

УДК 629.785

## ОПТИМИЗАЦИЯ МАНЕВРА ПЕРЕВОДА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ИЗ ОДНОЙ ТОЧКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ В ДРУГУЮ ТОЧКУ ТОЙ ЖЕ ОРБИТЫ

© 2023 г. М. С. Константинов\*

*Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики  
Московского авиационного института, Москва, Россия*

*\*mkonst@bk.ru*

Поступила в редакцию 24.03.2023 г.

После доработки 29.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

Анализируется проблема смены орбитальной позиции космического аппарата (КА), находящегося на некоторой эллиптической орбите в ньютоновском гравитационном поле. Предполагается, что КА имеет нерегулируемый двигатель, который может быть включен многократно. Разработан алгоритм определения оптимальной (по критерию минимальной характеристической скорости) схемы перелета. Особое внимание уделяется анализу числа активных участков на траектории перелета и их расположению на витках траектории. Алгоритм базируется на принципе максимума и методе продолжения по параметру. Начальное приближение для схемы перелета находится с использованием траектории оптимального перелета КА с идеально-регулируемой двигательной установкой (двигателем ограниченной мощности). Используется продолжение этой траектории в траекторию перелета для КА с нерегулируемым двигателем. При этом вводится параметр сглаживания функции тяги. На заключительном этапе находятся характеристики оптимальной схемы перелета для КА с нерегулируемым двигателем при релейной функции тяги. Проанализированы свойства оптимальной схемы выполнения рассматриваемого маневра как функции угловой дальности перелета (числа витков траектории перелета) и как функции угла фазирования (угла, характеризующего угловую дальность между точками орбиты, между которыми осуществляется перелет). Показано, что увеличение угловой дальности перелета позволяет значительно уменьшить характеристическую скорость маневра даже при больших углах фазирования.

DOI: 10.31857/S0023420623700115, EDN: SCKHRA

### ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известна эллиптическая орбита (например, своим фокальным параметром  $p$  и эксцентриситетом  $e$ ). Космический аппарат (КА) двигается по этой орбите. Требуется перевести КА в некоторую другую точку той же орбиты. Будем называть рассматриваемую задачу задачей фазирования. Проблема фазирования на эллиптической орбите может возникать при развертывании спутниковой системы и при анализе проблемы удержания конфигурации спутниковой системы. Проблема удержания конфигурации спутниковой системы, содержащей орбиты типа “Молния”, с использованием электроракетной двигательной установки (ЭРДУ) рассматривалась, например, в работе [1]. В настоящей работе анализируются оптимальные траектории перелета КА с ЭРДУ в задаче фазирования на эллиптической орбите. Основная рассматриваемая проблема — анализ оптимальной схемы рассматриваемого маневра, т.е. определе-

ние числа активных участков на траектории перелета, их расположение, значения угла атаки на активных участках траектории перелета, оценка характеристической скорости маневра.

Зададим положение точки, в которую должен быть переведен КА, следующим образом. Пусть, когда КА, двигаясь по орбите, попадает в ее перигейт, точка, в которую должен быть переведен КА, характеризуется истинной аномалией  $\Delta\theta$ . Этот угол будем называть углом фазирования. Полагаем, что КА имеет нерегулируемую двигательную установку, которая многократно может быть включена. В численном анализе будем ориентироваться на электроракетную двигательную установку, т.е. на двигательную установку, обеспечивающую достаточно малое реактивное ускорение. При этом активные участки траектории, как правило, имеют большую продолжительность и протяженность.

Оптимизационная проблема формулируется так. Известны параметры  $p, e, \Delta v$ . Требуется найти оптимальными:

- точку старта КА с начальной орбиты (истинную аномалию точки старта с начальной орбиты  $v_o$ ). Будем полагать  $-\pi < v_o \leq \pi$ ;
- закон включения-выключения двигательной установки  $\delta(t)$ ;
- программу угла тангажа на активных участках полета  $\varphi(t)$ .

Критерием оптимальности рассматривается характеристическая скорость анализируемого космического маневра. Параметром маневра рассматривается угловая дальность перелета, то есть угол между радиус-вектором точки старта и радиус-вектором точки окончания перелета КА (с учетом числа полных оборотов КА вокруг гравитационного центра)  $\beta_f$ . Использование угловой дальности перелета в качестве параметра вместо времени перелета имеет определенные преимущества [2].

Фиксирование точки старта  $v_o$  и угловой дальности перелета  $\beta_f$  в анализируемом маневре однозначно определяет время его выполнения  $t_p$ . Приведем пояснения, опираясь на рис. 1 эллиптической орбиты. На рисунке точка  $C$  – гравитационный центр. Перигеи орбиты обозначен точкой  $A$ . Точкой  $B$  обозначена точка орбиты, в которую должен быть переведен КА, когда он находится в перигеи орбиты. То есть истинная аномалия этой точки орбиты равна  $\Delta v$  (угол  $ACB$ ). При анализе будем считать, что этот угол приведен к диапазону  $-180^\circ \dots +180^\circ$ . Точкой  $D$  обозначена точка орбиты, в которой КА начинает перелет (стартует с начальной орбиты). Эта точка будет выбираться, ее истинная аномалия равна  $v_o$  (угол  $ACD$ ). Точка  $E$  – точка орбиты, в которую должен быть переведен КА в момент старта КА из точки  $D$ . Наконец, точка  $F$  – точка окончания перелета КА. Ее положение (истинная аномалия) определяется так:

$$v_f = v_o + \beta_f. \quad (1)$$

Время  $t_{AD}$  движения КА от перигея до точки старта КА определяется с использованием уравнения Кеплера:

$$E_D = 2 \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{v_o}{2} \right) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right]; \quad (2)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu(1-e^2)^3}{p^3}}; \quad t_{AD} = \frac{E_D - e \sin(E_D)}{n}.$$

В этих соотношениях  $\mu$  – гравитационный параметр небесного тела, около которого рассматривается орбита;  $n$  – среднее движение по орбите;  $E_D$  – эксцентриская аномалия точки старта  $D$ . При использовании приведенных соотношений

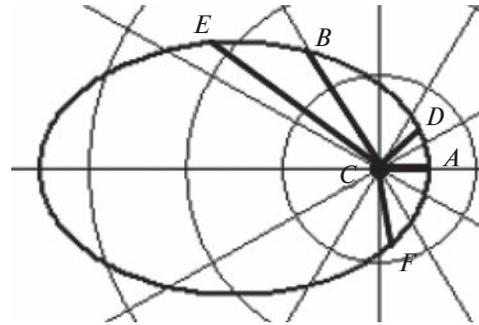


Рис. 1. Эллиптическая орбита. Фазирование на орбите.

величина  $E_D$  окажется принадлежащей следующему диапазону  $-180^\circ \dots +180^\circ$ .

В таком же диапазоне эксцентриская аномалия точки  $B$  определяется так:

$$E_B = 2 \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\Delta v}{2} \right) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right]. \quad (3)$$

Эксцентриские аномалии точек  $E (E_E)$  и  $B (E_B)$  связаны между собой равенством:

$$E_E - e \sin(E_E) = nt_{AD} + E_B - e \sin(E_B). \quad (4)$$

Эксцентриская аномалия конечной точки перелета  $F (E_F)$  с учетом того, что угловая дальность перелета может быть больше  $2\pi$ , может быть найдена с использованием следующего алгоритма:

$$A = 2 \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{v_o + \beta_f}{2} \right) \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right]; \quad k = \operatorname{floor} \left( \frac{\beta_f}{2\pi} \right); \quad (5)$$

$$E_F = \begin{cases} A + 2\pi k, & \text{если } A \geq v_o, \\ A + 2\pi(k+1), & \text{если } A < v_o. \end{cases}$$

В приведенных соотношениях  $\operatorname{floor}$  – наибольшее целое число от аргумента;  $k$  – число полных оборотов КА вокруг гравитационного центра на перелетной траектории.

Время перелета КА определяется как время движения по заданной орбите от точки  $E$  до точки  $F$ . Найти это время можно по следующему соотношению:

$$t_p = t_{EF} = \frac{1}{n} \{ E_F - e \sin(E_F) - [E_E - e \sin(E_E)] \} = \frac{1}{n} \{ E_F - e \sin(E_F) - [E_D - e \sin(E_D)] - [E_B - e \sin(E_B)] \}. \quad (6)$$

Таким образом, время перелета при фиксированной начальной точке перелета и фиксированной угловой дальности перелета находится по приведенному соотношению. Предварительно определяются эксцентриские аномалии трех точек орбиты  $F, D$  и  $B$ .

Если полагать известными параметры  $v_0, \beta_p, \Delta v$  (и, следовательно, время перелета  $t_p$ ), то рассматриваемая оптимизационная проблема состоит в определении оптимальной программы перелета (программы включения-выключения двигателя и программы угла тангажа на активных участках перелета), при которой КА попадает в точку  $F$  орбиты за время  $t_p$ .

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА РАССМАТРИВАЕМОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ОПЕРАЦИИ

Для описания движения КА будем использовать полярную систему координат. В предлагаемой постановке задачи будем рассматривать независимой переменной не время, а текущую угловую дальность перелета  $\beta$  – рациональность такого подхода отмечена в работах [3, 4]. Ее будем отсчитывать от радиус-вектора точки старта ( $CD$  на рис. 1). Фазовый вектор, описывающий состояние КА в процессе его движения, рассматривается состоящим из следующих компонент:  $V_r, V_n$  – радиальная и трансверсальная компоненты скорости;  $r$  – длина радиус-вектора КА;  $t$  – время полета;  $m$  – масса КА.

При анализе будем использовать безразмерные переменные. При этом за единицу расстояния примем большую полуось заданной орбиты, за единицу скорости – местную круговую скорость на единичном расстоянии от гравитационного центра, за единицу массы – начальную массу КА. Единицы времени, ускорения и силы тяги примем согласованными с введенными единицами расстояния, скорости и массы. При этом движение КА может быть описано следующей безразмерной системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dV_r}{d\beta} &= \frac{Pr}{mV_n} \sin(\varphi) \delta - \frac{1}{rV_n} + V_n; \\ \frac{dV_n}{d\beta} &= \frac{Pr}{mV_n} \cos(\varphi) \delta - V_r; \\ \frac{dr}{d\beta} &= \frac{rV_r}{V_n}; \quad \frac{dt}{d\beta} = \frac{r}{V_n}; \quad \frac{dm}{d\beta} = -q\delta \frac{r}{V_n}. \end{aligned} \quad (7)$$

В этой системе  $P$  – безразмерная величина тяги двигателя;  $q$  – безразмерный массовый расход двигателя;  $\delta(\beta)$  – функция тяги;  $\varphi(\beta)$  – угол тангажа КА (угол между местным горизонтом и направлением вектора тяги). Функция тяги принимает всего два значения: 0 и 1. Когда  $\delta = 1$ , двигатель включен; когда  $\delta = 0$ , двигатель выключен.

Две перечисленные функции ( $\delta(\beta)$  и  $\varphi(\beta)$ ), будем рассматривать как оптимизируемые управления движением КА.

### ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Оптимизационную проблему будем решать, используя подход принципа максимума. То есть введем в рассмотрение вектор сопряженных переменных к фазовому вектору  $(\lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_r, \lambda_t, \lambda_m)^T$  и вспомогательную функцию в виде:

$$\begin{aligned} H &= \lambda_{V_r} \left( \frac{Pr \sin(\varphi)}{mV_n} \delta - \frac{1}{rV_n} + V_n \right) + \\ &+ \lambda_{V_n} \left( \frac{Pr \cos(\varphi)}{mV_n} \delta - V_r \right) + \lambda_r \frac{rV_r}{V_n} + \\ &+ \lambda_t \frac{r}{V_n} - \lambda_m q \delta \frac{r}{V_n}. \end{aligned} \quad (8)$$

В соответствии с условиями оптимальности принципа максимума выбираемый закон управления обеспечивает супремум гамильтониану. То есть оптимальное управление  $\delta_{opt}(\beta)$  и  $\varphi_{opt}(\beta)$  можно искать из условия максимума гамильтониана. При этом можно показать [5–7], что

$$\cos(\varphi_{opt}) = \frac{\lambda_{V_n}}{\lambda_V}; \quad \sin(\varphi_{opt}) = \frac{\lambda_{V_r}}{\lambda_V}, \quad (9)$$

$$\text{где } \lambda_V = \sqrt{\lambda_{V_r}^2 + \lambda_{V_n}^2}.$$

$$\delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) > 0, \\ 0, & \text{если } \Psi(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Функцию  $\delta$  будем называть функцией тяги. В последнем равенстве используется функция  $\Psi$ , которую будем называть функцией переключения двигателя:

$$\Psi = \frac{P}{m} \lambda_V - \lambda_m q. \quad (11)$$

С учетом полученных законов оптимального управления (программы угла тангажа и оптимальной функции тяги) уравнения, описывающие изменение фазовых переменных, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV_r}{d\beta} &= \frac{Pr\lambda_{V_r}}{mV_n\lambda_V} \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) - \frac{1}{rV_n} + V_n; \\ \frac{dV_n}{d\beta} &= \frac{Pr\lambda_{V_n}}{mV_n\lambda_V} \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) - V_r; \\ \frac{dr}{d\beta} &= \frac{rV_r}{V_n}; \quad \frac{dt}{d\beta} = \frac{r}{V_n}; \\ \frac{dm}{d\beta} &= -q \frac{r}{V_n} \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m). \end{aligned} \quad (12)$$

Из условий принципа максимума следует, что сопряженные переменные должны удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{V_r}}{d\beta} &= \lambda_{V_n} - \lambda_r \frac{r}{V_n}; \\ \frac{d\lambda_{V_n}}{d\beta} &= \frac{r}{V_n^2} \left[ -\lambda_{V_r} \frac{1+rV_n^2}{r^2} + \lambda_r V_r + \lambda_t + \right. \\ &+ \left. \Psi(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) \right]; \\ \frac{d\lambda_r}{d\beta} &= \frac{-1}{V_n} \left[ \frac{\lambda_{V_r}}{r^2} + \lambda_r V_r + \lambda_t + \right. \\ &+ \left. \Psi(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) \right]; \\ \frac{d\lambda_t}{d\beta} &= 0; \quad \frac{d\lambda_m}{d\beta} = \frac{Pr\sqrt{\lambda_{V_r}^2 + \lambda_{V_n}^2}}{m^2 V_n} \delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m). \end{aligned} \quad (13)$$

**СЛУЧАЙ ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКИ СТАРТА. ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПЯТОГО ПОРЯДКА**

Используя принцип максимума, оптимизационная проблема сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (системы, состоящей из двух записанных выше систем для фазовых и сопряженных переменных (12) и (13)). Если считать известной точку старта (т.е. значение  $v_0$ ), то неизвестными параметрами краевой задачи рассматриваются значения сопряженных переменных в начальной точке траектории перелета:  $\lambda_{V_r}(0)$ ,  $\lambda_{V_n}(0)$ ,  $\lambda_r(0)$ ,  $\lambda_t(0)$ ,  $\lambda_m(0)$ . Фазовые переменные в начальной точке траектории перелета определяются с использованием следующих соотношений:

$$\begin{aligned} V_r(0) &= \sqrt{\frac{1}{p}} \operatorname{esin}(v_0); \quad V_n(0) = \sqrt{\frac{1}{p}} (1 + e \cos(v_0)); \\ r(0) &= \frac{p}{1 + e \cos(v_0)}; \quad t(0) = 0; \quad m(0) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Неизвестные параметры краевой задачи должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись следующие условия в конечной точке траектории перелета:

$$\begin{aligned} V_r(\beta_f) &= \sqrt{\frac{1}{p}} \operatorname{esin}(v_0 + \beta_f); \\ V_n(\beta_f) &= \sqrt{\frac{1}{p}} (1 + e \cos(v_0 + \beta_f)); \\ r(\beta_f) &= \frac{p}{1 + e \cos(v_0 + \beta_f)} \\ t(\beta_f) &= t_p(v_0, \beta_f, \Delta v); \quad \lambda_m(\beta_f) = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Удовлетворение последнего равенства из системы (15) обеспечивает максимум рассматри-

ваемого критерия оптимальности (конечной массы КА). Описанная краевая задача имеет пятый порядок.

**УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ТОЧКИ СТАРТА. ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШЕСТОГО ПОРЯДКА**

Для практики интересна постановка задачи, в которой начальная точка перелета не фиксирована, а выбирается оптимальной. Поэтому целесообразно изменить постановку краевой задачи принципа максимума, добавляя к неизвестным параметрам краевой задачи и истинную аномалию точки старта  $v_0$ . При этом необходимо добавить еще одно краевое условие: условие оптимальности точки старта. Приведем это условие.

Величина  $v_0$  определяет значение фазовых переменных  $V_r$ ,  $V_n$ ,  $r$  в начальной точке траектории перелета (14). От этой величины зависят и четыре из пяти конечных условий в равенствах (15). Для получения условия оптимальности рассматриваемого параметра нужно иметь соотношения для расчета производных от значений фазовых координат в начальной и конечной точке траектории перелета по оптимизируемому параметру  $v_0$ . С производными от начальных условий (14) никаких трудностей не возникает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_0} V_r(0) &= \sqrt{\frac{1}{p}} e \cos(v_0); \quad \frac{\partial}{\partial v_0} V_n(0) = -\sqrt{\frac{1}{p}} e \sin(v_0); \\ \frac{\partial}{\partial v_0} r(0) &= \frac{p \operatorname{esin}(v_0)}{(1 + e \cos(v_0))^2}; \\ \frac{\partial}{\partial v_0} t(0) &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial v_0} m(0) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Производные от конечных условий по оптимизируемому параметру  $v_0$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_0} V_r(\beta_f) &= \sqrt{\frac{1}{p}} e \cos(v_0 + \beta_f); \\ \frac{\partial}{\partial v_0} V_n(\beta_f) &= -\sqrt{\frac{1}{p}} e \sin(v_0 + \beta_f); \\ \frac{\partial}{\partial v_0} r(\beta_f) &= \frac{p \operatorname{esin}(v_0 + \beta_f)}{(1 + e \cos(v_0 + \beta_f))^2}; \\ \frac{\partial}{\partial v_0} t(\beta_f) &= \frac{\partial}{\partial v_0} t_p(v_0, \beta_f, \Delta v). \end{aligned} \quad (17)$$

В последнее равенство входит производная от времени перелета по параметру  $v_0$ . Аналитическое выражение для времени перелета было приведено выше (см. соотношение (6)). Используя

его, можно записать производную от времени перелета по параметру  $v_o$  в виде:

$$\frac{\partial}{\partial v_o} t_p = \frac{1}{n} \left[ (1 - e \cos(E_F)) \frac{\partial}{\partial v_o} E_F - (1 - e \cos(E_D)) \frac{\partial}{\partial v_o} E_D \right]. \quad (18)$$

В последнее равенство входят производные эксцентрических аномалий точек  $F$  и  $D$  (рис. 1) по параметру  $v_o$ . Предлагается использовать для этих производных следующие выражения, которые не содержат вычислительных особенностей:

$$\frac{\partial}{\partial v_o} E_F = \frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}{\cos^2\left(\frac{v_o + \beta_f}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{v_o + \beta_f}{2}\right) \frac{1-e}{1+e}}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_o} E_D = \frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}{\cos^2\left(\frac{v_o}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{v_o}{2}\right) \frac{1-e}{1+e}}.$$

Используя полученные производные, условие оптимальности параметра  $v_o$  можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \lambda_{v_r}(0) \cos(v_o) - \lambda_{v_n}(0) \sin(v_o) + \right. \\ & \quad \left. + \lambda_r(0) \frac{\sqrt{p^3} \sin(v_o)}{(1 + e \cos(v_o))^2} \right] - \\ & - \left[ \lambda_{v_r}(\beta_f) \cos(v_o + \beta_f) - \lambda_{v_n}(\beta_f) \times \right. \\ & \quad \left. \times \sin(v_o + \beta_f) + \lambda_r(\beta_f) \frac{\sqrt{p^3} \sin(v_o + \beta_f)}{(1 + e \cos(v_o + \beta_f))^2} \right] \\ & - \lambda_r(\beta_f) \frac{\partial}{\partial v_o} t_p = 0. \end{aligned} \right\} \frac{e}{\sqrt{p}} \quad (20)$$

Таким образом, шестипараметрическая краевая задача формулируется так: найти неизвестные параметры краевой задачи  $v_o$ ,  $\lambda_{v_r}(0)$ ,  $\lambda_{v_n}(0)$ ,  $\lambda_r(0)$ ,  $\lambda_r(0)$ ,  $\lambda_m(0)$ , при которых удовлетворяются шесть условий. Пять из них — это условия для переменных в конечной точке траектории перелета (15) и условие оптимальности точки старта (20), связывающее переменные в начальной и конечной точках траектории перелета.

### ОБЩИЕ ИДЕИ МЕТОДИЧЕСКОГО ПОДХОДА И ЭТАПЫ ИСПОЛЬЗУЕМОГО МЕТОДА

Перечислим общие идеи используемого методического подхода и этапы используемого алго-

ритма. Заметим, что они соответствуют идеям, опубликованным в работах [8–10].

Основным методическим инструментом рассматривается принцип максимума.

При решении краевой задачи принципа максимума, как правило, используются итерационные процедуры. При этом характеристики получаемого решения в большой степени зависят от используемого начального приближения. Схема перелета получаемой в итоге траектории (число активных участков и их расположение) зависит от схемы перелета, используемого начального приближения. Очень желательно, чтобы траектория, используемая в качестве начального приближения, не содержала признаков числа активных участков и их расположения. Именно такое начальное приближение предлагается выбирать. Это обстоятельство во многом определяет весь используемый в работе алгоритм.

Предполагается исследовать многооборотные траектории перелета. При этом на траектории перелета возможны продолжительные пассивные участки. Их исследование можно (и целесообразно) проводить, не используя численного интегрирования уравнений оптимального движения КА. Этот прием применяется в работе. Понятно, что наряду с этим пришлось получить аналитические соотношения для описания изменения сопряженных переменных на оптимальной траектории перелета. Эти соотношения приведены в приложении.

На начальном этапе исследования предполагается решение вспомогательной задачи: нахождение оптимальной траектории перелета КА с идеально-регулируемой двигательной установкой. Решение такой задачи существует всегда (при любой угловой дальности и, следовательно, времени перелета). Применяемый алгоритм предполагает использование метода продолжения по параметру для нахождения оптимальной траектории перелета КА с нерегулируемой двигательной установкой по полученной ранее траектории перелета для КА с идеально-регулируемой двигательной установкой [8, 9].

