

УДК 531.36

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТЫ ЗЕМЛЯ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНУТРЕННИХ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

© 2023 г. Н. И. Амелькин*

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

**namelkin@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.02.2023 г.

После доработки 28.03.2023 г.

Принята к публикации 28.03.2023 г.

В рамках модели М.А. Лаврентьева изучается влияние внутренней диссипации на вращательное движение Земли в гравитационном поле Солнца и Луны. Получены осредненные уравнения второго приближения, описывающие эволюцию оси вращения Земли и ее угловой скорости. Исследуется зависимость скорости эволюции от значений параметров модели. Построены фазовые траектории эволюционного процесса для различных значений параметров. Показано, что наблюдаемый дрейф магнитных полюсов Земли можно объяснить в рамках механической модели угловым ускорением Земли.

DOI: 10.31857/S0023420623600162, EDN: CDEVXC

ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1], для спутника, моделируемого одним твердым телом и движущегося в центральном гравитационном поле, единственным эволюционным эффектом выступает прецессия вокруг нормали к плоскости орбиты.

Учет внутренних диссипативных сил позволяет выявить дополнительные эволюционные эффекты, такие как изменение (уменьшение) со временем угловой скорости и вековое смещение оси вращения по углу нутации.

Задача о влиянии внутренних диссипативных сил на вращательное движение спутников в гравитационном поле рассматривалась в разных постановках многими авторами. В большинстве работ на эту тему для моделирования внутренней диссипации использовалась одна из трех моделей спутника:

1) твердое тело с полостью, заполненной вязкой жидкостью [2–4];

2) твердое тело с шаровым демпфером (модель М.А. Лаврентьева) [5–10];

3) модель приливного трения, включающая вязкоупругое тело [1, 11–14].

Все перечисленные модели дают, как правило, согласующиеся друг с другом качественные выводы об основных эволюционных эффектах во вращательном движении спутника. Но модель Лаврентьева отличается наибольшей простотой, что позволяет детально исследовать количественные характеристики эволюции вращательного движения спутника в широком диапазоне значений параметров и начальных условий.

В настоящей работе в рамках модели Лаврентьева исследуется эволюция вращательного движения планеты Земля в гравитационном поле Солнца и Луны под влиянием внутренних диссипативных сил.

Планета Земля, как известно, имеет сложную структуру [15]. Основными ее компонентами считаются: покрытая океанами твердая оболочка (кора), которая занимает около 1% объема Земли, слой вязкой мантии (около 84% объема), внешнее жидкое ядро (около 14% объема), внутреннее твердое ядро (около 1% объема).

В используемой ниже модели Лаврентьева приливное влияние океанов на эволюцию вращательного движения Земли не учитывается. Основная цель данной работы — изучить влияние диссипативных сил во внутренней части планеты (между оболочкой, мантией и ядром) на вращательное движение оболочки.

1. УРАВНЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПЛАНЕТЫ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ДВУХ ПРЯТАГИВАЮЩИХ ЦЕНТРОВ

В модели Лаврентьева планета состоит из двух твердых тел: твердой оболочки и однородного шарообразного ядра, играющего роль демпфера [5]. В рамках этой модели планета представляется гириостатом, т.е. ее тензор инерции в базисе, связанном с оболочкой, остается неизменным. Пусть O — центр масс планеты, а $Oe_1e_2e_3$ — ортонормированный базис с началом в точке O и ося-

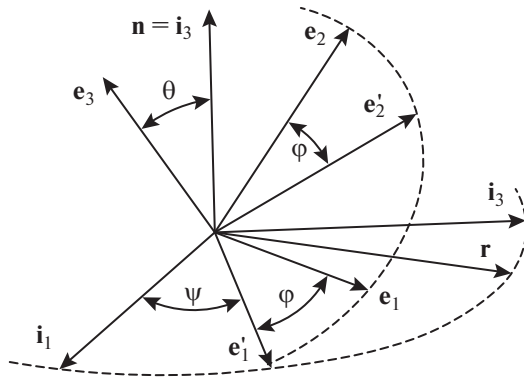


Рис. 1

ми, связанными с оболочкой. Обозначим через $\mathbf{J}$ тензор инерции всей системы (оболочки вместе с демпфером) в этом базисе, а через I – момент инерции демпфера относительно его центральной оси.

Ниже будем полагать, что момент диссипативных сил линейно зависит от относительной угловой скорости демпфера и определяется формулой

$$\mathbf{M}_d = -\sigma I(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}), \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости оболочки; $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости демпфера, а множитель σ будем называть коэффициентом вязкого трения между оболочкой и демпфером.

Кроме того, будем считать, что плоскость орбиты Луны совпадает с плоскостью эклиптики, а орбиты движения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли являются круговыми.

Базис Кенига $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, относительно которого изучается вращательное движение планеты, выберем так, чтобы ось $\mathbf{i}_3$ совпадала с нормалью $\mathbf{n}$ к плоскости эклиптики, а ось $\mathbf{i}_1$ – с некоторым фиксированным направлением в плоскости эклиптики (рис. 1).

Действующий на планету гравитационный момент определяется формулой [1]

$$\mathbf{M}_g = \frac{3GM_1}{R_1^5} \mathbf{R}_1 \times \mathbf{J}\mathbf{R}_1 + \frac{3GM_2}{R_2^5} \mathbf{R}_2 \times \mathbf{J}\mathbf{R}_2. \quad (1.2)$$

Здесь G – гравитационная постоянная; M_1 – масса Солнца; M_2 – масса Луны; $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ – векторы, соединяющие центры Солнца и Луны с центром масс Земли.

Обозначим через M массу Земли, через ω_1 – угловую скорость орбитального базиса в задаче “Солнце–Земля”, а через ω_2 – угловую скорость орбитального базиса в задаче “Луна–Земля”. Эти угловые скорости выражаются формулами

$$\omega_k^2 = \frac{G(M + M_k)}{R_k^3} \Rightarrow \omega_1^2 \approx \frac{GM}{R_1^3}, \quad \omega_2^2 \approx \frac{82GM_2}{R_2^3}. \quad (1.3)$$

Введем безразмерные переменные согласно формулам

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{R}_1}{R_1}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{R}_2}{R_2}, \quad \mathbf{u} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega_1}, \quad \mathbf{w} = \frac{\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}}{\omega_1}. \quad (1.4)$$

Здесь $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ – единичные векторы; $\mathbf{u}$ – приведенная угловая скорость оболочки; $\mathbf{w}$ – приведенная относительная угловая скорость демпфера.

Обозначим через μ и $\mathbf{m}_g$ безразмерный коэффициент вязкого трения и приведенный гравитационный момент

$$\mu = \frac{\sigma}{\omega_1}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{m}_g = \frac{\mathbf{M}_g}{\omega_1^2} = 3(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{J}\mathbf{r}_1 + \alpha \mathbf{r}_2 \times \mathbf{J}\mathbf{r}_2), \quad \alpha = \frac{\beta^2}{82}. \quad (1.6)$$

Здесь $\beta = \omega_2/\omega_1 \approx 13.37$, $\alpha \approx 2.17$.

В качестве независимой переменной, играющей роль времени, выберем истинную аномалию в задаче “Солнце–Земля” $\tau = \omega_1 t$. Тогда динамические уравнения вращательного движения планеты можно записать в следующем виде [8]:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{J} - I\mathbf{E})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \times \mathbf{J}\mathbf{u} &= \mu/\mathbf{w} + \mathbf{m}_g, \\ (\mathbf{J} - I\mathbf{E})(\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}) &= -\mu\mathbf{J}\mathbf{w} + \mathbf{u} \times \mathbf{J}\mathbf{u} - \mathbf{m}_g. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Здесь $\mathbf{E}$ – единичная матрица, точкой обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \omega_1 t$. В записанных уравнениях все векторы задаются своими компонентами в связанном с оболочкой базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Отметим, что уравнения (1.7) отличаются от полученных в работе [8] уравнений только выражением для приведенного гравитационного момента $\mathbf{m}_g$ (1.6). В публикации [8] рассматривалось движение планеты в поле одного притягивающего центра, и момент $\mathbf{m}_g$ выражался только одним (первым) слагаемым из выражения (1.6).

