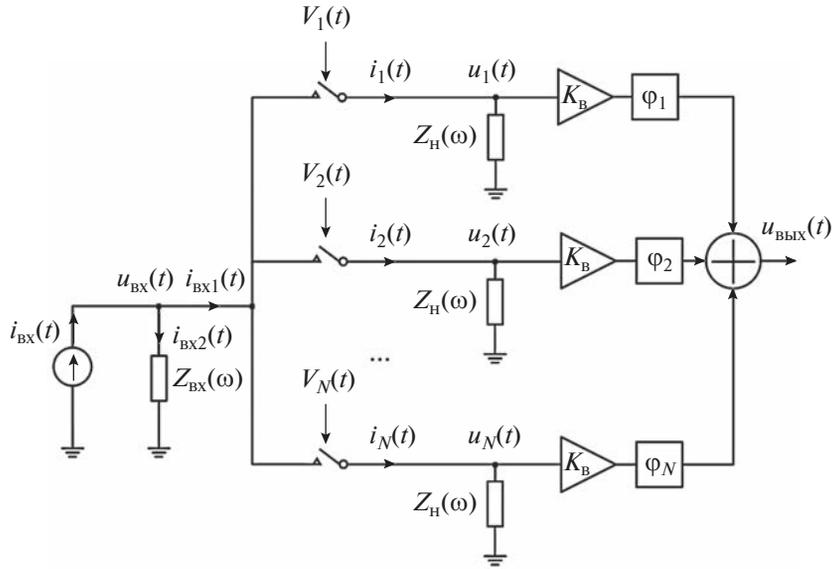


Рис. 3. Схема смеситель частот с цепью компенсации (суммирования) гармоник.

Это значит, что напряжение  $U_{k+d}(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_r)$  равно напряжению  $U_k(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_r)$  по величине, но со сдвигом фазы  $-2\pi dq/N$ . Тогда получим

$$U_k(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_r) = \exp(-j2\pi q(k-1)/N) U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_r). \quad (13)$$

Для подавления комбинационных гармоник на выходе используется цепь компенсации гармоник на основе сумматора и фазовращателей (рис. 3). На сумматор выходное напряжение в  $k$ -ом плече добавляется с весовым коэффициентом  $K_B$  и с фазой  $\phi_k = \phi_0 - 2\pi k/N$ , где  $\phi_0$  – начальный сдвиг фазы. Тогда, на сумматор поступают сигналы вида

$$U_k(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_r) K_B \exp(j(\phi_0 - 2\pi k/N)) = \exp(-j2\pi(kq + k - q)/N) \times U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_r) K_B \exp(j\phi_0).$$

Эти напряжения суммируются. При этом выходное напряжение после суммирования определяется выражением:

$$U_{\text{ВЫХ}}(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_r) = \sum_{k=1}^N \exp(-j2\pi(kq + k - q)/N) \times U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_r) K_B \exp(j\phi_0) = U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_r) K_B \exp(j\phi_0) \times \exp(j2\pi q/N) \sum_{k=1}^N (\exp(-j2\pi(q+1)/N))^k.$$

Выделим далее два случая. Если  $q = rN - 1$ , то

$$U_{\text{ВЫХ}}(j\omega_{\text{вх}} - j\omega_r + rNj\omega_r) = NU_1(j\omega_{\text{вх}} - j\omega_r + rNj\omega_r) \times K_B \exp(j\phi_0) \exp(-j2\pi/N).$$

Если  $q \neq rN - 1$ , то

$$\sum_{k=1}^N (\exp(-j2\pi(q+1)/N))^k = \frac{\exp(-j2\pi(q+1)(N+1)/N) - \exp(-j2\pi(q+1)/N)}{\exp(-j2\pi(q+1)/N) - 1} = 0,$$

поскольку для всех  $x \neq 1$ :  $x + x^2 + \dots + x^N = (x^{N+1} - x)/(x - 1)$ . Таким образом,

$$U_{\text{ВЫХ}}(j\omega_{\text{пч}} + rNj\omega_r) = NK_B \exp(j(\phi_0 - 2\pi/N)) U_1(j\omega_{\text{пч}} + rNj\omega_r). \quad (14)$$

Ток  $I_{\text{вх1}}$  состоит из гармоник на частотах  $\omega_{\text{вх}} + rN\omega_r$ . При этом из (14) следует, что выходное напряжение после суммирования состоит из гармоник на

