

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРОМ ТЯГИ ВОЗДУШНОГО ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНОГО ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ НАИСКОРЕЙШЕГО ИЗМЕНЕНИЯ ВЫСОТЫ АПОГЕЯ ОРБИТЫ С УЛЬТРАНИЗКИМ ПЕРИГЕЕМ

© 2023 г. А. С. Филатьев^{1, 2}, О. В. Янова^{2, 3, *}

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Московский авиационный институт, Москва, Россия

³Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская обл., Россия

*yanova2007@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.07.2022 г.

После доработки 04.10.2022 г.

Принята к публикации 08.10.2022 г.

Рассмотрена задача оптимального по быстродействию изменения высоты апогея орбит с ультранизким перигеем (высотой 120–250 км). Для компенсации аэродинамического сопротивления космического аппарата используется воздушный электрореактивный двигатель (ВЭРД), топливом для которого служат газы заборной атмосферы. Учтено падение эффективности ВЭРД с увеличением угла атаки и возможность работы ВЭРД только при достаточной концентрации газа в камере ионизации. Задача решена на основе принципа максимума Понтрягина в предположении малости аэродинамического сопротивления и тяги по сравнению с гравитационными силами. Представлены результаты исследований оптимальных программ управления вектором тяги ВЭРД в зависимости от параметров орбиты, компоновки КА, двигателя и мощности источника энергии.

DOI: 10.31857/S0023420622600222, EDN: LTGYMJ

ВВЕДЕНИЕ

Значительное повышение эффективности выполнения космическими аппаратами (КА) целевых задач может быть обеспечено за счет использования ультранизких околоземных орбит высотой 120–250 км (УНОО) [1–3].

Для компенсации аэродинамического сопротивления на таких орбитах могут использоваться воздушные электрореактивные двигатели (ВЭРД), в которых топливом служат газы окружающей атмосферы [4–13]. В общем случае ВЭРД включают: воздухозаборник (ВЗ), обеспечивающий захват атмосферного газа; термализатор (накопитель), в котором частицы газа тормозятся до тепловых скоростей; ионизационную камеру (ИК), в которой газ ионизируется; зону разгона, в которой ионизированный газ ускоряется в электромагнитном поле; и нейтрализатор эжектируемой плазменной струи. Для функционирования последних трех систем необходим источник энергии (ИЭ), в качестве которого предполагается использовать солнечные батареи (СБ).

Отказ от запасенного топлива позволит повысить срок активного существования и эффектив-

ность выполнения задач наблюдения земной поверхности и связи. В то же время использование ВЭРД требует решения ряда проблем, связанных с особенностями орбитального полета на ультранизких высотах: значительно возросшим влиянием аэродинамических сил и аномалий гравитационного поля Земли.

Задачи оптимального управления низкоорбитальными КА с ВЭРД рассмотрены в ряде работ. В работах [6, 7] решалась задача оптимального управления тягой ВЭРД за счет изменения скорости истечения реактивной струи для поддержания КА на круговой УНОО, включая оптимизацию высоты орбиты в исследовании [7]. Оптимизация проводилась на основе принципа максимума Понтрягина [14] в предположении постоянных мощности бортового источника энергии и коэффициента аэродинамического сопротивления с учетом несферичности Земли. В работе [9] получены оценки требуемой тяги и предложен алгоритм адаптивного управления тягой электроракетного двигателя (ЭРД) для компенсации возмущений, обусловленных аэродинамическим сопротивлением КА и солнечной радиацией на круговых околоземных орбитах высотой 150–450 км. Работа [10] посвя-

щена анализу реализуемости полета на УНОО на основе статистического моделирования орбитального движения КА с адаптивным управлением тягой ВЭРД на околоземных слабоэллиптических орбитах (разность высот апогея и перигея не превышает 9 км) высотой 160 и 225 км. В публикации [11] представлен обзор предложений по управлению аэродинамическим качеством аппарата для поддержания заданной орбиты, стабилизации КА, маневрирования для предотвращения столкновений с различными объектами, фазирования и схода с орбиты.

Оптимизация управления вектором тяги КА с ВЭРД рассматривалась авторами в работах [15–18]. В исследованиях [15–17] задачи максимизации изменения высоты апогея и изменения наклона орбит сведены к поиску локально оптимального управления, обеспечивающего максимальную скорость изменения максимизируемых параметров в каждый момент времени с учетом малости влияния на функционал возмущающего ускорения по сравнению с гравитационным. Эффективность оптимальности программы управления с подобным критерием при решении задачи в детерминированной постановке может рассматриваться как мера потенциальной возможности компенсации случайных возмущений. Переход к локальной оптимизации управления позволил получить аналитические соотношения для синтеза управления КА с ВЭРД и его эффективности в предположении постоянных скорости истечения и аэродинамического сопротивления без учета зависимости тяги ВЭРД от угла между продольной осью КА и вектором скорости (угла атаки) и ограничения на допустимый уровень концентрации газа в ИК.

Эффективность тяги ВЭРД существенно зависит от угла атаки вследствие уменьшения эффективной площади входа в ВЗ в плоскости, перпендикулярной вектору скорости, и относительного числа молекул, пролетающих через ВЗ без столкновения с его стенками при наличии угла атаки [8, 13, 19, 20]. В работе [18] при “локальной” оптимизации управления учитывалось снижение тяги при ненулевых углах атаки из-за изменения эффективной площади входа в ВЗ.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления вектором тяги КА с ВЭРД для максимизации изменения высоты апогея орбиты с ультранизкой начальной высотой перигея с учетом ограничения на допустимый уровень концентрации газа в ИК и зависимости тяги ВЭРД и аэродинамического сопротивления от угла атаки КА. Решение задачи получено на основе принципа максимума Понтрягина [14] в предположении малости изменения параметров орбиты в правых частях уравнений движения за один виток. Приведены результаты исследований

оптимальных программ управления углом атаки и тягой в зависимости от параметров задачи: начальной высоты перигея и апогея, скорости истечения, параметров компоновки КА.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается движение центра масс КА с ВЭРД в плоскости эллиптической орбиты с начальными высотами перигея h_{pi} и апогея h_{ai} . Задача состоит в определении оптимального управления вектором тяги ВЭРД для максимального изменения высоты апогея h_a без изменения высоты перигея h_p с учетом зависимости тяги и аэродинамического сопротивления от угла атаки и ограничения на допустимую концентрацию газа в ИК. Требование равенства конечной высоты перигея ее начальному значению обусловлено ограничениями на высоту полета КА с ВЭРД [16]. Ограничение сверху на высоту полета КА с ВЭРД следует из необходимости создания давления газа в камере ионизации не менее $5 \cdot 10^{-5}$ торр для стабильной работы ВЭРД [4]. Ограничение снизу определяется располагаемой мощностью ИЭ (СБ) для компенсации аэродинамического сопротивления КА: ниже некоторой высоты не удается обеспечить требуемую мощность электропитания для создания тяги, так как увеличение площади СБ в свою очередь еще более увеличивает сопротивление.

Движение центра масс КА описывается в геоцентрической инерциальной системе координат с началом координат в центре Земли. Ось Ox направлена в перигей орбиты (в случае круговой орбиты – по начальному радиус-вектору), ось Oy параллельна вектору скорости в перигее орбиты.

Приняты следующие допущения:

1. Нормальная аэродинамическая сила пренебрежимо мала.
2. Скорость c истечения реактивной струи ВЭРД постоянна: $c = \text{const}$.
3. Вектор тяги ВЭРД направлен вдоль продольной оси КА.
4. Масса КА постоянна: $m = \text{const}$.
5. Форма Земли сферическая.

Замечание. Допущение о сферической форме Земли основано на инвариантности аэродинамического сопротивления КА и тяги ВЭРД по отношению к плотности атмосферы (см. далее соотношения для расчета тяги и сопротивления (5), (6)). Это принципиально важное отличие ВЭРД от электроракетного двигателя, поскольку плотность атмосферы даже при движении по круговой орбите может меняться во много раз.