Уравнения (1.7) дополняются до замкнутой системы кинематическими уравнениями вращательного движения оболочки планеты. Для целей численного интегрирования этих уравнений целесообразно использовать уравнения Пуассона в кватернионах

$$2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{u}. \quad (1.8)$$

Здесь $\mathbf{\Lambda}$ – кватернион единичной нормы, задающий положение связанного с оболочкой базиса главных осей инерции планеты $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ относительно базиса Кенига $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$. Для аналитического исследования вращательного движения планеты будем использовать кинематические уравнения в углах Эйлера ψ, θ, ϕ (рис. 1).

Рассматривая далее случай динамически симметричной планеты, сплюснутой вдоль оси симметрии ($A = B < C$), введем следующие параметры, характеризующие геометрию масс планеты:

$$\varepsilon = \frac{C - A}{A - I}, \quad \gamma = \frac{I}{A - I}. \quad (1.9)$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ задаются в базисе Кенига формулами

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}_1 \cos \tau + \mathbf{i}_2 \sin \tau, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{i}_1 \cos \beta \tau + \mathbf{i}_2 \sin \beta \tau,$$

и, проецируя уравнения (1.7) на оси базиса Резаля $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_3$ — ось симметрии планеты), задаваемого углами ψ и θ (рис. 1), получим следующую замкнутую систему из восьми уравнений [8]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_1 &= -(1 + \varepsilon)u_3u_2 + u_2^2 \operatorname{ctg} \theta + \mu \gamma w_1 + \\ &\quad + F_1 [\cos 2(\tau - \psi) - 1] + \\ &\quad + \alpha F_1 [\cos 2(\beta \tau - \psi) - 1], \\ \dot{u}_2 &= (1 + \varepsilon)u_3u_1 - u_2u_1 \operatorname{ctg} \theta + \mu \gamma w_2 + \\ &\quad + F_2 \sin 2(\tau - \psi) + \alpha F_2 \sin 2(\beta \tau - \psi), \\ \dot{w}_1 &= \varepsilon u_2u_3 + u_2w_2 \operatorname{ctg} \theta - u_2w_3 - \mu(1 + \gamma)w_1 - \\ &\quad - F_1 [\cos 2(\tau - \psi) - 1] - \alpha F_1 [\cos 2(\beta \tau - \psi) - 1], \\ \dot{w}_2 &= -\varepsilon u_1u_3 + u_1w_3 - u_2w_1 \operatorname{ctg} \theta - \mu(1 + \gamma)w_2 - \\ &\quad - F_2 \sin 2(\tau - \psi) - \alpha F_2 \sin 2(\beta \tau - \psi), \\ \dot{w}_3 &= u_2w_1 - u_1w_2 - \mu(1 + \gamma + \varepsilon)w_3/(1 + \varepsilon), \\ \dot{u}_3 &= \mu \gamma w_3/(1 + \varepsilon), \quad \dot{\theta} = u_1, \quad \dot{\psi} \sin \theta = u_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Здесь функции F_1 и F_2 определяются формулами

$$F_2 = \frac{3\varepsilon \sin \theta}{2}, \quad F_1 = \frac{3\varepsilon \sin 2\theta}{4} = F_2 \cos \theta. \quad (1.11)$$

Уравнения (1.10) отличаются от уравнений работы [8] только теми дополнительными слагаемыми в правых частях, которые содержат множитель α .

2. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

В задаче об эволюции вращательного движения планеты основной интерес представляют поведение оси вращения планеты и величина ее угловой скорости. Для сплюснутой планеты в установившемся режиме медленной эволюции движения близко к вращению вокруг оси симметрии. Поэтому анализ эволюции сводится к изучению поведения фазовых переменных u_3 , θ , ψ .

Эволюционные уравнения для динамически симметричной планеты с шаровым демпфером, близкой к сферически симметричной ($0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр), движущейся в гравитационном поле одного притягивающего центра, были получены ранее в работе [8]. При выводе этих уравнений использовался метод осреднения [16, 17], но без приведения системы к стандартной форме.

Изложенный в работе [8] метод применим и к задаче о движении планеты в поле двух притягивающих центров. В рассматриваемой задаче для

получения осредненных уравнений используется замена переменных

$$u_k = U_k + S_k, \quad w_k = W_k + S_{k+2}, \quad k = 1, 2, \quad (2.1)$$

где U_k, W_k — эволюционные компоненты; S_j — осцилляционные компоненты, которые определяются как решения системы уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial \tau} &= -(1 + \varepsilon)US_2 + \mu \gamma S_3 + F_1 \cos 2(\tau - \psi) + \\ &\quad + \alpha F_1 \cos 2(\beta \tau - \psi), \\ \frac{\partial S_2}{\partial \tau} &= (1 + \varepsilon)US_1 + \mu \gamma S_4 + F_2 \sin 2(\tau - \psi) + \\ &\quad + \alpha F_2 \sin 2(\beta \tau - \psi), \\ \frac{\partial S_3}{\partial \tau} &= \varepsilon US_2 - mS_3 - F_1 \cos 2(\tau - \psi) - \\ &\quad - \alpha F_1 \cos 2(\beta \tau - \psi), \\ \frac{\partial S_4}{\partial \tau} &= -\varepsilon US_1 - mS_4 - F_2 \sin 2(\tau - \psi) - \\ &\quad - \alpha F_2 \sin 2(\beta \tau - \psi). \end{aligned} \right. \quad (2.2)$$

Здесь и далее используются обозначения

$$m = \mu(1 + \gamma), \quad U = U_3. \quad (2.3)$$

Решения системы (2.2) записываются гармоническими функциями вида

$$\begin{aligned} S_k &= p_{1k} \sin 2(\tau - \psi) + q_{1k} \cos 2(\tau - \psi) + \\ &\quad + p_{2k} \sin 2(\beta \tau - \psi) + q_{2k} \cos 2(\beta \tau - \psi), \end{aligned}$$

где коэффициенты $p_{1k}, q_{1k}, p_{2k}, q_{2k}$ — ограниченные функции малого параметра ε и зависят только от переменных U и θ .