частотах  $\omega_{\text{пч}} + rN\omega_r$  и их амплитуды увеличиваются в  $NK_B$  раз. Тогда передаточный импеданс одного плеча, рассчитанный в (12), также увеличивается в  $NK_B$  раз. Кроме того, остальные комбинационные гармоники на выходе полностью компенсируются в случае полного равенства параметров плеч смесителя. При этом передаточный импеданс пассивного смесителя с управлением по току будет иметь вид

$$Z_{\text{см}} = \frac{U_{\text{вых}}(j\omega_{\text{вх}} - j\omega_{\text{г}})}{I_{\text{вх}}(j\omega_{\text{вх}})} = NK_{\text{в}} \frac{Z_{\text{вх}}(j\omega_{\text{вх}})Z_{\text{н}}(j\omega_{\text{вх}} - j\omega_{\text{г}})\sin(\pi/N)\exp(j(\varphi_0 - \pi/N))}{\pi Z(j\omega_{\text{вх}})} \times \left(1 - \frac{c}{b(1+g)} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(rN+1)(rN+b)Z(j\omega_{\text{вх}} + rNj\omega_{\text{г}})}\right). \quad (15)$$

Таким образом, передаточный импеданс увеличивается в  $NK_{\text{в}}$  раз по сравнению с передаточным импедансом одного плеча.

Как пример, рассмотрим случай  $N = 4$ . Обобщенная схема для данного случая представлена на рис. 4. Для сдвига фазы  $\pi/2$  при  $\omega_{\text{вх}} > \omega_{\text{г}}$  используются  $RC$ -цепи, как показано на рис. 5. При  $\omega_{\text{вх}} < \omega_{\text{г}}$ ,  $RC$ -цепи следует поменять местами. Значения  $R_1$  и  $C_1$  выбираются так, чтобы  $R_1 = 1/(\omega_{\text{пч}}C_1)$ . Сдвиги фаз в плечах схемы на рис. 5 на промежуточной частоте  $\omega_{\text{пч}}$  составляют:  $\pi/4$  (плечо 1),  $-\pi/4$  (плечо 2),  $-3\pi/4$  (плечо 3),  $-5\pi/4$  (плечо 4). Схема на рис. 5 соответствует схеме на рис. 4 с  $\varphi_0 = 3\pi/4$ . Напряжения в узлах  $A, B, C, D$  равны соответственно:

$$U_A(j\omega) = U_1(j\omega) - U_3(j\omega), \\ U_B(j\omega) = U_2(j\omega) - U_4(j\omega),$$

$$U_C(j\omega) = \frac{R_1 U_A(j\omega)}{R_1 + 1/(j\omega C_1)} = \frac{R_1(U_1(j\omega) - U_3(j\omega))}{\sqrt{R_1^2 + 1/(\omega C_1)^2}} \exp(j \arctg(1/(\omega R_1 C_1))),$$

$$U_D(j\omega) = \frac{U_B(j\omega)/(j\omega C_1)}{R_1 + 1/(j\omega C_1)} = \frac{(U_2(j\omega) - U_4(j\omega))/(j\omega C_1)}{\sqrt{R_1^2 + 1/(\omega C_1)^2}} \times \exp(j(\arctg(1/(\omega R_1 C_1)) - \pi/2)),$$

где  $-\pi/2 \leq \arctg(1/(\omega R_1 C_1)) \leq \pi/2$ . Вместе с тем согласно (13) имеем

$$U_2(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}) = \exp(-jq\pi/2)U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}), \\ U_3(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}) = \exp(-jq\pi)U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}), \\ U_4(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}) = \exp(-j3q\pi/2)U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}).$$

Тогда получаем

$$U_C(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}) = \frac{R_1(1 - \exp(-jq\pi))\exp(j \arctg(1/((\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})R_1 C_1)))}{\sqrt{R_1^2 + 1/((\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})C_1)^2}} U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}), \\ U_D(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}) = \frac{\exp(j \arctg(1/((\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})R_1 C_1))) (\exp(-j(q+1)\pi/2) - \exp(-j(3q+1)\pi/2))}{((\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})C_1)\sqrt{R_1^2 + 1/((\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})C_1)^2}} U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}).$$

