

УДК 531.011:521.1

О ДВИЖЕНИЯХ ГАНТЕЛИ В ОБОБЩЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА

© 2024 г. П. С. Красильников*, А. Е. Байков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*krasil06@rambler.ru

Поступила в редакцию 28.07.2023

Переработанный вариант 17.09.2023

Принята к публикации 02.10.2023

Рассматриваются поступательно-вращательные движения симметричной гантели в круговой ограниченной задаче трех тел, когда основные притягивающие тела имеют одинаковые массы и вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Найден новый тип движения гантели, когда ее центр масс перемещается вдоль нормали к плоскости орбиты основных тел, а сама гантель непрерывно вращается вокруг нормали, образуя с ней постоянный прямой угол (инвариантное многообразие “гравитационный пропеллер”). Показано, что указанное многообразие включает в себя несколько двумерных инвариантных подмногообразий. Описана динамика гантели на этих подмногообразиях. Найденны и исследованы на устойчивость относительные равновесия, принадлежащие “гравитационному пропеллеру”, при которых гантель ориентирована параллельно оси, соединяющей основные тела, либо перпендикулярна ей, а ее центр масс покоится в центре масс системы. Исследованы малые пространственные нелинейные колебания гантели на многообразии “гравитационный пропеллер” в окрестности устойчивого относительного равновесия для предельного случая, когда отношение длин гантели к радиусу орбиты основных тел стремится к нулю. Показано, что эти колебания имеют природу нелинейного параметрического резонанса, который задает “медленную” амплитудную модуляцию быстрых” гармонических колебаний по углу вращения гантели.

DOI: 10.31857/S0023420624030092, EDN: JJMLXA

ВВЕДЕНИЕ

В обобщенной ограниченной задаче трех тел исследуется движение пассивно гравитирующего твердого тела малой массы в поле притяжения двух основных тел, поэтому обобщенная задача Ситникова — ее частный случай. В обобщенной круговой задаче Ситникова две одинаковые по массе материальные точки (основные тела) движутся друг относительно друга по круговой орбите, а пассивно гравитирующее тело, находящееся в поле притяжения основных тел, совершает сложное поступательно-вращательное движение, при этом его центр масс перемещается вдоль прямой, нормальной к плоскости вращения основных тел и проходящей через их центр масс. Такие движения существуют в силу симметрии задачи, если, например, тело имеет симметричное распределение массы вокруг оси динамической симметрии, совпадающей с нормалью к плоскости вращения основных тел; при этом тело вращается вокруг нормали. Отметим, что в классической задаче Ситникова вдоль нормали движется не твердое тело, а материальная точка [1–6].

В работе [7] рассматривается движение однородного стержня, когда основные тела одинаковой массы движутся по круговой орбите. Был

обнаружен новый класс движения, соответствующего обобщенной задаче Ситникова: центр масс перемещается вдоль нормали к плоскости орбиты основных тел, а сам стержень непрерывно вращается вокруг этой нормали, образуя с ней постоянный прямой угол. Этот класс движений назван в публикации [7] “гравитационным пропеллером”. В статье [8] описано движение симметричной или асимметричной гантели вдоль нормали к плоскости движения двух основных тел одинаковой массы, когда последние движутся по круговой или эллиптической орбитам. Авторами найдены положения равновесия гантели, исследована их устойчивость.

Остановимся на работах, изучающих движение гантели в более простых гравитационных полях. В статье [9] исследуются плоские движения гантели в центральном поле сил, при этом длина гантели малой не предполагается. Были найдены возможные классы таких движений. В работе [10] исследуется устойчивость стационарных движений и гироскопическая стабилизация гантели в центральном поле сил. В публикации [11] рассматривается асимметричная гантель, концы которой связаны нерастяжимыми тросами с третьим телом. В работе найдены относительные равновесия гантели, указана их устойчивость. В статье [12] показаны

нелинейные колебания несимметричной гантели в окрестности стационарного режима, когда гантель расположена вдоль радиус-вектора ее центра масс, движущегося по эллиптической орбите с малым эксцентриситетом. Задача гравитационной стабилизации гантели с весомым стержнем анализируется в работе [13]; решение было найдено с помощью ограниченных управляющих воздействий.

Отдельный интерес представляют движения гантели в центральном гравитационном поле с изменяемой длиной. Такая пульсирующая гантель может моделировать гравилет — космический аппарат, преобразующий энергию внутренних сил в энергию орбитального движения за счет изменения своей геометрии и моментов инерции [14]. Гантель переменной длины, находящаяся в центральном поле сил, рассматривается также в статье [15]: найдены частные движения гантели определенного вида, существующие при определенном правиле изменения длины гантели.