С учетом соотношений [21]

$$r_\pi = \frac{p}{1+e}, \quad r_a = \frac{p}{1-e} \quad (1)$$

и уравнений в оскулирующих переменных [22] запишем уравнения для изменения по времени радиуса перигея h_π , радиуса апогея h_α , электрической энергии E для создания тяги и истинной аномалии ϑ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr_\pi}{dt} &= \frac{1}{V} \left[a_t \frac{2p}{(1+e)^2} (1 - \cos\vartheta) + a_s r \sin\vartheta \right], \\ \frac{dr_\alpha}{dt} &= \frac{1}{V} \left[a_t \frac{2p}{(1-e)^2} (1 + \cos\vartheta) - a_s r \sin\vartheta \right], \\ \frac{dE}{dt} &= W_p, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\sqrt{p}}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где r – расстояние от центра Земли до центра масс КА, $r = p/(1 + e \cos\vartheta) = \sqrt{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}$; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор КА; $V = \sqrt{(1 + 2e \cos\vartheta + e^2)/p} = \sqrt{(\mathbf{V}, \mathbf{V})}$, $\mathbf{V}$ – вектор скорости КА, $\mathbf{V} = (V_r, V_n)$; V_r – составляющая вектора скорости, направленная по радиус-вектору $\mathbf{r}$, $V_r = (e \sin\vartheta)/\sqrt{p}$; V_n – составляющая вектора скорости, направленная по нормали к $\mathbf{r}$ в сторону движения, $V_n = (1 + e \cos\vartheta)/\sqrt{p}$; p – фокальный параметр; e – эксцентриситет; $\mathbf{a} = (a_t, a_s)^T$, с компонентами: a_t – касательная (направлена по вектору скорости), a_s – нормальная (направлена к центру кривизны траектории в плоскости орбиты); W_p – мощность, потребляемая ВЭРД; t – время.

Переменные в выражении (2) и далее используются в безразмерном виде, причем старые обозначения переменных сохраняются:

$$\left. \begin{aligned} r &= \left(\frac{r}{R_E} \right)_d, \quad V = \left(\frac{V}{V_R} \right)_d, \quad m = \left(\frac{m}{m_i} \right)_d, \\ t &= \left(\frac{t}{t_R} \right)_d, \quad g = \left(\frac{g}{g_o} \right)_d, \quad \mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a}}{g_o} \right)_d, \\ P &= \left(\frac{P}{mg_o} \right)_d, \quad X = \left(\frac{X}{mg_o} \right)_d, \quad W_p = \left(\frac{W_p}{mg_o V_R} \right)_d, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где нижним индексом d обозначены размерные величины; R_E – средний радиус Земли; m_i – начальная масса КА (в силу допущения 4, $m = (m/m_i)_d = 1$); g_o – ускорение свободного падения на поверхности Земли, $V_R = \sqrt{g_o R_E}$, $t_R = \sqrt{R_E/g_o}$; P – тяга ВЭРД; X – аэродинамическое сопротивление КА.

Компоненты возмущающего ускорения создаются тягой ВЭРД P и аэродинамическим сопротивлением X :

$$\left. \begin{aligned} a_t &= \frac{P(\alpha) \cos\alpha - X(\alpha)}{m}, \\ a_s &= -\frac{P(\alpha) \sin\alpha}{m}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где α – угол между вектором скорости и вектором тяги – угол атаки.

Вектор тяги

$$\mathbf{P} = P \mathbf{e}_P = \left(\zeta \frac{\mu_{out}(\alpha) c}{mg_o} \right)_d \mathbf{e}_P, \quad (5)$$

где $\mu_{out}(\alpha)$ – удельный расход массы топлива, $\mu_{out}(\alpha) = \eta_c \mu_{in}(\alpha)$; $\mu_{in}(\alpha)$ – скорость поступления массы газа в ВЗ, $(\mu_{in}(\alpha))_d = \rho(h) V A_{in} k_p(\alpha) V_R$; η_c – эффективность забора газа, $0 \leq \eta_c \leq 1$; h – высота полета КА; $\rho(h)$ – плотность атмосферы; $k_p(\alpha)$ – коэффициент эффективности ВЗ в зависимости от угла атаки [19, 20]; A_{in} – площадь входного сечения ВЗ, ζ – параметр включения двигателя, принимающий значение нуль при неработающем двигателе и единица при работающем; $\mathbf{e}_P$ – единичный вектор тяги.

Потребляемая ВЭРД мощность W_p определяется по формуле $W_p = \mu_{out} c^2 / 2\eta_T$.

Вектор силы сопротивления

$$\mathbf{X} = -X \mathbf{e}_V = -\left(\frac{0.5 \rho(h) A_{SC} (V V_R)^2 c_{xa}(\alpha)}{mg_o} \right)_d \mathbf{e}_V, \quad (6)$$

где $c_{xa}(\alpha)$ – коэффициент аэродинамического сопротивления КА; A_{SC} – площадь поперечного сечения КА; $\mathbf{e}_V = \mathbf{V}/V$.

Для создания тяги необходимо, чтобы концентрация газа в ИК $n_{IC}(\alpha)$ была не меньше минимально допустимой n_{min} , при которой возможна его ионизация:

$$n_{IC}(\alpha) = n(h) k_c k_p(\alpha) \geq n_{min}, \quad (7)$$

где $n(h)$ – концентрация газа в атмосфере; k_c – коэффициент компрессии газа в ИК, определяющий, во сколько раз увеличивается концентрация газа в ИК по сравнению с концентрацией во входном потоке.

Отсюда следует, что $\xi \equiv 0$ при $n_{IC} < n_{min}$.

На угол атаки КА наложено ограничение

$$|\alpha| \leq \alpha_{max}, \quad (8)$$

где α_{max} – максимально допустимый угол атаки.

Ограничение (8) угла атаки КА с ВЭРД в первую очередь обусловлено снижением эффективности поступления атмосферных газов в ВЗ, что показано далее.

В качестве компонент вектора управления $\mathbf{u}$ приняты угол атаки α и параметр включения двигателя ζ :

$$\mathbf{u} = \{\alpha, \zeta\}^T, \quad \mathbf{u} \in U, \quad (9)$$

$$U = \{\alpha \mid \alpha \leq \alpha_{\max}, n_{IC}(\alpha) \geq n_{\min}, \zeta = \{0, 1\}\}.$$

Реализация заданных углов атаки может обеспечиваться известными средствами стабилизации и управления движением КА вокруг центра масс, достоинства и недостатки использования которых для управления вектором тяги рассматривались в исследовании [23]. Отметим, что возрастание аэродинамических моментов на УНОО относительно возмущающих моментов других типов увеличивает влияние аэродинамической компоновки КА и возможности использования специальных аэродинамических поверхностей (например, [24]).

В начальный момент времени $t_i = 0$,

$$\vartheta(t_i) = \vartheta_i = 0, \quad h_{\pi}(t_i) = h_{\pi i}, \quad (10)$$

$$h_{\alpha}(t_i) = h_{\alpha i}, \quad E(t_i) = E_i = 0.$$

В силу сделанных допущений достаточно рассмотреть движение КА с ВЭРД на одном витке орбиты $\vartheta \in [0, 2\pi]$. В конечный момент времени t_f :

$$\vartheta(t_f) = \vartheta_f = 2\pi, \quad h_{\pi}(t_f) = h_{\pi f} = h_{\pi i}. \quad (11)$$

Функционал задачи — максимум изменения высоты апогея за виток орбиты при условии равенства начальной $h_{\pi i}$ и конечной $h_{\pi f}$ высоты перигея:

$$\Phi = \Delta h_{\alpha f} \Big|_{h_{\pi f} = h_{\pi i}} \Rightarrow \max_{\mathbf{u} \in U}, \quad (12)$$

где $\Delta h_{\alpha f} = h_{\alpha f} - h_{\alpha i}$, $h_{\alpha f} = h_{\alpha}(t_f)$.

Модель аэродинамического сопротивления

Аэродинамическое сопротивление — одно из основных слагаемых возмущающего воздействия на движение КА на высотах менее 300 км. Оценка аэродинамического сопротивления КА зависит от принятой модели взаимодействия молекул с поверхностью, температуры и молекулярного состава атмосферы, температуры и шероховатости материала поверхности и т.д. Обзор различных моделей взаимодействия молекул с поверхностью и сравнение полученных с их использованием коэффициентов аэродинамических сил приведены в публикациях [24–27]. Наиболее простой представляется максвелловская модель взаимодействия, в которой используется единственный коэффициент σ , определяющий долю молекул, испытывающих диффузное отражение от поверхности [28]. Результаты анализа движения аппаратов на высотах менее 300 км показывают, что наиболее точное описание аэродинамических сил может быть получено в предположении практически полностью

диффузного отражения молекул ($\sigma \approx 1$) [29–32]. Доминирование диффузного отражения означает возрастание роли поверхностей КА, параллельных потоку, в аэродинамическом сопротивлении.