Выходное напряжение на частотах  $\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}}$  рассчитано по формуле

$$U_{\text{вых,RC}}(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}) = U_C(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}) + U_D(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}) = \frac{U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}})R_1(1 - \exp(-jq\pi))\exp(j \arctg(1/((\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})R_1 C_1)))}{\sqrt{R_1^2 + 1/((\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})C_1)^2}} \left(1 + \frac{\exp(-j(q+1)\pi/2)}{(\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})R_1 C_1}\right).$$

Если  $q$  – четное число, то  $U_{\text{вых,RC}}(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}) = 0$ . Если  $q$  – нечетное число, то

$$U_{\text{вых,RC}}(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}}) = \frac{2U_1(j\omega_{\text{вх}} + jq\omega_{\text{г}})R_1 \exp(j \arctg(1/((\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})R_1 C_1)))}{\sqrt{R_1^2 + 1/((\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})C_1)^2}} \left(1 + \frac{\exp(-j(q+1)\pi/2)}{(\omega_{\text{вх}} + q\omega_{\text{г}})R_1 C_1}\right).$$

Поскольку выбраны значения  $R_1$  и  $C_1$  так, чтобы  $R_1 = 1/(\omega_{\text{пч}}C_1)$ , то получим

$$U_{\text{вых,RC}}(j\omega_{\text{пч}}) = 2\sqrt{2}U_1(j\omega_{\text{пч}})\exp(j\pi/4).$$

Весовой коэффициент  $K_{\text{в}} = 1/\sqrt{2}$ . Таким образом, передаточный импеданс увеличивается в  $2\sqrt{2}$  раз

по сравнению с передаточным импедансом одного плеча.

### 3. РЕЗУЛЬТАТ МОДЕЛИРОВАНИЯ

При моделировании схемы пассивного смесителя с управлением по току (согласно рис. 5) зада-

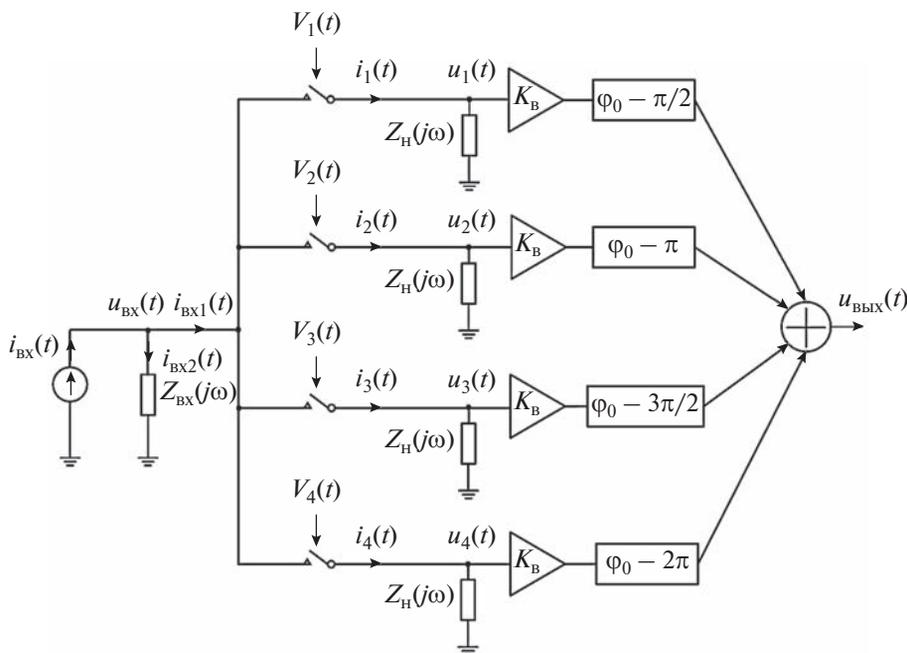


Рис. 4. Обобщенная схема смесителя частоты при  $N = 4$ .