Замена переменных (2.1) приводит к тому, что в уравнениях для эволюционных компонент U_k, W_k зависимость от времени τ “уходит” в члены второго порядка и выше по ε . После подстановки этой замены в уравнения (1.10) получим, после осреднения по τ , следующую систему осредненных уравнений второго приближения:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{U}_1 &= -(1 + \varepsilon)UU_2 + U_2^2 \operatorname{ctg} \theta + \mu \gamma W_1 - \\ &\quad - (1 + \alpha)F_1 + O(\varepsilon^2), \\ \dot{W}_1 &= \varepsilon UU_2 + U_2W_2 \operatorname{ctg} \theta - U_2W_3 - mW_1 + \\ &\quad + (1 + \alpha)F_1 + O(\varepsilon^2), \\ \dot{U}_2 &= (1 + \varepsilon)UU_1 - U_2U_1 \operatorname{ctg} \theta + \mu \gamma W_2 + O(\varepsilon^3), \\ \dot{W}_2 &= -\varepsilon UU_1 + U_1W_3 - mW_2 - U_2W_1 \operatorname{ctg} \theta - \\ &\quad - \frac{\mu F_2^2}{\sin \theta} (G_1 + \alpha^2 G_2) + O(\varepsilon^3), \\ \dot{W}_3 &= -\mu(1 + \gamma + \varepsilon)W_3/(1 + \varepsilon) + U_2W_1 - U_1W_2 - \\ &\quad - \mu F_2^2 (H_1 + \alpha^2 H_2) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

$$\dot{U} = \mu \gamma W_3/(1 + \varepsilon), \quad \dot{\theta} = U_1, \quad \dot{\psi} \sin \theta = U_2. \quad (2.5)$$

В уравнениях (2.4) использованы обозначения

$$G_1 = \frac{U(3 - \cos^2 \theta) \cos \theta + 4}{2(4 + m^2)(U^2 - 4)}, \quad (2.6)$$

$$G_2 = \frac{U(3 - \cos^2 \theta) \cos \theta + 4\beta}{2(4\beta^2 + m^2)(U^2 - 4\beta^2)}.$$

$$H_1 = \frac{U(1 + \cos^2 \theta) + 4 \cos \theta}{2(4 + m^2)(U^2 - 4)}, \quad (2.7)$$

$$H_2 = \frac{U(1 + \cos^2 \theta) + 4\beta \cos \theta}{2(4\beta^2 + m^2)(U^2 - 4\beta^2)}.$$

Уравнения (2.4), (2.5) отличаются от осредненных уравнений работы [8] только теми дополнительными слагаемыми в правых частях, которые содержат множитель α . При выводе этих уравнений предполагалось, что значения параметра m ограничены неравенством $m = \mu(1 + \gamma) \geq \sqrt{\epsilon}$.

Система (2.4) имеет стационарные решения, асимптотически устойчивые по переменным U_1 , U_2 , W_1 , W_2 , W_3 при фиксированных U и θ . Эти решения определяются из условий равенства нулю правых частей уравнений (2.4) и выражаются следующими формулами:

$$W_1 = \frac{(1 + \alpha)F_2 \cos \theta}{\mu(1 + \gamma)} + O(\epsilon^2), \quad (2.8)$$

$$U_2 = -\frac{(1 + \alpha)F_2 \cos \theta}{U(1 + \gamma)} + O(\epsilon^2),$$

$$U_1 = \frac{\mu\gamma F_2^2}{(1 + \gamma)U \sin \theta} \times \left(G_1 + \alpha^2 G_2 - (1 + \alpha)^2 \frac{\cos^3 \theta}{m^2 U} \right) + O(\epsilon^3), \quad (2.9)$$

$$W_2 = -\frac{F_2^2}{(1 + \gamma) \sin \theta} \times \left(G_1 + \alpha^2 G_2 - (1 + \alpha)^2 \frac{\cos^3 \theta}{m^2 U} \right) + O(\epsilon^3), \quad (2.10)$$

$$W_3 = -\frac{F_2^2}{(1 + \gamma)} \times \left(H_1 + \alpha^2 H_2 + (1 + \alpha)^2 \frac{\cos^2 \theta}{m^2 U} \right) + O(\epsilon^3). \quad (2.11)$$

Далее для получения уравнений, описывающих эволюцию переменных ψ , θ и U , использует теорема А.Н. Тихонова [18] об условиях редукции в системе дифференциальных уравнений с малым параметром. Из уравнений (2.4), (2.5) и формул (2.8)–(2.11) следует, что в установившемся режиме медленной эволюции переменные U_1 ,

U_2 , W_1 , W_2 , W_3 являются “быстрыми” по сравнению с переменными ψ , θ и U (в силу второй из формул (2.8) правая часть уравнения $\dot{\psi} \sin \theta = U_2$ будет ограниченной функцией ϵ , а в силу формул (2.9) и (2.11) правые части первых двух уравнений (2.5) будут ограниченными функциями ϵ^2). Поэтому по указанной теореме Тихонова систему дифференциальных уравнений (2.4) можно заменить системой алгебраических уравнений (2.8)–(2.11) и решать их совместно с дифференциальными уравнениями (2.5).

Подставляя в уравнения (2.5) решения (2.8), (2.9) и (2.11), получим следующие уравнения, описывающие эволюцию переменных ψ , θ и U :

$$\dot{\psi} = -\frac{(1 + \alpha)F_2 \cos \theta}{U(1 + \gamma) \sin \theta} + O(\epsilon^2), \quad (2.12)$$

$$\dot{U} = -\frac{\mu\gamma F_2^2}{(1 + \gamma)} \times \left(H_1 + \alpha^2 H_2 + (1 + \alpha)^2 \frac{\cos^2 \theta}{m^2 U} \right) + O(\epsilon^3), \quad (2.13)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\mu\gamma F_2^2}{(1 + \gamma)U \sin \theta} \times \left(G_1 + \alpha^2 G_2 - (1 + \alpha)^2 \frac{\cos^3 \theta}{m^2 U} \right) + O(\epsilon^3). \quad (2.14)$$

Следует отметить, что если сразу усреднить уравнения (1.10) по времени τ , не используя замену (2.1), то из этих осредненных уравнений первого приближения нельзя было бы получить адекватные выражения для решений (2.9)–(2.11) и правых частей уравнений (2.13), (2.14) с точностью до $O(\epsilon^3)$. Эти осредненные уравнения первого приближения описывали бы движения исходной системы (1.10) только с точностью до $O(\epsilon^2)$.

Уравнения (2.13), (2.14) образуют замкнутую систему эволюционных уравнений относительно переменных U и θ . Из этих уравнений можно исключить время и задачу определения фазовых траекторий системы и свести к интегрированию одного единственного уравнения

$$\frac{d\theta}{dU} = -\frac{1}{U \sin \theta} \times \left(\frac{m^2 U (G_1 + \alpha^2 G_2) - (1 + \alpha)^2 \cos^3 \theta}{m^2 U (H_1 + \alpha^2 H_2) + (1 + \alpha)^2 \cos^2 \theta} \right). \quad (2.15)$$

Эволюционные уравнения (2.13), (2.14) и (2.15) отличаются от эволюционных уравнений работы [8] только теми дополнительными слагаемыми в правых частях, которые содержат множитель α .

Из уравнений (2.13), (2.14) и формул (1.11) следует, что скорость эволюции по переменным U и θ пропорциональна ε^2 и обратно пропорциональна U^2 . Поскольку скорость численного интегрирования дифференциальных уравнений пропорциональна скорости эволюции, то при $\varepsilon \ll 1 \ll U$ для построения с приемлемой точностью фазовых траекторий на больших интервалах времени может потребоваться неприемлемо большое время работы программы численного интегрирования точных уравнений (1.10). Что же касается уравнения (2.15), то при его численном интегрировании указанных выше затруднений не возникает, а необходимое время работы программы для вычисления с приемлемой точностью фазовых траекторий оказывается на много порядков меньше, чем при интегрировании уравнений (1.10).

В работе [8] адекватность эволюционных уравнений подтверждена результатами численного интегрирования точных уравнений. Было установлено, что в задаче о движении планеты в поле одного притягивающего центра для значений параметров $0.02 \leq \varepsilon \leq 0.2$, $\mu \leq 10$ и при начальных условиях $U(0) \leq 10$ фазовые траектории точных и эволюционных уравнений практически неразличимы на протяжении всего процесса эволюции планеты.

В рассматриваемой задаче для планеты Земля, где $\varepsilon \approx 0.01$, $U(0) \approx 365$, для получения одной полной траектории эволюции по точным уравнениям (1.10) потребуется неприемлемо большое время работы программы численного интегрирования (в тысячи раз больше, чем для начальных условий $U(0) \leq 10$). Поэтому единственным эффективным средством исследования эволюции вращательного движения Земли на больших интервалах времени (в миллионы и миллиарды лет) представляются уравнения (2.13), (2.14) и (2.15).