При оптимизации управления углом атаки КА на основе принципа максимума Понтрягина использование аэродинамического сопротивления КА в форме представленных в работах [24–32] моделей приведет к существенному усложнению математической и численной процедуры решения краевой задачи, к которой сводится оптимизационная. В связи с этим для регуляризации исследований в настоящей работе предложена модель аэродинамического сопротивления КА, позволяющая без существенной потери точности использовать простые аналитические зависимости аэродинамического сопротивления от характеристик атмосферы и угла атаки КА.

Для наглядности формирования модели аэродинамического сопротивления определим проекции сечений КА плоскостями, параллельными и перпендикулярными продольной оси КА и плоскости орбиты π_{orb} (рис. 1): A_{SC} — площадь и обозначение поперечного сечения КА, A_{pn} — площадь и обозначение проекции сечений КА на плоскость π_{pn} , параллельную продольной оси КА и перпендикулярную π_{orb} , A_{pp} — площадь и обозначение проекции сечений КА на плоскость π_{pp} , параллельную продольной оси КА и π_{orb} . Тогда, предполагая, что движение КА происходит без скольжения (плоскость симметрии КА проходит через вектор скорости) и, принимая A_{SC} в качестве характерной площади, коэффициент аэродинамического сопротивления КА с учетом исследований [28, 33] представим в виде

$$c_{xa} = c_{xa_n} + c_{xa_par}, \quad (13)$$

где c_{xa_n} — коэффициент аэродинамического сопротивления, $c_{xa_n} = c_{x_0} \cos \alpha$, характеризующегося проекцией A_{SC} , c_{x_0} — коэффициент аэродинамического сопротивления КА при нулевом угле атаки; c_{xa_par} — коэффициент аэродинамического сопротивления, $c_{xa_par} = c_{xa_pn} + c_{x_pp}$, характеризующегося проекциями A_{pn} и A_{pp} соответственно: $c_{xa_pn} = k_{pn} c_{x_0} |\sin \alpha|$, $k_{pn} = A_{pn} / A_{SC}$, $c_{x_pp} = k_{pp} c_{x_{||}}$, $k_{pp} = A_{pp} / A_{SC}$, $c_{x_{||}} = 1 / (\sqrt{\pi} S_{\infty})$ — коэффициент аэродинамического сопротивления пластины при нулевом угле атаки; S_{∞} — скоростное соотношение, равное отношению скорости набегающего потока V к тепловой скорости молекул в ИК.

Из приведенных соотношений видно, что $c_{xa_pn} = 0$ при $\alpha = 0$, что не соответствует режиму диффузного отражения молекул. Для учета вклада проекций A_{pn} в сопротивление при $\alpha = 0$ предложена аппроксимация $|\sin \alpha|$:

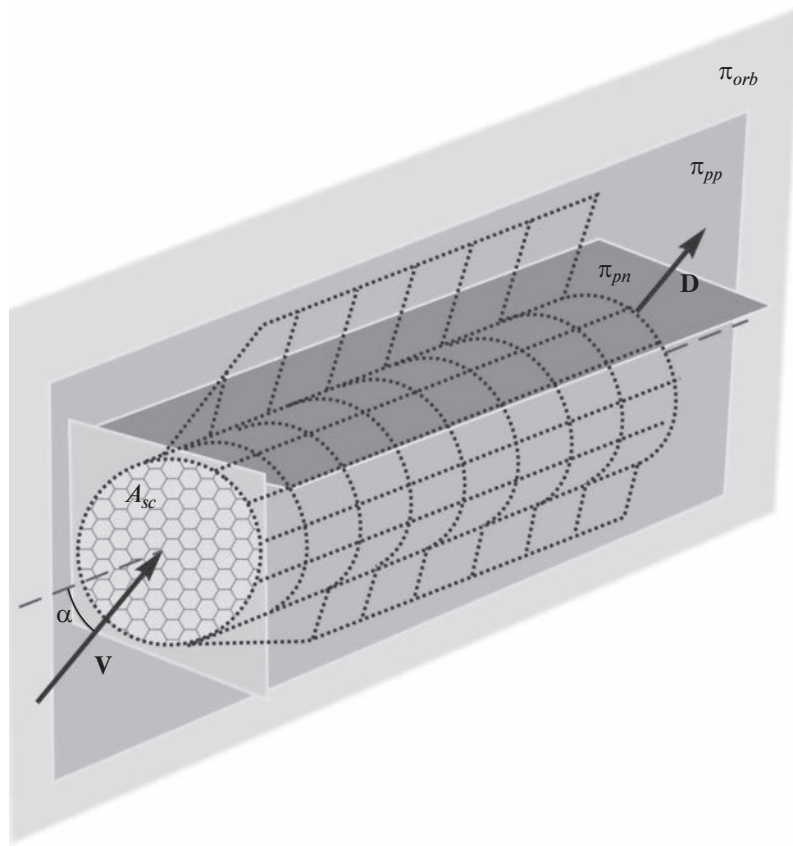


Рис. 1. Схема расположения плоскостей, на которые проецируются поверхности КА при создании модели аэродинамических сил, по отношению к продольной оси КА и плоскости орбиты π_{orb} .

$$\tilde{f}(\alpha) \approx c_{x_{//}} \sqrt{1 + (\sin \alpha / c_{x_{//}})^2}. \quad (14)$$

Как следует из выражения (14), $\tilde{f}(0) = c_{x_{//}}$, а при $\alpha > 0$ функция $\tilde{f}(\alpha)$ позволяет аппроксимировать $|\sin \alpha|$ с достаточной точностью (рис. 2). В результате получаем модель аэродинамического сопротивления КА (6) с коэффициентом $c_{xa}(\alpha)$ в виде

$$c_{xa}(\alpha) = c_{x_0} \left(\cos \alpha + k_{pn} c_{x_{//}} \sqrt{1 + (\sin \alpha / c_{x_{//}})^2} \right) + k_{pp} c_{x_{//}}. \quad (15)$$

Для верификации сформированной модели (15) проведено ее сравнение с аэродинамическим сопротивлением, рассчитываемым по широко используемой при исследованиях движения в верхних слоях атмосферы модели “Diffuse Reflection with Incomplete Accommodation” (DRIA) [27, 29, 31]. Результаты сравнения с моделью DRIA для полностью диффузного отражения на рис. 3, рассчитанные для двух значений удлинения КА $\lambda_{sc} = 2$ и 4 при $k_{pn} = k_{pp}$, подтверждают возможность применения модели (15) для описания аэродинамического сопротивления аппаратов в свободномолекулярном потоке.

Модель тяги ВЭРД

Влияние угла атаки на величину тяги ВЭРД определяется уменьшением [18–20]:

- 1) эффективной площади входа в ВЗ $A_{in} \cos \alpha$,

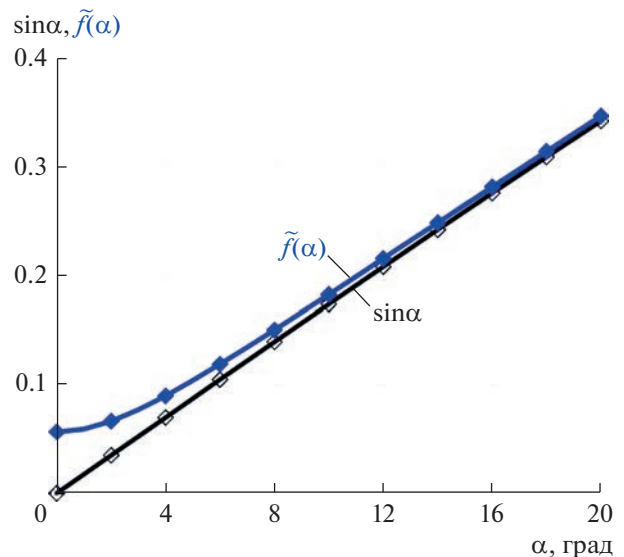


Рис. 2. Зависимости $\sin \alpha$ и его аппроксимации $\tilde{f}(\alpha)$ от угла атаки.