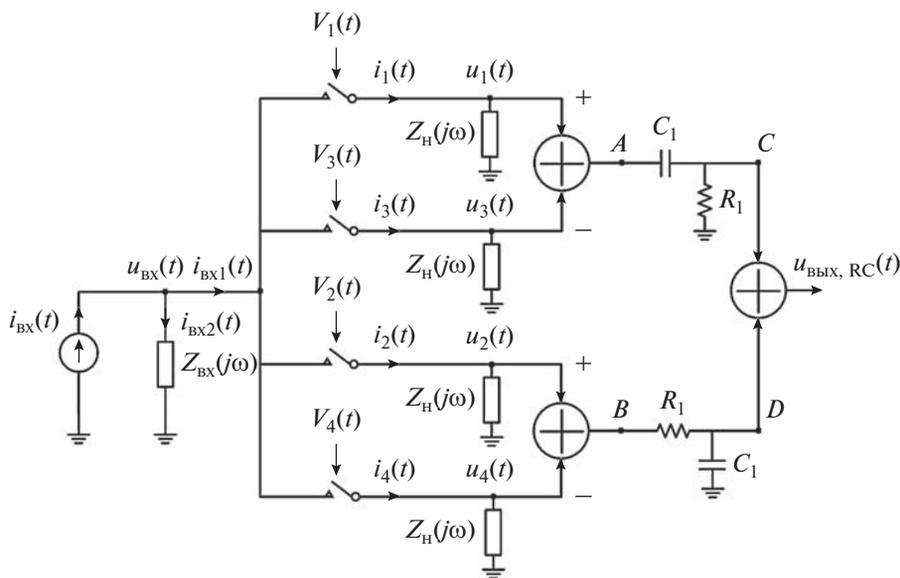
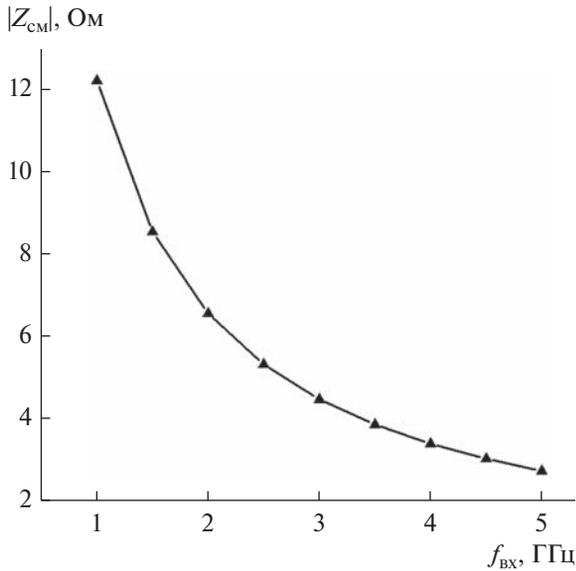


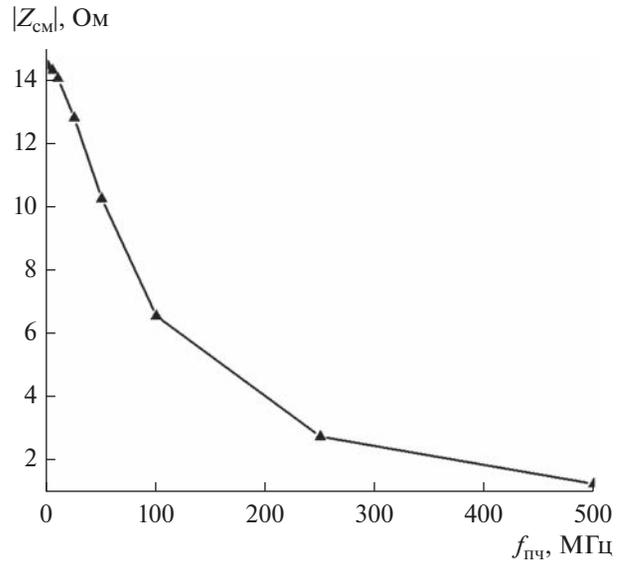
Рис. 5. Схема смеситель частот с  $RC$ -цепью комбинации гармоник при  $N = 4$ .