При итерационном решении краевой задачи может измениться количество активных или пассивных участков на траектории перелета. При этом появляется скачок в производных анализируемых краевых условий по выбираемым параметрам краевой задачи [5]. Также возникают трудности при использовании практически любых численных методов решения краевой задачи для КА с рассматриваемой нерегулируемой двигательной установкой. Чтобы их преодолеть в соответствии с широко используемыми рекомендациями [5] вводится параметр сглаживания  $\epsilon$  и осуществляется сглаживание функции тяги. Вместо разрывной функции тяги (10) рассматривает-

ся сглаженная функция тяги. В настоящей работе использовалась сглаженная функция тяги следующего вида:

$$\delta_{opt}(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m) = 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{\Psi(m, \lambda_{V_r}, \lambda_{V_n}, \lambda_m)}{\varepsilon} \right). \quad (21)$$

Этапы используемого алгоритма следующие.

1. Решение задачи для идеально-регулируемой двигательной установки. Используется метод продолжения по гравитационному параметру с нулевыми начальными условиями по вектору сопряженных переменных. Метод был предложен в работе [10].

2. Решение задачи для нерегулируемого двигателя с большим параметром сглаживания функции тяги. Используется метод продолжения от решения для КА с идеально-регулируемой двигательной установкой в решение для КА с нерегулируемой двигательной установкой с параметром сглаживания [5].

3. Решение последовательности задач для нерегулируемого двигателя и уменьшающимся параметром сглаживания. Реализуется решением последовательности краевых задач с параметром сглаживания, уменьшающимся в 10 раз.

4. Решение задачи для релейной функции включения-выключения двигателя. Реализуется введением в вектор выбираемых параметров краевой задачи угловой дальности, при которой происходит смена режима тяги (тяга включается или выключается). Одновременно расширяется вектор условий краевой задачи: в момент изменения режима работы двигателя введенная выше функция переключения двигателя (11) должна быть равна нулю.

### АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПАРАМЕТРА, ИСПОЛЬЗУЕМОГО В МЕТОДЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ГРАВИТАЦИОННОМУ ПАРАМЕТРУ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Нахождение начального приближения оптимальной траектории, обеспечивающей заданное фазирование, можно реализовать, используя метод продолжения по гравитационному параметру. В одном из возможных вариантов такого подхода определяется такое значение гравитационного параметра, при котором КА, начиная движение в перигентре, совершит задаваемое число витков  $k$  (оно определяет угловую дальность перелета) за время, которое обеспечивает требуемый угол фазирования (время определяется по соотношению (6)). Это время с учетом фиксации началь-

ной точки перелетной траектории ( $v_o = v_D = E_D = 0$ ) и целого числа витков при перелете ( $\beta_f = 2\pi k$ ,  $v_f = E_f = 2\pi k$ ) можно найти, используя следующее равенство:

$$t_p = \frac{1}{n} [2\pi k - E_B + e \sin(E_B)] = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [2\pi k - E_B + e \sin(E_B)]. \quad (22)$$

В последнем равенстве  $a$  – большая полуось анализируемой орбиты;  $\mu$  – гравитационный параметр небесного тела, в окрестности которого анализируется орбита. Введем в рассмотрение воображаемую вспомогательную орбиту, по которой двигался бы КА, если бы гравитационный параметр небесного тела был не  $\mu$ , а  $\mu_{New}$ . Пусть большая полуось этой орбиты  $a_{New}$ . Время движения КА на  $k$  витках траектории этой воображаемой орбиты определяется так:

$$t_p = 2\pi k \sqrt{\frac{a_{New}^3}{\mu_{New}}}. \quad (23)$$

Приравнявая выражения для времени перелета, записанные в виде равенств (22) и (23), получаем уравнение, используя которое можно определить гравитационную константу  $\mu_{New}$ :

$$\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [2\pi k - E_B + e \sin(E_B)] = 2\pi k \sqrt{\frac{a_{New}^3}{\mu_{New}}}. \quad (24)$$

Безразмерный вид последнего равенства представляется как

$$2\pi k - E_B + e \sin(E_B) = 2\pi k \sqrt{\frac{a_{bNew}^3}{\mu_{bNew}}}, \quad (25)$$

где  $a_{bNew}$ ,  $\mu_{bNew}$  – безразмерная большая полуось вспомогательной орбиты и безразмерная гравитационная константа.

Большая полуось вспомогательной орбиты зависит от гравитационной константы и может быть представлена в виде:

$$a_{bNew} = \frac{\mu_{bNew}}{2\mu_{bNew} - V_o^2}, \quad (26)$$

где  $r_o$  и  $V_o$  – радиус и скорость КА в точке орбиты, в которой начинается траектория перелета. Используя выражение (26), равенство (25) можно рассматривать как кубическое уравнение относительно  $\mu_{bNew}$ :

$$a_3 \mu_{bNew}^3 - a_2 \mu_{bNew}^2 + a_1 \mu_{bNew} - a_0 = 0, \quad (27)$$

где

$$a_3 = 8; \quad a_2 = 12r_o V_o^2 + \frac{4\pi^2 k^2 r_o^3}{[2\pi k - E_B + e \sin(E_B)]^2}; \quad (28)$$

$$a_1 = 6r_o^2 V_o^4; \quad a_0 = r_o^3 V_o^6.$$

Приведенное кубическое уравнение имеет единственный действительный корень, именно его предлагается использовать при анализе.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Для численного исследования была выбрана околоземная орбита с эксцентриситетом 0.74179, большой полуосью 26 610 км (12-часовая орбита типа “Молния”). Характеристики анализируемой транспортной системы и анализируемого транспортного маневра выбраны следующими:

- КА массой 1000 кг находится на эллиптической околоземной орбите. Высота перигея орбиты 500 км, высота апогея 39978 км (орбита типа “Молния”);
- КА имеет электроракетную двигательную установку с тягой 290 мН и удельным импульсом 1770 с.
- Рассматриваемый диапазон угла фазирования  $0^\circ \dots 180^\circ$ .
- Анализируемый диапазон угловой дальности перелета – до 26 витков.
- Анализируемый диапазон времени перелета – до 13 сут.

Итоговым результатом анализа рассматривается зависимость характеристической скорости от угловой дальности перелета КА и (или) от времени выполнения маневра. Важной итоговой информацией служат характеристики оптимальной схемы перелета: число активных участков на траектории перелета, их расположение, истинная аномалия точки старта КА, характеристики программы угла тангажа и атаки на активных участках траектории. Эти характеристики анализируются как функции от тех же аргументов (времени перелета и угловой дальности перелета).

Как было отмечено выше, анализ проводится в безразмерных переменных, когда за единицу расстояния принимается большая полуось орбиты (26610 км), за единицу скорости – местная круговая скорость на расстоянии равной единице расстояния (3.8703 км/с).

Опишем разработанный алгоритм оптимизации на примере нахождения оптимальной траектории перелета для варианта, когда угол фазирования равен  $120^\circ$ , а угловая дальность перелета равна 15 виткам.

## ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ

### Предварительный анализ

Используя соотношение (6) и полагая, что точка старта есть перигей орбиты, определяем время перелета. Оно равно 179.061 ч (7.461 сут).

Определяем с использованием равенств (28) коэффициенты кубического уравнения (27). Решаем это уравнение. Его единственный действительный корень оказался равен 1.0004934. То есть, если бы гравитационный параметр Земли был больше, чем он есть на самом деле, в 1.0004934 раз, то КА сделал 15 полных витков вокруг Земли за 179.061 ч.

### Этап 1. Нахождение оптимальной траектории перелета для КА с идеально-регулируемой двигательной установкой

Компоненты вектора неизвестных параметров краевой задачи (вектор сопряженных переменных в начальной точке траектории перелета) были приняты нулевыми. Начальное значение безразмерного гравитационного параметра принято равным 1.0004934. Гравитационный параметр рассматривался как параметр продолжения. Было реализовано продолжение по гравитационному параметру до его значения равного единице. В результате была решена краевая задача, к которой сводится проблема оптимизации траектории перелета КА с идеально-регулируемой двигательной установкой. Найденные параметры краевой задачи оказались такими:

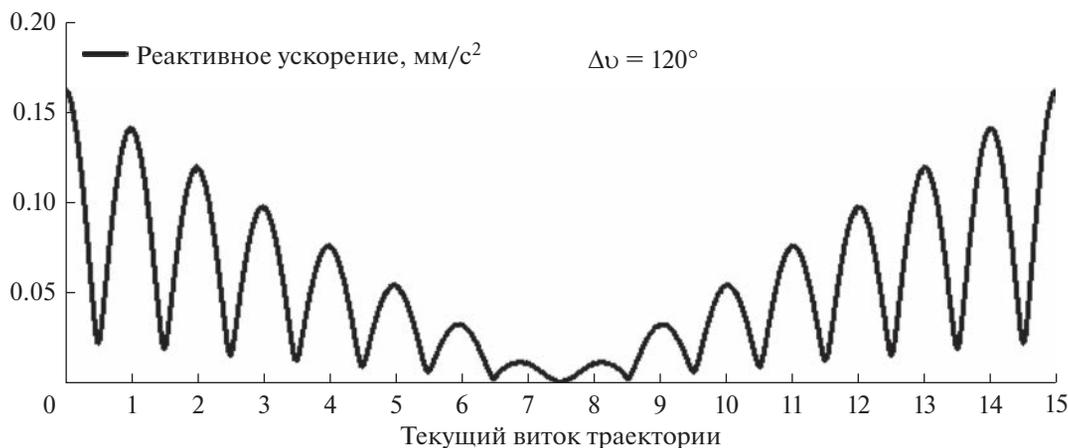
$$v_o = 0; \quad \lambda_{v_r}(0) = -3.06850 \cdot 10^{-6};$$

$$\lambda_{v_n}(0) = -2.89001 \cdot 10^{-4};$$

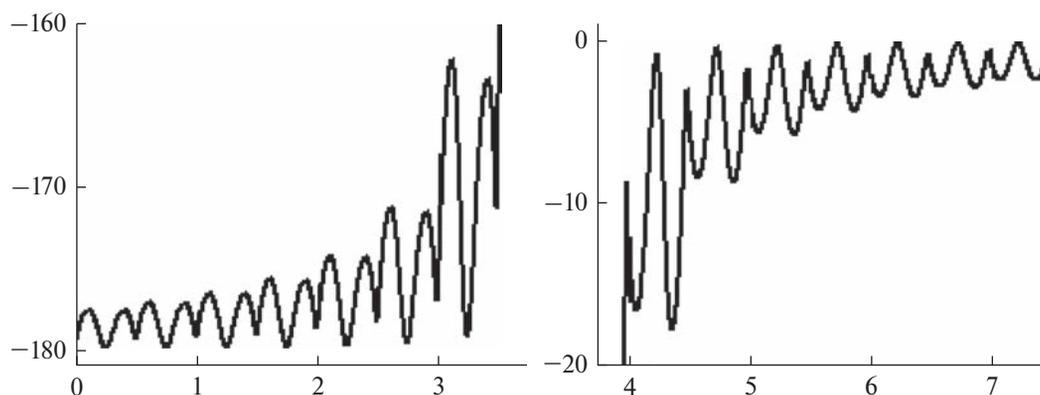
$$\lambda_r(0) = -1.66895 \cdot 10^{-3};$$

$$\lambda_t(0) = -7.94673 \cdot 10^{-7}.$$

На рис. 2 показано реактивное ускорение вдоль траектории перелета (как функция текущей угловой дальности перелета, отложенной в витках траектории). Виден колебательный характер представленной зависимости. На каждом витке траектории максимальное реактивное ускорение сообщается КА в начале и конце каждого витка (в перигейной области витков траектории). Минимальное реактивное ускорение сообщается КА в апогейных областях витков траектории. Приведенная зависимость практически симметрична относительно средней точки траектории перелета. Значения реактивного ускорения на первом витке траектории четко соответствуют значениям ускорения на последнем витке траектории. Точно так же ускорение на втором витке траектории соответствуют ускорению на предпоследнем витке



**Рис. 2.** Реактивное ускорение ( $\text{мм/с}^2$ ) как функция текущей угловой дальности перелета (витки траектории). КА с идеально-регулируемой двигательной установкой. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования  $120^\circ$ .