Ниже адекватность эволюционных уравнений (2.13), (2.14) будет подтверждена результатами численного интегрирования точных уравнений (1.10) на сравнительно коротких интервалах времени (в несколько тысяч лет).

Далее для записи уравнений (2.12)–(2.14) и последующих уравнений вместо параметров (1.9) будут использованы следующие параметры:

$$\delta = \frac{C - A}{A}, \quad \lambda = \frac{I}{A}. \quad (2.16)$$

Здесь $\delta \approx 0.0033$ — коэффициент динамического сжатия Земли.

Связь между параметрами (1.9) и (2.16) выражается формулами

$$\varepsilon = \frac{\delta}{1 - \lambda}, \quad \gamma = \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad m = \mu(1 + \gamma) = \frac{\mu}{1 - \lambda}. \quad (2.17)$$

При этом оговоренные при выводе осредненных уравнений ограничения $\varepsilon \ll 1$, $m \geq \sqrt{\varepsilon}$ будут выполняться при $\lambda \leq 1 - \sqrt{\delta}$, $\mu \geq \sqrt{\delta}$.

Ниже для анализа скорости эволюции Земли по переменным ψ , θ и U будем исходить из следующих значений параметров и начальных условий:

$$\delta = 0.00328, \quad \beta = 13.37, \quad \alpha = 2.17, \quad (2.18)$$

$$\theta_0 = 23.5^\circ, \quad U_0 = 365.3.$$

При этом, поскольку все указанные переменные являются “медленными”, то в первом приближении для вычисления их изменений на интервалах времени до 10^4 лет значения θ и U в правых частях уравнений (2.12)–(2.14) можно считать неизменными, совпадающими с начальными значениями θ_0 и U_0 .

Для угловой скорости прецессии на основании уравнения (2.12) и формул (1.11), (2.17) получим с точностью до $O(\delta^2)$ следующее выражение:

$$\dot{\psi} = -(1 + \alpha) \frac{3\delta \cos \theta}{2U} \approx -3.9 \cdot 10^{-5}. \quad (2.19)$$

Поскольку $\dot{\psi}$ — производная по времени $\tau = \omega_1 t$, где ω_1 — угловая скорость орбитального базиса в задаче “Земля—Солнце”, то, согласно формуле (2.19), изменение угла прецессии за один земной год составляет $\Delta\psi = -2\pi 3.9 \cdot 10^{-5}$ рад, т.е. около 1.4° за столетие. Обратная к выражению (2.19) величина есть период прецессии земной оси, выраженный в годах, и составляет около 25600 лет.

Таким образом, определяемая формулой (2.19) скорость прецессии планеты пропорциональна малому параметру δ и с точностью до $O(\delta^2)$ не зависит от действия внутренних диссипативных сил.

Уравнения для величины угловой скорости Земли и угла нутации на основании уравнений (2.13) и (2.14) записываются с точностью до $O(\delta^3)$ в виде

$$\dot{U} = -\frac{9\mu\lambda\delta^2 \sin^2 \theta}{4} \times \left(H_1^* + \alpha^2 H_2^* + (1 + \alpha)^2 \frac{\cos^2 \theta}{\mu^2 U} \right), \quad (2.20)$$

$$\dot{\theta} = \frac{9\mu\lambda\delta^2 \sin \theta}{4U} \left(G_1^* + \alpha^2 G_2^* - (1 + \alpha)^2 \frac{\cos^3 \theta}{\mu^2 U} \right). \quad (2.21)$$

Здесь использованы обозначения

$$G_1^* = \frac{U(3 - \cos^2 \theta) \cos \theta + 4}{2[4(1 - \lambda)^2 + \mu^2](U^2 - 4)}, \quad (2.22)$$

$$G_2^* = \frac{U(3 - \cos^2 \theta) \cos \theta + 4\beta}{2[4\beta^2(1 - \lambda)^2 + \mu^2](U^2 - 4\beta^2)},$$

$$H_1^* = \frac{U(1 + \cos^2 \theta) + 4\cos \theta}{2[4(1 - \lambda)^2 + \mu^2](U^2 - 4)}, \quad (2.23)$$

$$H_2^* = \frac{U(1 + \cos^2 \theta) + 4\beta \cos \theta}{2[4\beta^2(1 - \lambda)^2 + \mu^2](U^2 - 4\beta^2)}.$$

Исключив из уравнений (2.20), (2.21) время, получим одно уравнение (2.15), которое через параметры μ и λ переписывается в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{dU} = -\frac{1}{U \sin \theta} \times \left(\frac{\mu^2 U (G_1^* + \alpha^2 G_2^*) - (1 + \alpha)^2 \cos^3 \theta}{\mu^2 U (H_1^* + \alpha^2 H_2^*) + (1 + \alpha)^2 \cos^2 \theta} \right). \quad (2.24)$$

Из уравнений (2.20) и (2.21) следует, что скорость эволюции по переменным U и θ пропорциональна δ^2 , т.е. существенно меньше скорости прецессии (2.19).

Скорость эволюции сложным образом зависит от параметров μ и λ , значения которых неизвестны. Учитывая, что в рассматриваемой задаче $U \gg \beta$, для оценки величины этой скорости вместо уравнений (2.20) и (2.21) можно воспользоваться приближенными уравнениями

$$\dot{U} = -\frac{9\mu\lambda\delta^2 \sin^2 \theta}{8U} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{4(1 - \lambda)^2 + \mu^2} + \frac{\alpha^2(1 + \cos^2 \theta)}{4\beta^2(1 - \lambda)^2 + \mu^2} + \frac{2\cos^2 \theta}{\mu^2} (1 + \alpha)^2 \right), \quad (2.25)$$

$$\frac{|\Delta U|_{\max}}{U} < \frac{9\pi\delta^{3/2} \sin^2 \theta [(1 + \alpha^2)(1 + 3\cos^2 \theta) + 4\alpha \cos^2 \theta]}{4U^2} \approx 4.3 \cdot 10^{-8}. \quad (2.29)$$

Изменение длительности суток ΔT за один год определяется формулой

$$\Delta T = -\frac{\Delta U}{U} T = -\frac{2\pi \dot{U}}{U} T, \quad (2.30)$$

где T — текущая длительность суток. Из формул (2.25), (2.29) и (2.30) следует, что в области значений параметров (2.27) максимально возможное увеличение длительности суток $\Delta T_{\max}$ не может превышать 0.37 с за столетие.

Ниже приведены две таблицы, в которых указаны рассчитанные на основе уравнения (2.20) и формулы (2.30) приращения длительности суток в миллисекундах за столетие (табл. 1) и рассчитанные на основе уравнения (2.21) приращения угла нутации в угловых миллисекундах за столетие (табл. 2) в зависимости от значений параметров μ и λ .

Если исходить из того, что в настоящее время удлинение суток оценивается в 2 мс за столетие,

$$\dot{\theta} = \frac{9\mu\lambda\delta^2 \sin 2\theta}{16U^2} \left(\frac{3 - \cos^2 \theta}{4(1 - \lambda)^2 + \mu^2} + \frac{\alpha^2(3 - \cos^2 \theta)}{4\beta^2(1 - \lambda)^2 + \mu^2} - 2(1 + \alpha)^2 \frac{\cos^2 \theta}{\mu^2} \right). \quad (2.26)$$

Из уравнения (2.26) следует, что для указанных выше значений α , β и начальных условий (2.18) угол между осью вращения Земли и нормалью к плоскости эклиптики убывает при любых значениях параметров μ и λ из области

$$\mu \geq \sqrt{\delta}, \quad \lambda \leq 1 - \sqrt{\delta}. \quad (2.27)$$

При этом в области (2.27) максимально возможное изменение угла θ за один год ограничено неравенством

$$|\Delta \theta|_{\max} < \frac{9\pi(1 + \alpha)^2 \delta^{3/2} \sin 2\theta \cos^2 \theta}{4U^2} \approx 6.15 \cdot 10^{-8}, \quad (2.28)$$

т.е. составляет не более 1.3 угл. с за столетие.