ются следующие параметры: амплитуда входного тока  $i_{\text{BX}}(t)$  10 мА; каждое плечо является параллельной  $RC$ -цепью  $R_{\text{H}} = 1$  кОм,  $C_{\text{H}} = 10$  пФ; входной импеданс также является параллельной  $RC$ -цепью  $R_{\text{BX}} = 5$  кОм,  $C_{\text{BX}} = 10$  пФ; сопротивление ключа в открытом состоянии  $R_{\text{r}} = 100$  Ом; число плеч  $N = 4$ . Зависимость модуля передаточного импеданса  $Z_{\text{CM}}$  от входной частоты  $f_{\text{BX}}$  при неизменной промежуточной частоте  $f_{\text{пч}} = 100$  МГц представлена на

рис. 6. Зависимость модуля передаточного импеданса  $Z_{\text{CM}}$  от промежуточной частоты  $f_{\text{пч}}$  при неизменной частоте гетеродина  $f_{\text{r}} = 2$  ГГц показана на рис. 7. Результаты расчета и моделирования выходного напряжения  $U_{\text{ВЫХ, RC}}$  и комбинационных гармоник на выходе схемы компенсации при входной частоте  $f_{\text{BX}}$  и частоте гетеродина  $f_{\text{r}}$ , представлены в табл. 1. Сохранены приведенные параметры схемы. Значения  $R_1$  и  $C_1$  выбираются так, чтобы  $R_1 =$



**Рис. 6.** Зависимость модуля передаточного импеданса  $Z_{CM}$  от входной частоты  $f_{BX}$  при неизменной промежуточной частоте  $f_{ПЧ} = 100$  МГц.



**Рис. 7.** Зависимость модуля передаточного импеданса  $Z_{CM}$  от промежуточной частоты  $f_{ПЧ}$  при неизменной частоте гетеродина  $f_Г = 2$  ГГц.

$= 1/(\omega_{ПЧ} C_1)$ . В данном случае  $R_1 = 1$  кОм,  $C_1 = 1.59$  пФ. Результаты расчета и моделирования совпадают с высокой точностью (ошибка составляет менее 0.5%). Выходное напряжение  $U_{ВЫХ,RC}$  в  $2\sqrt{2}$  раз больше, чем напряжение  $U_1$ . Комбинационные гармоники напряжения  $U_{ВЫХ,RC}$  на частотах  $\omega_{ВХ} + q\omega_Г$  ( $q$  – четное целое число) полностью компенсируются. Однако иные комбинационные гармоники напряжения  $U_{ВЫХ,RC}$  больше, чем соответствующие комбинационные гармоники напряжения  $U_1$ .

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе представлены результаты анализа схемы пассивного смесителя с управлением по току. Выведено выражение (15) для передаточного импеданса схемы  $Z_{CM}$ . В отличие от известных работ, результаты справедливы при любой промежуточной частоте, включая нулевую, которая применяется в гомодинных приемниках [14] (в этом случае в выражении (15)  $\omega_{ВХ} = \omega_Г$ ) и учитывают комплексный характер входного импеданса

**Таблица 1.** Результат расчета и моделирования выходного напряжения  $U_{ВЫХ,RC}$  и комбинационных гармоник на выходе схемы компенсации

Гармоника, ГГц	$U_1$ , мВ		$U_{ВЫХ,RC}$ , мВ	
	расчет	моделирование	расчет	моделирование
$f_{ПЧ} = 0.1$	23.2126	23.2120	65.6554	65.6530
$ f_{ПЧ} - f_Г  = 1.9$	0.866331	0.866292	0	0
$ f_{ПЧ} + f_Г  = 2.1$	1.2591	1.2590	0	0
$ f_{ПЧ} - 2f_Г  = 3.9$	0.201932	0.201954	0.414130	0.414156
$ f_{ПЧ} + 2f_Г  = 4.1$	0.589581	0.589554	1.150000	1.150080
$ f_{ПЧ} - 3f_Г  = 5.9$	0.041485	0.041488	0	0
$ f_{ПЧ} + 3f_Г  = 6.1$	0.286854	0.286870	0	0
$ f_{ПЧ} - 4f_Г  = 7.9$	0.065105	0.065102	0.128532	0.128544
$ f_{ПЧ} + 4f_Г  = 8.1$	0.107968	0.107945	0.218558	0.218539

источника тока  $Z_{\text{вх}}(j\omega)$  и выходного импеданса нагрузки  $Z_{\text{н}}(j\omega)$ . Представленные соотношения позволяют определять выходной сигнал на промежуточной частоте с учетом гармоник частоты гетеродина. Моделирование схемы смесителя в среде Micro-Cap подтвердило справедливость полученных результатов. Ошибка в расчетах по сравнению с моделированием составляет до 0.5%, если учитывать не более пяти гармоник, и менее 0.2%, если учитывать не менее десяти гармоник.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