Цель настоящей статьи — доказать существование инвариантного многообразия “гравитационный пропеллер” для симметричной гантели, когда основные тела имеют одинаковые массы и движутся по круговым орбитам; исследовать некоторые движения, принадлежащие этому инвариантному многообразию.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ**

Гантель (гравитационный диполь) длины $2l$, представляющая собой соединенные безмассовым стержнем две точечные массы m , находится в гравитационном поле, созданном двумя одинаковыми по массе M основными точечными телами, которые вращаются с угловой скоростью ω_0 вокруг их общего центра масс C по круговой орбите радиуса a . Влиянием гантели на движение основных тел можно пренебречь ($m \ll M$). Для составления уравнений движений рассмотрим следующие системы координат: 1) $C\xi\eta\zeta$ — инерциальная система координат; 2) $Sxyz$ — синодическая система координат, в которой ось Sx соединяет основных тела все время движения, ось Sz перпендикулярна плоскости движения основных тел; 3) $Ox'y'z'$ — связанная с гантелью правая декартова система координат, где O — центр гантели, ось Oz' направлена вдоль гантели; 4) $O\xi'\eta'\zeta'$ — поступательно движущаяся система координат, оси которой ориентированы параллельно осям инерциальной системы $C\xi\eta\zeta$ (рис. 1). Ориентацию осей $Ox'y'z'$ относительно $O\xi'\eta'\zeta'$ зададим с помощью углов Эйлера: ψ, φ, θ (ψ — угол прецессии, φ — угол собственного вращения, θ — угол нутации).

Уравнения движения центра масс гантели имеют вид

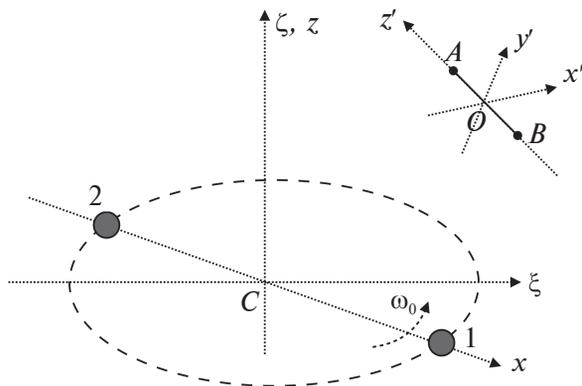


Рис. 1. Гантель в поле основных тел и системы координат.

$$2m\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad 2m\ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad 2m\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \tag{1}$$

где ξ, η, ζ — координаты центра масс гантели в инерциальной системе координат; $U = U(\xi, \eta, \zeta, \psi, \varphi, \theta, t)$ — силовая функция, выражение для которой будет приведено ниже. Очевидно, что силовая функция не зависит от угла собственного вращения φ . Уравнения, описывающие вращательные движения гантели, можно записать в виде уравнений Лагранжа второго рода

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $L = T + U$ — функция Лагранжа. Выражение для кинетической энергии системы следует из теоремы Кенига:

$$T = m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + ml^2(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2). \tag{3}$$

Так как T и U не зависят от φ , T не зависит от $\dot{\varphi}$, второе уравнение в системе (2) представляет собой тождество.

Принимая во внимание выражение (3) для кинетической энергии, перепишем (2) в виде

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = -2\dot{\psi}\dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{J \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \psi}, \\ \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 \cos \theta \cdot \sin \theta + \frac{1}{J} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta}, \end{cases} \tag{4}$$

где $J = J_{x'x'} = J_{y'y'} = 2ml^2$.

Представим силовую функцию задачи в виде суммы $U = U_1 + U_2$, где U_j — силовая функция притяжения гантели от основного тела с номером j ($j = 1, 2$). Чтобы получить выражение для U_1 ,

рассмотрим одну из точечных масс, например, точечную массу A с координатами $x' = y' = 0, z' = 1$ в связных осях. В поступательно движущихся осях $O\xi'\eta'\zeta'$ имеем следующие координаты этой точки: $\xi'_A = l\sin\psi \cdot \sin\theta, \eta'_A = -l\cos\psi \cdot \sin\theta, \zeta'_A = l\cos\theta$.

Координаты первого основного тела в инерциальной системе $C\xi\eta\zeta$ есть $(a\cos\omega_0 t, a\sin\omega_0 t, 0)$, где ω_0 — угловая скорость движения основных тел по основной орбите (мы считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ системы $C\xi\eta\zeta$ и $Sxuz$ совпадают), а координаты точечной массы A в той же инерциальной системе имеют вид $(\xi_A + \xi'_A, \eta_A + \eta'_A, \zeta_A + \zeta'_A)$. Поэтому расстояние от первого основного тела до точки A находится по формуле

$$r_{1A} = \sqrt{(\xi + l\sin\psi \cdot \sin\theta - a\cos\omega_0 t)^2 + (\eta - l\cos\psi \cdot \sin\theta - a\sin\omega_0 t)^2 + (\zeta + l\cos\theta)^2}.$$

Расстояние r_{2A} от второго основного тела до точечной массы A дается аналогичной формулой с учетом замены a на $(-a)$. Расстояние r_{1B} от первого основного тела до точечной массы B дается формулой

$$r_{1B} = \sqrt{(\xi - l\sin\psi \cdot \sin\theta - a\cos\omega_0 t)^2 + (\eta + l\cos\psi \cdot \sin\theta - a\sin\omega_0 t)^2 + (\zeta - l\cos\theta)^2},$$

поскольку в осях $O\xi'\eta'\zeta'$ координаты точки B имеют вид

$$\xi'_B = -l\sin\psi \cdot \sin\theta, \eta'_B = l\cos\psi \cdot \sin\theta, \zeta'_B = -l\cos\theta.$$

Таким образом, выражение для r_{2B} получается из выражения для r_{1B} заменой a на $(-a)$. Имеем $U_j = f \frac{Mm}{r_{jA}} + f \frac{Mm}{r_{jB}}, j = 1, 2$, где f — гравитационная постоянная.