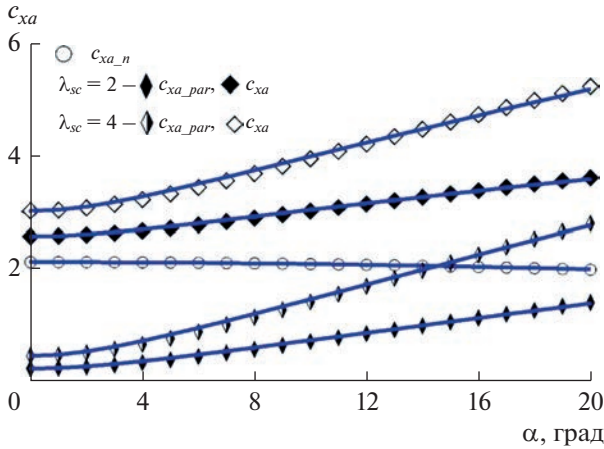


Рис. 3. Зависимости коэффициентов аэродинамического сопротивления от угла атаки модели (15) показаны сплошными линиями, маркерами отмечены расчеты по модели DR1A.

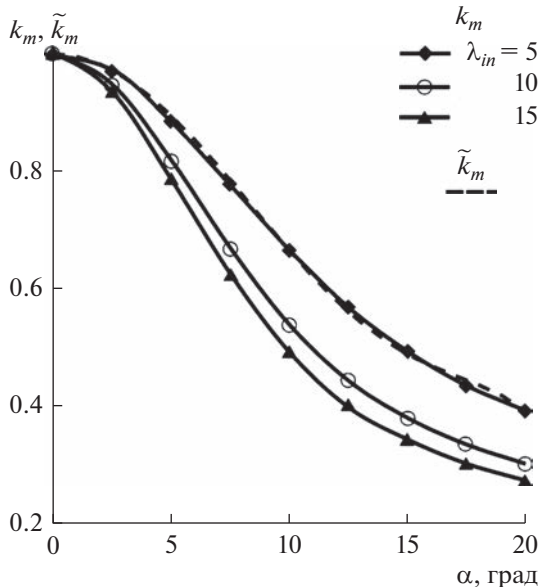


Рис. 4. Относительное снижение эффективности ВЭРД k_m из-за угла атаки α для цилиндрического канала ВЗ удлинением $\lambda_{in} = 5, 10, 15$ и аппроксимация $\tilde{k}_m(\alpha)$ для $\lambda_{in} = 5$.

2) относительного числа молекул, пролетающих через ВЗ без столкновения с его стенками при наличии угла атаки $k_m(\alpha)$.

Тогда общий коэффициент, характеризующий уменьшение эффективности ВЗ, а, следовательно, и концентрации молекул в ИК и пропорциональной ей тяги (5), равен:

$$k_p(\alpha) = k_m(\alpha) \cos \alpha. \quad (16)$$

В работе [19] представлены рассчитанные методом Монте-Карло и полученные эксперимен-

тально значения $k_m(\alpha)$ для цилиндрического ВЗ из нержавеющей стали удлинением $\lambda_{in} = 9.4$, которые практически совпали.

В работе [20] приведены рассчитанные методом Монте-Карло зависимости $k_m(\alpha)$ для цилиндрических ВЗ удлинением $\lambda_{in} = 5, 10, 15$ (рис. 4). Для использования в условиях оптимальности там же представлена аппроксимация $\tilde{k}_m(\alpha)$ зависимости $k_m(\alpha)$ для цилиндрического ВЗ с $\lambda_{in} = 5$ степенным многочленом с коэффициентами, полученными методом наименьших квадратов:

$$\tilde{k}_m(\alpha) = 1 + \sum_{i=1}^3 k_i \alpha^{2i}, \quad (17)$$

где $k_1 = -14.8094$, $k_2 = 142.150$, $k_3 = -504.470$, радиус апогея α в рад.

Модель атмосферы

Используется модель атмосферы ISO/FDIS 14222 (Space environment (natural and artificial) – Earth upper atmosphere. ISO/FDIS 14222, ISO 2013) для средней солнечной активности. Для использования в расчетах построены аппроксимации зависимости плотности и концентрации атмосферы от высоты полиномами 4-й степени.

РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Условия оптимальности

Решение задачи (12) основано на применении принципа максимума Понтрягина [14].

В силу малости возмущающего ускорения по сравнению с гравитационным $|\mathbf{a}| \ll |\mathbf{g}|$, фокальный параметр p и эксцентриситет e орбиты в правых частях системы уравнений (2) будем считать постоянными на протяжении одного витка орбиты:

$$p = \text{const}, \quad e = \text{const}.$$

Гамильтониан H системы (2) с учетом ограничений (7), (8):

$$H = \Psi_\pi \dot{\pi} + \Psi_\alpha \dot{\alpha} + \Psi_E \dot{E} + \Psi_\vartheta \dot{\vartheta} + \lambda_n (n_{\min} - n_{IC}) + \lambda_\alpha (|\alpha| - \alpha_{\max}), \quad (18)$$

где $\lambda_n, \lambda_\alpha$ – множители Лагранжа; Ψ – вектор сопряженных переменных, $\Psi = (\Psi_\pi, \Psi_\alpha, \Psi_E, \Psi_\vartheta)^T$, удовлетворяющий системе уравнений:

$$\dot{\Psi}^T = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}}, \quad \mathbf{z} = (r_\pi, r_\alpha, E, \vartheta)^T. \quad (19)$$

Из уравнений (19) и условия трансверсальности $[-\delta r_\alpha - H \delta t + (\Psi, \delta \mathbf{z})]_{t=t_f} = 0$ следует:

$$\Psi_\alpha = \text{const} = 1, \quad \Psi_E = \text{const} = 0. \quad (20)$$

Таблица 1. Варианты вычислений $\Delta H(\alpha, \zeta)$

$\Delta H_{opt H} = \Delta H \left(\alpha_{opt} = \alpha_{opt H} : \left\{ \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial \alpha^2} < 0 \right\}, \zeta = 1 \right)$
$\Delta H_{11} = \Delta H(\alpha_{opt} = \pm \alpha_{\max}, \zeta = 1)$
$\Delta H_{10} = \Delta H(\alpha_{opt} = \pm \alpha_{\max}, \zeta = 0)$
$\Delta H_{00} = \Delta H \left(\alpha_{opt} = 0 : \left\{ \frac{\partial \Delta H}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial^2 \Delta H}{\partial \alpha^2} < 0 \right\}, \zeta = 0 \right)$
$\Delta H_{n_i} = \Delta H(\alpha_{opt} = \alpha_{opt n} : n_{IC}(\alpha_{opt n}) = n_{\min}, \zeta = 1)$

В соответствии с условиями оптимальности [14]

$$\mathbf{u}_{opt} = \arg \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} H, \quad (21)$$

что приводит к определению максимума не дифференцируемой функции двух переменных

$$\Delta H(\alpha, \zeta) = \psi_{\pi} \dot{\pi} + \psi_{\alpha} \dot{\alpha} + \lambda_n(n_{\min} - n_{IC}) + \lambda_{\alpha}(|\alpha| - \alpha_{\max}), \quad (22)$$

который в данном случае находится в результате сравнения его значений для вариантов $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ (9), указанных в табл. 1.

В табл. 1 $\alpha_{opt H}$ вычисляется с помощью рекуррентной формулы:

$$\alpha_{opt H}^{k+1} = \frac{\partial \Delta H_{opt H}}{\partial \alpha}(\alpha_{opt H}^k) + \alpha_{opt H}^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

где с учетом (2), (5), (6), (15), (17), (18)

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_{opt H} &= \\ &= \tilde{k}_m(\alpha) \cos \alpha (A \cos \alpha + F \sin \alpha) + B \cos \alpha + C, \\ A &= 2\eta_c a_{\vartheta} c, \quad B = -a_{\vartheta} c_{x0} V, \\ C &= C_0 c_{x0} \sqrt{1 + \left(\frac{\sin \alpha}{c_{x0}} \right)^2}, \quad C_0 = -k_{pn} a_{\vartheta} c_{x0} V, \\ F &= \eta_c b_{\vartheta} c, \quad a_{\vartheta} = \frac{1 + \cos \vartheta}{(1 - e)^2} + \psi_{\pi} \frac{1 - \cos \vartheta}{(1 + e)^2}, \\ b_{\vartheta} &= \frac{\sin \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} (1 - \psi_{\pi}). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Начальное приближение $\alpha_{opt H}^0 = (F + C_0)/(4A(1 - k_1) + B)$ в выражении (23) определяется из решения уравнения

$$\frac{\partial \Delta H_{appr}}{\partial \alpha}(\alpha_{opt H}^0) = 0, \quad (25)$$

где ΔH_{appr} — аппроксимация (24) с учетом равенств (14), (17) путем разложения в ряд функций

угла атаки α в окрестности $\alpha = 0$ до α^2 включительно.