На основании уравнения (2.25) оценивается изменение со временем величины угловой скорости Земли в рамках рассматриваемой модели. Обозначим через ΔU изменение величины U за один год. Учитывая, что это изменение определяется формулой $\Delta U = 2\pi \dot{U}$, получим, что в области (2.27)

т.е. $\Delta T = 2 \cdot 10^{-5}$ с, то согласно табл. 1 в области $\mu \geq \sqrt{\delta} \approx 0.06$ и $\lambda \leq 1 - \sqrt{\delta} \approx 0.94$, где применимы используемые эволюционные уравнения, имеется множество значений μ и λ , при которых уравнение (2.20) дает наблюдаемую величину. По данным табл. 1 связь между μ и λ на этом множестве близка к линейной и приближенно аппроксимируется формулой $\mu = 7.3\lambda$. В свою очередь, согласно данным табл. 2, приращения угла нутации в разных точках этого множества существенно не отличаются друг от друга и не превышают значения 12.5 угл. мс за столетие.

Заметим, что при $\Delta T = 2 \times 10^{-5}$ с величина $\dot{U}$ определяется формулой

$$\dot{U} = \frac{\Delta U}{2\pi} = -\frac{\Delta T}{2\pi T} U \approx -\frac{2.3 \cdot 10^{-10} U}{2\pi}. \quad (2.31)$$

Для проверки адекватности эволюционных уравнений (2.20) и (2.21) проведено сравнение полученных на основе этих уравнений данных

Таблица 1. Приращение длительности суток (в миллисекундах за столетие)

Параметры	$\mu = 0.1$	$\mu = 0.6$	$\mu = 1.4$	$\mu = 2.2$	$\mu = 3.0$	$\mu = 3.8$	$\mu = 4.6$
$\lambda = 0.1$	13.3	2.25	0.99	0.64	0.48	0.39	0.32
$\lambda = 0.2$	26.7	4.51	2.00*	1.31	0.97	0.78	0.65
$\lambda = 0.3$	40.0	6.78	3.02	1.97	1.47	1.18	0.98
$\lambda = 0.4$	53.4	9.09	4.07	2.65	1.98	1.58	1.33
$\lambda = 0.5$	66.7*	11.4	5.14	3.35	2.50	2.01*	1.69
$\lambda = 0.6$	80.1	13.9	6.24	4.07	3.05	2.46	2.07
$\lambda = 0.7$	93.6	16.5	7.39	4.84	3.65	2.97	2.53

Таблица 2. Приращение угла нутации (в угловых миллисекундах за столетие)

Параметры	$\mu = 0.1$	$\mu = 0.6$	$\mu = 1.4$	$\mu = 2.2$	$\mu = 3.0$	$\mu = 3.8$	$\mu = 4.6$
$\lambda = 0.1$	-76.2	-12.5	-5.17	-3.18	-2.27	-1.76	-1.43
$\lambda = 0.2$	-152	-25.0	-10.2*	-6.30	-4.51	-3.49	-2.84
$\lambda = 0.3$	-228	-37.3	-15.2	-9.35	-6.69	-5.18	-4.20
$\lambda = 0.4$	-304	-49.4	-20.0	-12.3	-8.81	-6.89	-5.50
$\lambda = 0.5$	-380*	-61.3	-24.7	-15.2	-10.8	-8.33*	-6.69
$\lambda = 0.6$	-456	-72.5	-29.1	-17.9	-12.7	-9.67	-7.69
$\lambda = 0.7$	-532	-82.9	-33.2	-20.2	-14.2	-10.6	-8.26

табл. 1 и 2 с результатами численного интегрирования точных уравнений (1.10).

На рис. 2, 3 и 4 приведены полученные численным интегрированием точных уравнений (1.10) графики изменения длительности суток и угла нутации в зависимости от времени для следующих трех комбинаций значений параметров:

$$\begin{aligned} \text{Рис. 1: } \mu &= 0.1, \quad \lambda = 0.5; \\ \text{рис. 2: } \mu &= 1.4, \quad \lambda = 0.2; \\ \text{рис. 3: } \mu &= 3.8, \quad \lambda = 0.5. \end{aligned} \quad (2.32)$$

На этих графиках через N обозначено число лет; ΔT — приращение длительности суток, мс; $\Delta \theta$ — приращение угла нутации, угл. мс.

Как видно из представленных графиков, в поведении угла нутации имеется осцилляционная составляющая большой амплитуды. Поэтому для выявления с приемлемой точностью эволюционной составляющей в поведении угла нутации численное интегрирование уравнений (1.10) проводилось на интервале времени в одну тысячу лет (рис. 2, 3) и две тысячи лет (рис. 4). В последнем случае эволюционная составляющая в изменении угла нутации составила всего лишь около 0.17 угл. с за две тысячи лет, а время работы программы численного интегрирования уравнений (1.10) составило около одного часа. Этот пример показывает, что для анализа эволюции системы на больших интервалах времени (в миллионы или миллиарды

лет) точные уравнения (1.10) непригодны, поскольку для их численного интегрирования требуются неприемлемо большие затраты времени.

Сопоставление представленных на рис. 2–4 результатов численного интегрирования точных уравнений (1.10) и приведенных в табл. 1 и 2 результатов расчетов на основе эволюционных уравнений (2.20), (2.21) для значений параметров (2.32) показывает (ячейки таблиц, соответствующие значениям параметров (2.32), отмечены символом *), что уравнения (2.20), (2.21) адекватно и с высокой точностью описывают эволюцию системы (1.10). Это обстоятельство дает основание для использования уравнений (2.20), (2.21) и (2.24) при анализе эволюции системы на больших интервалах времени, где применение точных уравнений проблематично.

На рис. 5 представлены рассчитанные на основе уравнения (2.24) фазовые траектории эволюционного процесса во вращательном движении Земли. Здесь угловая скорость U выражалась в числе оборотов Земли вокруг своей оси за один год, а через U_x и U_z обозначены проекции этой угловой скорости на плоскость орбиты и на нормаль к плоскости орбиты, соответственно.

В левой части рисунка $\lambda = 0.5$, а разным фазовым траекториям отвечают разные значения параметра μ , от $\mu = 0.1$ (верхняя кривая) до $\mu = 10.1$ (нижняя кривая). В правой части рисунка $\mu = 2$, и