ИНВАРИАНТНОЕ МНОГООБРАЗИЕ “ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПРОПЕЛЛЕР”

Рассмотрим множество решений уравнений движения (1), (4) следующего вида:

$$\mathcal{P} = \left\{ \xi = \eta = 0, \zeta = \zeta(t), \theta = \frac{\pi}{2}, \psi = \omega_0 t + \delta(t) \right\}. \quad (5)$$

Покажем, что система уравнений движения стержня действительно допускает указанные решения. Вычисления показывают, что

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{\mathcal{P}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{\mathcal{P}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\mathcal{P}} = 0.$$

Нетрудно видеть, что уравнения для ξ, η и θ на многообразии \mathcal{P} представляют собой тождества $0 = 0$. Итак, выражение (5) — инвариантное многообразие системы (1), (4). В работе [7], где вместо

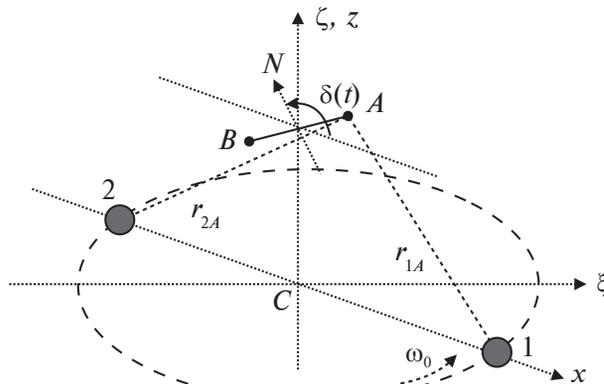


Рис. 2. Конфигурация гантели на “гравитационном пропеллере”.

гантели рассматривался однородный стержень, многообразие \mathcal{P} называется “гравитационным пропеллером”. Движение гантели, принадлежащее этому инвариантному многообразию, определяется тем, что ее центр масс перемещается вдоль нормальной к плоскости основных тел прямой, а сама гантель вращается вокруг нормальной прямой, образуя с ней постоянный угол $\pi / 2$ (рис. 2). При этом движение центра масс гантели и ее вращение вокруг оси Cz взаимно влияют друг на друга.

Получим уравнения движения на “гравитационном пропеллере”. Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} \Big|_{\mathcal{P}} = -2\zeta f M m \left(\frac{1}{(\zeta^2 + 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} + \frac{1}{(\zeta^2 - 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} \right).$$

Отсюда уравнение для ζ имеет вид

$$\ddot{\zeta} = -\mu \zeta \left(\frac{1}{(\zeta^2 + 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} + \frac{1}{(\zeta^2 - 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} \right), \quad (6)$$

где $\mu = fM$ — гравитационный параметр. Чтобы получить уравнение для угла δ , найдем производную U_ψ :

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} \Big|_{\mathcal{P}} = -2fMml \cos\delta \left(\frac{1}{(\zeta^2 + 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{1}{(\zeta^2 - 2a l \sin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} \right).$$

Тогда из первого уравнения системы (4) получаем уравнение для δ :

$$\ddot{\delta} = -\frac{\mu a}{l} \cos\delta \left(\frac{1}{(\zeta^2 + 2alsin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{1}{(\zeta^2 - 2alsin\delta + a^2 + l^2)^{3/2}} \right). \quad (7)$$

Уравнения (6), (7) допускают обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби) вида

$$T_2|_{\mathcal{P}} - T_0|_{\mathcal{P}} - U|_{\mathcal{P}} = \text{const}, \text{ где } T_2|_{\mathcal{P}} = m\zeta^2 + ml^2\dot{\delta}^2, T_0|_{\mathcal{P}} = -ml^2\omega_0^2,$$

$$U|_{\mathcal{P}} = 2\mu m \left(\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + a^2 + l^2 + 2alsin\delta}} + \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + a^2 + l^2 - 2alsin\delta}} \right).$$

Преобразуем уравнения движения (6), (7) к безразмерному виду, рассмотрев новое безразмерное время τ , зависящее от физического времени t следующим образом: $\tau = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$. Пусть $l = sa$, $\zeta = az$, тогда уравнения (6), (7) принимают вид

$$\begin{cases} z'' = -z \left(\frac{1}{\Delta_1^3} + \frac{1}{\Delta_2^3} \right) \\ \delta'' = -\frac{\cos\delta}{s} \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta_2^3} \right), \end{cases} \quad (8)$$

где $\Delta_1 = \sqrt{1 + s^2 + z^2 + 2ssin\delta}$, $\Delta_2 = \sqrt{1 + s^2 + z^2 - 2ssin\delta}$, двойным штрихом обозначена вторая производная по безразмерному времени.