Для обеспечения требуемой точности численного интегрирования моменты, соответствующие угловым точкам в правых частях систем уравнений (2) и (19), определяются с достаточной точностью из решения в общем случае нелинейных уравнений методом хорд. Появление угловых точек связано с выходом на ограничения (7), (8) и сходом с них и сменой режимов полета в соответствии с условиями оптимальности (21) и табл. 1. Соответствующие невязки ε указаны в табл. 2.

При активном ограничении (7) угол атаки $\alpha_{opt n}$ определяется из решения нелинейного уравнения $n_{IC}(\alpha) = n_{\min}$ методом хорд с невязкой

$$\varepsilon = \left| k_p(\alpha) - \frac{n_{\min}}{n(h)k_c} \right|.$$

Решение краевой задачи

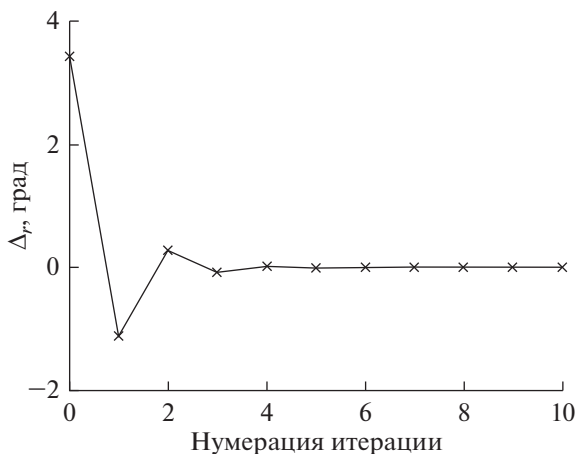
Использование принципа максимума Понтрягина позволяет свести исходную задачу поиска оптимального управления в функциональном пространстве к решению краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (2), (19). Для решения двухточечной краевой задачи применяются модифицированный метод Ньютона и метод гомотопии. При сделанных допущениях и с учетом равенств (20) варьируемым параметром выступает сопряженная переменная $\psi_n = \text{const}$, а соответствующая невязка Δ_{π} следует из условия (11): $\Delta_{\pi} = h_{\pi f} - h_{\pi i}$. Для определения оптимального управления в каждой точке траектории вычисляется оптимальный угол атаки α_{opt} в соответствии с условиями оптимальности (21) и табл. 1. На рис. 5 показано изменение невязки $\Delta_r = \alpha_{opt H}^{k+1} - \alpha_{opt H}^k$, $k = 0, 1, \dots$, по итерациям при применении рекуррентной формулы (23) для вычисления $\alpha_{opt} = \alpha_{opt H} = -9.40487$ град, полученного при $\Delta_r \leq 10^{-4}$ град.

Таблица 2. Невязки для отслеживания угловых точек методом хорд

Причина возникновения угловой точки	Невязка
Выход на ограничение (7) при $\vartheta < \pi$ и сход с него при $\vartheta > \pi$	$\varepsilon = \left 1 - \frac{n_{JC}(\alpha_{opt H})}{n_{min}} \right $
Сход с ограничения (7) при $\vartheta < \pi$ и выход на него при $\vartheta > \pi$:	
• при $\Delta H(\alpha_{max}, 0) > \Delta H(\alpha_{opt n}, 1)$	$\varepsilon = \left \Delta H(\alpha_{max}, 0) - \Delta H(\alpha_{opt n}, 1) \right $
• при $\Delta H(\alpha_{max}, 0) \leq \Delta H(\alpha_{opt n}, 1)$	$\varepsilon = \left 1 - \frac{n_{JC}(\alpha = 0)}{n_{min}} \right $
Смена режимов полета между $(\alpha_{opt H}, \zeta = 1)$ и $(\alpha_{max}, \zeta = 0)$	$\varepsilon = \left \Delta H(\alpha_{max}, 0) - \Delta H(\alpha_{opt H}, 1) \right $
Смена режимов полета между $(\alpha = 0, \zeta = 0)$ и $(\alpha_{max}, \zeta = 0)$	$\varepsilon = \left \Delta H(\alpha_{max}, 0) - \Delta H(\alpha = 0, 0) \right $

Таблица 3. Параметры ВЭРД, КА и орбит

Параметр	Значения
Начальная высота перигея h_{pi} , км	[140, 180]
Начальная высота апогея h_{oi} , км	[160, 1000]
Площадь поперечного сечения КА A_{SC} , м ²	0.1
Удлинение КА λ_{SC}	[2, 8]
Тяговый к.п.д. ВЭРД η_T	0.8
Эффективность забора газа η_c	0.333
Коэффициент компрессии газа в ИК k_c	145
Скорость истечения реактивной струи c , км/с	[80, 140]
Коэффициент аэродинамического сопротивления КА при нулевом угле атаки c_{x_0}	2.2
Минимально допустимая концентрация молекул газа в ИК n_{min} , м ⁻³	10^{18}
Скоростное соотношение частиц в набегающем потоке S_∞	10
Максимально допустимый угол атаки $ \alpha_{max} $, град	20

**Рис. 5.** Пример изменения невязки Δr по итерациям процедуры поиска оптимального угла атаки по рекуррентной формуле (23).

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На основании разработанной методики проведены численные исследования для параметров ВЭРД, КА и орбит, приведенных в табл. 3.

Сделаны следующие допущения:

1. КА движется по солнечно-синхронной орбите (ССО) в плоскости терминатора.
2. Площадь входного отверстия ВЗ при $\alpha = 0$ равна площади поперечного сечения КА $A_{in} = A_{SC}$.
3. $A_{pn} = A_{pp}$.
4. Ограничение на угловую скорость разворота КА относительно центра масс отсутствует.

Оптимальные программы изменения угла атаки КА и тяги ВЭРД на орбитах с начальной высотой перигея $h_{pi} = 160$ км в зависимости от начальной высоты апогея h_{oi} и истинной аномалии ϑ приведены на рис. 6, 7. На рис. 6 участки опти-

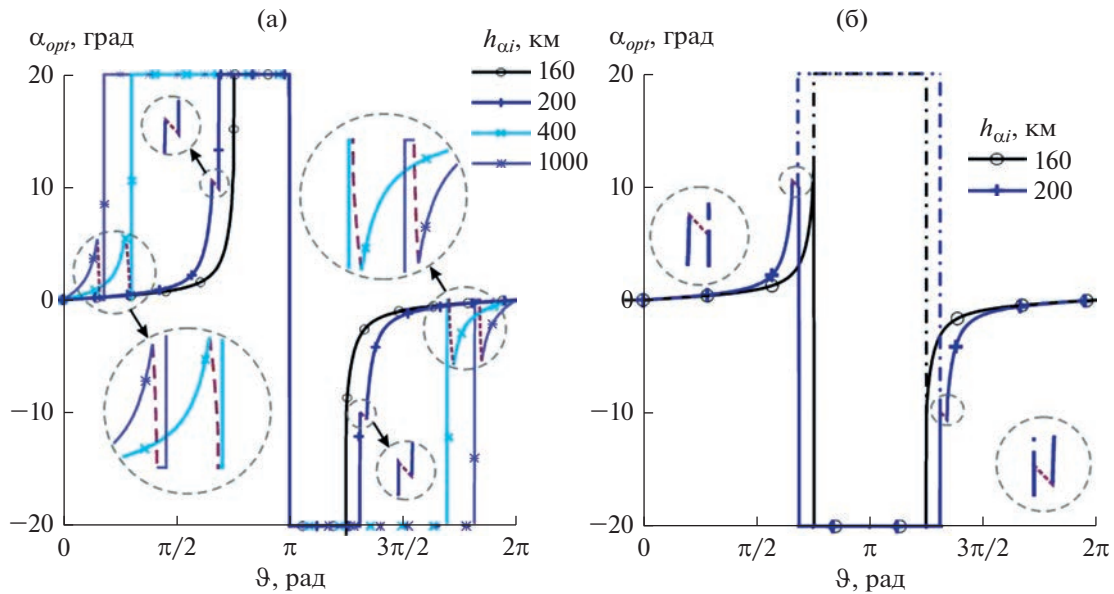


Рис. 6. Оптимальные программы изменения α_{opt} на орбитах с начальными $h_{\pi i} = 160$ км и $h_{\alpha i} \in [160, 1000]$ км в зависимости от истинной аномалии ϑ ; штриховыми линиями показаны участки, соответствующие граничной концентрации $n_{IC} = n_{min}$ (а); варианты $\alpha_{opt}(\vartheta)$ при реализации $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$ (сплошные линии) и $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$ (штрихпунктирные линии) на участках движения по границе ограничения (8) (б).