**Рис. 3.** Угол атаки (град) как функция текущего времени перелета (сут). Левый рисунок – для первой половины траектории перелета, правый – для второй. КА с идеально-регулируемой двигательной установкой. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования  $120^\circ$ .

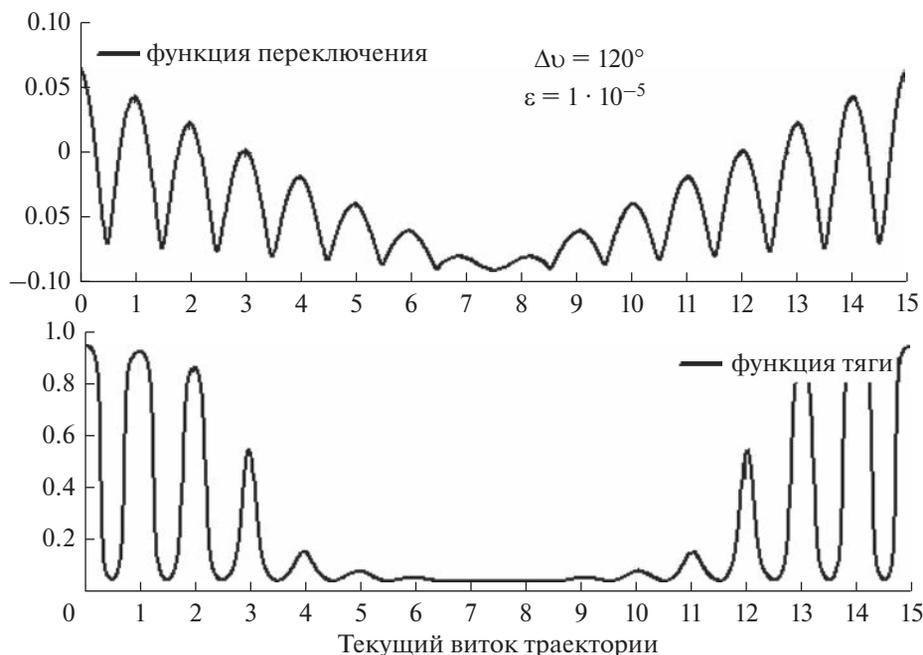
траектории. Можно утверждать, что справедливо равенство  $acs(\beta) = acs(\beta_f - \beta)$ , где  $acs$  – величина ускорения;  $\beta$  – текущая угловая дальность;  $\beta_f$  – угловая дальность всего перелета.

На первой половине траектории перелета одновременно уменьшаются максимальная и минимальная величина реактивного ускорения, амплитуда колебаний реактивного ускорения. На второй половине траектории перелета наблюдается обратный процесс. Минимальная величина реактивного ускорения практически равна нулю ( $5 \cdot 10^{-5} \text{ мм/с}^2$ ) в средней точке траектории перелета. Максимальная величина реактивного ускорения оказывается равной  $0.163 \text{ мм/с}^2$ . Заметим, что она существенно меньше располагаемой величины рассматриваемого КА с его нерегулируемой двигательной установкой. В начале перелета эта установка может обеспечить реактивное ускорение равное  $0.290 \text{ мм/с}^2$ . Это свидетельствует о

том, что требуемое фазирование с рассматриваемой угловой дальностью перелета может быть реализовано рассматриваемым транспортным космическим средством.

На рис. 3 показано изменение угла атаки вдоль траектории перелета. Видно, что на первой половине траектории перелета угол атаки изменяется в диапазоне  $-180^\circ \dots -160^\circ$ . Тяга двигателя тормозит КА, обеспечивая уменьшение большой полуоси оскулирующей орбиты и ее периода. На второй половине траектории перелета угол атаки изменяется в диапазоне  $-20^\circ \dots 0^\circ$ . Тяга двигателя разгоняет КА, обеспечивая увеличение периода оскулирующей орбиты и выход на рабочую орбиту с требуемым углом фазирования.

Характеристическая скорость анализируемого маневра оказалась равной  $2.917 \text{ м/с}$ . Требуемая масса топлива  $0.168 \text{ кг}$ .



**Рис. 4.** Изменение функции переключения двигателя (вверху) и функции тяги (внизу) вдоль траектории перелета. КА с нерегулируемой двигательной установкой. Параметр сглаживания функции тяги  $\varepsilon = 10^{-5}$ . Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования  $120^\circ$ .

*Этап 2. Нахождение оптимальной траектории перелета для КА с нерегулируемой двигательной установкой при сглаженной функции тяги*

При реализации продолжения от траектории перелета КА с идеально-регулируемой двигательной установкой к траектории перелета КА с нерегулируемой двигательной установкой был выбран относительно большой параметр сглаживания ( $\varepsilon = 10^{-5}$ ). При этом удалось реализовать указанное продолжение и решить краевую задачу принципа максимума КА с нерегулируемой двигательной установкой. Найденные параметры краевой задачи оказались такими:

$$\begin{aligned} v_o &= -7.28400 \cdot 10^{-8}; \quad \lambda_{v_r}(0) = -4.90196 \cdot 10^{-3}; \\ \lambda_{v_n}(0) &= -0.37735; \quad \lambda_r(0) = -2.17942; \\ \lambda_r(0) &= -1.03254 \cdot 10^{-3}; \quad \lambda_m(0) = 0.99949. \end{aligned}$$

На рис. 4 показано изменение функции переключения и функции тяги вдоль траектории перелета. Общий колебательный характер функции переключения и ее симметричность очень похож на характер изменения реактивного ускорения для КА с идеально-регулируемой двигательной установкой, приведенный на рис. 1. Функция переключения многократно меняет свой знак. Это происходит на четырех первых и четырех последних витках траектории. На семи средних витках траектории функция переключения отрицательна. Если бы анализировалось релейное управле-

ние по тяге (функция тяги рассматривалась в виде выражения (10)), то активные участки существовали бы только на первых и последних четырех витках траектории. При этом эти участки располагались бы в перигейной области витков траектории, а апогейные области витков траектории были бы пассивными. На первых четырех витках траектории протяженность и длительность участков с положительной функцией переключения уменьшается с увеличением номера витка траектории. На последних четырех витках траектории протяженность и продолжительность участков с положительной функцией переключения увеличивается с увеличением номера витка траектории.

На том же рис. 1 приведена и функция тяги. Легко видеть, что она очень далека от релейной функции. При использованном параметре сглаживания  $\varepsilon = 10^{-5}$  максимальная величина функции тяги равна 0.95, минимальная величина функции тяги равна 0.35.

На рис. 5 показано изменение угла атаки вдоль траектории перелета. Видно, что на первых трех сутках перелета угол атаки изменяется в диапазоне  $-182^\circ \dots -170^\circ$ . Тяга двигателя тормозит КА, обеспечивая уменьшение большой полуоси оскулирующей орбиты и ее периода. На последних трех сутках перелета угол атаки изменяется в диапазоне  $-10^\circ \dots 3^\circ$ . Тяга двигателя разгоняет КА, обеспечивая увеличение периода оскулирующей орбиты и выход на рабочую орбиту с требуемым углом фазирования.

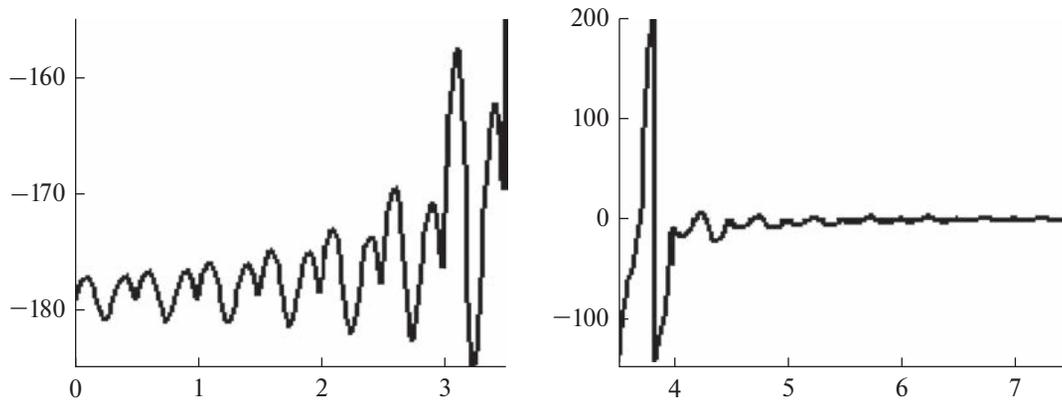


Рис. 5. Угол атаки (град) как функция текущего времени перелета (сут). Левый рисунок – для первой половины траектории перелета, правый рисунок – для второй. КА с нерегулируемой двигательной установкой. Параметр сглаживания функции тяги  $\epsilon = 10^{-5}$ . Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования  $120^\circ$ .

Характеристическая скорость анализируемого маневра оказалась равна 13.944 м/с. Требуемая масса топлива 0.803 кг. Обратим внимание, что характеристическая скорость маневра по сравнению с вариантом идеально регулируемой двигательной установки (2.917 м/с) значительно увеличилась, как и требуемая масса топлива.

*Этап 3. Нахождение оптимальной траектории перелета для КА с нерегулируемой двигательной установкой для последовательности значений параметра сглаживания  $\epsilon$  функции тяги*

На этапе решается краевая задача принципа максимума при последовательном уменьшении параметра сглаживания функции тяги. Принципиально при этом можно было воспользоваться гладким продолжением по этому параметру [5], но выбран другой, более простой для реализации прием. На предыдущем этапе было получено решение при параметре сглаживания  $10^{-5}$ . Используя параметры краевой задачи этого решения в качестве начального, решается краевая задача для параметра сглаживания, уменьшенного в 10 раз. Эта процедура продолжается до тех пор, пока функция тяги не примет релейный вид или не удастся добиться хорошей точности удовлетворения конечных условий краевой задачи. В анализируемой задаче в большинстве случаев удавалось решить краевую задачу с весьма малым параметром сглаживания, при котором функция тяги была практически релейной.