Отметим некоторые свойства системы (8). Она зависит от единственного безразмерного параметра s , представляющего собой отношение длины гантели к диаметру орбиты основных тел. Если параметр $s > 0$, $s \neq 1$, то оба выражения под корнями Δ_1 и Δ_2 положительны при любых z и δ :

$$0 < (1 - s)^2 + z^2 \leq 1 + s^2 + z^2 - 2s \leq 1 + s^2 + z^2 \pm 2ssin\delta.$$

В этом случае правые части уравнений (8) представляют собой аналитические функции переменных z и δ , а инвариантное многообразие \mathcal{P} диффеоморфно пространству касательного расслоения конфигурационного цилиндра $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$, где $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R} / (2\pi\mathbb{Z})$. Уравнения (8) допускают дискретную группу симметрий, которая порождается преобразованиями $\delta \mapsto \delta + \pi$, $z \mapsto -z$ и $\delta \mapsto -\delta$. Система уравнений (8) имеет интеграл Якоби вида

$$(z')^2 + s^2(\delta')^2 + W = \text{const}, \quad (9)$$

где $W = -2\left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2}\right)$ — измененная потенциальная энергия.

Рассмотрим систему (8) в предположении, что s — малый параметр. Разложим правые части уравнений по степеням s , удержав члены до второго порядка включительно:

$$\begin{cases} z'' = -\frac{2z}{(z^2 + 1)^{3/2}} + \frac{3z(z^2 + 5\cos^2\delta - 4)}{(z^2 + 1)^{7/2}}s^2 + O(s^4), \\ \delta'' = \frac{3\sin 2\delta}{(z^2 + 1)^{5/2}} - \frac{5\sin\delta \cdot \cos\delta(3z^2 + 7\cos^2\delta - 4)}{(z^2 + 1)^{9/2}}s^2 + O(s^4). \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения (10) имеют вид регулярно возмущенной системы. В силу четности относительно s правых частей уравнений (8), разложения в правых частях уравнений (9) включают только четные степени s .

В предельном случае, когда $s = 0$, имеем систему уравнений вида

$$\begin{cases} z'' = -\frac{2z}{(z^2 + 1)^{3/2}}, \\ \delta'' = \frac{3\sin 2\delta}{(z^2 + 1)^{5/2}}. \end{cases} \quad (11)$$

Отметим, что модель предельного случая есть гантель бесконечно малой длины и конечной массы, но не материальная точка. Уравнение движения относительно z в системе (11) не зависит от угла δ и представляет собой уравнение движения материальной точки в круговой задаче Ситникова [1]. Уравнение по δ в системе (11) подобно уравнению колебаний математического маятника с переменным коэффициентом, который определяется конкретным решением уравнения по z . Таким образом, в предельной системе (11) ступательные движения гантели влияют на ее вращательные движения, но не наоборот, тогда как в полной системе (10) или (8) поступательные и вращательные движения взаимосвязаны.

ДВУМЕРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

“Гравитационный пропеллер” \mathcal{P} допускает следующие инвариантные подмногообразия размерности два:

1. Подмногообразия $A = \{\delta = \pm\pi / 2 \pmod{2\pi}\}$. Гантель параллельна оси Sx все время движения, ее центр масс совершает колебания вдоль оси Sz .

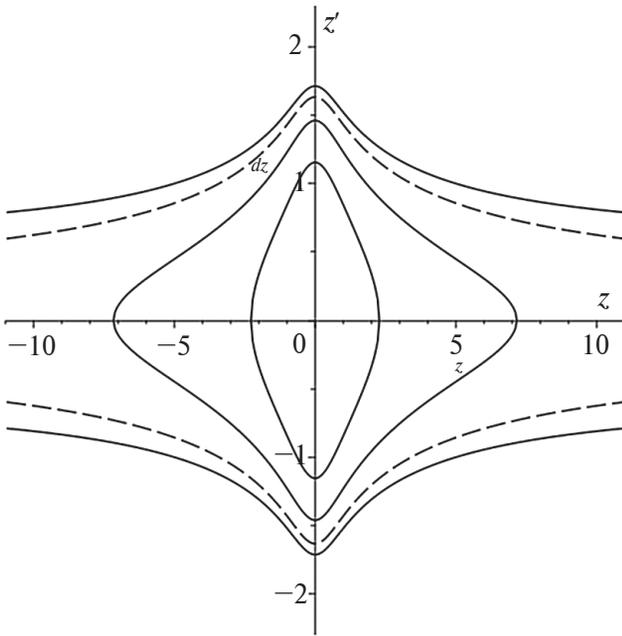


Рис. 3. Фазовый портрет на подмногообразиях \mathcal{A} ($s = 0.1$).

2. Подмногообразия $B = \{\delta = 0, \pi(\text{mod } 2\pi)\}$. Гантель перпендикулярна оси Sx все время движения, ее центр масс колеблется вдоль оси Sz .