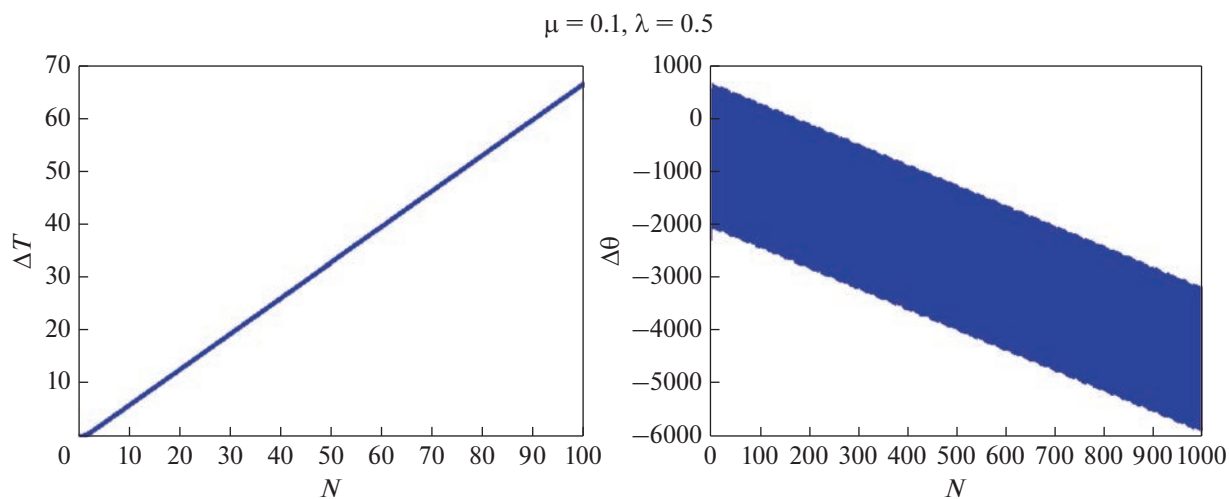


Рис. 2

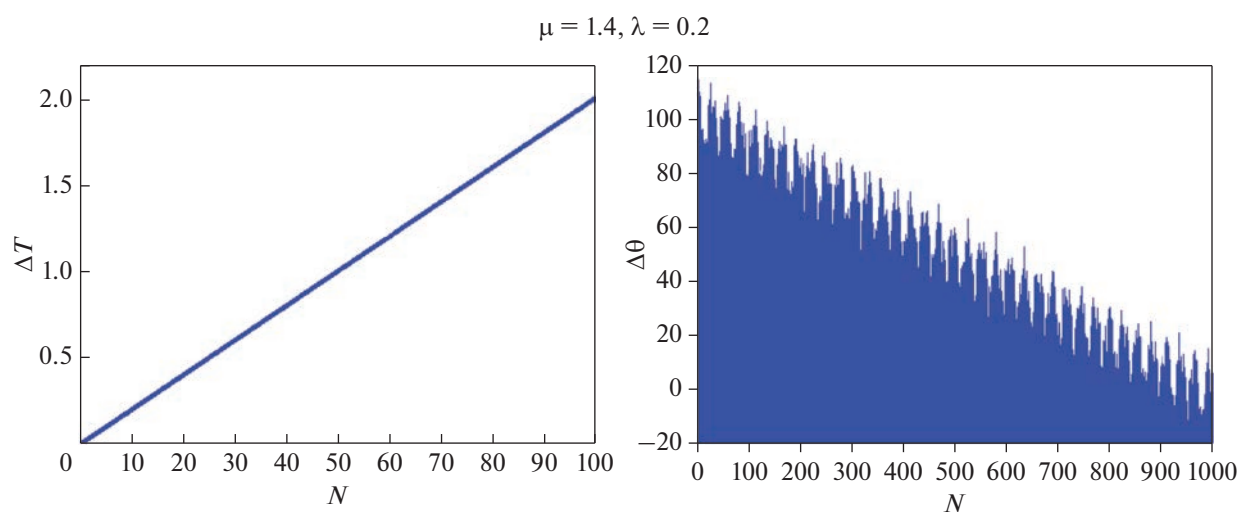


Рис. 3

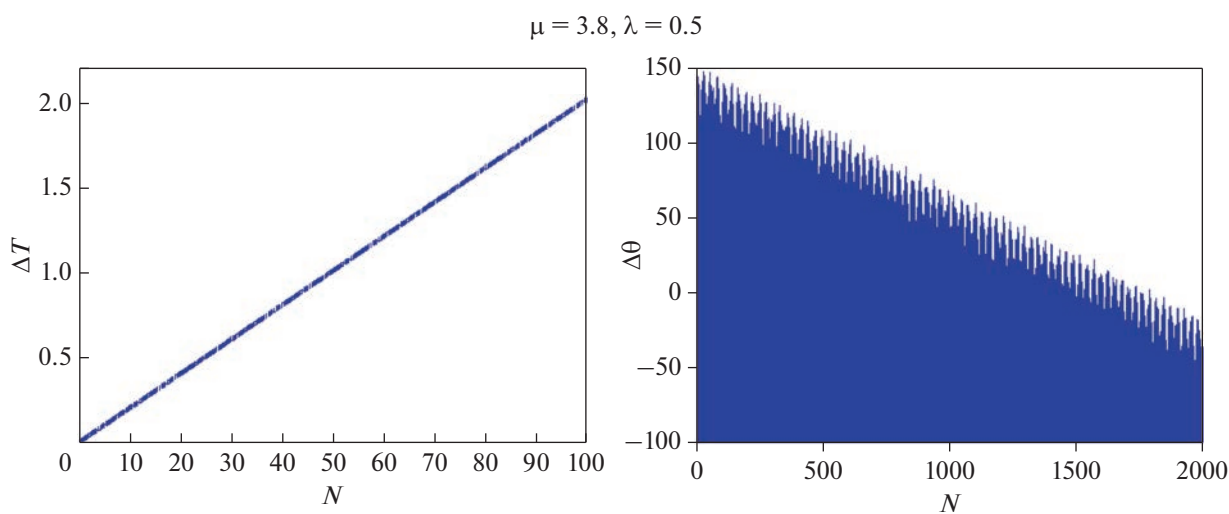


Рис. 4

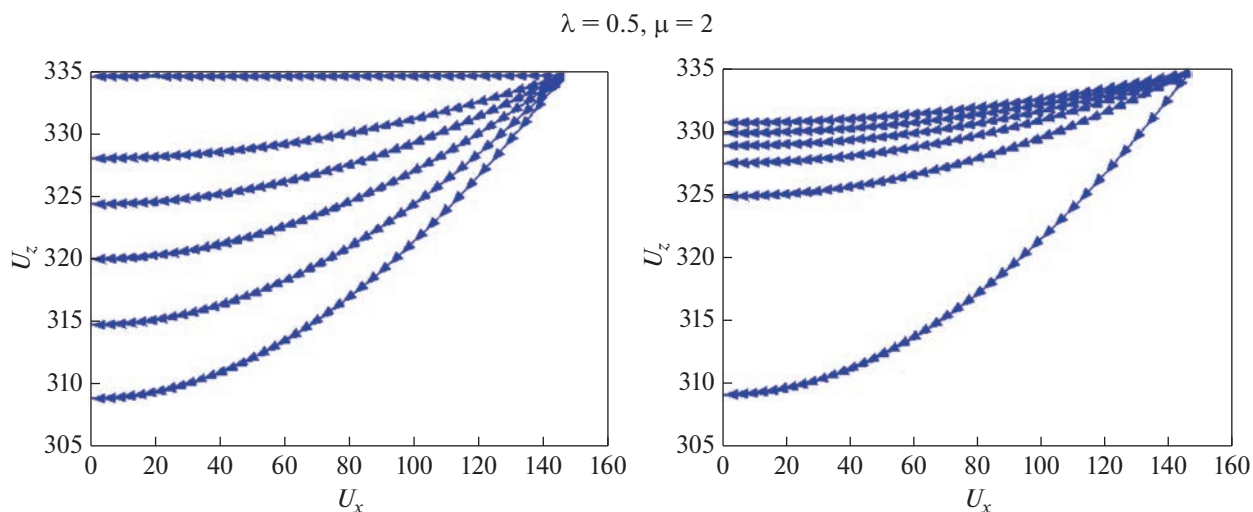


Рис. 5

разным траекториям отвечают разные значения параметра λ от $\lambda = 0.1$ (верхняя кривая) до $\lambda = 0.9$ (нижняя кривая).