Приведем характеристики полученной траектории перелета для варианта, когда параметр сглаживания равен  $\epsilon = 10^{-9}$ . Найденные параметры краевой задачи оказались такими:

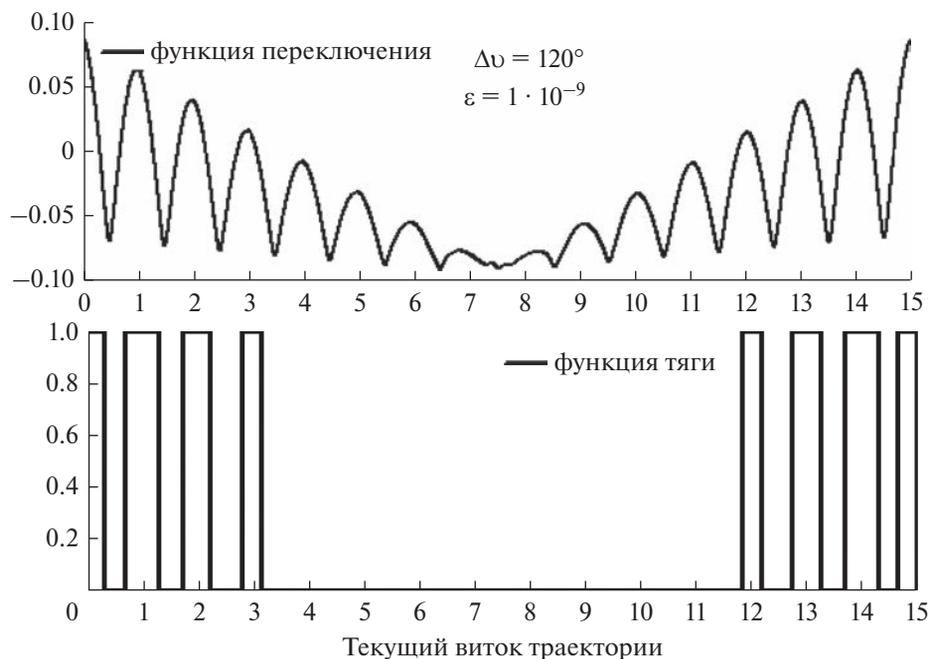
$$\begin{aligned} v_o &= 0.12352; \quad \lambda_{v_r}(0) = -0.03130; \\ \lambda_{v_n}(0) &= -0.43107; \quad \lambda_r(0) = -2.48205; \\ \lambda_r(0) &= -1.18862 \cdot 10^{-3}; \quad \lambda_m(0) = 0.99942. \end{aligned}$$

На рис. 6 показано изменение функции переключения и функции тяги вдоль траектории перелета. Общий характер функции переключения по отношению к варианту с параметром сглаживания равным  $10^{-5}$  не изменился. Можно отметить увеличение протяженности и продолжительности четвертого и пятого интервала положительности функции переключения. Анализ приведенной на том же рис. 6 функции тяги дает возможность утверждать, что она имеет весьма четкий релейный характер. Минимальное значение этой функции очень близко к нулю ( $3.466 \cdot 10^{-6}$ ). Максимальное значение очень близко к единице (0.999996).

Можно утверждать, что на оптимальной траектории перелета существует восемь активных участков. Они расположены в перигейной области первых четырех и последних четырех витков траектории. Характеристическая скорость анализируемого маневра уменьшилась почти в два раза до 7.7907 м/с по отношению к варианту траектории с параметром сглаживания равным  $10^{-5}$  (при  $\epsilon = 10^{-5}$  ее величина составляет 13.944 м/с). Требуемая масса топлива уменьшилась до 0.449 кг (была 0.803 кг).

*Этап 4. Нахождение оптимальной траектории перелета для КА с нерегулируемой двигательной установкой с релейной функцией тяги*

Рассматриваемый этап становится заключительным. Фиксируется полученная на предыдущем этапе структура оптимального управления. Конкретнее, считается, что на траектории перелета есть восемь активных участков, разделенных семью пассивными участками. Угловая дальность перелета, при которой меняется режим работы двигательной установки (она включается или выключается) выступает как параметр краевой задачи. В рассматриваемом случае таких параметров оказывается 14. Вместе с шестью ранее рассмат-



**Рис. 6.** Изменение функции переключения двигателя (вверху) и функции тяги (внизу) вдоль траектории перелета. КА с нерегулируемой двигательной установкой. Параметр сглаживания функции тяги  $\varepsilon = 10^{-9}$ . Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования  $120^\circ$ .

риваемыми параметрами  $v_o$ ,  $\lambda_{v_r}(0)$ ,  $\lambda_{v_n}(0)$ ,  $\lambda_r(0)$ ,  $\lambda_t(0)$ ,  $\lambda_m(0)$  общее число параметров краевой задачи возрастает до 20. Увеличивается до 20 и число условий типа равенства краевой задачи. К ним добавляются 14 условий оптимальности: в момент изменения режима работы двигательной установки функция переключения должна быть равна нулю.

Новые параметры краевой задачи вводятся как отношение угловой дальности перелета при смене режима работы двигателя к полной угловой дальности перелета. При этом эти параметры рассматриваются как компоненты вектора  $\beta d$  размерности 14. Все эти компоненты принадлежат диапазону  $0 \dots 1$  и каждая последующая компонента вектора строго больше предыдущей.

Начальное приближение для описываемого вектора вычисляется по траектории, полученной на предыдущем этапе исследования. Для анализируемого маневра компоненты этого вектора оказались такими:  $\beta d^* = (0.01999; 0.04405; 0.08443; 0.11357; 0.14783; 0.18526; 0.20888; 0.78890; 0.81180; 0.84970; 0.88373; 0.91301; 0.95334; 0.97740)$ .

Приведем характеристики полученной траектории перелета для варианта релейной функции тяги. Найденные параметры краевой задачи оказались такими:

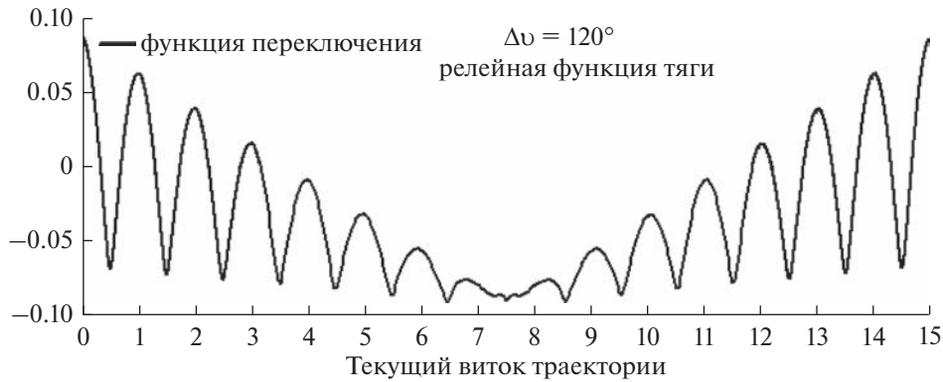
$$\begin{aligned} v_o &= 0.01133; \lambda_{v_r}(0) = -0.01207; \\ \lambda_{v_n}(0) &= -0.43234; \lambda_r(0) = -2.49677; \\ \lambda_t(0) &= -1.18786 \cdot 10^{-3}; \lambda_m(0) = 0.99942. \end{aligned}$$

$$\beta d^* = (0.02101; 0.04504; 0.08541; 0.11456; 0.14874; 0.18628; 0.20966; 0.79017; 0.81342; 0.85104; 0.88519; 0.91436; 0.95472; 0.97875).$$

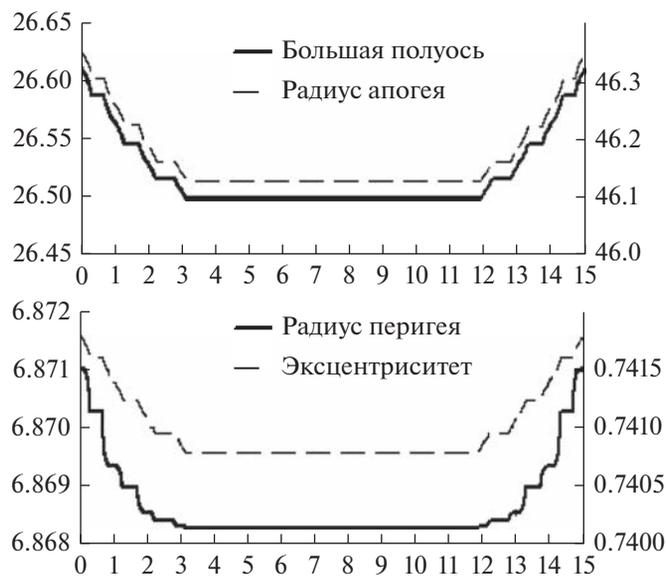
На рис. 7 показано изменение функции переключения вдоль траектории перелета. Эта функция практически идентична функции переключения, показанной выше на рис. 6 (функции переключения для варианта с параметром сглаживания  $10^{-9}$ ).

#### АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА. УГЛОВАЯ ДАЛЬНОСТЬ ПЕРЕЛЕТА 15 ВИТКОВ. УГОЛ ФАЗИРОВАНИЯ $120^\circ$

На оптимальной траектории перелета существует восемь активных участков. Они расположены в перигейной области первых четырех и последних четырех витков траектории. Первые активные участки обеспечивают уменьшение большой полуоси и радиуса апогея оскулирующей орбиты (рис. 8). Большая полуось оскулирующей орбиты за четыре активных участка уменьшается с 26610.2 до 26496.7 км. Одновременно уменьшается и радиус апогея оскулирующей орбиты с 46349.4 до 46125.1 км. На следующих девяти витках траектории двигатель КА не включается, поэтому элементы орбиты не меняются. Работа двигателя на последних четырех активных участках обеспечивает увеличение орбитальной энергии КА. При этом увеличиваются и большая полуось, и радиус апогея оскулирующей



**Рис. 7.** Изменение функции переключения двигателя вдоль траектории перелета. КА с нерегулируемой двигательной установкой. Релейная функция тяги. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования  $120^\circ$ .



**Рис. 8.** Большая полуось (сплошная линия, тыс. км), радиус апогея (пунктирная линия, тыс. км), радиус перигея (справа, сплошная линия, тыс. км) и эксцентриситет (справа, пунктирная линия) оскулирующей орбиты как функции текущей угловой дальности перелета (витки). КА с нерегулируемой двигательной установкой. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования  $120^\circ$ .

шей орбиты, и обеспечивается выход КА на рабочую орбиту с заданным углом фазирования.

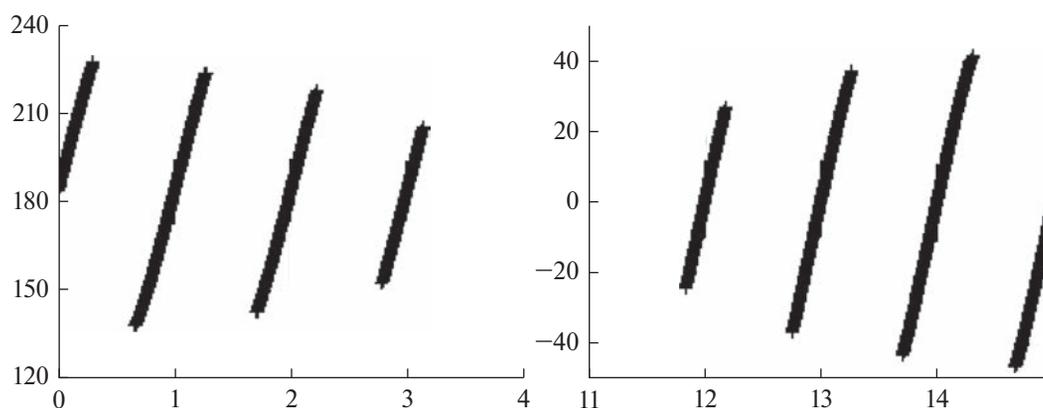
На рис. 8 справа показано изменение эксцентриситета и радиуса перигея оскулирующей орбиты вдоль траектории перелета. Характер изменения этих элементов аналогичен характеру изменения уже проанализированных выше элементов. Следует заметить, что диапазон изменения радиуса перигея существенно меньше диапазона изменения радиуса апогея. Если радиус апогея на первых витках траектории уменьшается на 224.3 км, то радиус перигея уменьшается только на 2.7 км. Это объясняется тем, что активные участки траектории расположены в перигейной области витков траектории.