#### Расчет $U_{\text{вх}}(j\omega)$

Из выражений для коэффициентов  $a_{m,k}$ ,  $b_{m,k}$  имеем

$$a_{|m|,k} + j\text{sign}(m)b_{|m|,k} = \frac{2}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{N}\right) \times \exp(jm(2k-1)\pi/N), \quad m \neq 0,$$

$$a_{|m|,k} + j\text{sign}(m)b_{|m|,k} = \frac{2}{N}, \quad m = 0.$$

Таким образом,

$$a_{|m|,k} + j\text{sign}(m)b_{|m|,k} = 2A_m \exp(j\varphi_{m,k}), \quad (\text{П.1})$$

где  $A_m = (\text{sinc}(m\pi/N))/N$ ,  $\varphi_{m,k} = m(2k-1)\pi/N$ . Из формул (7) и (П.1) следует, что

$$U_{\text{вх}}(j\omega) = R_{\text{Г}} I_{\text{вх1}}(j\omega) + \sum_{k=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_m A_n \exp(j(m+n)(2k-1)\pi/N) \times Z_{\text{н}}(j\omega + mj\omega_{\text{Г}}) I_{\text{вх1}}(j\omega + (n+m)j\omega_{\text{Г}}) = R_{\text{Г}} I_{\text{вх1}}(j\omega) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( A_m A_n Z_{\text{н}}(j\omega + mj\omega_{\text{Г}}) \times I_{\text{вх1}}(j\omega + (n+m)j\omega_{\text{Г}}) \times \sum_{k=1}^N \exp(j(m+n)(2k-1)\pi/N) \right).$$

Если сумма  $m+n$  не кратна  $N$  (т.е.  $m+n \neq pN$ ), то получаем

$$\sum_{k=1}^N \exp(j(m+n)(2k-1)\pi/N) = 0.$$

Если сумма  $m+n$  кратна  $N$  (т.е.  $m+n = pN$ ), то –

$$\sum_{k=1}^N \exp(j(m+n)(2k-1)\pi/N) = N \exp(-jp\pi).$$

Поэтому окончательно получим

$$U_{\text{вх}}(j\omega) = R_{\text{Г}} I_{\text{вх1}}(j\omega) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} I_{\text{вх1}}(j\omega + pNj\omega_{\text{Г}}) N \exp(-jp\pi) \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m A_{pN-m} Z_{\text{н}}(j\omega + mj\omega_{\text{Г}}).$$

Решение системы уравнений (11)

#### П.2.1. Расчет $Q(p, \omega)$

Предполагаем, что нагрузка  $Z_{\text{н}}$  является параллельной  $RC$ -цепью (резистор  $R_{\text{н}}$  и конденсатор  $C_{\text{н}}$  соединены параллельно). Представим выражение для  $Q(p, \omega)$ :

$$Q(p, \omega) = N \exp(-jp\pi) \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m A_{pN-m} Z_{\text{н}}(j\omega + mj\omega_{\text{Г}}).$$

Выразим сумму в функции  $Q(p, \omega)$  с помощью дискретной свертки вида:

$$y[h] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m A_{h-m} Z_{\text{н}}(j\omega + mj\omega_{\text{Г}}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{h-m} (A_m Z_{\text{н}}(j\omega + mj\omega_{\text{Г}})).$$

Функция  $y[h]$  является дискретной сверткой от  $x_1[h]$  и  $x_2[h]$ , где  $h$  – целое число:

$$y[h] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[h-m] x_2[m] = x_1[h] * x_2[h],$$

где  $x_1[h] = A_h$ ,  $x_2[h] = A_h Z_{\text{н}}(j\omega + hj\omega_{\text{Г}})$ . Вычислим полученную сумму с помощью следующего алгоритма: осуществим прямое дискретное преобразование Фурье для функций  $x_1[h]$  и  $x_2[h]$  в частотную область  $\omega_{\text{д}}$  (отметим, что переменная  $\omega_{\text{д}}$  является параметром преобразования и не равна переменной  $\omega$  в выражении для  $x_2[h]$ ); далее, перемножив полученный результат  $X_1(\omega_{\text{д}})X_2(\omega_{\text{д}})$ , где  $X_1(\omega_{\text{д}})$  – дискретное преобразование Фурье для  $x_1[h]$ ,  $X_2(\omega_{\text{д}})$  – дискретное преобразование Фурье для  $x_2[h]$ , определим свертку в частотной области как  $Y(\omega_{\text{д}}) = X_1(\omega_{\text{д}})X_2(\omega_{\text{д}})$ ; на последнем этапе осуществим обратное дискретное преобразование Фурье для функции  $Y(\omega_{\text{д}})$  и, следовательно, получим выражение для просуммированного значения  $y[h]$ . Окончательно определим