Как видно из представленных графиков, на каждой траектории угловая скорость Земли и угол нутации монотонно уменьшаются, а финалом эволюционного процесса в каждом случае является вращение вокруг нормали к плоскости орбиты с постоянной угловой скоростью.

3. О ДРЕЙФЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЮСОВ ЗЕМЛИ

Согласно данным наблюдений [19], северный магнитный полюс Земли находится под углом около 10° к оси вращения Земли и дрейфует в западном направлении со скоростью почти 50 км в год.

Покажем, что наблюдаемый дрейф магнитных полюсов можно объяснить в рамках механической модели угловым ускорением Земли. Не вникая детально в физику процесса генерации магнитного поля, будем исходить из предположения, что направление магнитного поля определяется ориентацией магнитного диполя, связанного с внутренним твердым ядром Земли. В такой постановке дрейф магнитных полюсов можно будет объяснить поворотами внутреннего ядра Земли относительно ее оболочки (коры).

Для решения поставленной задачи планету Земля будем моделировать системой из трех тел: оболочки, демпфера и ядра. К оболочке отнесем кору Земли и примыкающую к ней часть слоя вязкой мантии, к демпферу — остальную часть слоя вязкой мантии и внешнее жидкое ядро, а ядром будем считать шарообразное однородное внутреннее твердое ядро Земли. В рамках такой модели внутреннее твердое ядро вследствие относитель-

ной малости его момента инерции (по грубым оценкам отношение момента инерции внутреннего твердого ядра к моменту инерции всей Земли составляет не более $5 \cdot 10^{-3}$) не будет оказывать существенного влияния на движение оболочки и демпфера. Поэтому для описания вращательного движения оболочки и демпфера будем использовать полученные в предыдущем разделе в рамках задачи “оболочка–демпфер” осредненные уравнения (2.19)–(2.21), а из уравнений вращательного движения внутреннего твердого ядра определим его угловое перемещение относительно оболочки.

Обозначим через $\mathbf{V} = (\boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega})/\omega_1$ вектор безразмерной угловой скорости ядра относительно оболочки. Здесь, как и ранее, $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость оболочки; $\boldsymbol{\omega}^*$ — абсолютная угловая скорость ядра; ω_1 — угловая скорость орбитального базиса в задаче “Солнце–Земля”. Используя, как и ранее, безразмерное время $\tau = \omega_1 t$, получим следующие уравнения вращательного движения ядра относительно оболочки, записанные в проекциях на оси базиса Резаля $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$:

$$\dot{\mathbf{V}} = -\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{U}'\mathbf{V} - \mu^*(\mathbf{V} - \mathbf{W}). \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega}/\omega_1$ — безразмерная угловая скорость оболочки;

$$\mathbf{U}' = \dot{\theta}\mathbf{e}'_1 + \dot{\psi}\sin\theta\mathbf{e}'_2 + \dot{\psi}\cos\theta\mathbf{e}'_3 \quad (3.2)$$

— безразмерная угловая скорость базиса Резаля; $\mathbf{W}$ — безразмерная относительная угловая скорость демпфера; $\mu^* = \sigma^*/\omega_1$ — безразмерный коэффициент вязкого трения между демпфером и внутренним ядром. В записанных уравнениях поведение

переменных $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}'$ и $\mathbf{W}$ будем описывать решениями эволюционных уравнений (2.19)–(2.21).

Далее будем исходить из предположения, что $\mu^* \ll \mu$, где μ — безразмерный коэффициент вязкого трения между оболочкой и демпфером. При этих условиях в установившемся режиме медленной эволюции будем иметь $|\mathbf{V}| \gg |\mathbf{W}|$, а уравнения (3.1) можно заменить уравнениями

$$\dot{\mathbf{V}} = -\dot{\mathbf{U}} - \mathbf{U}'\mathbf{V} - \mu^* \mathbf{V}. \quad (3.3)$$

Угловая скорость оболочки в проекциях на оси базиса Резаля выражается формулой

$$\mathbf{U} = \psi \sin \theta \mathbf{e}_2' + \dot{\theta} \mathbf{e}_1' + (U + \psi \cos \theta) \mathbf{e}_3, \quad (3.4)$$

где $U \approx 365.3$; ψ и $\dot{\theta}$ выражаются формулами (2.19) и (2.21). Главные члены в выражении для углового ускорения оболочки записываются в виде

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U}'U\mathbf{e}_3 + \dot{U}\mathbf{e}_3 = \psi U \sin \theta \mathbf{e}_1' - \dot{\theta} U \mathbf{e}_2' + \dot{U}\mathbf{e}_3, \quad (3.5)$$

где $\dot{U}$ выражается формулой (2.31).

В итоге из векторного уравнения (3.3) при учете формул (3.2), (3.4) и (3.5) получим в проекциях на оси $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3$ следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -\psi U \sin \theta - V_3 \psi \sin \theta + V_2 \psi \cos \theta - \mu^* V_1, \\ \dot{V}_2 = \dot{\theta} U + \dot{\theta} V_3 - V_1 \psi \cos \theta - \mu^* V_2, \\ \dot{V}_3 = -\dot{U} + V_1 \psi \sin \theta - V_2 \dot{\theta} - \mu^* V_3. \end{cases} \quad (3.6)$$

Система (3.6) допускает стационарное решение, которое соответствует установившемуся вращению ядра. Это решение определяется условием равенства нулю правых частей уравнений (3.6) и выражается следующими формулами:

$$V_1 = -\frac{(\mu^* U - \dot{U})(\mu^* \psi \sin \theta - \dot{\theta} \psi \cos \theta)}{\mu^*(\mu^{*2} + \psi^2 + \dot{\theta}^2)}, \quad (3.7)$$

$$V_2 = \frac{(\mu^* U - \dot{U})(\mu^* \dot{\theta} + \dot{\theta} \psi^2 \sin \theta \cos \theta)}{\mu^*(\mu^{*2} + \psi^2 + \dot{\theta}^2)}, \quad (3.8)$$

$$V_3 = -\frac{\mu^* U \dot{\theta}^2 + \mu^{*2} \dot{U} + \dot{\theta}^2 \dot{U} \cos^2 \theta + \mu^* \dot{\theta} \psi^2 U \sin^2 \theta}{\mu^*(\mu^{*2} + \psi^2 + \dot{\theta}^2)}. \quad (3.9)$$

Учитывая, что $|\dot{\theta}| \ll |\dot{\psi}|$, $|\dot{U}| \ll |\dot{\psi}|$, и предполагая, что $|\dot{\psi}| \ll \mu^*$, получим

$$\begin{aligned} V_1 &\approx -\frac{U \psi \sin \theta}{\mu^*}, \quad |V_2| \ll |V_1| \Rightarrow V_2 \approx 0, \\ V_3 &\approx -\frac{\dot{\theta}^2 U \sin^2 \theta}{\mu^{*2}} - \frac{\dot{U}}{\mu^*}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Таким образом, в установившемся режиме вектор относительной угловой скорости ядра приближенно выражается формулой

$$\mathbf{V} = V_1 \mathbf{e}_1' + V_3 \mathbf{e}_3 = -\frac{U \psi \sin \theta}{\mu^*} \mathbf{e}_1' - \left(\frac{\dot{\theta}^2 U \sin^2 \theta}{\mu^{*2}} + \frac{\dot{U}}{\mu^*} \right) \mathbf{e}_3. \quad (3.11)$$

Поскольку проекции этой скорости на оси базиса Резаля неизменны, то такое движение ядра относительно оболочки есть регулярная прецессия. Его можно представить в виде комбинации двух вращений

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2, \quad \boldsymbol{\Omega}_1 = -U \mathbf{e}_3, \\ \boldsymbol{\Omega}_2 &= (U + V_3) \mathbf{e}_3 + V_1 \mathbf{e}_1', \end{aligned} \quad (3.12)$$