мальной программы управления углом атаки при работе ВЭРД с минимально допустимой концентрацией газов в ИК (на границе ограничения (7)) показаны пунктирными линиями. На круговой орбите (начальная высота орбиты $h_{orbi} = 160$ км) концентрация газов в ИК не снижается до минимально допустимой, и участок, соответствующий движению по границе ограничения (7), отсутствует. Функция ΔH_{10} (табл. 1) — четная, т.е. $\Delta H(\alpha_{opt} = \alpha_{max}, \zeta = 0) = \Delta H(\alpha_{opt} = -\alpha_{max}, \zeta = 0)$ в соответствии с выражениями (2), (4)–(6), (15), (18), (20), (22). Поэтому выбор $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$ при $\vartheta \leq \pi$ и $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$ при $\vartheta > \pi$ на рис. 6а обусловлен минимизацией скачкообразного изменения угла атаки в более плотных слоях атмосферы. В этом случае максимальное изменение угла атаки (переключение с $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$ на $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$) происходит в апогее орбиты. В то же время на круговых и слабо эллиптических орбитах это обстоятельство несущественно. С точки зрения минимизации количества резких изменений α_{opt} возможные варианты зависимостей $\alpha_{opt}(\vartheta)$ для исходных круговой орбиты с $h_{orbi} = 160$ км и орбиты с $h_{\pi i} = 160$ км и $h_{\alpha i} = 200$ км показаны на рис. 6б: с реализацией $\alpha_{opt} = -\alpha_{max}$ (сплошные линии) и $\alpha_{opt} = \alpha_{max}$ (пунктирные линии) на участках движения по границе ограничения на угол атаки (8).

На рис. 7 пунктирными линиями показаны участки работы ВЭРД при минимально допустимой концентрации в ИК (на границе ограниче-

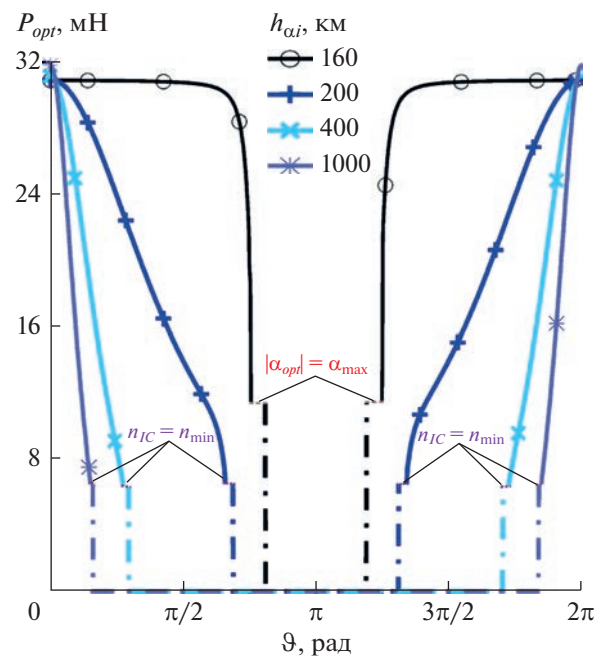


Рис. 7. Оптимальные программы тяги ВЭРД P_{opt} на орбитах с начальными $h_{\pi i} = 160$ км и $h_{\alpha i} \in [160, 1000]$ км в зависимости от истинной аномалии ϑ ; пунктирными линиями выделены участки, соответствующие граничной концентрации $n_{IC} = n_{min}$, штриховыми линиями — участки, соответствующие $|\alpha_{opt}| = \alpha_{max}$, штрихпунктирными линиями — участки с нулевой тягой.

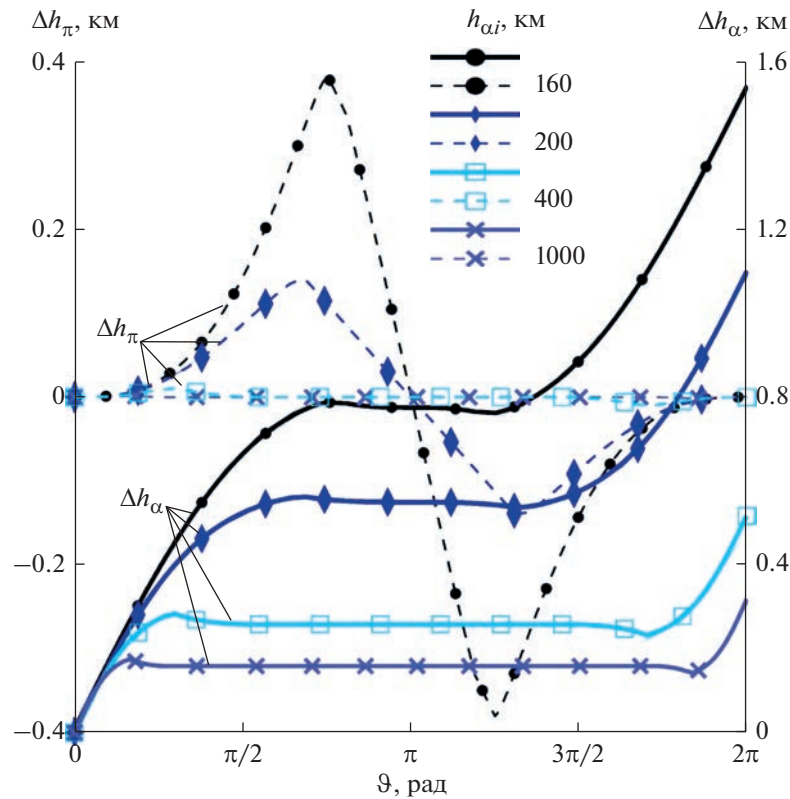


Рис. 8. Изменение высот апогея Δh_α (сплошные линии) и перигея Δh_π (штриховые линии) оскулирующих орбит при оптимальном управлении КА в зависимости от истинной аномалии ϑ с начальными $h_{\pi i} = 160$ км, $h_{\alpha i} \in [160, 1000]$ км.

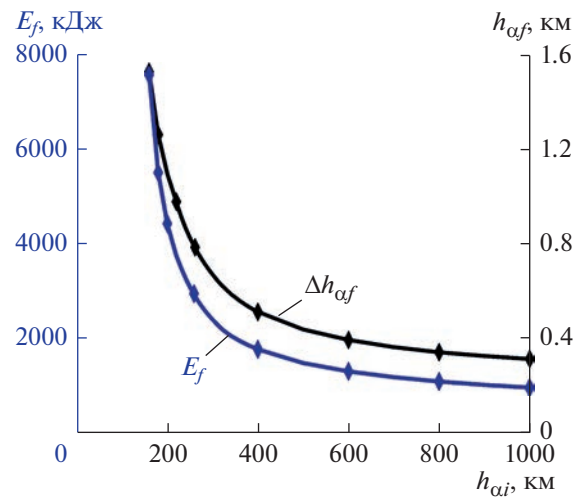


Рис. 9. Максимально возможное увеличение высоты апогея $\Delta h_{\alpha f}$ и потребляемая ВЭРД энергия E_f за один виток орбиты с начальной высотой перигея $h_{\pi i} = 160$ км в зависимости от начальной высоты апогея $h_{\alpha i}$.

ния (7)), штрихпунктирные линии соответствуют участкам пассивного полета КА (с нулевой тягой). Отключается ($\zeta = 0$) и включается ($\zeta = 1$) тяга в соответствии с условиями оптимальности (21). На круговой орбите, где концентрация газов в ИК не снижается до минимальной, штриховой линией

указана тяга, реализующаяся при максимальном угле атаки.