$$y[h] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega_{\text{д}}) \exp(jh\omega_{\text{д}}) d\omega_{\text{д}} = \frac{j \sin(a(\pi - \pi/N)) \sin((a-h)\pi/N)}{a\pi(h-a)\omega_{\text{Г}} C_{\text{н}} \sin(a\pi)} + \frac{jA_h}{a\omega_{\text{Г}} C_{\text{н}}},$$

где  $a = -(1 + j\omega R_{\text{н}} C_{\text{н}})/(j\omega_{\text{Г}} R_{\text{н}} C_{\text{н}})$ . Таким образом, получим

$$Q(p, \omega) = N \exp(-jp\pi) y[pN] = N \exp(-jp\pi) \times \frac{j \sin(a(\pi - \pi/N)) \sin((a-pN)\pi/N)}{a\pi(pN-a)\omega_{\text{Г}} C_{\text{н}} \sin(a\pi)} + \frac{jA_{pN} N}{a\omega_{\text{Г}} C_{\text{н}}}.$$

Выделим комбинационные частоты  $\omega = \omega_{\text{BX}} + rN\omega_r$ :

$$Q(p, \omega_{\text{BX}} + rN\omega_r) = \frac{c}{(b+rN)(b+rN+pN)} - \frac{jA_{pN}N}{(b+rN)\omega_r C_H},$$

где

$$b = (1 + j\omega_{\text{BX}}R_H C_H)/(j\omega_r R_H C_H);$$

$$c = (jN \sin(b(\pi - \pi/N)) \sin(b\pi/N))/(\pi\omega_r C_H \sin(b\pi)).$$

П.2.2. Решение системы уравнений

$$(\mathbf{D} + \mathbf{F} + \mathbf{E})\mathbf{I}_{\text{BX1}} = \frac{Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{R_r + Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}\mathbf{I}_{\text{BX}} \quad (\text{П.2})$$

Из результата расчета  $Q(p, \omega)$  имеем следующую эквивалентную систему уравнений:

где

$$\mathbf{I}_{\text{BX1}} = \begin{pmatrix} \dots \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_r) \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}}) \\ I_{\text{BX1}}(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_r) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_{\text{BX}} = \begin{pmatrix} \dots \\ I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_r) \\ I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) \\ I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_r) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ 0 \\ I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_2^T,$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & c/(Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_r) + R_r) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & c/(Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}}) + R_r) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & c/(Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_r) + R_r) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \dots \\ 1/(b+N) \\ 1/b \\ 1/(b-N) \\ \dots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \frac{1}{j\omega_r C_H} \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1/F_1(1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1/F_1(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1/F_1(-1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$F_1(s) = (b + sN)(Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}} + sNj\omega_r) + R_r),$$

$\mathbf{E}$  – единичная матрица.

Для решения системы (П.2) необходимо найти обратную матрицу  $(\mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F})^{-1}$ . Воспользуемся теоремой, которая приведена в [15]: пусть задана матрица вида  $(\mathbf{D} + \mathbf{H})$ . Тогда, если  $\text{rank}(\mathbf{D}) = 1$ , то

$$(\mathbf{D} + \mathbf{H})^{-1} = \mathbf{H}^{-1} - (\mathbf{H}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{H}^{-1})/(1 + g),$$

где  $g = \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{H}^{-1})$  – сумма элементов диагонали матрицы  $\mathbf{D}\mathbf{H}^{-1}$ . Матрица  $\mathbf{D}$  является произведением трех матриц,  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$  и  $\mathbf{D}_2^T$ . Поскольку  $\text{rank}$  произведения матриц не превосходит наименьший  $\text{rank}$  каждого из сомножителей, а  $\text{rank}(\mathbf{D}_2) = \text{rank}(\mathbf{D}_2^T) = 1$ , то  $\text{rank}(\mathbf{D}) = 1$ . Таким образом, условие теоремы выполнено.