Диапазон изменения эксцентриситета оскулирующей орбиты вдоль траектории перелета та-

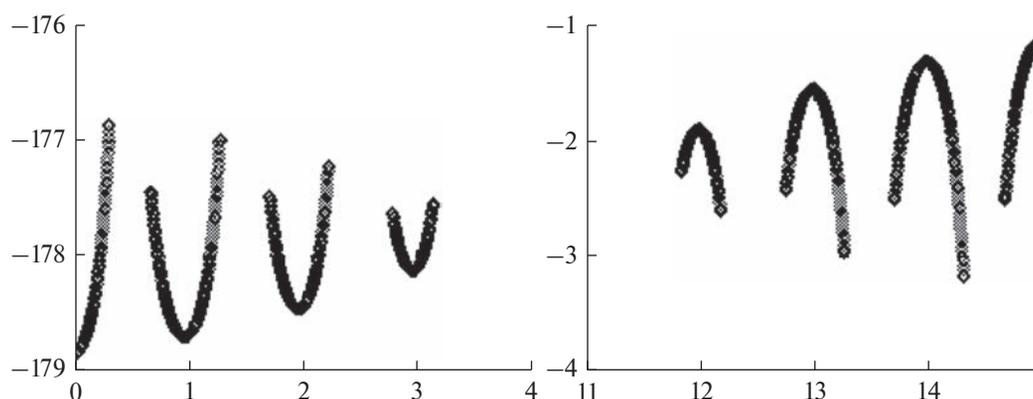
кой: максимальное значение равно 0.741791 (в начальной и конечной точке траектории перелета), минимальное значение равно 0.740787 (на девяти пассивных витках перелетной траектории, расположенных в середине траектории перелета).

На рис. 9 показана оптимальная программа угла тангажа на активных участках траектории перелета. Отдельно слева показана программа по углу тангажа на начальных четырех активных участках траектории полета. Видно, что на каждом активном участке оптимальная программа по тангажу очень близка к линейной программе. Угол тангажа изменяется в диапазоне  $140^\circ \dots 230^\circ$ . На последних четырех активных участках (правая часть рисунка) диапазон изменения угла тангажа  $-45^\circ \dots 40^\circ$ .

На рис. 10 показано изменение угла атаки на активных участках траектории перелета. Видно, что на



**Рис. 9.** Программа угла тангажа на активных участках траектории (град) как функция текущей угловой дальности (витки). Левый рисунок для первых четырех витков траектории, правый — для последних четырех витков. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования  $120^\circ$ .



**Рис. 10.** Угол атаки (град) как функция текущего времени перелета (сут). Левый рисунок для первой половины траектории перелета, правый — для второй. КА с идеально-регулируемой двигательной установкой. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования  $120^\circ$ .

первых четырех активных участках траектории перелета угол атаки изменяется в очень узком диапазоне  $-179^\circ \dots -176.8^\circ$ . Тяга двигателя тормозит КА, обеспечивая уменьшение большой полуоси оскулирующей орбиты и ее периода. На последних четырех активных участках траектории угол атаки изменяется в узком диапазоне  $-3.2^\circ \dots -1.0^\circ$ . Тяга двигателя прежде всего разгоняет КА, обеспечивая увеличение периода оскулирующей орбиты и выход на рабочую орбиту с требуемым углом фазирования. Можно отметить, что на всех активных участках есть небольшая компонента реактивного ускорения “прижимающего” КА к Земле.

Характеристическая скорость анализируемого маневра с точностью до четырех значащих цифр не изменилась по отношению к варианту траектории с параметром сглаживания функции тяги равному  $\epsilon = 10^{-9}$ : она равна 7.791 м/с. Не изменилась и требуемая масса топлива — 448.7 г.

В табл. 1 приведены значения характеристической скорости рассматриваемого маневра и требуемой массы топлива для идеально-регулируемой двигательной установки и для нерегулируе-

мой двигательной установки с несколькими вариантами функции тяги. Видно, что уменьшение параметра сглаживания функции тяги приводит к асимптотическому уменьшению характеристической скорости маневра. При параметре сглаживания  $\epsilon = 10^{-5}$  полученная характеристическая скорость почти на 80% больше характеристической скорости маневра при релейной функции тяги. При  $\epsilon = 10^{-6}$  эта разница сокращается до 12%, а при  $\epsilon = 10^{-7}$  — до 1.2%. Можно считать, что для рассматриваемого маневра оценка характеристической скорости может проводиться с использованием сглаживания функции тяги при параметре сглаживания  $10^{-7} \dots 10^{-8}$ .

Обратим внимание, что использование идеально-регулируемой двигательной установки дало бы возможность довольно сильно (в 2.5 раза) уменьшить характеристическую скорость маневра (по отношению к варианту КА с нерегулируемой двигательной установкой) с 7.8 до 2.9 м/с.

Перейдем к анализу характеристик оптимальных траекторий перелета КА как функций угла фазирования.

**Таблица 1.** Характеристическая скорость и масса требуемого топлива для нескольких значений параметра сглаживания функции тяги. Угловая дальность перелета 15 витков. Угол фазирования 120°

Вариант анализа		Характеристическая скорость, м/с	Масса требуемого топлива, г
Идеально-регулируемый двигатель		2.917	168.0
Нерегулируемый двигатель, параметр сглаживания $\epsilon$	$10^{-5}$	13.944	803.0
	$10^{-6}$	8.713	501.9
	$10^{-7}$	7.882	454.0
	$10^{-8}$	7.799	449.2
	$10^{-9}$	7.791	448.7
Релейная функция тяги		7.791	448.7

### АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА КАК ФУНКЦИЙ УГЛА ФАЗИРОВАНИЯ

В разделе рассмотрены результаты оптимизации траектории перелета с угловой дальностью 15 витков для диапазона угла фазирования 15°...180°, т.е. для диапазона, при котором траектория перелета будет находиться внутри заданной орбиты, чтобы “догнать” точку орбиты, в которую КА должен быть переведен.

На левой части рис. 11 показана характеристическая скорость рассматриваемого маневра как функция величины угла фазирования. Характеристическая скорость с увеличением угла фазирования монотонно увеличивается и при угле фазирования 180° (переводе КА в противоположную точку орбиты) достигает 1814 м/с.

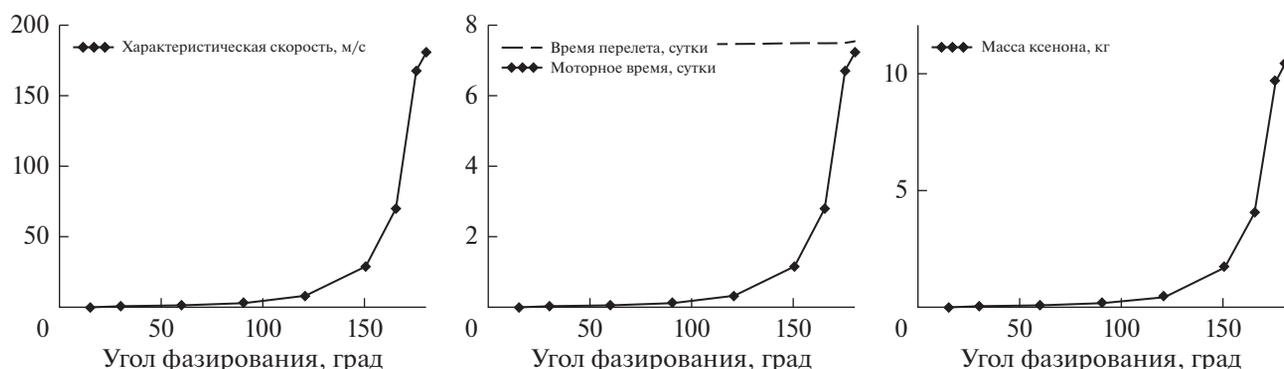
На средней части рис. 11 представлено изменение времени перелета и моторного времени перелета при увеличении величины угла фазирования. В рассматриваемой постановке (фиксирована угловая дальность перелета) время перелета практически не изменяется. Время работы двигательной установки с увеличением угла

фазирования монотонно увеличивается и при угле фазирования 180° становится близким к времени перелета. Продолжительность единственного пассивного участка на траектории перелета всего 0.345 сут. Он расположен в середине траектории перелета.

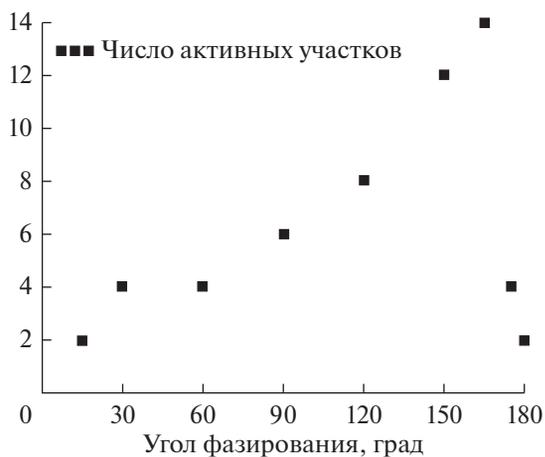
Справа на рис. 11 показано изменение требуемой массы топлива при изменении величины угла фазирования. Эта масса монотонно увеличивается с увеличением угла фазирования и при угле фазирования 180° равна 10.4 кг.

На рис. 12 изображено изменение числа активных участков на перелетной траектории (важнейшей характеристики схемы перелетной траектории) при увеличении угла фазирования. При совсем малом угле фазирования траектория перелета имеет всего два активных участка, которые разделены большим по продолжительности пассивным участком. Активные участки расположены на первом и последнем витках траектории.

При увеличении угла фазирования (при усложнении транспортной задачи) число активных участков увеличивается. Так, при величине угла фазирования, принадлежащего диапазону



**Рис. 11.** Характеристическая скорость (левый рисунок, м/с), время перелета и моторное время перелета (средний рисунок, сут) и требуемая масса ксенона (правый рисунок, кг) как функции величины угла фазирования (число витков перелетной траектории). Угловая дальность перелета 15 витков.



**Рис. 12.** Число активных участков на траектории перелета как функция величины угла фазирования (град). Угловая дальность перелета 15 витков.