На рис. 8 в зависимости от истинной аномалии ϑ показано оптимальное изменение высоты перигея Δh_π (пунктирные линии) и апогея Δh_α

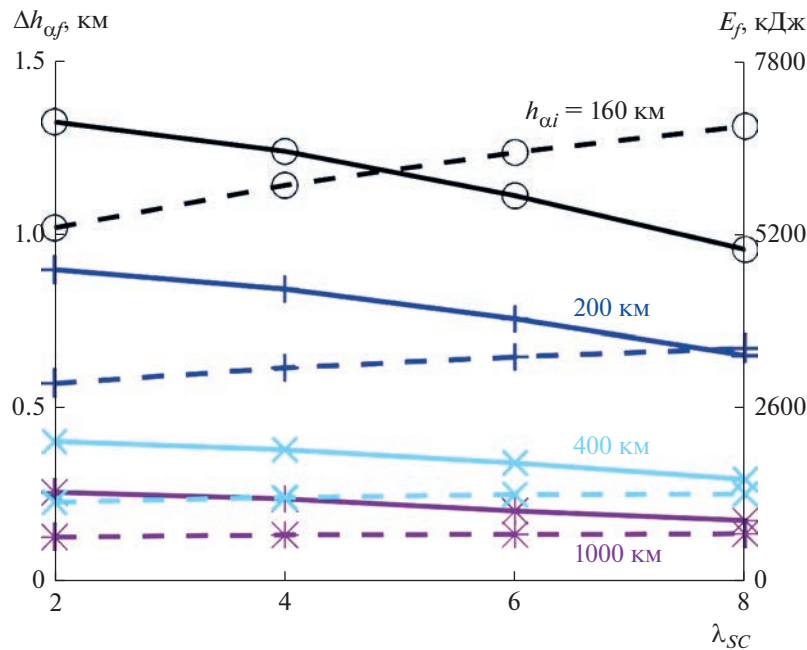


Рис. 10. Максимальное изменение высоты апогея $\Delta h_{\alpha f}$ (сплошные линии) и потребляемая ВЭРД энергия E_f (штриховые линии) за один виток орбиты с начальной высотой перигея $h_{\pi i} = 160$ км в зависимости от начальной высоты апогея $h_{\alpha i}$ и удлинения КА λ_{SC} при $c = 100$ км/с.

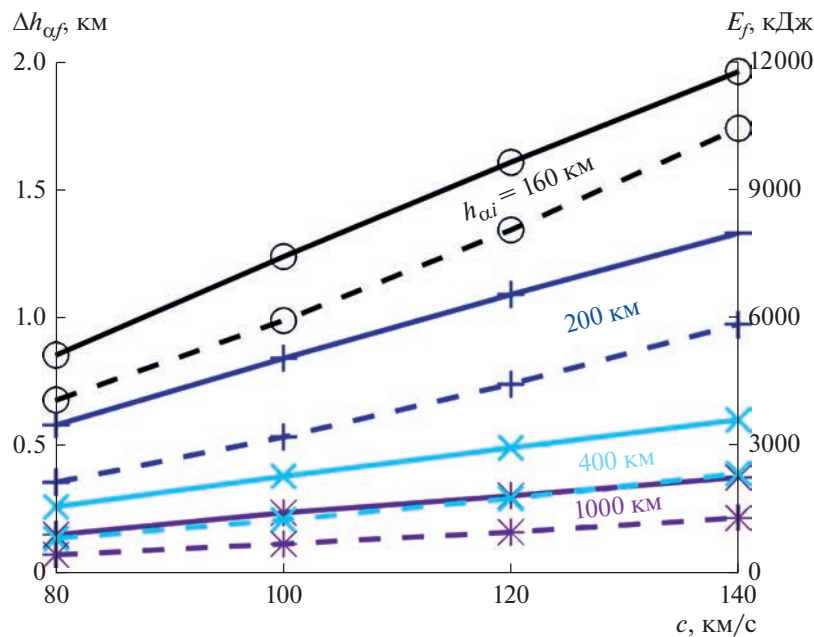


Рис. 11. Максимальное изменение высоты апогея $\Delta h_{\alpha f}$ (сплошные линии) и потребляемая ВЭРД энергия E_f (штриховые линии) за один виток орбиты с начальной высотой перигея $h_{\pi i} = 160$ км в зависимости от начальной высоты апогея $h_{\alpha i}$ и скорости истечения c при $\lambda_{SC} = 4$.

(сплошные линии) оскулирующих орбит при полете КА с ВЭРД с оптимальным управлением углом атаки и тягой (рис. 6, 7). Как следует из рис. 8, максимум изменения высоты апогея при оптимальном управлении достигается на круго-

вой орбите $h_{orb i} = 160$ км. Но и затраты энергии для работы ВЭРД на круговой орбите также максимальны (рис. 9). Поэтому в условиях ограниченной энергетики благодаря возможности накопления энергии на высотах, где аэродинамиче-

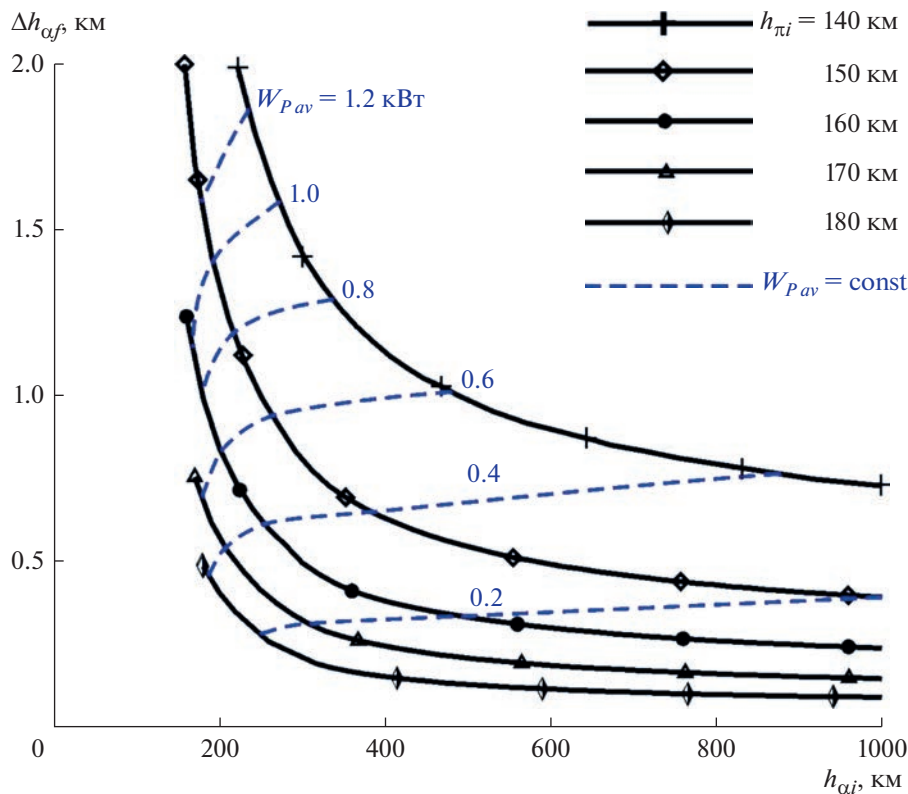


Рис. 12. Максимальное изменение высоты апогея $\Delta h_{\alpha f}$ за один виток орбиты в зависимости от начальных $h_{\pi i}$ и $h_{\alpha i}$; штриховыми показаны линии уровня средней за виток потребляемой ВЭРД мощности W_{Pav} при $c = 100$ км/с, $\lambda_{SC} = 4$.

ское сопротивление КА практически отсутствует, использование эллиптических орбит для обеспечения длительного существования КА с ВЭРД может оказаться предпочтительнее круговых.

Результаты численных исследований на рис. 6–9 получены для КА удлинением $\lambda_{SC} = 4$ с ВЭРД со скоростью истечения $c = 100$ км/с. Результаты исследования влияния этих параметров представлены на рис. 10, 11. Показаны относительные изменения высоты апогея $\Delta h_{\alpha f}$ (сплошные линии) и потребляемая ВЭРД энергия E_f (штриховые линии) за один виток орбитального полета с начальной высотой перигея $h_{\pi i} = 160$ км в зависимости от начальной высоты апогея $h_{\alpha i}$, $\lambda_{SC} \in [2, 8]$ (рис. 10) и скорости истечения $c \in [80, 140]$ км/с (рис. 11). Из рисунков следует, что влияние рассматриваемых параметров (λ_{SC} и c) снижается при увеличении эллиптичности орбит с начальными высотами перигея и апогея в рассматриваемом диапазоне.

На рис. 12 приведены оптимальные изменения высоты апогея за один виток орбиты $\Delta h_{\alpha f}$ в зависимости от начальной высоты перигея $h_{\pi i} \in [140, 180]$ км и апогея $h_{\alpha i} \in [140, 1000]$ км при постоянной скорости истечения $c = 100$ км/с и $\lambda_{SC} =$

$= 4$. На рис. 12 также показаны линии уровня усредненной мощности $W_{Pav} = E_f / T_{orb}$ за период обращения T_{orb} . Приведенные результаты исследований еще раз подтверждают, что для обеспечения длительного активного существования КА с ВЭРД использование эллиптических орбит с ультранизким перигеем может быть предпочтительнее за счет возможности накопления энергии на высотах, где аэродинамическое сопротивление КА пренебрежимо мало.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе применения принципа максимума Понтрягина для системы уравнений в оскулирующих переменных решена задача оптимизации управления вектором тяги ВЭРД для наискорейшего изменения высоты апогея орбиты КА с учетом зависимости тяги от угла атаки и концентрации газа в ионизационной камере.