3. Подмногообразии $C = \{z = 0\}$. Гантель совершает неравномерные вращения в плоскости движения основных тел.

Очевидно, подмногообразия A и B не пересекаются, пересечение A с C дает положения равновесия $z = 0, \delta = \pm\pi/2(\text{mod } 2\pi)$, а пересечение B с C — положения равновесия $z = 0, \delta = 0, \pi(\text{mod } 2\pi)$. В силу симметрий $\delta \mapsto \delta + \pi, \delta \mapsto -\delta$ достаточно исследовать компоненты связности $\mathcal{A} = \{\delta = \pi/2\}, B = \{\delta = 0\}$ и положения относительного равновесия $E_{AC} = \{z = 0, \delta = \pi/2\}, z = 0, E_{BC} = \{z = 0, \delta = 0\}$.

Инвариантное подмногообразие $\mathcal{A} = \{\delta = \pi/2\}$. Уравнение движения на инвариантном подмногообразии \mathcal{A} имеет вид

$$z'' = -z \left[\frac{1}{((1+s)^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{((1-s)^2 + z^2)^{3/2}} \right] \quad (12)$$

и допускает интеграл вида

$$\frac{1}{2}(z')^2 + V_A(z) = \text{const},$$

$$V_A(z) = -\frac{1}{\sqrt{(1+s)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1-s)^2 + z^2}}.$$

Фазовый портрет уравнения (12) построен на рис. 3 (для $s = 0.1$). Анализ показывает, что его топология не зависит от параметра $s > 0, s \neq 1$. Действительно, функция V_A имеет единственную

критическую точку, $V_A''(0) = |1-s|^{-3} + (1+s)^{-3} > 0$, поэтому особая точка $z = 0, z' = 0$ есть центр. Кроме того, функция $V_A \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$, следовательно, $z' = \pm\sqrt{-2V_A(z)}$ — сепаратрисы (отмечены на рис. 3 пунктиром), отделяющие внутреннюю область с периодическими (колебательными) режимами движения от областей с аperiodическими режимами.

Инвариантное подмногообразие $B = \{\delta = 0\}$. Уравнение движения на инвариантном подмногообразии B имеет вид

$$z'' = -\frac{2z}{(z^2 + 1 + s^2)^{3/2}}. \quad (13)$$

Уравнение (12) имеет интеграл вида

$$\frac{1}{2}(z')^2 + V_B(z) = \text{const}, V_B(z) = -\frac{2}{\sqrt{z^2 + 1 + s^2}}.$$

Фазовый портрет уравнения (13) имеет аналогичный фазовому портрету уравнения (12) вид. Кроме того, анализ показывает, что функция $V_B - V_A$ достигает глобального максимума в точке $z = 0$ (при любом $s > 0, s \neq 1$) и достаточно быстро стремится к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$. Итак, динамика на инвариантных подмногообразиях \mathcal{A} и B качественно совпадает с динамикой точки в классической круговой задаче Ситникова.

Инвариантное подмногообразие $C = \{z = 0\}$. Уравнение движения на подмногообразии C имеет вид

$$\delta'' = -\frac{\cos\delta}{s} \left[\frac{1}{(1+s^2 + 2s\sin\delta)^{3/2}} - \frac{1}{(1+s^2 - 2s\sin\delta)^{3/2}} \right]; \quad (14)$$

оно допускает интеграл

$$\frac{1}{2}(\delta')^2 + V_C(\delta) = \text{const}, V_C(\delta) = \frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2 + 2s\sin\delta}} + \frac{1}{\sqrt{1+s^2 - 2s\sin\delta}} \right).$$

Фазовый портрет уравнения (14) указан на рис. 4 при $s = 0.1$, он сохраняет топологию при любом $s > 0, s \neq 1$. В самом деле, критические точки функции V_C есть

$$\delta = \pm\pi/2, \delta = 0, \delta = \pi, (\text{mod } 2\pi);$$

$$V_C''(-\pi) = V_C''(0) =$$

$$= -\frac{6}{(s^2 + 1)^{5/2}} < 0, V_C''\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{|1-s|^3} - \frac{1}{(1+s)^3} \right) > 0,$$

поэтому особые точки $\delta = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, имеют тип “центр”, а особые точки $\delta = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — тип “седло”. При особом значении $s = 1$ правая часть уравнения (14) не определена в особых точках

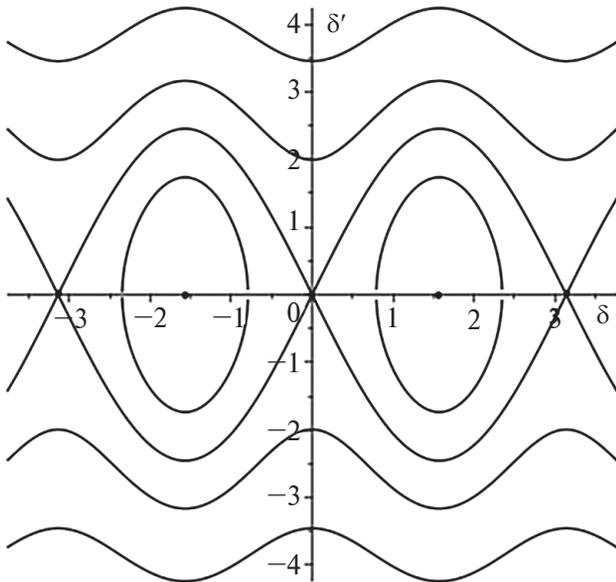


Рис. 4. Фазовый портрет на подмногообразии C .