В данной работе матрица  $\mathbf{H} = \mathbf{F} + \mathbf{E}$ . Поскольку  $\mathbf{H}$  является диагональной матрицей, легко найти  $\mathbf{H}^{-1}$ . Тогда, решение системы уравнений (П.2) будет иметь вид

$$\mathbf{I}_{\text{BX1}} = (\mathbf{D} + \mathbf{F} + \mathbf{E})^{-1} \frac{Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{R_r + Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}\mathbf{I}_{\text{BX}} =$$

$$= \left( (\mathbf{F} + \mathbf{E})^{-1} - \frac{(\mathbf{F} + \mathbf{E})^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{F} + \mathbf{E})^{-1}}{1 + g} \right) \times$$

$$\times \frac{Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{R_r + Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}\mathbf{I}_{\text{BX}}.$$

Окончательное решение исходной системы уравнений:

$$\mathbf{I}_{\text{BX1}} = \frac{I_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})Z_{\text{BX}}(j\omega_{\text{BX}})}{Z(j\omega_{\text{BX}})} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \dots \\ -c/(b(b+N)(1+g)Z(j\omega_{\text{BX}} + Nj\omega_r)) \\ 1 - c/((1+g)b^2Z(j\omega_{\text{BX}})) \\ -c/(b(b-N)(1+g)Z(j\omega_{\text{BX}} - Nj\omega_r)) \\ \dots \end{pmatrix},$$

где

$$Z(j\omega) = R_r + Z_{\text{вх}}(j\omega) + Z_{\text{н}}(j\omega);$$

$$Z_{\text{н}}(j\omega) = R_{\text{н}} / (1 + j\omega R_{\text{н}} C_{\text{н}});$$

$$g = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c / \left( (b + lN)^2 Z(j\omega_{\text{вх}} + lNj\omega_r) \right).$$

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы Научного центра мирового уровня “Передовые цифровые технологии” (соглашение от 20.04.2022 № 075-15-2022-311).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin F., Mak P. I., Martins R.P.* // IEEE Circuits and Systems Magazine. 2015. V. 15. № 1. P. 12.
2. *Дроздов А.В., Дроботун Н.Б., Гошин Г.Г., Хорошилов Е.В.* // Докл. Томск. гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники. Т. 20. № 1. С. 23.
3. *Аверина Л.И., Бобрешов А.М., Шапошникова Ж.В.* // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13. № 4. С. 51.
4. *Кокотов А.А., Помазанов А.В., Шеерман Ф.И. и др.* // Тр. XV Межд. научн.-практ. конф. “Электронные средства и системы управления”. Томск. 20–22 ноября 2019. Томск: В-Спектр. 2019. Т. 1. С. 60.
5. *Романюк В.А., Аунг Б.Б.Х.* // Изв. вузов. Электроника. 2012. № 4. С. 60.
6. *Коротков А.С.* // Микроэлектроника. 2011. Т. 40. № 2. С. 140.
7. *Darabi H., Abidi A.* // IEEE J. Solid-State Circuits. 2000. V. 35. № 1. P. 15.
8. *Mirzaei A., Darabi H., Leete J. et al.* // IEEE Trans. 2010. V. CS-I-57. № 9. P. 2353.
9. *Wu C.Y., Chen Y.T., Liao Y.T.* // IEEE Access. 2021. V. 9. P. 94203.
10. *Krishnamurthy S., Niknejad A.M.* // IEEE Radio Frequency Integrated Circuits Symp. Los Angeles. 4–6 Aug. N.Y.: IEEE, 2020. P. 275.
11. *Bae S., Kim D., Kim D. et al.* // IEEE Trans. 2021. V. CS-I-68. № 2. P. 892.
12. *Mirzaei A., Darabi H.* // IEEE Trans. 2011. V. CS-I-58. № 5. P. 879.
13. *Soer M.C.M., Klumperink E.A.M., de Boer P. et al.* // IEEE Trans. 2010. V. CS-I-57. № 10. P. 2618.
14. *Коротков А.С.* // Микроэлектроника. 2006. Т. 35. № 4. С. 321.
15. *Kenneth S.M.* // Mathematics Magazine. 1981. V. 54. № 2. P. 67.