Получены оценки эффективности разработанных оптимальных программ управления углом атаки и тягой ВЭРД в зависимости от начальных высот перигея и апогея, скорости истечения, параметров компоновки КА.

Показано, что использование эллиптических орбит в условиях ограниченной энергетики может

быть предпочтительнее благодаря возможности накопления энергии на высотах, где аэродинамическое сопротивление КА практически отсутствует.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 20-69-46034, Организация — МГУ имени М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1966.
2. Маров М.Я., Филатьев А.С. Комплексные исследования электрореактивных двигателей при полетах в ионосфере Земли: К 50-летию Государственной программы “Янтарь” // Косм. исслед. 2018. Т. 56. № 2. С. 137–144.
<https://doi.org/10.7868/S0023420618020061> (Cosmic Research. 2018. T. 56. № 2. P. 123–129).
<https://doi.org/10.7868/S0023420618020061>
3. Virgili J., Roberts P.C.E., Palmer K. et al. Very Low Earth Orbit mission concepts for Earth Observation: Benefits and challenges // Proc. 12th Reinventing Space Conf. London, UK. 2014. BIS-RS-2014-37.
4. Filatyev A.S., Golikov A.A., Nosachev L.V. et al. Spacecraft with air-breathing electric propulsion as the future ultra-speed aircraft // Proc. 71th Intern. Astronautical Congress. The CyberSpace Edition. 1–5 Oct. 2020. IAC-20-C4.6.8.
5. Dolgich A. Soviet Studies on Low-Thrust Orbital Propellant-Scooping Systems // Foreign Sciebee Bull. 1969. V. 5. № 7. P. 1–9.
6. Цой Э.П. Выбор оптимальной программы управления тягой накопителя рабочего вещества в нестационарном режиме // Тр. ЦАГИ. 1968. Вып. 1145.
7. Шумилкин В.Г. Управление тягой орбитального аппарата с двигателем ограниченной мощности при полете с накоплением атмосферного воздуха // Ученые записки ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 2. С. 81–87.
8. Romano F. et al. System Analysis and Test-Bed for an Atmosphere-Breathing Electric Propulsion System Using an Inductive Plasma Thruster // Proc. 68th Intern. Astronautical Congress. Adelaide, Australia, 25–29 Sept. 2017. IAC-17-C4.6.5.
9. Rock B.St., Blandino J.J., Demetriou M.A. Propulsion Requirements for Drag-Free Operation of Spacecraft in Low Earth Orbit // J. Spacecraft and Rockets. 2006. V. 43. № 3. P. 594–606.
<https://doi.org/10.2514/1.15819>
10. Marchetti P., Blandino J.J., Demetriou M.A. Electric Propulsion and Controller Design for Drag-Free Spacecraft Operation // J. Spacecraft and Rockets. 2008. V. 45. № 6. P. 1303–1315.
<https://doi.org/10.2514/1.36307>
11. Becedas J., González G., Domínguez R.M. et al. Aerodynamic Technologies for Earth Observation Missions in Very Low earth Orbit. A: Reinventing Space Conference // Proc. 16th Reinventing Space Conf. (RISpace). London, UK, 30 Oct. – 1 Nov. 2018. P. 1–10.
12. Filatyev A.S., Erofeev A.I., Yanova O.V. et al. Physical Grounds and Control Optimization of Low-Orbit Spacecraft with Electric Ramjet // Proc. 68th Intern. Astronautical Congress. Adelaide, Australia, 25–29 Sept. 2017. IAC-17-C4.1P.51.
13. Barral S., Cifali G., Albertoni R. et al. Conceptual Design of an Air-Breathing Electric Propulsion System // Proc. 34th Intern. Electric Propulsion Conf. Kobe, Japan, 4–10 July 2015. IEPC-2015-271.
14. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе П.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
15. Filatyev A.S., Yanova O.V. On the optimal use of electric ramjet for low-orbit spacecraft // Procedia Engineering. 2017. V. 185. P. 173–181.
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.03.299>
16. Filatyev A.S., Erofeev A.I., Nikiforov A.P. et al. Comparative evaluation of the applicability of electrical ramjets // Proc. 58th Israel Annual Conf. Aerospace Science. WeLIT4.3. Tel-Aviv, Haifa, Israel, 14–15 Mar. 2018. P. 503–519. <http://toc.proceedings.com/37020webtoc.pdf>.
17. Filatyev A.S., Yanova O.V. The control optimization of low-orbit spacecraft with electric ramjet // Acta Astronautica. 2019. V. 158. P. 23–31.
18. Yanova O.V., Filatyev A.S. Synthesis of the optimal control of spacecraft with air-breathing electric propulsion in orbits with ultra-low perigee in view of dependence of the engine efficiency on angle of attack // Proc. 71th Intern. Astronautical Congress. The CyberSpace Edition. 1–5 Oct. 2020. IAC-20-C1.5.1.
19. Ерофеев А.И., Никифоров А.П., Плугин В.В. Экспериментальные исследования воздухозаборника в свободномолекулярном потоке газа // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. 48. № 3. С. 56–69.
20. Ерофеев А.И., Никифоров А.П., Плугин В.В. Моделирование процессов в воздухозаборнике для низкоорбитальных космических аппаратов в вакуумной аэродинамической трубе // Актуальные вопросы проектирования автомат. космич. аппаратов для фундам. и прикладных науч. исслед.: сб. тр. конф. Вып. 2. Химки: Изд-во “НПО им. С.А. Лавочкина”. 2017. С. 365–374.
21. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.
22. Мурер С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение. М.: Резолит, 2007.
23. Fearn D.G. Ion thruster thrust vectoring requirements and techniques // 27th Intern. Electric Propulsion Conf. Pasadena, CA. 15–19 Oct. 2001. IEPC-01-115.
24. Munoz V., González D., Becedas J. et al. Attitude control for satellites flying in VLEO using aerodynamic surfaces // J. British Interplanetary Society. 2020. V. 73. № 3. P. 103–112.
25. Prieto D.M., Graziano B.P., Roberts P.C.E. Spacecraft drag modelling // Progress in Aerospace Sciences. 2014. V. 64. P. 56–65.
<https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2013.09.001>

26. *Livadiotti S., Crisp N.H., Robert P.C.E. et al.* A review of gas-surface interaction models for orbital aerodynamics applications // *Progress in Aerospace Sciences*. 2020. V. 119. Art. № 100675. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2020.100675>
27. *Mehta P.M., Walker A., McLaughlin C.A., Koller J.* Comparing Physical Drag Coefficients Computed Using Different Gas-Surface Interaction Models // *J. Spacecraft and Rockets*. 2014. V. 51. № 3. P. 873–883. <https://doi.org/10.2514/1.A32566>
28. *Koppenwallner G.* Satellite Aerodynamics and Determination of Thermospheric Density and Wind // *AIP Conf. Proc.* 2011. V. 1333. P. 1307–1312. <https://doi.org/10.1063/1.3562824>
29. *Moe K., Moe M.M.* Gas-surface interactions and satellite drag coefficients // *Planetary and Space Science*. 2005. V. 53. P. 793–801. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2005.03.005>
30. *Koppenwallner G.* Comment on special section: new perspectives on the satellite drag environments of Earth, Mars, and Venus // *J. Spacecraft and Rockets*. 2008. V. 45. № 6. P. 1324–1327. <https://doi.org/10.2514/1.37539>
31. *Sutton E.K.* Normalized Force Coefficients for Satellites with Elongated Shapes // *J. Spacecraft and Rockets*. 2009. V. 46. № 1. P. 112–116. <https://doi.org/10.2514/1.40940>
32. *Doornbos E.* Thermospheric Density and Wind Determination from Satellite Dynamics. Book Ser.: Springer Theses. 2012. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-25129-0>
33. *Golikov A.A., Filatyev A.S.* Integrated optimization of trajectories and layout parameters of spacecraft with air-breathing electric propulsion // *Acta Astronautica*. 2022. V. 193. P. 644–652. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.06.052>