$\delta = \pm \pi / 2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, но топология фазового портрета все равно сохраняется. Кроме того, уравнения (14) выдерживают симметрии $\delta \mapsto \delta + \pi$, $\delta \mapsto -\delta$, следующие из симметрий уравнений движения (8) на инвариантном многообразии \mathcal{P} .

Относительное равновесие $E_{BC} = \{z = 0, \delta = 0\}$ неустойчиво на инвариантном подмногообразии C . Оно неустойчиво на всем гравитационном пропеллере, что следует из уравнений малых колебаний в окрестности этого равновесия:

$$z'' + \frac{2z}{(s^2 + 1)^{3/2}} = 0, \quad \delta'' - \frac{6\delta}{(s^2 + 1)^{5/2}} = 0.$$

Имеем неустойчивость по δ .

Относительное равновесие $E_{AC} = \{z = 0, \delta = \pi / 2\}$ устойчиво и на подмногообразии A , и на подмногообразии C . Исследуем устойчивость в линейном приближении относительного равновесия E_{AC} на инвариантном многообразии \mathcal{P} . Пусть $\delta = \pi / 2 + \gamma$, тогда уравнения линейного приближения для системы (8) в окрестности положения равновесия $z = 0, \delta = \pi / 2$ имеют вид

$$\begin{cases} z'' = -\left(\frac{1}{|1-s|^3} + \frac{1}{(1+s)^3}\right)z, \\ \gamma'' = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{(1+s)^3} - \frac{1}{|1-s|^3}\right)\gamma. \end{cases} \quad (15)$$

Очевидно, что при всех $s > 0, s \neq 1$, тривиальное положение равновесия системы (15) устойчиво, следовательно, относительное равновесие E_{AC} устойчиво на “гравитационном пропеллере” в линейном приближении.

Исследуем устойчивость относительного равновесия E_{AC} по Ляпунову. Установим характер стационарной точки $z = 0, \delta = \pi / 2, z' = 0, \delta' = 0$ для измененной потенциальной энергии W системы. Матрица второго дифференциала (матрица Гесса) этой функции в точке $E_{AC} = \{z = 0, \delta = \pi / 2\}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{|1-s|^3} + \frac{2}{(1+s)^3} & 0 \\ 0 & 2s\left(\frac{1}{|1-s|^3} - \frac{1}{(1+s)^3}\right) \end{bmatrix} \quad (16)$$

При всех $s > 0, s \neq 1$, диагональные элементы матрицы (16) положительны, поэтому в точке относительного равновесия $z = 0, \delta = \pi / 2, z' = 0, \delta' = 0$ функция W имеет строгий локальный минимум. Поэтому положение относительного равновесия E_{AC} устойчиво для любых $s > 0, s \neq 1$.

Заметим, что при $s \rightarrow 0$, вырождаются квадратичная относительно скоростей часть $(z')^2 + s^2(\delta')^2$ интеграла Якоби (9) и матрица Гесса измененной потенциальной энергии W .

ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ $s = 0$

Рассмотрим предельный случай движения гантели, когда $s = 0$. Из формул (10) следует, что движения гантели бесконечно малой длины описываются уравнениями

$$\begin{cases} \frac{d^2z}{d\tau^2} = -2z + 3z^3 + O(z^5), \\ \frac{d^2\delta}{d\tau^2} = \frac{3\sin 2\delta}{(z^2 + 1)^{5/2}}, \\ \tau = \omega_0 t. \end{cases} \quad (17)$$

Первое уравнение, если удержать в нем члены порядка z^3 , несложно интегрируется в малой окрестности устойчивого равновесия $z = 0$ методом Линдштедта:

$$\begin{aligned} z(\bar{\tau}) &= \varepsilon \cos(\omega \bar{\tau}) + \\ &+ \frac{3}{64} \varepsilon^3 (\cos(\omega \bar{\tau}) - \cos(3\omega \bar{\tau})) + O(\varepsilon^5) \\ \bar{\tau} &= \sqrt{2} \omega_0 t, \quad \omega = 1 - \frac{9}{16} \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, являющийся характерным размером для малой окрестности точки $z = 0$.