30°...60°, на оптимальной траектории перелета — четыре активных участка, разделенных тремя пассивными участками. При угле фазирования 90° траектория КА состоит из шести активных участков, разделенных пятью пассивными участками. Увеличение числа активных участков продолжается до угла фазирования равного 165°. При таком угле фазирования рассматриваемая 15-витковая траектория КА состоит из 14 активных участков, разделенных 13 пассивными участками. При дальнейшем увеличении угла фазирования рассматриваемая транспортная задача становится такой сложной, что пассивные участки на витках перелета пропадают. Появляются витки траектории, на которых двигатель КА не выключается. Он работает не только в перигейной области витков траектории (как было при меньших величинах угла фазирования), но и в апогейной области. При угле фазирования 175° траектория состоит из четырех активных участков, разделенных тремя пас-

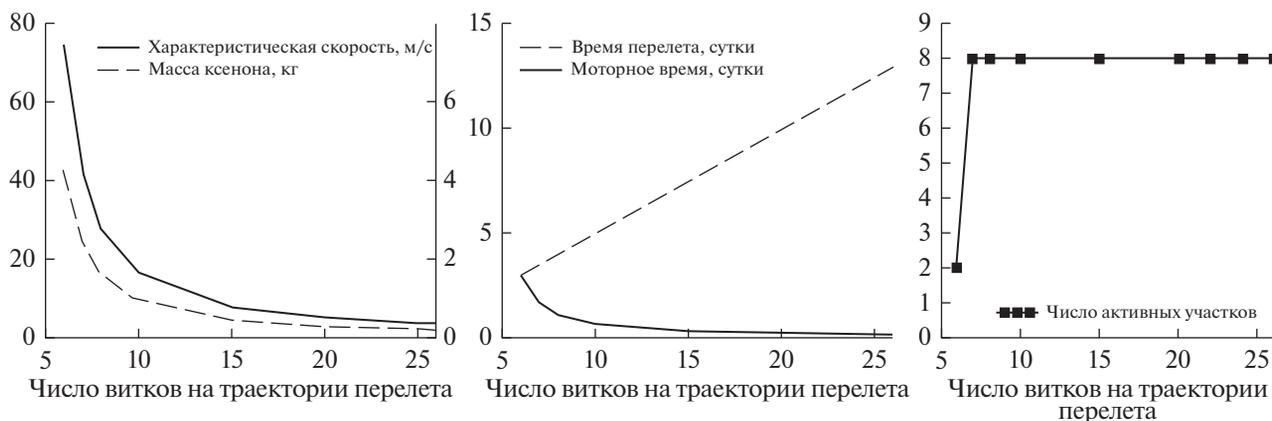
сивными участками. При угле фазирования 180° траектория состоит всего из двух больших по продолжительности активных участков, разделенных одним небольшим пассивным участком. Обратим внимание на то, что число активных участков всегда четное. Они расположены симметрично относительно середины траектории перелета.

### АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА КАК ФУНКЦИЙ УГЛОВОЙ ДАЛЬНОСТИ И ВРЕМЕНИ ПЕРЕЛЕТА

Угол фазирования в данном разделе предполагается равным 120°. На рис. 13 показаны зависимости характеристической скорости перелета, требуемой массы топлива, времени перелета и моторного времени перелета как функции угловой дальности перелета. Угловая дальность изменяется в диапазоне от 6 до 26 витков траектории. При угловой дальности шесть витков время перелета оказывается близким минимальному времени перелета.

Анализ показывает, что увеличение угловой дальности перелета с 6 до 26 витков траектории приводит к уменьшению характеристической скорости рассматриваемого маневра фазирования более чем в 20 раз (с 73.3 до 3.6 м/с). Особенно резкое изменение характеристической скорости наблюдается в областях малых угловых дальностей перелета. Так, увеличение угловой дальности с 6 до 10 витков траектории позволяет уменьшить характеристическую скорость в 4.5 раза (до величины 16.3 м/с).

Аналогично изменяется с увеличением угловой дальности перелета и требуемая масса топлива. Для 6-виткового перелета эта масса равна 4.27 кг, для 10-виткового — 0.94 кг, для 26-виткового — всего 21 г.



**Рис. 13.** Характеристическая скорость маневра и требуемая масса топлива (левый рисунок), время перелета и моторное время перелета (центральный рисунок) и число активных участков на траектории перелета как функции угловой дальности перелета (число витков). Угол фазирования 120°.

Время перелета увеличивается практически линейно с увеличением угловой дальности перелета. Для 6-виткового перелета оно равно 2.96 сут, для 26-виткового перелета — 12.96 сут. Время работы двигателя с увеличением угловой дальности перелета монотонно уменьшается и для 26-виткового перелета составляет всего 3.45 ч.

Интересен характер изменения структуры оптимальной траектории (числа активных и пассивных участков) с изменением угловой дальности перелета (зависимость показана на рис. 13 справа). Только траектория с минимально рассмотренной угловой дальностью (6-витковая траектория) имеет всего два активных участка, которые разделены небольшим пассивным участком. Для всех остальных рассмотренных угловых дальностей перелета число активных участков оказалось равно восьми. Увеличение числа витков траектории приводит к тому, что увеличивается пассивный участок между первыми четырьмя и последними четырьмя активными участками. В середине траектории появляется все больше витков, на которых двигатель не включается.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем исследовании показан разработанный автором алгоритм оптимизации схемы и траектории перевода КА из одной точки эллиптической орбиты в другую точку той же орбиты. Применяемый подход базируется на принципе максимума, использовании метода продолжения по параметру и введении параметра сглаживания функции тяги. Важным свойством используемого метода следует рассматривать утверждение, что используемое начальное приближение не содержит никаких признаков, определяющих число активных участков и их расположение на траектории перелета. Это достигается благодаря использованию в качестве начального приближения траектории перелета с идеально-регулируемой двигательной установкой и применению метода продолжения по гравитационному параметру, начальное значение которого выбирается так, чтобы без включения двигателя была решена рассматриваемая транспортная задача при известной угловой дальности и времени перелета.

Численный анализ выполнен при оптимизации траектории перевода КА между точками сильно вытянутой орбиты (орбиты типа “Молния”). Рассматриваемая ЭРДУ обеспечивает начальное ускорение немного меньше  $0.3 \text{ мм/с}^2$ . Анализ численных результатов показал:

- Оптимальная траектория перелета оказывается практически симметричной относительно линии апсид начальной орбиты КА. Расположение активных участков, их число и протяженность практически симметрично средней точке траектории. Типичная траектория перелета со-

стоит из трех участков. На первом из них на каждом витке траектории есть активный участок, расположенный в области перицентра витка. На втором участке двигатель не включается на витках траектории. На третьем участке траектории, как и на первом, двигатель включается на каждом витке в области перицентра этого витка.

- При положительном угле фазирования (при переводе КА в точку орбиты, расположенную впереди точки, в которой находится КА) на первом участке траектории угол атаки на активных сегментах витков находится в весьма узком диапазоне:  $-179^\circ \dots -177^\circ$ . Тяга двигателя активно тормозит КА и немного прижимает его вектор скорости к гравитационному центру. На третьем участке траектории угол атаки на активных сегментах витков находится в диапазоне  $-3^\circ \dots -1^\circ$ . При этом тяга двигателя активно разгоняет КА и опять немного прижимает его вектор скорости к гравитационному центру. При отрицательном угле фазирования картина меняется симметрично: тяга двигателя на первых витках траектории КА увеличивает скорость КА, на последних витках — уменьшает.

- За счет увеличения угловой дальности перелета (увеличения числа витков траектории) существует возможность значительно уменьшить характеристическую скорость маневра. Особенно эффективно использовать увеличение угловой дальности перелета при перелетах с малой угловой дальностью, немного большей минимальной угловой дальности.

- Увеличение угловой дальности перелета позволяет реализовать перевод КА в противоположную точку орбиты с относительно малой характеристической скоростью маневра. Для орбиты типа “Молния” величина характеристической скорости такого маневра при 15-витковой траектории перелета составляет 181 м/с.

- Число активных участков на оптимальной траектории остается постоянным при увеличении угловой дальности перелета (числа витков траектории) в широком диапазоне угловой дальности перелета. В этот диапазон не входит только область минимальной угловой дальности. При увеличении угловой дальности перелета в середине перелетной траектории увеличивается протяженность пассивного участка, появляются новые пассивные витки (витки, на которых ЭРДУ не включается). В середине траектории появляется все больше витков, на которых двигатель не включается.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00329 “Развитие теории и методов проектирования траекторий космических аппаратов с двигательными установками большой и малой тяги”, <https://rscf.ru/project/22-19-00329/>.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ,  
ОПИСЫВАЮЩАЯ ИЗМЕНЕНИЕ  
СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ  
НА ПАССИВНЫХ УЧАСТКАХ ТРАЕКТОРИИ  
ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕЛЕТА

Уравнения пассивного движения КА в рамках задачи двух тел интегрируются аналитически. Система дифференциальных уравнений, описывающих это движение, имеет полный набор первых интегралов. Выражения для этих первых интегралов дает возможность описать аналитическими соотношениями изменение и фазовых, и сопряженных переменных на пассивных участках оптимальной траектории перелета КА.

Сначала приведем систему дифференциальных уравнений, описывающую движение КА на пассивном участке траектории.

$$\frac{dV_r}{d\beta} = V_n - \frac{1}{rV_n}; \quad \frac{dV_n}{d\beta} = -V_r; \quad \frac{dr}{d\beta} = \frac{rV_r}{V_n}; \quad (П.1)$$

$$\frac{dt}{d\beta} = \frac{r}{V_n}.$$

Обратим внимание, что масса КА на пассивных участках не меняется и ее нецелесообразно включать в вектор фазовых переменных. При этом на пассивном участке сопряженная к массе переменная остается постоянной.

Система дифференциальных уравнений, описывающих изменение сопряженных переменных на пассивном участке траектории, при выбранном векторе фазовых переменных имеет вид:

$$\frac{d\lambda_{V_r}}{d\beta} = \lambda_{V_n} - \lambda_r \frac{r}{V_n};$$

$$\frac{d\lambda_{V_n}}{d\beta} = \frac{r}{V_n^2} \left( -\lambda_{V_r} \frac{1+rV_n^2}{r^2} + \lambda_r V_r + \lambda_t \right); \quad (П.2)$$

$$\frac{d\lambda_r}{d\beta} = \frac{-1}{V_n} \left( \frac{\lambda_{V_r}}{r^2} + \lambda_r V_r + \lambda_t \right); \quad \frac{d\lambda_t}{d\beta} = 0.$$

Если известен полный набор независимых первых интегралов для системы дифференциальных уравнений, описывающих изменение вектора фазовых переменных  $y$  (его размерность в рассматриваемом случае равна четырем)  $\Psi_i(y) = C_i$  (здесь  $C_i$  – константы интегрирования,  $i = 1...4$ ), то для нахождения компонент вектора сопряженных переменных  $\lambda$  можно использовать соотношение

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^4 \left( D_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_i} \right), \quad i = 1...4. \quad (П.3)$$

В приведенном равенстве  $D_j$  – константы интегрирования сопряженной системы дифференциальных уравнений.