где первым является вращение базиса Резаля вокруг оси $\mathbf{e}_3$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_1 = -U \mathbf{e}_3$ (прецессия), а второе — собственное вращение относительно базиса Резаля с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_2$. При этом величина угловой скорости собственного вращения выражается формулой

$$\Omega_2 = \sqrt{(U + V_3)^2 + V_1^2}, \quad (3.13)$$

а ось собственного вращения определяется единичным вектором

$$\boldsymbol{\xi}' = \frac{(U + V_3) \mathbf{e}_3 + V_1 \mathbf{e}_1'}{\Omega_2} = \mathbf{e}_3 \cos \alpha + \mathbf{e}_1' \sin \alpha. \quad (3.14)$$

Перейдем к новому безразмерному времени $t = U \tau$ и введем обозначение

$$h = \frac{\Omega_2}{U} - 1 \approx \frac{V_3}{U} + \frac{V_1^2}{2U^2}. \quad (3.15)$$

Тогда для прецессионного вращения ядра, описываемого формулами (3.11)–(3.14), кватернион конечного поворота выразится произведением $\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$, где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \cos \frac{t}{2} - \mathbf{e}_3 \sin \frac{t}{2}, \\ \Lambda_2 &= \cos \frac{(1+h)t}{2} + \\ &+ (\mathbf{e}_3 \cos \alpha + \mathbf{e}_1' \sin \alpha) \sin \frac{(1+h)t}{2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Вычислив это произведение, получим

$$\begin{aligned} \Lambda = & \cos \frac{ht}{2} + \mathbf{e}_3 \sin \frac{ht}{2} + (\cos \alpha - 1) \sin \frac{t}{2} \times \\ & \times \sin \frac{(1+h)t}{2} + \mathbf{e}_1 \sin \alpha \sin \frac{(1+h)t}{2} \cos \frac{t}{2} + \\ & + \mathbf{e}_3 (\cos \alpha - 1) \cos \frac{t}{2} \sin \frac{(1+h)t}{2} - \\ & - \mathbf{e}_2 \sin \alpha \sin \frac{(1+h)t}{2} \sin \frac{t}{2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Отсюда следует, что за время $\Delta t = 2\pi/(1+h)$, что соответствует одному обороту планеты вокруг своей оси, кватернион конечного поворота ядра выразится формулой

$$\Lambda(\Delta t) = \cos \left(\frac{2\pi h}{2(1+h)} \right) + \mathbf{e}_3 \sin \left(\frac{2\pi h}{2(1+h)} \right). \quad (3.18)$$

Это означает, что за один день ядро повернется вокруг оси $\mathbf{e}_3$ на угол $2\pi h$, а за один год угол поворота ядра вокруг оси $\mathbf{e}_3$ составит

$$\begin{aligned} \Delta\varphi & \approx 2\pi U h \approx 2\pi \left(V_3 + \frac{V_1^2}{2U} \right) = \\ & = 2\pi \left(-\frac{\psi^2 U \sin^2 \theta}{2\mu^{*2}} - \frac{\dot{U}}{\mu^*} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Для наблюдаемого смещения северного магнитного полюса Земли угол поворота ядра вокруг оси $\mathbf{e}_3$ за один год должен составлять $\Delta\varphi \approx -0.05$. Подставляя в формулу (3.19) это значение, а также вычисленные ранее значения ψ (2.19), $\dot{U}$ (2.31), $\theta = 23.5^\circ$, $U = 365.3$, получим следующее уравнение:

$$-\frac{2.77 \cdot 10^{-7}}{\mu^{*2}} + \frac{0.84 \cdot 10^{-7}}{\mu^*} = -0.05. \quad (3.20)$$

Решением этого уравнения

$$\mu^* \approx 2.35 \cdot 10^{-3} \quad (3.21)$$

определяется значение коэффициента вязкого трения, при котором в рамках рассматриваемой модели реализуется вращательное движение внутреннего ядра относительно оболочки, адекватно объясняющее наблюдаемый дрейф магнитных полюсов Земли. Малое значение коэффициента (3.21) можно объяснить высокой температурой внутреннего твердого ядра Земли, вследствие чего примыкающий к нему слой внешнего жидкого ядра может обладать свойством сверхтекучести.

Отметим, что значение коэффициента (3.21) удовлетворяет принятым ранее предположениям $\mu^* \ll \mu$ и $|\psi| \gg \mu^*$.

В рамках рассмотренной модели дрейф магнитных полюсов объясняется только наличием углового ускорения Земли, которое обусловлено

прецессией вокруг нормали к плоскости орбиты и изменением величины угловой скорости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках модели М.А. Лаврентьева проведено исследование влияния внутренних диссипативных сил на эволюцию вращательного движения Земли в гравитационном поле Солнца и Луны. Получены эволюционные уравнения, описывающие поведение оси вращения Земли и величины ее угловой скорости. Определены зависимости скорости эволюции для разных переменных от значений параметров модели. Показано, что наблюдаемое изменение длительности суток можно объяснить в рамках модели Лаврентьева. Построены фазовые траектории, описывающие эволюцию вращательного движения Земли от текущего состояния до финальной точки, в которой Земля будет вращаться вокруг нормали к плоскости орбиты с постоянной угловой скоростью.

Показано, что наблюдаемый дрейф магнитных полюсов Земли можно объяснить в рамках механической модели угловым ускорением Земли.

Автор выражает благодарность Д.А. Притыкину за обсуждение работы и предложения по ее содержанию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
2. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: Вычисл. центр АН СССР, 1968. 232 с.
4. Сидоренко В.В. Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром // Астроном. вестник. 1993. Т. 27. № 2. С. 119–127.
5. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер // Приклад. механика и техн. физика. 1968. № 1. С. 73–79.
6. Амеликин Н.И. Об асимптотических свойствах движений спутников в центральном поле, обусловленных внутренней диссипацией // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 2. С. 204–223.
7. Амеликин Н.И., Холощак В.В. Об устойчивости стационарных вращений спутника с внутренним демпфированием в центральном гравитационном поле // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. № 2. С. 123–136.
8. Амеликин Н.И., Холощак В.В. Эволюция вращательного движения динамически симметричного спутника с внутренним демпфированием на круговой орбите // Прикладная математика и механика.

2019. Т. 83. № 1. С. 3–15.
<https://doi.org/10.1134/S0032823519010016>
9. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Вращательное движение несимметричного спутника с демпфером на круговой орбите // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 1. С. 16–31.
<https://doi.org/10.1134/S0032823519010028>
10. *Амелькин Н.И.* Эволюция вращательного движения планеты на круговой орбите под влиянием внутренних упругих и диссипативных сил // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 2. С. 96–111.
<https://doi.org/10.31857/S0572329920020038>
11. *Манк У., Макдональд Г.* Вращение Земли. М.: Мир, 1964. 385 с.
12. *Альвен Х., Аррениус Г.* Эволюция солнечной системы. М.: Мир, 1979. 512 с.
13. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. 588 с.
14. *Вильке В.Г., Копылов С.А., Марков Ю.Г.* Эволюция вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49. № 1. С. 25–34.
15. *Джеффрис Г.* Земля, ее происхождение, история и строение: пер. с 4-го англ. изд.; под ред. Кейлис-Борока В.И., Магницкого В.А. М.: Иностран. лит., 1960. 485 с.
16. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
17. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
18. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.
19. *Alken P., Th'ebault E., Beggan C. et al.* International geomagnetic reference field: the thirteenth generation // Earth, Planets and Space. 2021. V. 73. Iss. 1. Art. ID. 49. 25 p.
<https://doi.org/10.1186/s40623-020-01288-x>