Исследуем второе уравнение системы (17) в окрестности устойчивого равновесия $\delta = \pi / 2$ с учетом изменения z по формуле (18). Полагая $\gamma = \delta - \pi / 2$ и раскладывая правую часть

уравнения по δ в ряд по γ, ε до членов третьего порядка малости включительно, получим

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} = -3\gamma + \frac{15}{2}\gamma\varepsilon^2\cos^2\bar{\tau} + 2\gamma^3. \quad (19)$$

Отсюда следует, что период T малых колебаний гантели в исходном времени t вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{T_0}{\sqrt{3}}.$$

Здесь $T_0 = 2\pi / \omega_0$ — период обращения основных тел (звезд) по круговой орбите вокруг общего их центра масс. С точностью до коэффициента $2^{-1/2}$ он совпадает с известным выражением периода малых колебаний гантели в центральном силовом поле [16], когда T_0 — период обращения центра масс гантели вокруг притягивающего центра. Таким образом, гантель медленно колеблется в окрестности устойчивого равновесия $\delta = \pi / 2$ с периодом $T \approx 0.41T_0$.

Исследуем влияние членов третьего порядка малости в уравнении (19) на колебания по углу γ . Полагая малый угол γ величиной порядка $\mu \ll 1$, т.е. $\gamma = \mu\alpha, \alpha \sim 1$, и, вводя новое время $\lambda = \sqrt{3}\omega\bar{\tau}$, представим уравнение (19) в виде

$$\omega^2 \frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} + \alpha = \varepsilon^2 \frac{5}{2} \alpha \cos^2\left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}\omega}\right) + \mu^2 \frac{2}{3} \alpha^3. \quad (20)$$

Положим $\mu = \varepsilon$. Используя традиционную технику метода Линдштедта, когда искомая частота ω и решение $\alpha(\lambda)$ раскладываются в ряд по ε

$$\omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots, \quad \alpha = 1 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \dots$$

получим систему линейных рекуррентных уравнений относительно $\alpha_k(\lambda)$. Решаем задачу Коши $\alpha(0) = b, \frac{d\alpha}{d\lambda}(0) = 0$ до членов второго порядка малости по ε включительно, подавляя секулярные члены:

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda) &= \varepsilon b \cos\lambda - \\ &- \frac{1}{192} \varepsilon^3 b \left\{ 90\cos\lambda - 4b^2\cos\lambda + 4b^2\cos 3\lambda - 45(1 + \sqrt{3}) \times \right. \\ &\left. \times \cos\left(-\lambda + \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda\right) + 45(\sqrt{3} - 1)\cos\left(\lambda + \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda\right) \right\}, \quad (21) \\ \lambda &= \sqrt{6} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(b^2 + \frac{5}{2} \right) \right) \omega_0 t. \end{aligned}$$

Таким образом, колебания третьего порядка малости в окрестности невозмущенного значения $\delta = \pi / 2$ являются квазипериодическими по λ с тремя частотами $\Omega_1 = 1, \Omega_2 = -1 + 2 / \sqrt{3}, \Omega_3 = 1 + 2 / \sqrt{3}$, при этом $\Omega_2 = 0.154700$ — малая величина. Итак, колебания порядка ε^3 содержат один долгопериодический член с частотой Ω_2 и четыре короткопериодических с частотами $\Omega_1,$

Ω_3 . Движение центра масс гантели вдоль оси z является существенным, так как оно вызывает колебания с частотами Ω_2, Ω_3 и, как следствие, меняет характер движения в третьем приближении по ε : периодические колебания становятся квазипериодическими. Малые движения центра масс гантели вдоль оси z задают форму колебаний по γ . Действительно, сложение всех гармоник порядка ε^3 ведет к эффекту наложения быстрых колебаний на медленное движение, описываемое гармоникой

$$\frac{15}{64} \varepsilon^3 b (1 + \sqrt{3}) \cos\left(\lambda - \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda\right). \quad (22)$$

В результате имеем сложное движение в виде узкой полосы, заполненной быстрыми движениями, и напоминающей по форме кривую (22) с несколько увеличенным размахом колебаний и практически неизменной частотой Ω_2 .

Эти рассуждения показывают, что формулу (21) можно упростить, отбрасывая члены, мало влияющие на колебания первого порядка малости по ε :

$$\gamma(\lambda) = \varepsilon b \cos\lambda + \frac{15}{64} \varepsilon^3 b (1 + \sqrt{3}) \cos\left(\lambda - \frac{2}{\sqrt{3}}\lambda\right).$$

Вторая гармоника этого выражения является низкочастотной, поэтому она задает медленную амплитудную модуляцию быстрого гармонического колебания $\varepsilon b \cos\lambda$: появляется верхняя огибающая в виде гармоники с размахом колебаний $15\varepsilon^3 b (1 + \sqrt{3}) / 32$ и частотой изменения Ω_2 и, синхронная с ней, нижняя огибающая с тем же размахом колебаний. Период амплитудной модуляции равен (в старом времени t)

$$\frac{T_0}{\sqrt{6} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(b^2 + \frac{5}{2} \right) \right) \Omega_2} \approx \frac{T_0}{\sqrt{6}\Omega_2} = 2.639T_0,$$

где T_0 — период вращения основных тел по круговой орбите вокруг общего их центра масс.