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СИСТЕМЫ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,  
ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ КА  
НА ПАССИВНЫХ УЧАСТКАХ  
ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим набор первых интегралов плоского движения задачи двух тел в виде следующего набора первых интегралов:

$$\Psi_1(V_n, r) = rV_n = \sigma;$$

$$\Psi_2(V_r, V_n, r) = \sqrt{V_r^2 + V_n^2} \times$$

$$\times \sigma \cos \left( \beta - \arctg \left( \frac{V_r}{V_n} \right) \right) - \cos(\beta) = e_x; \quad (П.4)$$

$$\Psi_3(V_r, V_n, r) = \sqrt{V_r^2 + V_n^2} \times$$

$$\times \sigma \sin \left( \beta - \arctg \left( \frac{V_r}{V_n} \right) \right) + \sin(\beta) = e_y;$$

$$\Psi_4(t) = nt - E + e \sin(E) = nt_\pi.$$

Первый из перечисленных интегралов есть интеграл площадей ( $\sigma$  – константа площадей); второй и третий интеграл – проекции вектора эксцентриситета; четвертый интеграл – уравнение Кеплера, в нем  $n$  – среднее движение;  $E$  – эксцентрисическая аномалия;  $t_\pi$  – дата прохождения КА перигея орбиты.

Приведем соотношения, которые были использованы для определения производных  $\partial \Psi_j / \partial y_i$ , входящих в выражение для сопряженных переменных (П.3).

Производные от  $\Psi_1$  по фазовым переменным:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial V_r} = 0; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_n} = r; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = V_n; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = 0. \quad (П.5)$$

Производные от  $\Psi_2$  по фазовым переменным:

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial V_r} = rV_n \sin(\beta);$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial V_n} = r(2V_n \cos(\beta) + V_r \sin(\beta)); \quad (П.6)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial r} = V_n(V_n \cos(\beta) + V_r \sin(\beta)); \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = 0.$$

Производные от  $\Psi_3$  по фазовым переменным:

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial V_r} = rV_n \cos(\beta);$$

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial V_n} = r(V_r \cos(\beta) - 2V_n \sin(\beta)); \quad (П.7)$$

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial r} = V_n(V_r \cos(\beta) - V_n \sin(\beta)); \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = 0.$$

Производные от  $\Psi_4$  по фазовым переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_r} &= \sin(E) \frac{\partial e}{\partial V_r} + t \frac{\partial n}{\partial V_r} - (1 - e \cos(E)) \frac{\partial E}{\partial V_r}; \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_n} &= \sin(E) \frac{\partial e}{\partial V_n} + t \frac{\partial n}{\partial V_n} - (1 - e \cos(E)) \frac{\partial E}{\partial V_n}; \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial r} &= \sin(E) \frac{\partial e}{\partial r} + t \frac{\partial n}{\partial r} - (1 - e \cos(E)) \frac{\partial E}{\partial r}; \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} &= n. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Входящие в последние соотношения производные эксцентриситета по фазовым переменным, среднее движение, производные от среднего движения по фазовым переменным и производные от эксцентрической аномалии по фазовым переменным:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{(V_r^2 + V_n^2)r^2 V_n^2 + 1 - 2rV_n^2}, \quad \frac{\partial e}{\partial V_r} = \frac{r^2 V_r V_n^2}{e}; \\ \frac{\partial e}{\partial V_n} &= \frac{rV_n [r(V_r^2 + 2V_n^2) - 2]}{e}; \\ \frac{\partial e}{\partial r} &= \frac{V_n^2 [r(V_r^2 + V_n^2) - 1]}{e}. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

$$\begin{aligned} n &= \left( \frac{2}{r} - V_r^2 - V_n^2 \right)^{3/2}; \\ \frac{\partial n}{\partial V_r} &= -3V_r \sqrt{\frac{2}{r} - V_r^2 - V_n^2}; \\ \frac{\partial n}{\partial V_n} &= -3V_n \sqrt{\frac{2}{r} - V_r^2 - V_n^2}; \\ \frac{\partial n}{\partial r} &= \frac{-3}{r^2} \sqrt{\frac{2}{r} - V_r^2 - V_n^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial V_r} &= \frac{V_n^2 \sin(E)}{V_r e} \left( r + \frac{2 - rV_n^2}{hrV_n^2} \right); \\ \frac{\partial E}{\partial V_n} &= \frac{V_n \sin(E)}{e} \left( \frac{1}{h} - r \right); \quad \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\sin(E)}{r^2 e h}, \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

где  $h$  – константа энергии,  $h = V_r^2 + V_n^2 - \frac{2}{r}$ .

В приведенных выражениях для производных входит эксцентрическая аномалия  $E$ , точнее: синус и косинус этого угла. Приведем соотношения, определяющие значения этих характеристик по значениям фазовых переменных:

$$\begin{aligned} \sin(E) &= \frac{2 \operatorname{tg}(E/2)}{1 + (\operatorname{tg}(E/2))^2}; \\ \cos(E) &= \frac{1 - (\operatorname{tg}(E/2))^2}{1 + (\operatorname{tg}(E/2))^2}, \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

где  $\operatorname{tg}(E/2) = \frac{\sqrt{1-e} r V_r V_n}{\sqrt{1+e r V_n^2 - 1+e}}$ .

Система равенств (П.3) для анализируемой модели движения имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{V_r} &= D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_r} + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_r} + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_r} + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_r}; \\ \lambda_{V_n} &= D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_n} + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_n} + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_n} + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_n}; \\ \lambda_r &= D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial r} + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial r}; \\ \lambda_t &= D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Обратим внимание на то, что от времени зависит только последний из записанных первых интегралов системы дифференциальных уравнений для фазовых переменных (П.4). Поэтому из (П.13) следует, что сопряженная к времени переменная постоянна на пассивном участке траектории и может быть записана так:

$$\lambda_t = D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} = D_4 n. \quad (\text{П.14})$$

### АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ НА ПАССИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА

Считаем известными значения фазовых ( $V_{r0}$ ,  $V_{n0}$ ,  $r_0$ ,  $t_0$ ) и сопряженных ( $\lambda_{V_{r0}}$ ,  $\lambda_{V_{n0}}$ ,  $\lambda_{r_0}$ ,  $\lambda_{t_0}$ ) переменных в начальной точке пассивного участка. Считаем известной и угловую дальность перелета  $\Delta\beta$ , т.е. угол между радиус-векторами начальной и конечной точек рассматриваемого пассивного участка траектории (с учетом полного числа витков на участке). Требуется определить значения сопряженных переменных в конечной точке рассматриваемого пассивного участка траектории  $\lambda_{V_{rf}}$ ,  $\lambda_{V_{nf}}$ ,  $\lambda_{rf}$ ,  $\lambda_{tf}$ . Конечно, при этом приходится находить и значения фазовых переменных в конечной точке пассивного участка траектории. Это выполняется по известным соотношениям задачи двух тел [6, 11].

Приведем описание разработанного алгоритма определения значений сопряженных переменных в произвольной (прежде всего, в конечной) точке пассивного участка оптимальной траектории.

1. По значениям фазовых переменных ( $V_{r0}$ ,  $V_{n0}$ ,  $r_0$ ,  $t_0$ ) находится константа энергии  $h$ , большая полуось и средние движения  $n$  орбиты КА. Используя равенство (П.13), находится константа интегрирования  $D_4$ :  $D_4 = \lambda_{t_0}/n$ .

2. По приведенным выше соотношениям (П.5)–(П.8) находятся производные от  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$

по фазовым переменным  $V_{ro}$ ,  $V_{no}$ ,  $r_o$  в начальной точке пассивного участка.

3. Систему равенств (П.13) рассматриваем как линейную неоднородную систему алгебраических уравнений относительно констант интегрирования  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$ . Решение этой системы дает значения констант интегрирования  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  на анализируемом пассивном участке траектории перелета:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_r}|_0 & \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_r}|_0 & \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_r}|_0 \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_n}|_0 & \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_n}|_0 & \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_n}|_0 \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}|_0 & \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}|_0 & \frac{\partial \Psi_3}{\partial r}|_0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_{V_{ro}} - \frac{\lambda_r}{n} \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_r}|_0 \\ \lambda_{V_{no}} - \frac{\lambda_r}{n} \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_n}|_0 \\ \lambda_{r_o} - \frac{\lambda_r}{n} \frac{\partial \Psi_4}{\partial r}|_0 \end{pmatrix} \quad (\text{П.15})$$

4. Используя соотношения задачи двух тел, определяем фазовые переменные в конечной точке рассматриваемого пассивного участка траектории  $V_{rf}$ ,  $V_{nf}$ ,  $r_f$ ,  $t_f$ .

5. По приведенным выше соотношениям (П.5)–(П.8) находятся производные от  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $\Psi_3$  по фазовым переменным  $V_{rf}$ ,  $V_{nf}$ ,  $r_f$  в конечной точке рассматриваемого пассивного участка траектории.

6. Используя соотношения, следующие из системы (П.13), определяются сопряженные переменные в конечной точке рассматриваемого участка:

$$\begin{aligned} \lambda_{V_{rf}} &= D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_r}|_f + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_r}|_f + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_r}|_f + \\ &+ D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_r}|_f; \quad \lambda_{V_{nf}} = D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial V_n}|_f + D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial V_n}|_f + \\ &+ D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial V_n}|_f + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial V_n}|_f; \quad \lambda_{r_f} = D_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}|_f + \\ &+ D_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial r}|_f + D_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial r}|_f + D_4 \frac{\partial \Psi_4}{\partial r}|_f; \quad \lambda_{t_f} = \lambda_{t_o}. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Konstantinov M.S., Obukhov V.A., Petukhov V.G. et al.* Spacecraft station keeping in the Molniya orbit using electric propulsion // Proc. 56th Intern. Astronautical Congress. 17–21 Oct. 2005, Fukuoka, Japan. 2005. Art. ID. IAC-05-C1.1.01. <https://doi.org/10.2514/6.IAC-05-C1.1.01>
2. *Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G. et al.* Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // Acta Astronautica. 2022. V. 197. P. 354–367. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.012>
3. *Petukhov V.* Application of the angular independent variable and its regularizing transformation in the problems of optimizing low-thrust trajectories // Cosmic Research. 2019. V. 57. Iss. 5. P. 351–363. <https://doi.org/10.1134/S001095251905006X>
4. *Ivanyukhin A., Petukhov V.* Optimization of multi-revolution limited power trajectories using angular independent variable // J. Optimization Theory and Applications. 2021. V. 191. Iss. 2. P. 575–599. <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01853-8>
5. *Константинов М.С., Петухов В.Г., Тейн М.* Оптимизация траекторий гелиоцентрических перелетов. М.: Изд. МАИ, 2015. 259 с.
6. *Konstantinov M.S., Thein M.* Method of interplanetary trajectory optimization for the spacecraft with low thrust and swing-bys // Acta Astronautica. 2017. V. 136. P. 297–311. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.02.018>
7. *Константинов М.С., Тейн М.* Оптимизация траекторий выведения космического аппарата на систему гелиоцентрических орбит // Косм. исслед. 2017. Т. 55. № 3. С. 226–235.
8. *Petukhov V.G.* One Numerical Method to Calculate Optimal Power Limited Trajectories // 24th Intern. Electric Propulsion Conf. 19–23 Sept. Moscow. 1995. Art. ID. IEPC-95-221. 7 p.
9. *Петухов В.Г.* Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Косм. исслед. 2012. Т. 50. № 3. С. 258–270.
10. *Петухов В.Г.* Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Косм. исслед. 2008. Т. 46. № 3. С. 224–237. (Cosmic Research. P. 219–232.) <https://doi.org/10.1134/S0010952508030052>
11. *Константинов М.С., Каменков Е.Ф., Перелыгин Б.П. и др.* Механика космического полета / под ред. В.П. Мишина. М.: Машиностроение, 1989. 410 с.