Отметим, что эффект амплитудной модуляции имеет природу параметрического резонанса. Действительно, уравнение (20) есть обобщенное уравнение Матвея в виде параметрически возбуждаемого осциллятора Дуффинга. При этом частота $2/(\sqrt{3}\omega)$ гармонического параметрического возбуждения близка к частоте $1/\omega$ собственных колебаний. Модуляция вызвана неавтономным членом правой части уравнения (20), порождающим квазипериодические колебания конечной амплитуды с частотами $\Omega_2 \approx 0, \Omega_3$. Эти колебания исчезают при $z = 0$ (плоский случай).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы движения симметричной пассивно гравитирующей гантели, находящейся в поле притяжения основных тел. Основные тела

представляют собой материальные точки, движущиеся по круговой орбите вокруг общего центра масс. Найден новый класс движений гантели, когда ее центр масс движется вдоль нормали к плоскости орбиты основных тел, а сама гантель вращается вокруг этой нормали, образуя с ней постоянный прямой угол. В фазовом пространстве системы этот класс движений, получивший название “гравитационный пропеллер”, представляет собой четырехмерное инвариантное многообразие.

Показано, что отмеченное многообразие включает в себя несколько двумерных инвариантных подмногообразий, пересечения которых дают положения относительного равновесия гантели. Исследована динамика на двумерных инвариантных подмногообразиях, отвечающих случаю совпадения угловых скоростей вращения гантели и основных тел, либо случаю плоских вращений гантели вокруг общего центра масс системы. проанализирована устойчивость по Ляпунову всех относительных равновесий гантели, принадлежащих “гравитационному пропеллеру”. Показано, что условия устойчивости равновесий не зависят от длины гантели.

Описаны колебания гантели бесконечно малой длины в окрестности устойчивого равновесия $z = 0$, $\delta = \pi / 2$. В первом приближении по малому параметру колебания гантели имеют гармонический характер по z и δ , причем периоды этих колебаний сравнимы по величине с периодом обращения основных тел. В третьем приближении колебания сохраняют периодический характер по z , но становятся квазипериодическими по δ , так как появляется пара дополнительных частот. Одна из частот мала, что приводит к появлению низкочастотной гармоники, модулирующей амплитуду высокочастотных колебаний. Период этой модуляции равен $2.639T_0$, где T_0 — период вращения основных тел по круговой орбите вокруг общего их центра масс.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено в Московском авиационном институте при финансовой поддержке РФФ, проект № 22-21-00560.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ситников К. А.* Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306.
2. *Corbera M., Llibre J.* Periodic Orbits of the Sitnikov Problem via a Poincaré Map // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2000. V. 77. Iss. 4. P. 273–303.

3. *Alfaro J. M., Chiralt C.* Invariant Rotational Curves in Sitnikov’s Problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1993. V. 55. P. 351–367.
4. *Sidorenko V. V.* On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability in the family of vertical motions // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. V. 109. P. 367–384.
5. *Kalas V. O., Krasil’nikov P. S.* On the Investigation of Stability of Equilibrium in Sitnikov Problem in Nonlinear Formulation // *Russian J. Nonlinear Dynamics*. 2015. V. 11. Iss. 1. P. 117–126. DOI: 10.20537/nd1501006.
6. *Маркеев А. П.* О субгармонических колебаниях в близкой к круговой эллиптической задаче Ситникова // *ПММ*. 2020. Т. 84. № 4. С. 442–454. DOI: 10.31857/S0032823520040062.
7. *Красильников П. С.* О многообразии “гравитационный пропеллер” в обобщенной круговой задаче Ситникова // *ПММ*. 2021. Т. 85. № 5. С. 576–586. DOI: 10.31857/S0032823521040081.
8. *Krasil’nikov P. S., Ismagilov A. R.* On the Dumb-Bell Equilibria in the Generalized Sitnikov Problem // *Russian J. Nonlinear Dynamics*. 2022. V. 18. Iss. 4. P. 577–588. DOI: 10.20537/nd221203.
9. *Окунев М. В.* О возможных движениях длинной гантели в центральном поле сил // *Косм. исслед.* 1969. Т. 7. № 5. С. 637–642.
10. *Белецкий В. В., Пономарева О. Н.* Параметрический анализ устойчивости относительных равновесий в гравитационном поле // *Косм. исслед.* 1990. № 5. С. 664–675.
11. *Муницына М. А.* Относительные равновесия системы “гантель — груз” с односторонними связями на круговой кеплеровой орбите // *Автомат. и телемех.* 2007. № 9. С. 9–15.
12. *Markeev A. P.* On the Dynamics of a Gravitational Dipole // *Russian J. Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 17. Iss. 3 P. 247–261. <https://doi.org/10.20537/nd210301>.
13. *Безгласный С. П., Мухаметзянова А. А.* Гравитационная стабилизация и переориентация спутника-гантели на круговой орбите по принципу качелей // *Автоматиз. процессов управл.* 2016. № 1(43). С. 91–96.
14. *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1977. 432 с.
15. *Буров А. А., Косенко И. И.* О плоских колебаниях гантели переменной длины в центральном поле ньютоновского притяжения. Точная постановка // *Сб. Современные проблемы математики и механики*. Серия Математика, механика. 2013. Т. 7. № 2. С. 11–21.
16. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.